Kvantni algebrajski učinki

Strah

19. februar 2022

Povzetek

test

1 Kvantno računalništvo ter algebrajski učinki in diagrami

1.1 Kvantna mehanika

V tem delu bomo uporabljali naslednje oznake:

- $\mathbb{N} = \{0, \dots\}, \mathbb{N}_+ = \{1, \dots\}$,
- $n \in \mathbb{N}_+$, ki mu bomo pravili število kubitov,
- $j, k, \dots \in \{0, \dots, 2^n\}$,
- $j = j_1 \dots j_n$ binarni zapis števila j.

1.1.1 Kvantni vektorji

Definicija 1. *Binarni vektorji so elementi prostora $\mathbf{B}_n \coloneqq 2^n$ in jih pišemo kot nize v binarnem zapisu.*

Primer. $\mathbf{B}_2 = \{00, 01, 10, 11\}$.

Definicija 2. *Elementom prostora $\mathbf{H}_n \coloneqq \mathbb{C}^{2^n}$ pravimo kvantni vektorji, elementom $\mathbf{H} \coloneqq \mathbf{H}_1$ pa kubiti. Prostoru $\mathbf{H}_n$ pravimo prostor kvantnih vektorjev reda n, njegovo standardno bazo pa označimo z $\{e_j\}$.*

Definicija 3. *Naj bo $j \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, ter $\hat{\jmath} \in \mathbf{B}_n$ pripadajoč vektor v binarnem zapisu. Potem je $|j\rangle = |\hat{\jmath}\rangle \coloneqq e_j$.*

Opomba. *Po definiciji je torej $\mathbf{H}_n = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\{|j\rangle \mid j \in \mathbf{B}_n\})$.*

Primer $(n = 1)$**.**

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = a_0 \,|0\rangle + a_1 \,|1\rangle = a_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Primer ($n = 2$)**.**

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{10} \\ a_{11} \end{bmatrix} = a_{00} |00\rangle + a_{01} |01\rangle + a_{10} |10\rangle + a_{11} |11\rangle .$$

Primer.

$$\mathbf{h} := \rho (|0\rangle + |1\rangle) , \quad \mathbf{h}_n := \rho^n \sum_{j \in \mathbf{B}_n} |j\rangle , \quad \rho := \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

1.1.2 Tenzorski produkt

Definicija 4 (Tenzorski produkt)**.** *Tenzorski produkt prostorov $\mathbf{H}_n$ in $\mathbf{H}_m$ je enak $\mathbf{H}_{n+m}$. Pišemo $\mathbf{H}_n \otimes \mathbf{H}_m$. Če sta $a \in \mathbf{H}_n$ in $b \in \mathbf{H}_m$ je $a \otimes b \in \mathbf{H}_n \otimes \mathbf{H}_m$.*

Opomba. *Operator $\otimes$ je res tenzorski produkt.*

Primer ($n = m = 1$)**.**

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 b_0 \\ a_0 b_1 \\ a_1 b_0 \\ a_1 b_1 \end{bmatrix} .$$

Primer.

$$|j\rangle \otimes |k\rangle = |j\#k\rangle =: |jk\rangle , \quad a \otimes b = \sum_{\substack{j \in \mathbf{B}_n, \\ k \in \mathbf{B}_m}} a_j b_k |jk\rangle .$$

Primer.

$$\mathbf{h}_n = \mathbf{h}^{\otimes n} = \rho^n \underbrace{(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \cdots \otimes (|0\rangle + |1\rangle)}_{n} .$$

Primer.

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{H}^{\otimes n} .$$

Definicija 5. *Če lahko $a \in \mathbf{H}_n$ zapišemo kot $\bigotimes_{j=1}^n a_j; a_j \in \mathbf{H}$ pravimo, da je enostaven ali separabilen, sicer je pa sestavljen oziroma kvantno prepleten.*

Definicija 6. *Unitarna vrata reda n so unitarna matrika dimenzije 2^n. Tenzorski produkt vrat $U \otimes V = [u_{jk} V]_{j,k}$ uporabljen na $a \otimes b$ je enak $Ua \otimes Vb$.*

Primer.

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} \otimes B = \begin{bmatrix} a_{00} B & a_{01} B \\ a_{10} B & a_{11} B \end{bmatrix} .$$

Definicija 7. *Za vrata $U_0, \dots, U_n$ označimo njihovo bločno-diagnoalno matriko z $D(U_0, \dots, U_n)$.*

Izrek 1 (No cloning)**.** *Ne obstaja unitarna matrika (vrata reda 2), ki vsak vektor $a \otimes |0\rangle \in \mathbf{H} \otimes \mathbf{H}$ slika v $a \otimes a$.*

Dokaz. Naj bo U tak, da $\forall a \in \mathbf{H}$ velja $U(a \otimes |0\rangle) = a \otimes a$. Potem za $\mathbf{h} \otimes |0\rangle = \rho(|00\rangle + |10\rangle)$ velja, da je $U(\rho(|00\rangle + |10\rangle)) = \rho^2(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$, oziroma $U|00\rangle + U|10\rangle = \rho(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$ ∎