1 Aussagenlogik

1.1 Signatur Σ

Eine (aussagenlogische) *Signatur* ist eine abzählbare Menge Σ von Symbolen, etwa

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{P_0, \dots, P_n\} \\ \text{oder } \Sigma &= \{P_0, P_1, \dots\} \end{aligned}$$

Die Elemente von Σ heißen auch *atomare Aussagen*, *Atome* oder *Aussagevariablen.*

1.2 Formeln $For0_\Sigma$

$For0_\Sigma$ ist die Menge der *Formeln* über Σ induktiv definiert durch

$$1 \in For0_\Sigma, 0 \in For0_\Sigma, \Sigma \subseteq For0_\Sigma$$

Wenn $A, B \in For0_\Sigma$, dann sind auch

$$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$$

Elemente von $For0_\Sigma$

1.3 Interpretation I

Es sei Σ eine aussagenlogische Signatur. Eine *Interpretation* über Σ ist eine beliebige Abbildung

$$I : \Sigma \rightarrow \{W, F\}$$

1.4 Auswertung val_I

Zu jeder Interpretation I über Σ wird eine zugehörige *Auswertung* der Formeln über Σ definiert

$$val_I : For0_\Sigma \rightarrow W, F$$

mit:

$$\begin{aligned} val_I(1) &= W \\ val_I(0) &= F \\ val_I(P) &= I(P) \qquad \text{für jedes } P \in \Sigma \\ val_I(\neg A) &= \begin{cases} F \text{ falls} & val_I(A) = W \\ W \text{ falls} & val_I(A) = F \end{cases} \end{aligned}$$

1.5 Logische Grundbegriffe

Modell Ein *Modell* einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.

(Eine Belegung I der Aussagenvariablen die die Formel A wahr macht ist ein Modell.)

Modell - Formelmenge Zu einer *Formelmenge* $M \subseteq For0_\Sigma$ ist ein Modell von M eine Interpretation I, welche Modell von jedem $A \in M$ ist.

(Ein Modell - mit einer Interpretation I - einer Formelmenge ist für jede Formel in der Menge ein Modell.)

Allgemeingültigkeit $A \in For0_\Sigma$ heißt *allgemeingültig* gdw. $val_I(A) = W$ für jede Interpretation I über Σ.

(Eine Formel ist allgemeinültig wenn sie unter jeder Interpretation wahr ist.)

Erfülbar $A \in For0_\Sigma$ heißt *erfüllbar* gdw. es gibt eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.

(Eine Formel ist erfüllbar wenn sie unter einer Interpretation wahr ist.)

Folgerung $\models$ Sei Σ eine Signatur, $M \subseteq For0_\Sigma, A \in For0_\Sigma$
$M \models A$ lies: *aus M folgt A* gdw. Jedes Modell von M ist auch Modell von A.

(Jede Interpretation von M ist auch eine Interpretation von A)

Logische Äquivalenz $A, B \in For0_\Sigma$ heißen *logisch äquivalent* gdw.

$$\{A\} \models_\Sigma B \text{ und } \{B\} \models_\Sigma A$$

1.6 Shannon-Formeln

1.7 Horn-Formeln

Eine aussagenlogische Formel A ist eine *Horn-Formel*, wenn

- A in KNF ist
- jede Disjunktion in A höchstens ein positives Literal enthält

Alternative Schreibweisen:

$$\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n \vee A \equiv P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \to A$$
$$\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n \equiv P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \to 0$$

Bezeichnungen: $\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n$: *Rumpf*, A: *Kopf* (bei leerem Rumpf: *Fakt*)

Erfüllbarkeit Für Horn-Formeln ist die Erfüllbarkeit in $O(n^2)$ entscheidbar.

1.8 Davis-Putnam-Logemann-Loveland (DPLL) Verfahren

Wichtigstes Verfahren zur Entscheidung des allgemeinen Erfüllbarkeitsproblems (SAT-Problem). Eingabe in KNF. Worst case complexity $O(2^n)$.

1.9 Schreibweisen

$\Box$ für die leere Klausel
$\emptyset$ für die leere Klauselmenge
Es gilt: $I(\emptyset) = W$
Es gilt: $I(\Box) = F$

2 Prädikatenlogik erster Stufe

2.1 Logische Zeichen

Wie in der Aussagenlogik: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, (,)$

Neu:

$\forall$	Allquantor
$\exists$	Existenzquantor
v_i	Individuenvariablen, $i \in \mathbb{N}$
$\doteq$	objektsprachliches Gleichheitssymbol
,	Komma

Mit *Var* bezeichnet man die zur Verfügung stehenden Variablen.

2.2 Signatur

Eine *Signatur* ist ein Tripel $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma)$ mit:

- F_Σ, P_Σ sind endliche oder abzählbar unendliche Mengen
- F_Σ, P_Σ und die Menge der Sondersymbole sind paarweise disjunkt
- $\alpha_\Sigma : F_\Sigma \cup P_\Sigma \rightarrow \mathbb{N}$.

$f \in F_\Sigma$ heißt *Funktionssymbol*, $p \in P_\Sigma$ heißt *Prädikatssymbol*.
f ist *n-stelliges Funktionssymbol*, wenn $\alpha_\Sigma(f) = n$;
p ist *n-stelliges Prädikatssymbol*, wenn $\alpha_\Sigma(p) = n$;
Ein nullstelliges Funktionssymbol heißt auch *Konstantensymbol* oder kurz *Konstante*,
ein nullsteliges Prädikatssymbol ist ein *aussagenlogisches Atom*.

2.3 Terme

$Term_\Sigma$, die Menge der *Terme über* Σ, ist induktiv definiert durch

1. $Var \subseteq Term_\Sigma$
2. Mit $f \in F_\Sigma$,
   $\alpha_\Sigma(f) = n$,
   $t_1, \cdots, t_n \in Term_\Sigma$
   ist auch $f(t_1, \cdots, t_n) \in Term_\Sigma$

Ein Term heißt *Grundterm*, wenn er keine Variablen enthält.

2.4 Formeln

At_Σ ist die Menge der *atomaren Formeln* über Σ:

$$\begin{aligned} At_\Sigma := &\{s \doteq t | s, t \in Term_\Sigma\} \cup \\ &\{p(t_1, \cdots t_n) | p \in P_\Sigma, \alpha_\Sigma(p) = n, t_i \in Term_\Sigma\} \end{aligned}$$

For_Σ, die Menge der *Formeln über* Σ, ist induktiv definiert durch

1. $1, 0 \cup At_\Sigma \subseteq For_\Sigma$
2. Mit $x \in Var$ und $A, B \in For_\Sigma$ sind ebenfalls in For_Σ:

$$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B), \forall x A, \exists x A$$

Substitution Eine *Substitution* ist eine Abbildung

$$\sigma : Var \rightarrow Term_\Sigma$$

mit $\sigma(x) = x$ für fast alle $x \in Var$.
σ heißt *Grundsubstitution*, wenn für alle x mit $\sigma(x) \neq x$ der Funktionswert $\sigma(x)$ ein Grundterm ist.

kollisionsfreie Substitution Eine Substitution σ heißt *kollisionsfrei* für eine Formel A, wenn für jede Variable z und jede Stelle freien Auftretens von z in A gilt:
Diese Stelle liegt nicht im Wirkungsbereich eines Präfixes $\forall x$ oder $\exists x$, wo x eine Variable in $\sigma(z)$ ist.

$$\mu_1 = \{x/y\} \text{ist nicht kollisionsfrei für } \forall y p(x, y)$$

2.5 Interpretation

Es sei Σ eine Signatur der PL1.
Eine *Interpretation* D von Σ ist ein Paar (D, I) mit

1. D ist eine beliebige, nichtleere Menge
2. I ist eine Abbildung der Signatursymbole, die
   - jeder Konstanten c ein Elemente $I(c) \in D$
   - für $n \geq 1$: jedem n-stelligen Funktionssymbol f eine Funktion $I(f) : D^n \to D$
   - jedem 0-stelligen Prädikatssymbol P ein Wahrheitswert $I(P) \in \{W, F\}$
   - für $n \geq 1$: jedem n-stelligen Prädikatssymbol p eine n-stellige Relation $I(p) \subseteq D^n$ zuordnet.

2.6 Variablenbelegung

Es sei (D, I) eine Interpretation von Σ.
Eine *Variablenbelegung* (oder kurz *Belegung* über D) ist eine Funktion

$$\beta : Var \to D.$$

Zu $\beta, x \in Var$ und $d \in D$ definieren wir die *Modifikation* von β and der Stelle x zu d:

$$\beta_x^d(y) = \begin{cases} d & \text{falls } y = x \\ \beta(y) & \text{falls } y \neq x \end{cases}$$

2.7 Auswertung

Auswertung von Termen Sei (D, I) Interpretation von Σ, β Variablenbelegung über D. Wir definieren eine Funktion $val_{D,I,\beta}$, mit

$$val_{D,I,\beta}(t) \in D \text{ für } t \in Term_\Sigma$$
$$val_{D,I,\beta}(A) \in \{W, F\} \text{ für } A \in For_\Sigma$$

Auswertung von Formeln

$$
\begin{aligned}
val_{D,I,\beta}(1) &= W \\
val_{D,I,\beta}(0) &= F \\
val_{D,I,\beta}(s \doteq t) &:= \begin{cases} W & \text{falls } val_{D,I,\beta}(s) = val_{D,I,\beta}(t) \\ F & \text{sonst} \end{cases} \\
val_{D,I,\beta}(P) &:= I(P) \text{ für 0-stellige Prädikate } P \\
val_{D,I,\beta}(p(t_1, \cdots t_n)) &:= \begin{cases} W & \text{falls } (val_{D,I,\beta}(t_1), \cdots, val_{D,I,\beta}(t_n)) \in I(p) \\ F & \text{sonst} \end{cases} \\
val_{D,I,\beta}(X) &\text{ für } X \in \{\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \to B, A \leftrightarrow B\} \text{ wie in der Aussagenlogik.} \\
val_{D,I,\beta}(\forall x A) &:= \begin{cases} W & \text{falls für alle } d \in D : val_{D,I,\beta_x^d}(A) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases} \\
val_{D,I,\beta}(\exists x A) &:= \begin{cases} W & \text{falls ein } d \in D \text{ existiert mit } val_{D,I,\beta_x^d}(A) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

2.8 Unifikation

Es sei $T \subseteq Term_\Sigma, T \neq \{\}$, und σ eine Substitution über Σ.
σ *unifiziert* T, oder:
σ ist *Unifikator von* T, genau dann, wenn $\#\sigma(T) = 1$.
T heißt *unifizierbar*, wenn T einen Unifikator besitzt.
Insbesondere sagen wir für zwei Terme s, t dass s *unifizierbar* sei *mit* t, wenn $\sigma(t) = \sigma(s)$.

Allgemeinster Unifikator Es sei $T \subseteq Term_\Sigma$.
Ein *allgemeinster Unifikator* oder mgu (*most general unifier*) von T ist eine Substitution μ mit

1. μ unifiziert T
2. Zu jedem Unifikator σ von T gibt es eine Substitution σ' mit $\sigma = \sigma' \circ \mu$.