Оглавление

1. Определение высказывания, функции истинности, логического значения, отрицания высказывания

Под высказыванием понимается такое предложение, которое либо истинно, либо ложно. Высказывание не может быть одновременно и истинным, и ложным.

Обозначив истинное высказывание символом 1, а ложное – 0, введем функцию λ, заданную на совокупности всех высказываний и принимающую значения в двухэлементном множестве $\{0,1\}$ по следующему правилу:

$$\lambda(P) = \begin{cases} 1, \text{if P true} \\ 0, \text{if P false} \end{cases}$$

Функция λ называется функцией истинности.

Значение $\lambda(P)$ называется логическим значением или значением истинности высказывания P.

Отрицанием высказывания P называется новое высказывание, обозначаемое $\neg P$, которое истинно, если высказывание P ложно, и ложно, если высказывание P истинно. Другими словами, логическое значение высказывания $\neg P$ связано с логическим значением высказывания P, как указано в следующей таблице, называемой таблицей истинности операции отрицания:

$\lambda(P)$	$\lambda(\neg P)$
0	1
1	0

2. Конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность двух высказываний

Конъюнкцией двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \land Q$ или $P \& Q$, которое истинно лишь в единственном случае, когда истинны оба исходных высказывания P и Q, и ложно во всех остальных случаях. Другими словами, логическое значение высказывания $P \land Q$ связано с логическими значениями высказываний P и Q, как указано в следующей таблице, называемой таблицей истинности операции конъюнкции:

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \land Q)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкцией двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \lor Q$, которое истинно в тех случаях, когда хотя бы одно из высказываний P или Q истинно, и ложно в единственном случае, когда оба высказывания P и Q ложны. Другими словами, $P \lor Q$ – такое высказывание, логическое значение которого связано с логическими значениями исходных высказываний P и Q так, как указано в следующей таблице, называемой таблицей истинности операции дизъюнкции:

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \lor Q)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликацией двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \to Q$, которое ложно в единственном случае, когда высказывание P истинно, а Q – ложно, а во всех остальных случаях – истинно. Другими словами, логическое значение высказывания $P \to Q$ связано с логическими значениями высказываний P и Q, как указано в следующей таблице, называемой таблицей истинности операции импликации:

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \to Q)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Эквивалентностью двух высказываний P и Q называется новое высказывание, обозначаемое $P \leftrightarrow Q$, которое истинно в том и только в том случае, когда одновременно оба высказывания P и Q либо истинны, либо ложны, а во всех остальных случаях – ложно. Другими словами, логическое значение высказывания $P \leftrightarrow Q$, связано с логическими значениями высказываний P и Q, как указано в следующей таблице, называемой таблицей истинности операции эквивалентности:

$\lambda(P)$	$\lambda(Q)$	$\lambda(P \leftrightarrow Q)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. Формула алгебры высказываний, логическое значение составного высказывания

Определение формулы алгебры высказываний:

1. Каждая отдельно взятая пропозициональная переменная есть формула алгебры высказываний.
2. Если F_1 и F_2 – формулы алгебры высказываний, то выражения $\neg F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются формулами алгебры высказываний.
3. Никаких других формул алгебры высказываний, кроме получающихся согласно пунктам 1 и 2, нет.

Переменные, вместо которых можно подставлять высказывания, т.е. переменные, пробегающие множество высказываний, называют пропозициональными переменными, или высказывательными переменными, или переменными высказываниями.

Если в формулу алгебры высказываний $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вместо пропозициональных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ подставить конкретные высказывания $a_1, a_2, \dots, a_n$соответственно, то получится некоторое новое составное высказывание $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Оно называется конкретизацией формулы $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на выборе высказываний $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Теорема. Логическое значение составного высказывания $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ равно значению формулы $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на наборе $\lambda(a_1), \lambda(a_2), \dots, \lambda(a_n)$ логических значений составляющих высказываний $a_1, a_2, \dots, a_n$, т.е. $\lambda(F(a_1, a_2, \dots, a_n)) = F(\lambda(a_1), \lambda(a_2), \dots, \lambda(a_n))$.

Доказательство. Докажем утверждение методом полной математической индукции по числу символов логических операций, входящих в формулу $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Если формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ содержит 0 символов логических операций, то она представляет собой просто пропозициональную переменную, скажем, x_1, т.е. $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv x_1$. Тогда доказываемое соотношение сводится к тривиальному равенству: $\lambda(a_1) = \lambda(a_1)$.

Если формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ содержит лишь один символ логической операции, то она является одной из следующих формул: $\neg x_1$, $(x_1 \wedge x_2)$, $(x_1 \vee x_2)$, $(x_1 \to x_2)$, $(x_1 \leftrightarrow x_2)$. В этих случаях доказываемое равенство есть одно из равенств отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации или эквивалентности.

Предположим теперь, что утверждающееся в теореме равенство верно для всех формул алгебры высказываний, содержащих не более k символов логических операций. Докажем, что оно верно для формулы $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, содержащей $k+1$ символов логических операций. На основании определения формулы алгебры высказывания формула F имеет один из следующих видов: $\neg F_1$, $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \to F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$, где F_1 и F_2 — некоторые формулы, каждая из которых содержит уже не более k символов логических операций. Нужно провести доказательство для всех пяти случаев. Но в силу принципиальной идентичности этих доказательств проделаем его, например, для случая $F = F_1 \wedge F_2$. Вычисляем:

$$\lambda\big(F(a_1, a_2, \dots, a_n)\big) = \lambda\big(F_1(a_1, a_2, \dots, a_n)\big) \wedge \lambda\big(F_2(a_1, a_2, \dots, a_n)\big) =$$
$$F_1\big(\lambda(a_1), \lambda(a_2), \dots, \lambda(a_n)\big) \wedge\ F_2\big(\lambda(a_1), \lambda(a_2), \dots, \lambda(a_n)\big) = F\big(\lambda(a_1), \lambda(a_2), \dots, \lambda(a_n)\big)$$

Следовательно, утверждение теоремы верно для любой формулы.

4. Формула алгебры высказываний выполнимая, тавтология, опровержимая, тождественно ложная

Формула алгебры высказываний $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется выполнимой, если некоторая ее конкретизация является истинным высказыванием, т.е. существуют такие конкретные высказывания $a_1, a_2, \dots, a_n$, которые, будучи подставленными в эту формулу вместо переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ соответственно, превращают ее в истинное высказывание.

Формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется тавтологией, или тождественно истинной, если она превращается в истинное высказывание при всякой подстановке вместо переменных конкретных высказываний $a_1, a_2, \dots, a_n$, т.е. если $\lambda\big(F(a_1, a_2, \dots, a_n)\big) = 1$ для любых высказываний $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется опровержимой, если существуют такие конкретные высказывания $a_1, a_2, \dots, a_n$, которые превращают данную формулу в ложное высказывание $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$, т.е. $\lambda\big(F(a_1, a_2, \dots, a_n)\big) = 0$.

Формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется тождественно ложной, или противоречием, если $\lambda\big(F(a_1, a_2, \dots, a_n)\big) = 0$ для любых конкретных высказываний $a_1, a_2, \dots, a_n$.

5. Свойства конъюнкции и дизъюнкции

Теорема (Свойства конъюнкции и дизъюнкции).

a) Законы идемпотентности $(P \wedge P) \leftrightarrow P, (P \vee P) \leftrightarrow P$.

b) Законы упрощения $\vDash (P \wedge Q) \rightarrow P, \vDash P \rightarrow (P \vee Q)$.

c) Законы коммутативности $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P), (P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$.

d) Законы ассоциативности $\big(P \wedge (Q \wedge R)\big) \leftrightarrow \big((P \wedge Q) \wedge R\big), \vDash \big(P \vee (Q \vee R)\big) \wedge \big((P \vee Q) \vee R\big)$.

e) Законы дистрибутивности $\big(P \wedge (Q \vee R)\big) \leftrightarrow \big((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)\big), \big(P \vee (Q \wedge R)\big) \leftrightarrow \big((P \vee Q) \wedge (P \vee R)\big)$.

f) Законы поглощения $(P \wedge (P \vee Q)) \leftrightarrow P, (P \vee (P \wedge Q)) \leftrightarrow P$.

g) Законы де Моргана $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q), \neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$.

Доказательство. Докажем для примера, что первый закон де Моргана является тавтологией. Пусть A и B – произвольные конкретные высказывания. Рассмотрим два составных высказывания $\neg(A \wedge B)$ и $\neg A \vee \neg B$ получающиеся из частей данной эквивалентности при замене пропозициональных переменных P и Q конкретными высказываниями A и B соответственно. Предположим, во-первых, что высказывание $\neg(A \wedge B)$ истинно. Тогда конъюнкция $A \wedge B$ ложна, следовательно, по меньшей мере одно из высказываний A или B ложно. Но в таком случае хотя бы одно из высказываний $\neg A$ или $\neg B$ истинно, следовательно, их дизъюнкция $\neg A \vee \neg B$ истинна. Предположим, во-вторых, что высказывание $\neg(A \wedge B)$ ложно. Тогда конъюнкция $A \wedge B$ истинна. Следовательно, оба высказывания A и B истинны, а их отрицания $\neg A$ и $\neg B$ оба ложны, т.е. дизъюнкция $\neg A \vee \neg B$ ложна. Таким образом, для любых двух высказываний значения частей рассматриваемой эквивалентности совпадают. Следовательно, формула тождественно истинна.

6. Свойства импликации и эквивалентности

a) $\vDash \big(P \to (Q \to R)\big) \to \big((P \to Q) \to (P \to R)\big)$.
b) $\vDash P \to \big(Q \to (P \wedge Q)\big)$.
c) $\vDash (P \to R) \to \Big((Q \to R) \to \big((P \vee Q \to P)\big)\Big)$.
d) $\vDash (P \to Q) \to \big((P \to \neg Q) \to \neg P\big)$.
e) $\vDash \big(\neg Q \wedge (P \to Q)\big) \to \neg P$.
f) $\vDash \big(\neg P \wedge (P \vee Q)\big) \to Q$.
g) $\vDash (P \to Q) \to \big((P \vee R) \to (Q \vee R)\big)$.
h) $\vDash (P \to Q) \to \big((P \wedge R) \to (Q \wedge R)\big)$.
i) $\vDash (P \to Q) \to \big((Q \to R) \to (P \to R)\big)$.
j) $\vDash (P \to Q) \vee (Q \to P)$.
k) $\vDash (\neg Q \to \neg P) \to ((\neg Q \to P) \to Q)$.
l) $\big((P \to Q) \wedge (R \to Q)\big) \leftrightarrow \big((P \vee R) \to Q\big)$.
m) $\big((P \to Q) \wedge (P \to R)\big) \leftrightarrow \big(P \to (Q \wedge R)\big)$.
n) $P \leftrightarrow P$.
o) $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$.
p) $\big((P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)\big) \to (P \leftrightarrow R)$.

7. Правило заключения и правило подстановки

Теорема (правило заключения).

Если формулы F и $F \to H$ являются тавтологиями, то формула H также тавтология. Другими словами, из $\vDash F$ и $\vDash F \to H$ следует $\vDash H$.

Доказательство. Пусть $\vDash F(x_1, \dots, x_n)$ и $\vDash F(x_1, \dots, x_n) \to H(x_1, \dots, x_n)$. Предположим, что формула $H(x_1, \dots, x_n)$. не является тавтологией. Это означает, что существуют такие конкретные высказывания $a_1, \dots, a_n$, что $\lambda(H(a_1, \dots, a_n)) = 0$. Поскольку $F(x_1, \dots, x_n)$ – тавтология, то для $a_1, \dots, a_n$ имеем $\lambda(F(a_1, \dots, a_n)) = 1$. Вычисляем: $\lambda\big(F(a_1, \dots, a_n)\big) \to H(a_1, \dots, a_n) = F(a_1, \dots, a_n) \to H(x_1, \dots, x_n) = 1 \to 0 = 0$, что противоречит тождественной истинности формулы $F \to H$. Следовательно, предположение неверно. Тогда $\vDash H$, что и требовалось доказать.

Теорема (правило подстановки).

Если формула F, содержащая пропозициональную переменную X, является тавтологией, то подстановка в формулу F вместо переменной X любой формулы H снова приводит к тавтологии. Другими словами, из $\vDash F$ следует $\vDash S_x^H F$.

Доказательство. Так как $\vDash F(x, y, \dots)$, то формула $F(x, y, \dots)$ превращается в истинное высказывание при подстановке вместо всех пропозициональных переменных $x, y, \dots$ любых конкретных высказываний. Истинность получаемого высказывания не зависит от структуры подставляемых вместо $x, y, \dots$ высказываний. В частности, вместо x может быть подставлено высказывание, которое само является конкретизацией формулы $H(z_1, \dots, z_k)$ на некотором наборе конкретных высказываний. Но это и означает, что тавтологией будет формула $F(H(z_1, \dots, z_k), y, \dots)$, т.е. $\vDash S_x^H F$, что и требовалось доказать.

8. Формулы алгебры высказываний – равносильны (эквивалентны)

Формулы $F(x_1, \dots, x_n)$ и $H(x_1, \dots, x_n)$ алгебры высказываний называются равносильными (эквивалентными), если при любых значениях входящих в них пропозициональных переменных логические значения получающихся из формул F и H высказываний совпадают.

Теорема (признак равносильности формул).

Две формулы F и H алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда формула $F \leftrightarrow H$ является тавтологией:

$$F \equiv H \leftrightarrow \vDash F \leftrightarrow H$$

Доказательство. Если $F \equiv H$, то $\lambda\big(F(a_1, \dots, a_n)\big) = \lambda\big(H(a_1, \dots, a_n)\big)$ для любых высказываний $a_1, \dots, a_n$. Тогда, по определению операции эквивалентности, $\lambda\big(F(a_1, \dots, a_n)\big) \leftrightarrow \lambda\big(H(a_1, \dots, a_n)\big) = 1$, откуда заключаем, что $\lambda\big(F(a_1, \dots, a_n) \leftrightarrow H(a_1, \dots, a_n)\big) = 1$ для любых $a_1, \dots, a_n$. Последнее, по определению тавтологии, означает, что $\vDash F \leftrightarrow H$. Обратными рассуждениями доказывается утверждение: если $\vDash F \leftrightarrow H$,то $F \equiv H$. Теорема доказана.

9. Нормальные формы для формул алгебры высказываний, совершенные нормальные формулы

Для каждой формулы алгебры высказываний можно указать равносильную ей формулу, содержащую из логических связок лишь отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. Для этого нужно, выразить все имеющиеся в формуле импликации и эквивалентности через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. Выразить формулу через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию возможно не одним способом, а многими.

Дизъюнктивной нормальной формой называется дизъюнкция конъюнктивных одночленов, т.е. выражение вида $k_1 \vee k_2 \dots \vee k_p$, где все $k_i, i = 1,2, \dots, p$ являются конъюнктивными одночленами (не обязательно различными). Аналогично конъюнктивной нормальной формой называется конъюнкция дизъюнктивных одночленов $d_1 \wedge d_2 \dots \wedge d_q$, где все $d_j, j = 1,2, \dots, q$ являются дизъюнктивными одночленами (не обязательно различными).

ДНФ	$X \wedge \neg X \vee X \wedge Y \vee \neg Z$
КНФ	$(X \vee Y \vee \neg X) \wedge (\neg X \vee Z)$
СДНФ	$X \wedge Y \wedge \neg Z \vee X \wedge Y \wedge Z$
СКНФ	$(\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z)$

10. Конъюнктивный и дизъюнктивный одночлен от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$

Конъюнктивным одночленом от переменных $x_1, \dots, x_n$ называется конъюнкция этих переменных или их отрицаний. Здесь «или» употребляется в неисключающем смысле, т.е. в конъюнктивный одночлен может входить одновременно и переменная, и ее отрицание.

Дизъюнктивным одночленом от переменных $x_1, \dots, x_n$ называется дизъюнкция этих переменных или их отрицаний (и здесь союз «или» употребляется в неисключающем смысле).

Конъюнктивный одночлен	$X_3 \wedge X_1 \wedge \neg X_4 \wedge \neg X_1 \wedge \neg X_3 \wedge X_2$
Дизъюнктивный одночлен	$\neg X_2 \vee X_1 \vee \neg X_4 \vee \neg X_1 \vee X_4 \vee \neg X_2$

11. Совершенная дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма

Одночлен (конъюнктивный или дизъюнктивный) от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется совершенным, если в него от каждой пары x_i, $\neg x_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ входит только один представитель (x_i или $\neg x_i$). Нормальная форма (дизъюнктивная или конъюнктивная) от переменных $x_1, \ldots, x_n$ называется совершенной от этих переменных, если в нее входят лишь совершенные одночлены (конъюнктивные или дизъюнктивные соответственно) от $x_1, \ldots, x_n$.

СДО	$\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3$
СКО	$X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3 \wedge X_4$
СДНФ	$X \wedge Y \wedge \neg Z \vee X \wedge Y \wedge Z$
СКНФ	$(\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z)$

12. Булева функция от одного аргумента от n аргументов

Булевой функцией от одного аргумента называется функция f, заданная на множестве из двух элементов и принимающая значения в том же двухэлементном множестве. Элементы двухэлементного множества будем обозначать 0 и 1. Таким образом, $f: \{0,1\} \to \{0,1\}$.

Булевой функцией от n аргументов называется функция f, заданная на множестве $\{0,1\}^n$ и принимающая значения в двухэлементном множестве $\{0,1\}$. Другими словами, булева функция от n аргументов сопоставляет каждому упорядоченному набору длины n, составленному из элементов 0 и 1, либо 0, либо 1.

13. Равенство булевых функций

Функции f и g называются равными, если при помощи конечного числа добавлений или удалений фиктивных переменных можно сделать функции одинаковыми. (Фиктивная переменная – переменная, не являющаяся существенной).

$f(x, y) = x \vee y$ и $g(x, y, z) = xz \vee x\overline{z} \vee yz \vee y\overline{z}$

$g(x, y, z) = (x \vee y)(z \vee \overline{z})$

$g(x, y, z) = x \vee y = f(x, y)$.

14. Свойства дистрибутивности булевых функций

$$x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$$

$$x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$$

15. Свойства сложения по модулю два или суммы Жегалкина

Функция $g(x, y)$ называется эквивалентностью и обозначается $x \leftrightarrow y$, так что $g(x, \mathrm{y}) = x \leftrightarrow y$. Она принимает значение 1 тогда и только тогда, когда оба ее аргумента принимают одинаковые значения. Функция $g_1(x, y)$, являющаяся отрицанием функции $g(x, y)$, называется сложением по модулю два, или суммой Жегалкина, и обозначается $x + y$.

$A \vee B = A \oplus B \oplus AB;$
$\overline{A} = A \oplus 1.$
$A \oplus A = 0;$
$(A \oplus B)C = AC \oplus BC.$

16. Свойства штриха Шеффера

Отрицание конъюнкции, функция $g(x, y)$, называется штрихом Шеффера и обозначается $x|y$. Таким образом, $g(x, y) = (x \cdot y)' = x|y$. Эта функция принимает значение 0 в том и только в том случае, когда конъюнкция принимает значение 1, т.е. в случае, когда оба ее аргумента принимают значение 1.

$X \mid X = \neg X$

$(X \mid X) \mid (Y \mid Y) = X \vee Y$

$(X \mid Y) \mid (X \mid Y) = (X \wedge Y)$

17. Свойства стрелки Пирса

Функция $g(x, y)$ называется дизъюнкцией и обозначается $x \vee y$. Функция $g_1(x, y)$, являющаяся отрицанием функции $g(x, y)$, носит название стрелка Пирса (или Функция Вебба) и обозначается $x \downarrow y$. Итак, $g_1(x, y) = (x \vee y)' = x \downarrow y$.

$X \downarrow X \equiv \neg X$

$(X \downarrow X) \downarrow (Y \downarrow Y) \equiv (X \wedge Y)$

$(X \downarrow Y) \downarrow (X \downarrow Y) \equiv X \vee Y$

$((X \downarrow X) \downarrow Y) \downarrow ((X \downarrow X) \downarrow Y) = X \to Y$

18. Полином Жегалкина

Полином Жегалкина степени не выше первой: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$, где $\mathrm{a}_0, \mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \dots, \mathrm{a}_n$ – постоянные, равные либо 0, либо 1. Полином Жегалкина представляет собой сумму по модулю два произведений неинвертированных переменных, а также (если необходимо) константы 1.

$$P(X_1...X_n) = a \oplus a_1X_1 \oplus a_2X_2 \oplus ... \oplus a_nX_n \oplus a_{12}X_1X_2 \oplus a_{13}X_1X_3 \oplus ... \oplus a_{1...n}X_1...X_n,$$

$$a \dots a_{1\dots n} \in \{0, 1\}.$$

$$P = B \oplus AB;$$

$$P = X \oplus YZ \oplus ABX \oplus ABDYZ;$$

$$P = 1 \oplus A \oplus ABD.$$

19. Двойственная и самодвойственная булева функция

Булева функция $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется двойственной функцией для булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если $f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = f'(x_1', x_2', \dots, x_n')$ для любых $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Функции $x \wedge y, x \vee y$ являются двойственными по отношению друг к другу.

Булева функция f называется самодвойственной, если $f^* = f$.

Функции $x, \overline{x}, (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ являются самодвойственными.

20. Монотонная булева функция

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется монотонной, если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n \epsilon \{0,1\}$ из $\alpha_1 < \beta_1, \alpha_2 < \beta_2, \ldots, \alpha_n < \beta_n$ немедленно следует, что $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Примеры монотонных функций: константа, дизъюнкция, конъюнкция, тождественная функция.

21. Булева функция, сохраняющая 0 и сохраняющая 1

Говорят, что булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ сохраняет 0, если $f(0, \dots, 0) = 0$.
Говорят, что булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ сохраняет 1, если $f(1, \dots, 1) = 1$.

22. Полная и неполная система булевых функций

Система булевых функций называется полной, если всякая булева функция является суперпозицией функций из этой системы, т.е. когда в ней имеется хотя бы одна функция, не сохраняющая ноль, хотя бы одна функция, не сохраняющая один, хотя бы одна несамодвойственная функция, хотя бы одна немонотонная функция и хотя бы одна нелинейная функция.

$\{\wedge, \vee, \neg\}, \{\wedge, \oplus, 1\}, \{\downarrow\}, \{|\}$

Система булевых функций называется неполной, если не выполняется предыдущий пункт.

$\{\wedge, \vee\}$

23. Теорема Поста и критерий полноты

Теорема.

Система булевых функций $\{f_0, f_1, \dots, f_a, \dots\}$ является полной тогда и только тогда, когда в этой системе имеется функция, не принадлежащая классу сохраняющих 0 (класс P_0), имеется функция, не принадлежащая классу сохраняющих 1 (класс P_1), имеется функция, не принадлежащая классу самодвойственных (класс S), имеется функция, не принадлежащая классу монотонных (класс M), имеется функция, не принадлежащая классу линейных (класс L).

$\{\wedge, \vee, \neg\}, \{\wedge, \oplus, 1\}, \{\downarrow\}, \{|\}$