Оглавление

[1. Определение высказывания, функции истинности, логического значения, отрицания высказывания 2](#_Toc357629848)

[2. Конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность двух высказываний 3](#_Toc357629849)

[3. Формула алгебры высказываний, логическое значение составного высказывания 4](#_Toc357629850)

[4. Формула алгебры высказываний выполнимая, тавтология, опровержимая, тождественно ложная 5](#_Toc357629851)

[5. Свойства конъюнкции и дизъюнкции 6](#_Toc357629852)

[6. Свойства импликации и эквивалентности 7](#_Toc357629853)

[7. Правило заключения и правило подстановки 8](#_Toc357629854)

[8. Формулы алгебры высказываний – равносильны (эквивалентны) 9](#_Toc357629855)

[9. Нормальные формы для формул алгебры высказываний, совершенные нормальные формулы 10](#_Toc357629856)

[10. Конъюнктивный и дизъюнктивный одночлен от переменных x1, x2, … , xn 11](#_Toc357629857)

[11. Совершенная дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма 12](#_Toc357629858)

[12. Булева функция от одного аргумента от n аргументов 13](#_Toc357629859)

[13. Равенство булевых функций 14](#_Toc357629860)

[14. Свойства дистрибутивности булевых функций 15](#_Toc357629861)

[15. Свойства сложения по модулю два или суммы Жегалкина 16](#_Toc357629862)

[16. Свойства штриха Шеффера 17](#_Toc357629863)

[17. Свойства стрелки Пирса 18](#_Toc357629864)

[18. Полином Жегалкина 19](#_Toc357629865)

[19. Двойственная и самодвойственная булева функция 20](#_Toc357629866)

[20. Монотонная булева функция 21](#_Toc357629867)

[21. Булева функция, сохраняющая 0 и сохраняющая 1 22](#_Toc357629868)

[22. Полная и неполная система булевых функций 23](#_Toc357629869)

[23. Теорема Поста и критерий полноты 24](#_Toc357629870)

# 1. Определение высказывания, функции истинности, логического значения, отрицания высказывания

Под высказыванием понимается такое предложение, которое либо истинно, либо ложно. Высказывание не может быть одновременно и истинным, и ложным.

Обозначив истинное высказывание символом , а ложное – , введем функцию , заданную на совокупности всех высказываний и принимающую значения в двухэлементном множестве по следующему правилу:

Функция называется функцией истинности.

Значение называется логическим значением или значением истинности высказывания .

Отрицанием высказывания называется новое высказывание, обозначаемое , которое истинно, если высказывание ложно, и ложно, если высказывание истинно. Другими словами, логическое значение высказывания связано с логическим значением высказывания , как указано в следующей таблице, называемой таблицей истинности операции отрицания:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

# 2. Конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность двух высказываний

Конъюнкцией двух высказываний и называется новое высказывание, обозначаемое или , которое истинно лишь в единственном случае, когда истинны оба исходных высказывания и , и ложно во всех остальных случаях. Другими словами, логическое значение высказывания связано с логическими значениями высказываний и , как указано в следующей таблице, называемой таблицей истинности операции конъюнкции:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Дизъюнкцией двух высказываний и называется новое высказывание, обозначаемое , которое истинно в тех случаях, когда хотя бы одно из высказываний или истинно, и ложно в единственном случае, когда оба высказывания и ложны. Другими словами, – такое высказывание, логическое значение которого связано с логическими значениями исходных высказываний и так, как указано в следующей таблице, называемой таблицей истинности операции дизъюнкции:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Импликацией двух высказываний и называется новое высказывание, обозначаемое , которое ложно в единственном случае, когда высказывание истинно, а – ложно, а во всех остальных случаях – истинно. Другими словами, логическое значение высказывания связано с логическими значениями высказываний и , как указано в следующей таблице, называемой таблицей истинности операции импликации:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Эквивалентностью двух высказываний и называется новое высказывание, обозначаемое , которое истинно в том и только в том случае, когда одновременно оба высказывания и либо истинны, либо ложны, а во всех остальных случаях – ложно. Другими словами, логическое значение высказывания , связано с логическими значениями высказываний и , как указано в следующей таблице, называемой таблицей истинности операции эквивалентности:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

# 3. Формула алгебры высказываний, логическое значение составного высказывания

Определение формулы алгебры высказываний:

1. Каждая отдельно взятая пропозициональная переменная есть формула алгебры высказываний.
2. Если и – формулы алгебры высказываний, то выражения , , , , также являются формулами алгебры высказываний.
3. Никаких других формул алгебры высказываний, кроме получающихся согласно пунктам 1 и 2, нет.

Переменные, вместо которых можно подставлять высказывания, т.е. переменные, пробегающие множество высказываний, называют пропозициональными переменными, или высказывательными переменными, или переменными высказываниями.

Если в формулу алгебры высказываний вместо пропозициональных переменных подставить конкретные высказывания соответственно, то получится некоторое новое составное высказывание . Оно называется конкретизацией формулы на выборе высказываний .

Теорема. Логическое значение составного высказывания равно значению формулы на наборе логических значений составляющих высказываний , т.е. .

Доказательство. Докажем утверждение методом полной математической индукции по числу символов логических операций, входящих в формулу .

Если формула содержит символов логических операций, то она представляет собой просто пропозициональную переменную, скажем, , т.е. . Тогда доказываемое соотношение сводится к тривиальному равенству: .

Если формула содержит лишь один символ логической операции, то она является одной из следующих формул: , , , , . В этих случаях доказываемое равенство есть одно из равенств отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации или эквивалентности.

Предположим теперь, что утверждающееся в теореме равенство верно для всех формул алгебры высказываний, содержащих не более символов логических операций. Докажем, что оно верно для формулы , содержащей символов логических операций. На основании определения формулы алгебры высказывания формула имеет один из следующих видов: , , , , , где и — некоторые формулы, каждая из которых содержит уже не более символов логических операций. Нужно провести доказательство для всех пяти случаев. Но в силу принципиальной идентичности этих доказательств проделаем его, например, для случая . Вычисляем:

Следовательно, утверждение теоремы верно для любой формулы.

# 4. Формула алгебры высказываний выполнимая, тавтология, опровержимая, тождественно ложная

Формула алгебры высказываний называется выполнимой, если некоторая ее конкретизация является истинным высказыванием, т.е. существуют такие конкретные высказывания , которые, будучи подставленными в эту формулу вместо переменных соответственно, превращают ее в истинное высказывание.

Формула называется тавтологией, или тождественно истинной, если она превращается в истинное высказывание при всякой подстановке вместо переменных конкретных высказываний , т.е. если для любых высказываний .

Формула называется опровержимой, если существуют такие конкретные высказывания , которые превращают данную формулу в ложное высказывание , т.е. .

Формула называется тождественно ложной, или противоречием, если для любых конкретных высказываний .

# 5. Свойства конъюнкции и дизъюнкции

Теорема (Свойства конъюнкции и дизъюнкции).

1. Законы идемпотентности .
2. Законы упрощения .
3. Законы коммутативности .
4. Законы ассоциативности .
5. Законы дистрибутивности .
6. Законы поглощения .
7. Законы де Моргана .

Доказательство. Докажем для примера, что первый закон де Моргана является тавтологией. Пусть и – произвольные конкретные высказывания. Рассмотрим два составных высказывания и получающиеся из частей данной эквивалентности при замене пропозициональных переменных и конкретными высказываниями и соответственно. Предположим, во-первых, что высказывание истинно. Тогда конъюнкция ложна, следовательно, по меньшей мере одно из высказываний или ложно. Но в таком случае хотя бы одно из высказываний или истинно, следовательно, их дизъюнкция истинна. Предположим, во-вторых, что высказывание ложно. Тогда конъюнкция истинна. Следовательно, оба высказывания и истинны, а их отрицания и оба ложны, т.е. дизъюнкция ложна. Таким образом, для любых двух высказываний значения частей рассматриваемой эквивалентности совпадают. Следовательно, формула тождественно истинна.

# 6. Свойства импликации и эквивалентности

1. .
2. .
3. .
4. .
5. .
6. .
7. .
8. .
9. .
10. .
11. .
12. .
13. .
14. .
15. .
16. .

# 7. Правило заключения и правило подстановки

Теорема (правило заключения).

Если формулы и являются тавтологиями, то формула также тавтология. Другими словами, из и следует .

Доказательство. Пусть и . Предположим, что формула . не является тавтологией. Это означает, что существуют такие конкретные высказывания , что . Поскольку – тавтология, то для имеем . Вычисляем: , что противоречит тождественной истинности формулы . Следовательно, предположение неверно. Тогда , что и требовалось доказать.

Теорема (правило подстановки).

Если формула , содержащая пропозициональную переменную , является тавтологией, то подстановка в формулу вместо переменной любой формулы cнова приводит к тавтологии. Другими словами, из следует .

Доказательство. Так как , то формула превращается в истинное высказывание при подстановке вместо всех пропозициональных переменных любых конкретных высказываний. Истинность получаемого высказывания не зависит от структуры подставляемых вместо высказываний. В частности, вместо может быть подставлено высказывание, которое само является конкретизацией формулы на некотором наборе конкретных высказываний. Но это и означает, что тавтологией будет формула , т.е. , что и требовалось доказать.

# 8. Формулы алгебры высказываний – равносильны (эквивалентны)

Формулы и алгебры высказываний называются равносильными (эквивалентными), если при любых значениях входящих в них пропозициональных переменных логические значения получающихся из формул и высказываний совпадают.

Теорема (признак равносильности формул).

Две формулы и алгебры высказываний равносильны тогда и только тогда, когда формула является тавтологией:

Доказательство. Если , то для любых высказываний . Тогда, по определению операции эквивалентности, , откуда заключаем, что для любых . Последнее, по определению тавтологии, означает, что . Обратными рассуждениями доказывается утверждение: если ,то . Теорема доказана.

# 9. Нормальные формы для формул алгебры высказываний, совершенные нормальные формулы

Для каждой формулы алгебры высказываний можно указать равносильную ей формулу, содержащую из логических связок лишь отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. Для этого нужно, выразить все имеющиеся в формуле импликации и эквивалентности через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию. Выразить формулу через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию возможно не одним способом, а многими.

Дизъюнктивной нормальной формой называется дизъюнкция конъюнктивных одночленов, т.е. выражение вида , где все являются конъюнктивными одночленами (не обязательно различными). Аналогично конъюнктивной нормальной формой называется конъюнкция дизъюнктивных одночленов , где все являются дизъюнктивными одночленами (не обязательно различными).

|  |  |
| --- | --- |
| ДНФ |  |
| КНФ |  |
| СДНФ |  |
| СКНФ |  |

# 10. Конъюнктивный и дизъюнктивный одночлен от переменных x1, x2, … , xn

Конъюнктивным одночленом от переменных называется конъюнкция этих переменных или их отрицаний. Здесь «или» употребляется в неисключающем смысле, т.е. в конъюнктивный одночлен может входить одновременно и переменная, и ее отрицание.

Дизъюнктивным одночленом от переменных называется дизъюнкция этих переменных или их отрицаний (и здесь союз «или» употребляется в неисключающем смысле).

|  |  |
| --- | --- |
| Конъюнктивный одночлен | X_3\land X_1 \land \neg X_4 \land \neg X_1 \land \neg X_3 \land X_2 |
| Дизъюнктивный одночлен | \neg X_2\lor X_1 \lor \neg X_4 \lor \neg X_1 \lor X_4 \lor \neg X_2 |

# 11. Совершенная дизъюнктивная и конъюнктивная нормальная форма

Одночлен (конъюнктивный или дизъюнктивный) от переменных называется совершенным, если в него от каждой пары , входит только один представитель ( или ). Нормальная форма (дизъюнктивная или конъюнктивная) от переменных называется совершенной от этих переменных, если в нее входят лишь совершенные одночлены (конъюнктивные или дизъюнктивные соответственно) от .

|  |  |
| --- | --- |
| СДО | \neg X_1\lor X_2 \lor \neg X_3 |
| СКО | X_1\land \neg X_2 \land X_3 \land X_4 |
| СДНФ |  |
| СКНФ |  |

# 12. Булева функция от одного аргумента от аргументов

Булевой функцией от одного аргумента называется функция , заданная на множестве из двух элементов и принимающая значения в том же двухэлементном множестве. Элементы двухэлементного множества будем обозначать и . Таким образом, .

Булевой функцией от аргументов называется функция , заданная на множестве и принимающая значения в двухэлементном множестве . Другими словами, булева функция от аргументов сопоставляет каждому упорядоченному набору длины , составленному из элементов и , либо , либо .

# 13. Равенство булевых функций

Функции и называются равными, если при помощи конечного числа добавлений или удалений фиктивных переменных можно сделать функции одинаковыми. (Фиктивная переменная – переменная, не являющаяся существенной).

f(x,y)=x\lor y и g(x,y,z)=xz\lor x\overline{z}\lor yz\lor y\overline{z}

g(x,y,z)=(x\lor y)(z\lor \overline{z})

g(x,y,z)=x\lor y=f(x,y).

# 14. Свойства дистрибутивности булевых функций

# 15. Свойства сложения по модулю два или суммы Жегалкина

Функция называется эквивалентностью и обозначается , так что . Она принимает значение 1 тогда и только тогда, когда оба ее аргумента принимают одинаковые значения. Функция , являющаяся отрицанием функции , называется сложением по модулю два, или суммой Жегалкина, и обозначается .

 A \vee B = A \oplus B \oplus AB;

 \overline{A} = A \oplus 1.

 A  \oplus A = 0;

 (A  \oplus B)C = AC \oplus BC.

# 16. Свойства штриха Шеффера

Отрицание конъюнкции, функция , называется штрихом Шеффера и обозначается . Таким образом, . Эта функция принимает значение в том и только в том случае, когда конъюнкция принимает значение 1, т.е. в случае, когда оба ее аргумента принимают значение 1.

X\,|\,X  = \neg X 

\left( {X \,|\,X } \right)\,|\,\left( {Y \,|\,Y } \right) = X \vee Y 


 \left( {X \,|\,Y } \right)\,|\,\left( {X \,|\,Y } \right) = \left( {X  \wedge Y } \right) 

# 17. Свойства стрелки Пирса

Функция называется дизъюнкцией и обозначается . Функция , являющаяся отрицанием функции , носит название стрелка Пирса (или Функция Вебба) и обозначается . Итак, .

 X \darr X \equiv \neg X 

 \left( {X \darr X} \right) \darr \left( {Y \darr Y } \right) \equiv \left( {X  \wedge Y } \right) 

\left( {X \darr Y} \right) \darr \left( {X \darr Y} \right) \equiv X \vee Y 

 \left( \left( {X \darr X } \right) \darr Y \right) \darr \left( \left( {X \darr X } \right) \darr Y \right) = X \rarr Y 

# 18. Полином Жегалкина

Полином Жегалкина степени не выше первой: , где – постоянные, равные либо , либо . Полином Жегалкина представляет собой сумму по модулю два произведений неинвертированных переменных, а также (если необходимо) константы .

 P(X_1...X_n) = a ~\oplus~ a_1 X_1 ~\oplus~ a_2 X_2 ~\oplus~ ... ~\oplus~ a_n X_n ~\oplus~ a_{12} X_1 X_2 ~\oplus~ a_{13} X_1 X_3 ~\oplus~ ... ~\oplus~ a_{1...n} X_1...X_n, 

 a \ldots a_{1 \ldots n} \in \{0,1\} .

 P = B \oplus AB;

 P = X \oplus YZ \oplus ABX \oplus ABDYZ;

 P = 1 \oplus A \oplus ABD.

# 19. Двойственная и самодвойственная булева функция

Булева функция называется двойственной функцией для булевой функции , если для любых .

Функции являются двойственными по отношению друг к другу.

Булева функция называется самодвойственной, если .

Функции x, \overline x, (x\wedge y)\vee(x\wedge z)\vee(y\wedge z) являются самодвойственными.

# 20. Монотонная булева функция

Булева функция называется монотонной, если для любых из немедленно следует, что .

Примеры монотонных функций: константа, дизъюнкция, конъюнкция, тождественная функция.

# 21. Булева функция, сохраняющая 0 и сохраняющая 1

Говорят, что булева функция сохраняет , если .

Говорят, что булева функция сохраняет , если .

# 22. Полная и неполная система булевых функций

Система булевых функций называется полной, если всякая булева функция является суперпозицией функций из этой системы, т.е. когда в ней имеется хотя бы одна функция, не сохраняющая ноль, хотя бы одна функция, не сохраняющая один, хотя бы одна несамодвойственная функция, хотя бы одна немонотонная функция и хотя бы одна нелинейная функция.

Система булевых функций называется неполной, если не выполняется предыдущий пункт.

# 23. Теорема Поста и критерий полноты

Теорема.

Система булевых функций является полной тогда и только тогда, когда в этой системе имеется функция, не принадлежащая классу сохраняющих (класс ), имеется функция, не принадлежащая классу сохраняющих (класс ), имеется функция, не принадлежащая классу самодвойственных (класс ), имеется функция, не принадлежащая классу монотонных (класс ), имеется функция, не принадлежащая классу линейных (класс ).