

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Сивохин А.В. Мещеряков Б.К.

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Лабораторный практикум по системам массового обслуживания с применением системы Maple и пакета Simulink

ПЕНЗА 2009

УДК 681.3

С

Сивохин А. В., Мещеряков Б. К. Теория массового обслуживания. Лабораторный практикум по системам массового обслуживания с применением системы Maple и пакета Simulink. – Пенза: Пенз. гос. ун-т, 2009 – 120с.

Рассматриваются вопросы применения математической системы Maple и пакета имитационного моделирования для решения задач теории массового обслуживания.

Лабораторный практикум подготовлен на кафедре “Математическое обеспечение и применение ЭВМ” и предназначен для студентов специальности 23.01.05 при изучении дисциплины “Теории массового обслуживания”.

УДК681.3

Пензенский государственный университет, 2009

Введение

Дальнейшее развитие науки, техники и производства требует решения всё более и более сложных математических проблем. В настоящее время для решения многих из указанных проблем с успехом применяются персональные компьютеры, оснащенные специальным программным обеспечением. Их использование делает более эффективным реализацию аналитических расчетов и многих численных методов, а также позволяет производить визуальное графическое моделирование, имитируя работу исследуемой системы или воспроизводя изменяющуюся во времени структуру сложного прибора или устройства. В связи с этим повышаются требования к уровню знаний по компьютерным дисциплинам для специалистов различного профиля.

Современные технологии обучения естественнонаучным дисциплинам также немыслимы без использования персональных компьютеров и специализированных программных систем. В то же время такие дисциплины, как алгебра и геометрия, математический анализ, дискретная математика и многие другие, являющиеся фундаментом подготовки специалиста технического профиля, предполагают развитие абстрактного логического мышления на основе рассмотрения ряда доказательств и практического решения задач в аналитической форме.

Значительную помощь в изучении таких дисциплин могут оказать мощные системы символьных, или аналитических вычислений, среди которых одним из признанных лидеров является система Maple, обеспечивающая пользователю удобную и интеллектуальную среду для математических исследований.

Система Maple – совместная разработка университета Ватерлоо (штат Онтарио, Канада) и Высшей технической школы (ETH, Цюрих, Швейцария). Эта система широко распространена в университетах, исследовательских центрах и компаниях ведущих научных стран. Она состоит из ядра, содержащего процедуры на языке Си, библиотеки специальных пакетов, написанных на Maple-языке, и справочной системы. Ядро выполняет большинство базисных операций. Библиотека содержит множество команд – процедур, выполняемых в режиме интерпретации. Пользователь может расширить возможности Maple, программируя собственные процедуры и создавая новые пакеты.

Особенно эффективно использование системы Maple при обучении математике. Высочайший «интеллект» этой системы символьной математики объединяется в ней с прекрасными средствами математического численного моделирования и просто потрясающими возможностями графической визуализации решений. Применение таких систем, как Maple, возможно при преподавании и самообразовании от самых основ до вершин математики.

Среди ряда современных специальных программных систем компьютерной математики особо выделяется матричная математическая система MATLAB корпорации MathWorks Inc. Эта система является идеальным средством для

реализации всех видов моделирования: аналитического, численного, имитационного и ситуационного. Система имеет мощные средства диалога, графики и комплексной визуализации, а также многочисленные программные пакеты для расширения функций системы: символьического дифференцирования и интегрирования, идентификации систем, построения и исследования искусственных нейронных систем, обработки сигналов и изображений, решения обыкновенных дифференциальных уравнений и т.д. Одним из таких пакетов системы MATLAB является пакет визуального имитационного и ситуационного моделирования Simulink, позволяющий исследовать многие линейные и нелинейные блочные динамические системы и устройства произвольного назначения. Модель создается из стандартных функциональных графических блоков, набор которых в пакете очень велик и постоянно расширяется. Параметры блоков задаются с помощью удобных диалоговых панелей. Результаты работы регистрируются либо в виде графиков, либо в цифровой форме для последующего применения. По желанию пользователя формируется отчет в формате HTML, который содержит структурную схему модели, перечень её блоков, таблицы параметров блоков и записи регистрирующих устройств в виде соответствующих графиков и диаграмм.

В данном методическом пособии показано, каким образом надо умело сочетать аналитические подходы и визуальное компьютерное моделирование для решения сложных математических задач, возникающих при исследовании систем массового обслуживания, — начиная от решения обыкновенных дифференциальных уравнений и кончая нахождением финальных вероятностей состояний и созданием имитационных моделей систем массового обслуживания.

Лабораторная работа № 1

Определение характеристик случайной функции из опыта

Над случайной величиной $X(t)$ произведено n независимых опытов и в результате получено n реализаций случайной функции. Требуется найти оценки для характеристик случайных функций: ее математического ожидания $m_x(t)$, дисперсии $D_x(t)$ и корреляционной функции $K_x(t_k, t_l)$.

Для этого рассмотрим ряд сечений случайной функции для моментов времени t_1, t_2, \dots, t_m и определим значения реализаций в эти моменты времени. Каждому из моментов времени t_1, t_2, \dots, t_m будет соответствовать n значений случайной функции. Эти значения заносятся в табл. 1.1, которая имеет следующий вид:

Таблица 1.1

$X(t) \backslash t$	t_1	t_2	...	t_k	...	t_l	...	t_m
$x_1(t)$	$x_1(t_1)$	$x_1(t_2)$...	$x_1(t_k)$...	$x_1(t_l)$...	$x_1(t_m)$
$x_2(t)$	$x_2(t_1)$	$x_2(t_2)$...	$x_2(t_k)$...	$x_2(t_l)$...	$x_2(t_m)$
...
$x_n(t)$	$x_n(t_1)$	$x_n(t_2)$...	$x_n(t_k)$...	$x_n(t_l)$...	$x_n(t_m)$

По этим данным находятся оценки для математических ожиданий по формуле:

$$\tilde{m}_x(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i(t_k)}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (1.1)$$

затем – для дисперсий

$$\tilde{D}_x(t_k) = \frac{\sum_{i=1}^n [x_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k)]^2}{n-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (1.2)$$

Результаты заносятся в табл. 1.2.

Таблица 1.2

t	t ₁	t ₂	...	t _m
$\tilde{m}_x(t)$	$\tilde{m}_x(t_1)$	$\tilde{m}_x(t_2)$...	$\tilde{m}_x(t_m)$
$\tilde{D}_x(t)$	$\tilde{D}_x(t_1)$	$\tilde{D}_x(t_2)$...	$\tilde{D}_x(t_m)$

По данным, приведенным в табл. 1.2, построить графики $\tilde{m}_x(t)$ и $\tilde{D}_x(t)$.

Находятся оценки корреляционных моментов

$$\tilde{K}_x(t_k, t_l) = \frac{\sum_{i=1}^n [x_i(t_k) - \tilde{m}_x(t_k)] \cdot [x_i(t_l) - \tilde{m}_x(t_l)]}{n-1}. \quad (1.3)$$

Так как

$$\tilde{K}_x(t_k, t_l) = \tilde{K}_x(t_l, t_k), \quad (1.4)$$

то в формуле (1.3) можно считать $1 \leq k < l \leq n$. Остальные значения определяются по формуле (1.4), а при $k = l$ - по формуле (1.2). Оценки корреляционных моментов занести в табл. 1.3.

Таблица 1.3

t_l	t_1	t_2	...	t_m
t_k				
t_1	$\tilde{D}_x(t_1)$	$\tilde{K}_x(t_1, t_2)$...	$\tilde{K}_x(t_1, t_m)$
t_2	$\tilde{K}_x(t_2, t_1)$	$\tilde{D}_x(t_2)$...	$\tilde{K}_x(t_2, t_m)$
...
t_m	$\tilde{K}_x(t_m, t_1)$	$\tilde{K}_x(t_m, t_2)$...	$\tilde{D}_x(t_m)$

Затем найти оценки нормированной корреляционной функции по формуле

$$\tilde{r}_x(t_k, t_l) = \frac{\tilde{K}_x(t_k, t_l)}{\tilde{\sigma}_x(t_k) \cdot \tilde{\sigma}_x(t_l)}, \quad k, l = 1, 2, \dots, m, \quad (1.5)$$

где

$$\tilde{\sigma}_x(t_k) = \sqrt{\tilde{D}_x(t_k)}. \quad (1.6)$$

Результаты вычислений занести в табл. 1.4.

Таблица 1.4

t_k	t_l	t_1	t_2	...	t_m
t_1	1	$\tilde{r}_x(t_1, t_2)$	$\tilde{r}_x(t_1, t_m)$
t_2	$\tilde{r}_x(t_2, t_1)$	1	$\tilde{r}_x(t_2, t_m)$
...
t_m	$\tilde{r}_x(t_m, t_1)$	$\tilde{r}_x(t_m, t_2)$	1

В данной работе будем считать, что $X(t)$ - стационарная случайная функция. Дополнительно найти оценку математического ожидания

$$\tilde{m}_x = \frac{\sum_{j=1}^m \tilde{m}_x(t_j)}{m}, \quad (1.7)$$

а также оценку дисперсии

$$\tilde{D}_x = \frac{\sum_{j=1}^m \tilde{D}_x(t_j)}{m}. \quad (1.8)$$

Рассчитать значение оценки нормированной корреляционной функции для

$\tau = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, (m-1)\Delta t$ путем осреднения значений $\tilde{r}_x(t_k, t_l)$, расположенных на диагоналях, параллельных главной диагонали табл. 1.4. Результаты вычислений занести в табл. 1.5.

Таблица 1.5

τ	0	Δt	$2\Delta t$...	$(m-1)\Delta t$
$\tilde{\rho}_x(\tau)$	1	$\tilde{\rho}_x(\Delta t)$	$\tilde{\rho}_x(2\Delta t)$...	$\tilde{\rho}_x((m-1)\Delta t)$

Построить график $\tilde{\rho}_x(\tau)$.

При выполнении лабораторной работы исходные данные, занесенные в табл.1.1, рассчитать по формуле

$$x_k(t_j) = b + cR, \quad (1.9)$$

где параметры b и c , a также m и n указаны в табл. 1.6, R – случайное число из интервала $(0;1)$.

Таблица 1.6

Номер варианта	b	c	m	n	Номер варианта	b	c	m	n
1	5,0	0,70	5	9	16	3,5	0,55	5	12
2	4,9	0,69	6	10	17	3,4	0,54	6	9
3	4,8	0,68	7	11	18	3,3	0,53	7	10
4	4,7	0,67	8	12	19	3,2	0,52	8	11
5	4,6	0,66	9	9	20	3,1	0,51	9	12
6	4,5	0,65	5	10	21	3,0	0,50	5	9
7	4,4	0,64	6	11	22	2,9	0,49	6	10
8	4,3	0,63	7	12	23	2,8	0,48	7	11
9	4,2	0,62	8	9	24	2,7	0,47	8	12
10	4,1	0,61	9	10	25	2,6	0,46	9	9
11	4,0	0,60	5	11	26	2,5	0,45	5	10
12	3,9	0,59	6	12	27	2,4	0,44	6	11
13	3,8	0,58	7	9	28	2,3	0,43	7	12
14	3,7	0,57	8	10	29	2,2	0,42	8	9
15	3,6	0,56	9	11	30	2,1	0,41	9	10

Номер варианта совпадает с номером фамилии студента в списке преподавателя. Отметим, что несмотря на то, что данные каждой строки табл.1.1 рассчитываются по одной и той же формуле (1.9), при каждом запуске программы за счет случайности R они будут различны.

Лабораторная работа № 2

Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной системой

Пусть на вход линейной системы L поступает стационарная функция $X(t)$; реакция системы есть случайная функция $Y(t)$. Известны характеристики случайной функции $X(t)$: математическое ожидание m_x и корреляционная функция $k_x(\tau)$. Требуется определить характеристики случайной функции $Y(t)$ на выходе линейной системы.

Напишем в операторной форме линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, связывающее реакцию системы $y(t)$ с воздействием $x(t)$:

$$(a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0) \cdot y(t) = (b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + b_1 \cdot p + b_0) \cdot x(t), \quad (2.1)$$

где $p = \frac{d}{dt}$ - оператор дифференцирования.

Уравнение (2.1) короче можно записать в виде:

$$A_n(p) \cdot y(t) = B_m(p) \cdot x(t), \quad (2.2)$$

где

$$A_n(p) = a^n \cdot p^n + a^{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0, \quad (2.3)$$

$$B_m(p) = b^m \cdot p^m + b^{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0. \quad (2.4)$$

Условно разрешая уравнение (2.2) относительно $y(t)$, запишем оператор системы в «явном» виде.

$$y(t) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)} \cdot x(t). \quad (2.5)$$

Обозначим

$$\Phi(p) = \frac{B_m(p)}{A_n(p)}. \quad (2.6)$$

Тогда формулу (2.5) можно записать в виде

$$y(t) = \Phi(p) \cdot x(t). \quad (2.7)$$

Функция $\Phi(i\omega)$ называется частотной характеристикой линейной системы.

Исходную задачу можно решить в следующем порядке.

1. Находим математическое ожидание на выходе

$$m_y = \frac{b_0}{a_0} m_x. \quad (2.8)$$

2. По корреляционной функции $k_x(\tau)$ находим спектральную плотность на входе

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (2.9)$$

3. Находим квадрат модуля частотной характеристики линейной системы

$$|\Phi(i\omega)|^2 = \frac{|B_m(i\omega)|^2}{|A_n(i\omega)|^2}. \quad (2.10)$$

4. Находим спектральную плотность на выходе

$$S_y(\omega) = |\Phi(i\omega)|^2 \cdot S_x(\omega). \quad (2.11)$$

5. По спектральной плотности $S_y(\omega)$ находим корреляционную функцию $k_y(\tau)$ на выходе системы

$$k_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (2.12)$$

6. Дисперсия на выходе системы

$$D_y = k_y(0). \quad (2.13)$$

Дисперсию можно найти по формуле (2.12). Учитывая, что $S_y(\omega)$ – четкая функция, получим

$$D_y = 2 \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega. \quad (2.14)$$

Задание к лабораторной работе

Работа линейной динамической системы описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка: $(a_1 p + a_0) \cdot y(t) = (b_1 p + b_0)$

$\cdot x(t)$. На вход системы поступает стационарная случайная функция $X(t)$ с математическим ожиданием m_x и корреляционной функцией $k_x(\tau) = D_x e^{-|\tau|}$.

Найти математическое ожидание m_y и значения корреляционной функции $k_y(\tau)$ при $\tau = 0; 0,2; \dots; 5$. Построить графики $k_x(\tau)$ и $k_y(\tau)$ при $\tau \in [0; 5]$.

Исходные значения параметров задачи определить по формулам:

$$m_x = 8 + 0,1 \cdot k, \quad D_x = 2 + 0,2 \cdot k, \quad a_0 = 1 + 0,02 \cdot k, \quad b_0 = 5 + 0,05 \cdot k, \quad a_1 = 7 - 0,01 \cdot k,$$

$$b_1 = 8 + 0,02 \cdot k, \quad \text{где } k \text{ - номер фамилии студента в списке преподавателя.}$$

Лабораторная работа № 3

Марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем

Случайный процесс называется процессом с дискретным временем, если переходы системы S из состояния в состояние возможны только в строго определенные моменты времени t_1, t_2, \dots . В промежутки времени между этими моментами система сохраняет свое состояние.

Пусть имеется физическая система S , которая может находиться в состояниях S_1, S_2, \dots, S_n , причем переходы системы из состояния в состояние возможны только в моменты t_1, t_2, \dots .

Будем называть эти моменты «шагами» или «этапами» процесса и рассматривать случайный процесс, происходящий в системе S , как функцию целочисленного аргумента: 1, 2, 3... (номера шага).

Условимся обозначать $S_i^{(k)}$ событие, состоящее в том, что после k шагов система находится в состоянии S_i . При любом k события $S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, \dots, S_n^{(k)}$ образуют полную группу и несовместны.

Процесс, происходящий в системе, можно представить как последовательность событий, например: $S_1^{(0)}, S_2^{(1)}, S_1^{(2)}, S_2^{(3)}, S_3^{(4)}, \dots$. Такая случайная последовательность событий называется марковской цепью, если для каждого шага вероятность перехода из любого состояния S_i в любое состояние S_j не зависит от того, когда и как система пришла в состояние S_i .

Мы будем описывать марковскую цепь с помощью так называемых вероятностей состояний. Пусть после k -го шага система S может быть в одном из состояний S_1, S_2, \dots, S_n , т.е. осуществляется одно из полной группы несовместных событий: $S_1^{(k)}, S_2^{(k)}, \dots, S_n^{(k)}$.

Обозначим вероятности этих событий:

$p_1(1) = p(S_1^{(1)}), p_2(1) = p(S_2^{(1)}), \dots, p_n(1) = p(S_n^{(1)})$ - вероятности после первого шага,

$p_1(2) = p(S_1^{(2)})$, $p_2(2) = p(S_2^{(2)})$, ..., $p_n(2) = p(S_n^{(2)})$ - вероятности после второго шага; и вообще после k -ого шага $p_1(k) = p(S_1^{(k)})$, $p_2(k) = p(S_2^{(k)})$, ..., $p_n(k) = p(S_n^{(k)})$.

Для каждого значения k $p_1(k) + p_2(k) + \dots + p_n(k) = 1$. Будем называть вероятности $p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k)$ вероятностями состояний. Найдем эти вероятности для любого k .

Для любого шага существуют какие-то вероятности перехода системы из любого состояния в любое другое. Будем называть эти вероятности переходными вероятностями марковской цепи. Марковская цепь называется однородной, если переходные вероятности не зависят от номера шага. В противном случае марковская цепь называется неоднородной.

В дальнейшем будем считать марковскую цепь однородной. Обозначим p_{ij} вероятность перехода системы S за один шаг из состояния S_i в состояние S_j . Эти вероятности можно записать как условные вероятности: $p_{ij} = p(S_j^{(k)} | S_i^{(k-1)})$.

Из вероятностей p_{ij} можно составить матрицу

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

которая называется матрицей перехода за один шаг. Сумма элементов каждой строки равна единице.

Обозначим $p_{ij}(k)$ вероятность перехода системы S из состояния S_i в состояние S_j за k шагов. По формуле полной вероятности можно записать

$$p_{ij}(k) = \sum_{m=1}^n p_{im}(l) \cdot p_{mj}(k-l). \quad (3.1)$$

Обозначим через π_k матрицу перехода через k шагов

$$\pi_k = \begin{bmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & \dots & p_{1n}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & \dots & p_{2n}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(k) & p_{n2}(k) & \dots & p_{nn}(k) \end{bmatrix}.$$

Согласно (3.1) между матрицами перехода с различными индексами существует соотношение $\pi_k = \pi_l \pi_{k-l}$ ($0 < l < k$). В частности, при $k = 2$ находим, что $\pi_2 = \pi_1 \pi_1 = \pi_1^2$, при $k = 3$ $\pi_3 = \pi_1 \pi_2 = \pi_1^3$, и вообще при любом k

$$\pi_k = \pi_1^k. \quad (3.2)$$

Отметим частный случай формулы (3.1) при $l = 1$

$$p_{ij}(k) = \sum_{m=1}^n p_{im}(1) \cdot p_{mj}(k-1). \quad (3.3)$$

Обозначим $\vec{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0))$.

Тогда по формуле полной вероятности имеем

$$\vec{p}(1) = \vec{p}(0) \cdot \pi_1. \quad (3.4)$$

Из формулы (3.3) следует

$$\vec{p}(k) = \vec{p}(1) \cdot \pi_{k-1}. \quad (3.5)$$

Учитывая формулы (3.2) и (3.4) из уравнения (3.5) получим

$$\vec{p}(k) = \vec{p}(0) \cdot \pi_1^k. \quad (3.6)$$

Теорема Маркова. Если при некотором $m > 0$ все элементы матрицы π_m положительны, то существуют такие постоянные числа p_j ($j = 1, 2, 3, \dots, n$) что независимо от индекса i имеют место равенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{ij}(k) = p_j. \quad (3.7)$$

Величины p_j называются финальными вероятностями системы S . Заметим, что

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1. \quad (3.8)$$

Обозначим $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Так как

$$\vec{p}(k) = \vec{p}(k-1) \cdot \pi_1, \quad (3.9)$$

то при $k \rightarrow \infty$ будем иметь

$$\vec{p} = \vec{p} \cdot \boldsymbol{\pi}_1. \quad (3.10)$$

Система (3.10) является линейной однородной системой с n неизвестными p_1, p_2, \dots, p_n . Учитывая условие (3.8) одно из уравнений системы (3.10) можно отбросить. Отбросим последнее уравнение системы (3.10), тогда систему уравнений можно записать в явном виде

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i \cdot p_{ij} = p_j & (j = 1, 2, \dots, n-1), \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1. \end{cases} \quad (3.11)$$

Решая линейную неоднородную систему (3.11), определим финальные вероятности p_1, p_2, \dots, p_n .

Задание к лабораторной работе

Задана матрица перехода системы

$$\boldsymbol{\pi}_1 = \begin{bmatrix} 0,1+c & 0,2+c & 0,3-c & 0,4-c \\ 0,2+c & 0,2-c & 0,3+c & 0,3-c \\ 0,4+c & 0,2+c & 0,1-c & 0,3-c \\ 0,5+c & 0,2+c & 0,2-c & 0,1-c \end{bmatrix},$$

где $c=0,002 \cdot k$, k – номер фамилии студента в списке преподавателя. Дано начальное распределение вероятностей состояний системы S : $\vec{p}(0) = (0,2; 0,3; 0,4; 0,1)$.

На печать выдать $\boldsymbol{\pi}_1$, $\vec{p}(0)$. Вычислить и выдать на печать $\vec{p}(1)$, $\boldsymbol{\pi}_2$, $\vec{p}(2)$, $\boldsymbol{\pi}_4$, $\vec{p}(4)$, $\boldsymbol{\pi}_8$, $\vec{p}(8)$. Решить систему (3.11) и выдать на печать \vec{p} и $s = \sum_{i=1}^4 p_i$. Взять $\vec{p}(0) = (1; 0; 0; 0)$ и выполнить те же вычисления.

Лабораторная работа № 4

Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

Имеется система S , которая в каждый момент времени может находиться в одном из состояний S_1, S_2, \dots, S_n . Переход системы из одного состояния в другое может осуществляться в любой момент времени. Такой процесс называется непрерывной цепью Маркова.

Обозначим $p_i(t)$ – вероятность того, что в момент времени t система S будет находиться в состоянии S_i ($i=1, 2, \dots, n$). Для любого момента времени

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1. \quad (4.1)$$

Поставим задачу – определить для любого t вероятность состояний: $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$. Будем считать, что известны плотности вероятностей перехода λ_{ij} ($j \neq i$). Пусть $P_{ij}(\Delta t)$ – вероятность перехода системы S из состояния S_i в состояние S_j за время Δt . Тогда

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}. \quad (4.2)$$

Тогда с точностью до бесконечно малых высших порядков

$$p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \cdot \Delta t. \quad (4.3)$$

Если λ_{ij} не зависят от t , марковский процесс называется однородным, если зависят – то неоднородным. В дальнейшем будем считать процесс однородным. Вероятности $p_i(t)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = -\sum_{j=2}^n \lambda_{1j} \cdot p_1(t) + \sum_{i=2}^n (\lambda_{i1} \cdot p_i(t)), \\ \dot{p}_2(t) = -\sum_{j \neq 2} \lambda_{2j} \cdot p_2(t) + \sum_{i \neq 2} (\lambda_{i2} \cdot p_i(t)), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dot{p}_n(t) = -\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{nj} \cdot p_n(t) + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{in} \cdot p_i(t)). \end{cases} \quad (4.4)$$

Эти уравнения для вероятностей состояний называются уравнениями Колмогорова. Для однозначного решения системы должны быть заданы начальные значения: $p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0)$, причем

$$\sum_{i=1}^n p_i(0) = 1. \quad (4.5)$$

Предположим, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i, \quad (4.6)$$

где p_i финальные вероятности. Чтобы их найти в системе (4.4) положим $\dot{p}_i(t) = 0$. Тогда будем иметь следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=2}^n \lambda_{1j} \cdot p_1 = \sum_{i=2}^n (\lambda_{i1} \cdot p_i), \\ \sum_{j \neq 2} \lambda_{2j} \cdot p_2 = \sum_{i \neq 2} (\lambda_{i2} \cdot p_i), \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{nj} \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{in} \cdot p_i), \\ \sum_{i=1}^n p_i = 1. \end{array} \right. . \quad (4.7)$$

Здесь $n+1$ уравнение с n неизвестными. Поэтому одно из однородных уравнений можно отбросить.

Задание к лабораторной работе

В данной работе взять $n = 4$. В табл. 4.1 приведены значения плотностей вероятностей перехода λ_{ij} .

Таблица 4.1

$i \backslash j$	1	2	3	4
1	-	$3+0,02 \cdot k$	$4+0,01 \cdot k$	0
2	$1,5+0,03 \cdot k$	-	0	$2,5+0,02 \cdot k$
3	$3,5+0,01 \cdot k$	$4,5+0,02 \cdot k$	-	0

4	0	$5-0,02 \cdot k$	$4-0,03 \cdot k$	-
---	---	------------------	------------------	---

Здесь k – номер фамилии студента в списке преподавателя. Начальные значения: $p_1(0) = 0,2$; $p_2(0) = 0,25$; $p_3(0) = 0,3$; $p_4(0) = 0,25$.

1. Записать систему алгебраических уравнений (4.7) и решить ее. На печать выдать значения $p_1; p_2; p_3; p_4$.
2. Записать систему дифференциальных уравнений (4.7).
3. Решить систему дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта четвертого порядка. Взять $\Delta t = 0,1$ и выдать на печать табл. 4.2.

Таблица 4.2

t	$p_1(t)$	$p_2(t)$	$p_3(t)$	$p_4(t)$
0	$p_1(0)$	$p_2(0)$	$p_3(0)$	$p_4(0)$
0,5	$p_1(0,5)$	$p_2(0,5)$	$p_3(0,5)$	$p_4(0,5)$
1,0	$p_1(1)$	$p_2(1)$	$p_3(1)$	$p_4(1)$
...

Таблицу составлять до тех пор, пока не выполняются условия

$$|p_i(t) - p_i| \leq \varepsilon \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (4.8)$$

Значение ε согласовать с преподавателем. Значения Δt и шаг выдачи информации на печать можно изменить по согласованию с преподавателем.

4. Изобразить график состояний системы S .
5. Изменить начальные условия: $p_1(0)=1; p_2(0)=p_3(0)=p_4(0)=0$ и снова выполнить вычисления.

Лабораторная работа № 5

Система массового обслуживания с отказами

В таких системах заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, немедленно получает отказ, покидает систему и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует.

Пусть имеется n канальная система массового обслуживания с отказами. Рассмотрим ее как физическую систему X с конечным множеством состояний:

x_0 – свободны все каналы,

x_1 – занят ровно один канал,

.....

x_n – заняты все n каналов.

Требуется определить вероятности состояний системы $p_k(t)$ ($k=0,1,2,\dots,n$) для любого момента времени t . Задачу решить при следующих допущениях:

1) поток заявок – простейший с плотностью λ ;

2) время обслуживания $T_{об}$ – показательное с параметром $\mu = \frac{1}{m_{об}}$

$$q(t) = \mu \cdot e^{-\mu t} \quad (t > 0). \quad (5.1)$$

Параметр μ аналогичен параметру λ показательного закона распределения промежутка T между соседними событиями простейшего потока:

$$f(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \quad (5.2)$$

Процесс, протекающий в системе, будет Марковским. Вероятности $p_k(t)$ удовлетворяют следующим уравнениям Эрланга:

$$\begin{cases} p_0(t) = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t), \\ p_k(t) = \lambda \cdot p_{k-1}(t) - (\lambda + k \cdot \mu) \cdot p_k(t) + (k+1) \cdot \mu \cdot p_{k+1}(t) \\ \quad (0 < k < n), \\ p_n(t) = \lambda \cdot p_{n-1}(t) - n \cdot \mu \cdot p_n(t). \end{cases} \quad (5.3)$$

Интегрирование системы уравнений (5.3) нужно производить при начальных условиях:

$$p_0(0) = 1; \quad p_1(0) = p_2(0) = \dots = p_n(0). \quad (5.4)$$

Для любого момента времени должно выполняться условие

$$\sum_{k=0}^n p_k(t) = 1. \quad (5.5)$$

Вероятность $p_k(t)$ характеризует среднюю загрузку системы и ее изменение с течением времени. В частности, $P_n(t)$ есть вероятность того, что заявка, пришедшая в момент t , застанет все каналы занятыми (получит отказ):

$$p_{omk} = p_n(t). \quad (5.6)$$

Величина $q(t) = 1 - p_n(t)$ называется относительной пропускной способностью системы. Для данного момента t это есть отношение среднего числа обслуженных за единицу времени заявок к среднему числу поданных.

При $t \rightarrow \infty$ вероятности $p_k(t) \rightarrow p_k$, а $\dot{p}_k(t) \rightarrow 0$. Для установившегося режима вероятности p_k ($k = 0, 1, \dots, n$) можно получить из решения следующей алгебраической системы

$$\begin{cases} -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 = 0, \\ \lambda \cdot p_{k-1} - (\lambda + k \cdot \mu) \cdot p_k + (k+1) \cdot \mu \cdot p_{k+1} = 0, \quad (0 < k < n), \\ \lambda \cdot p_{n-1} - n \cdot \mu \cdot p_n = 0, \\ \sum_{k=0}^n p_k = 1. \end{cases} \quad (5.7)$$

Решая систему (5.7) можно получить

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} \right]^{-1}, \quad (5.8)$$

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot p_0 \quad (0 < k \leq n). \quad (5.9)$$

Формулы (5.8) и (5.9) называются формулами Эрланга.

Задание к лабораторной работе

Задана четырехканальная система массового обслуживания с отказами.

Значения параметров λ и μ указаны в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Номер варианта	λ	μ	Δt	L
1	1,45	2,71	1	10
2	1,52	2,85	1	15
3	1,67	2,94	1	20
4	1,71	2,97	2	10
5	1,75	3,03	2	15
6	1,79	3,05	2	20
7	1,82	3,09	1	10
8	1,84	3,12	1	15
9	1,91	3,15	1	20
10	1,96	3,19	2	10
11	1,98	3,26	2	15
12	2,03	3,31	2	20
13	2,07	3,39	1	10
14	2,11	3,42	1	15
15	2,13	3,47	1	20
16	2,15	3,52	2	10
17	2,17	3,59	2	15
18	2,19	3,62	2	20
19	2,25	3,67	1	10

20	2,32	3,72	1	15
21	2,37	3,75	1	20
22	2,4	3,85	2	10
23	2,43	3,91	2	15
24	2,49	3,95	2	20
25	2,52	3,98	1	10
26	2,57	4,01	1	15
27	2,61	4,13	1	20
28	2,69	4,23	2	10
29	2,71	4,32	2	15
30	2,75	4,39	2	20

1. Решить систему (5.7) и выдать на печать значения p_0, p_1, \dots, p_4 и $S = p_0 + p_1 + \dots + p_4$.

2. Методом Рунге-Кутта четвертого порядка решить систему (5.3). Взять шаг Δt и выполнить L шагов (см. табл.5.1). По согласованию с преподавателем эти значения можно изменить. На печать выдать табл. 5.2.

Таблица 5.2

i	t	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	s
0	t_0	1	0	0	0	0	1
1	t_1	$p_0(t_1)$	$p_1(t_1)$	$p_2(t_1)$	$p_3(t_1)$	$p_4(t_1)$	$s(t_1)$
...
L	t_L	$p_0(t_L)$	$p_1(t_L)$	$p_2(t_L)$	$p_3(t_L)$	$p_4(t_L)$	$s(t_L)$

3. Определить вероятность отказа в установившемся режиме и относительную пропускную способность и эти значения выдать на печать.

4. Построить графики $p_0(t), p_1(t), \dots, p_4(t)$.

Для справки приведем формулы Рунге-Кутта четвертого порядка для системы двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, x_2), & x_1(0) &= x_1^0, \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, x_2), & x_2(0) &= x_2^0.\end{aligned}$$

имеют вид:

$$\begin{aligned}k_{11} &= h \cdot f_1(t_i, x_{1i}, x_{2i}), \\ k_{12} &= h \cdot f_2(t_i, x_{1i}, x_{2i}), \\ k_{21} &= h \cdot f_1\left(t_i + \frac{h}{2}, x_{1i} + \frac{k_{11}}{2}, x_{2i} + \frac{k_{12}}{2}\right), \\ k_{22} &= h \cdot f_2\left(t_i + \frac{h}{2}, x_{1i} + \frac{k_{11}}{2}, x_{2i} + \frac{k_{12}}{2}\right), \\ k_{31} &= h \cdot f_1\left(t_i + \frac{h}{2}, x_{1i} + \frac{k_{21}}{2}, x_{2i} + \frac{k_{22}}{2}\right), \\ k_{32} &= h \cdot f_2\left(t_i + \frac{h}{2}, x_{1i} + \frac{k_{21}}{2}, x_{2i} + \frac{k_{22}}{2}\right), \\ k_{41} &= h \cdot f_1(t_i + h, x_{1i} + k_{31}, x_{2i} + k_{32}), \\ k_{42} &= h \cdot f_2(t_i + h, x_{1i} + k_{31}, x_{2i} + k_{32}), \\ \Delta x_{1i} &= \frac{1}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}), \\ \Delta x_{2i} &= \frac{1}{6}(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}), \\ x_{1,i+1} &= x_{1i} + \Delta x_{1i}, \\ x_{2,i+1} &= x_{2i} + \Delta x_{2i}.\end{aligned}$$

Здесь $h = \Delta t$. Также считается, что известны значения $x_{1i} = x_1(t_i)$ и $x_{2i} = x_2(t_i)$, а затем по приведенным формулам определяются значения $x_{1,i+1}$ и $x_{2,i+1}$. Всего надо выполнить L шагов.

Лабораторная работа № 6

Система массового обслуживания с ожиданием

В системах с ожиданием заявка, заставшая все каналы занятыми, не покидает систему, а становится в очередь и ожидает, пока не освободится какой-нибудь канал. Если время ожидания заявки в очереди ничем не ограничено, то система называется «чистой системой с ожиданием». Если оно ограничено какими-то условиями, то система называется «системой смешанного типа». Это промежуточный случай между чистой системой с отказами и чистой системой с ожиданием.

Рассмотрим смешанную систему массового обслуживания X с n каналами при следующих условиях. На вход системы поступает простейший поток заявок с плотностью λ . Время обслуживания одной заявки $T_{об}$ -

показательное с параметром $\mu = \frac{1}{m_{T_{об}}}$. Заявка, заставшая все каналы занятыми,

становится в очередь и ожидает обслуживания. Время ожидания ограничено некоторым сроком $T_{ож}$. Если до истечения этого срока заявка не будет принята к обслуживанию, то она покидает очередь и остается необслуженной. Срок ожидания $T_{ож}$ будем считать случайным и распределенным по показательному закону

$$h(t) = \nu \cdot e^{-\nu t} \quad (t > 0), \quad (6.1)$$

где параметр ν - величина, обратная среднему сроку ожидания:

$$\nu = \frac{1}{m_{T_{ож}}} ; \quad m_{T_{ож}} = M[T_{ож}].$$

Этот параметр можно интерпретировать как плотность «потока уходов» заявки, стоящей в очереди. При $\nu \rightarrow \infty$ система смешанного типа превращается в чистую систему с отказами; при $\nu \rightarrow 0$ она превращается в чистую систему с ожиданием.

Заявку будем называть «связанной с системой», если она либо находится в состоянии обслуживания, либо ожидает очереди. Возможные состояния будут

x_0 – ни один канал не занят,

x_k – занято ровно k каналов ($1 \leq k \leq n$),

x_{n+s} – заняты все n каналов, s заявок стоят в очереди. ($s \geq 1$).

Число заявок s , стоящих в очереди, может быть сколь угодно большим. Соответственно, число описывающих ее дифференциальных уравнений будет бесконечным. Они имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{p}_0(t) = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t), \\ \dot{p}_k(t) = \lambda \cdot p_{k-1}(t) - (\lambda + k \cdot \mu) \cdot p_k(t) + (k+1) \cdot \mu \cdot p_{k+1}(t), & (1 \leq k \leq n-1), \\ \dot{p}_{n+s}(t) = -\lambda \cdot p_{n+s-1}(t) - (\lambda + n \cdot \mu + s \cdot \nu) \cdot p_{n+s}(t) + [n \cdot \mu + (s+1) \cdot \nu] \cdot p_{n+s+1}(t) & (s \geq 0). \end{cases} \quad (6.2)$$

При $t \rightarrow \infty$ для установившегося режима, когда $p_k(t) \rightarrow p_k$, $\dot{p}_k(t) \rightarrow 0$ уравнения для определения p_k будут иметь вид:

$$\begin{cases} -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 = 0, \\ \lambda \cdot p_{k-1} - (\lambda + k \cdot \mu) \cdot p_k + (k+1) \cdot \mu \cdot p_{k+1} = 0, & (1 \leq k \leq n-1), \\ \lambda \cdot p_{n+s-1} - (\lambda + n \cdot \mu + s \cdot \nu) \cdot p_{n+s} + [n \cdot \mu + (s+1) \cdot \nu] \cdot p_{n+s+1} = 0 & (s \geq 0). \end{cases} \quad (6.3)$$

К ним нужно присоединить условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \quad (6.4)$$

Решая полученную систему, найдем

$$p_0 = \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \sum_{s=1}^{\infty} \alpha^s \left[\prod_{m=1}^s (n+m\beta) \right]^{-1} \right\}^{-1}, \quad (6.5)$$

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0 \quad (1 \leq k \leq n), \quad (6.6)$$

$$p_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s} \cdot p_0}{n!} \left[\prod_{m=1}^s (n+m\beta) \right]^{-1}, \quad (s \geq 1), \quad (6.7)$$

где $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$, $\beta = \frac{\nu}{\mu}$.

Вероятность того, что заявка покинет систему не обслуженной, определяется формулой:

$$p_i = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ s \cdot \alpha^s \left[\prod_{m=1}^s (n+m \cdot \beta) \right]^{-1} \right\} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \sum_{s=1}^{\infty} \alpha^s \left[\prod_{m=1}^s (n+m\beta) \right]^{-1} \right\}^{-1}. \quad (6.8)$$

Относительная пропускная способность системы определяется формулой

$$q = 1 - p_n. \quad (6.9)$$

Пропускная способность увеличивается при увеличении среднего времени ожидания

$$m_{t_{ож}} = \frac{1}{v}. \quad (6.10)$$

Математическое ожидание числа заявок, находящихся в очереди

$$Ms = \frac{\alpha}{\beta} \cdot p_0. \quad (6.11)$$

При $\beta = 0$ получим чистую систему с ожиданием. При $\alpha < n$ все заявки будут обслужены и очередь не будет возрастать до бесконечности. В этом случае

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^{n+1}}{n!(n-\alpha)} \right]^{-1}, \quad (6.12)$$

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} \cdot p_0 \quad (1 \leq k \leq n), \quad (6.13)$$

$$p_{n+s} = \frac{\alpha^{n+s}}{n! n^s} \cdot p_0 \quad (s \geq 1). \quad (6.14)$$

Среднее число заявок, находящихся в очереди, определяется формулой

$$m = \frac{\alpha^{n+1}}{n \cdot n!} \left(1 - \frac{\alpha}{n} \right)^{-2} \cdot p_0 \quad (6.15)$$

Задание к лабораторной работе

1. Для исходных данных, приведенных в табл.6.1, вычислить p_k ($k = 1, 2, \dots, 10$), и их значения выдать на печать.

2. Вычислить $s_{10} = \sum_{k=0}^{10} p_k$,

3. Вычислить p_h ,

4. Вычислить m_s .

5. Пункты 1, 2 и 4 выполнить для чистой системы с ожиданием.

Таблица 6.1

Номер варианта	λ	μ	ν	n
1	3,71	4,29	3,75	4
2	3,55	4,17	4,63	5
3	4,62	3,57	4,79	6
4	5,09	2,18	5,12	4
5	4,71	2,92	6,48	5
6	3,79	3,47	3,76	6
7	4,56	4,15	3,22	4
8	7,89	2,65	4,13	5
9	9,07	3,17	5,36	6
10	4,75	2,79	4,75	4
11	3,92	3,17	6,17	5
12	4,09	4,15	6,75	6
13	4,13	2,75	7,15	4
14	4,22	2,63	8,19	5
15	4,33	3,35	7,19	6
16	4,79	3,76	7,27	4
17	5,08	4,12	6,13	5
18	6,12	5,25	6,47	6
19	8,13	4,09	3,26	4
20	9,75	4,61	3,47	5
21	6,33	3,79	4,12	6
22	7,56	3,47	4,55	4
23	3,75	2,63	6,75	5

24	4,82	2,59	6,13	6
25	5,12	4,13	7,19	4
26	6,17	4,37	7,33	5
27	5,86	5,19	7,47	6
28	5,95	4,45	7,52	4
29	6,07	4,76	7,47	5
30	7,17	5,33	7,14	6

Лабораторная работа № 7

Система массового обслуживания смешанного типа с ограничением по длине очереди

Рассмотрим смешанную систему массового обслуживания X с n каналами при следующих условиях. На вход системы поступает простейший поток заявок с плотностью λ . Время обслуживания одной заявки $T_{об}$ -

показательное с параметром $\mu = \frac{1}{m_{T_{об}}}$. Заявка, заставшая все каналы занятыми,

становится в очередь и ожидает обслуживания при условии, что длина очереди меньше m . Если же число заявок в очереди равна m (больше m оно быть не может), то последняя прибывшая заявка в очередь не становится и покидает систему не обслуженной.

Заявку будем называть «связанной с системой», если она либо находится в состоянии обслуживания, либо ожидает очереди. Возможные состояния будут

x_0 – ни один канал не занят,

x_k – занято ровно k каналов ($1 \leq k \leq n$),

x_{n+s} – заняты все n каналов, s заявок стоят в очереди. ($1 \leq s \leq m$).

Число заявок s , стоящих в очереди, не может быть больше m . Соответственно, число описывающих ее дифференциальных уравнений равно

$n + m + 1$. Они имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{p}_0(t) = -\lambda \cdot p_0(t) + \mu \cdot p_1(t), \\ \dot{p}_k(t) = \lambda \cdot p_{k-1}(t) - (\lambda + k \cdot \mu) \cdot p_k(t) + (k+1) \cdot \mu \cdot p_{k+1}(t), & (1 \leq k \leq n-1), \\ \dot{p}_n(t) = \lambda \cdot p_{n-1}(t) - (\lambda + n \cdot \mu) \cdot p_n(t) + n \cdot \mu \cdot p_{n+1}(t), \\ \dot{p}_{n+s}(t) = \lambda \cdot p_{n+s-1}(t) - (\lambda + n \cdot \mu) \cdot p_{n+s}(t) + n \cdot \mu \cdot p_{n+s+1}(t), & (1 \leq s \leq m-1), \\ \dot{p}_{n+m}(t) = \lambda \cdot p_{n+m-1}(t) - n \cdot \mu \cdot p_{n+m}(t). \end{cases} \quad (7.1)$$

Начальными условиями являются:

$$p_0(0) = 1, \quad p_k(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n + m).$$

При $t \rightarrow \infty$ для установившегося режима, когда $p_k(t) \rightarrow p_k$, $\dot{p}_k(t) \rightarrow 0$ уравнения для определения p_k будут иметь вид:

$$\begin{cases} -\lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_1 = 0, \\ \lambda \cdot p_{k-1} - (\lambda + k \cdot \mu) \cdot p_k + (k+1) \cdot \mu \cdot p_{k+1} = 0, & (1 \leq k \leq n-1), \\ \lambda \cdot p_{n-1} - (\lambda + n \cdot \mu) \cdot p_n + n \cdot \mu \cdot p_{n+1} = 0, \\ \lambda \cdot p_{n+s-1} - (\lambda + n \cdot \mu) \cdot p_{n+s} + n \cdot \mu \cdot p_{n+s+1} = 0, & (1 \leq s \leq m-1), \\ \lambda \cdot p_{n+m-1} - n \cdot \mu \cdot p_{n+m} = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

К ним нужно присоединить условие

$$\sum_{k=0}^{n+m} p_k = 1. \quad (7.4)$$

Решая полученную систему, найдем

$$p_0 = \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \cdot \sum_{s=1}^m \left(\frac{\alpha}{n} \right)^s \right\}^{-1}, \quad (7.5)$$

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!} p_0, \quad (1 \leq k \leq n), \quad (7.6)$$

$$p_{n+s} = \frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\alpha}{n} \right)^s \cdot p_0, \quad (1 \leq s \leq m), \quad (7.7)$$

где $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$.

Вероятность того, что заявка покинет систему необслуженной, равна p_{n+m} . Относительная пропускная способность системы определяется формулой

$$q = 1 - p_{n+m}. \quad (7.9)$$

Задание к лабораторной работе

1. Для исходных данных, приведенных в табл.7.1, вычислить

p_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n+m$), и их значения выдать на печать.

2. Вычислить $s = \sum_{k=0}^{n+m} p_k$.

3. Вычислить вероятность того, что заявка не будет обслужена.

4. Вычислить относительную пропускную способность системы.

5. Решить систему дифференциальных уравнений. Добиться того, чтобы при увеличении t вероятности $p_k(t)$ приближались к p_k .

Таблица 7.1

Номер варианта	λ	μ	n	m
1	3,71	4,29	5	4
2	3,55	4,17	4	5
3	4,62	3,57	3	6
4	5,09	2,18	5	3
5	4,71	2,92	4	4
6	3,79	3,47	3	5
7	4,56	4,15	5	2
8	7,89	2,65	4	3
9	9,07	3,17	3	4
10	4,75	2,79	5	4
11	3,92	3,17	4	3
12	4,09	4,15	3	6
13	4,13	2,75	5	3
14	4,22	2,63	4	4
15	4,33	3,35	3	3
16	4,79	3,76	5	2
17	5,08	4,12	4	3
18	6,12	5,25	3	6
19	8,13	4,09	5	4
20	9,75	4,61	4	3
21	6,33	3,79	3	5
22	7,56	3,47	5	2
23	3,75	2,63	4	3

24	4,82	2,59	3	4
25	5,12	4,13	5	3
26	6,17	4,37	4	4
27	5,86	5,19	3	4
28	5,95	4,45	5	2
29	6,07	4,76	4	3
30	7,17	5,33	3	4

Заключение

Овладение предложенными в лабораторных работах методами и приемами построения и исследования систем массового обслуживания с применением математических системы Maple и пакета имитационного моделирования Simulink позволит обучаемым быстро, эффективно и надежно решать сложные инженерные задачи при проектировании таких систем для разнообразных предметных областей. При этом в зависимости от целей проектирования и характеристик системы можно использовать непрерывные, нелинейные или дискретные блоки, состав которых постоянно расширяется. Предусмотрена возможность создания собственных библиотек. В случае необходимости можно использовать другие пакеты систем Maple и MATLAB.

Глубокие знания по математическому анализу, тонкая интуиция и отличные навыки применения современных средств компьютерной математики гарантируют успех в деле решения сложных проблем построения систем массового обслуживания, возникающих в современную эпоху.

Список литературы и электронные источники

1. Берж К. Теория графов и ее применения. – М.: Изд. иностр. литер., 1962. – 320 с.
2. Брауэр В. Введение в теорию конечных автоматов. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
3. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. – М.: Наука, 1979. – 624 с.
4. Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. – М.: Физматлит, 2005. – 416 с.
5. Говорухин В. Н., Цибулин В. Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех. – М.: Мир, 1997. – 208 с.
6. Говорухин В. Н., Цибулин В. Г. Компьютер в математическом исследовании – Спб.: Питер, 2002. – 620 с.
7. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. – М.: Мир, 1998. – 703 с.
8. Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А. Введение в теорию конечных автоматов. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 404 с.
9. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 2003. – 431 с.
10. Ловас Л., Пламмер М. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. – М.: Мир, 1998. – 653 с.
11. Манзон Б. М. Maple V Power Edition. – М.: Филинъ, 1998. – 240 с.
12. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2002. – 304 с.
13. Оре. О. Теория графов. – М.: Наука, 1968. – 352 с.
14. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1982. – 384 с.
15. Татт У. Теория графов. – М.: Мир, 1988. – 424 с.
16. Трахтенброт Б. А., Барздинь А. М. Конечные автоматы (поведение и синтез). – М.: Наука, 1970. – 400 с.
17. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов. – М.: Мир, 1998. – 324 с.
18. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Высшая школа, 2001. – 384 с.
19. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: – Л.: Государственное издательство физико-математической литературы. – 1962. – 708с.
20. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: – Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 1098с.
21. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Издательство «Наука», 1964. – 772с.

22. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 224с.
23. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 544с.
24. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том IV. Издание третье. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. – 812с.
25. Кетков Ю. Л., Кетков А. Ю., Шульц М. М. MATLAB 6.x.: Программирование численных методов. – СПб.: БХВ – Петербург, 2004. – 672с.: ил.
26. Бондаренко Л.Н. Дискретная математика. Методические указания для выполнения лабораторных работ. – Пенза.: Издательство Пенз. гос. ун-та, 2007. – 160с.
27. <http://www.piter.com> Издательство «Питер». Компьютерная редакция
28. <http://www.dialektika.com> Издательство «Диалектика»
29. <http://www.fedornovikov@rambler.ru> Новиков Федор Александрович

Maple-программа для исследования характеристик случайной функции

Лабораторная работа № 1

Определение характеристик случайной функции из опыта

1. Задание параметров для случайной функции $X(t)$ и ее реализаций

```
> restart:  
# Сброс значений всех переменных при повторном запуске  
with(LinearAlgebra):  
with(CurveFitting):  
with(plots):  
randomize(): r := rand(0..100):  
# Рандомизация и настройка генератора случайных чисел на диапазон от 1 до 30  
n:=9;  
# Число реализаций случайной функции X(t)  
m:=6;  
# Число сечений реализаций случайной функции X(t)  
b:=3.4;  
# Аддитивная постоянная составляющая случайной функции X(t)  
c:=0.54;  
# Мультипликативный постоянный коэффициент случайной функции X(t)  
Warning, the name LeastSquares has been rebound  
Warning, the name changecoords has been redefined  
n := 9
```

m := 6

b := 3.4

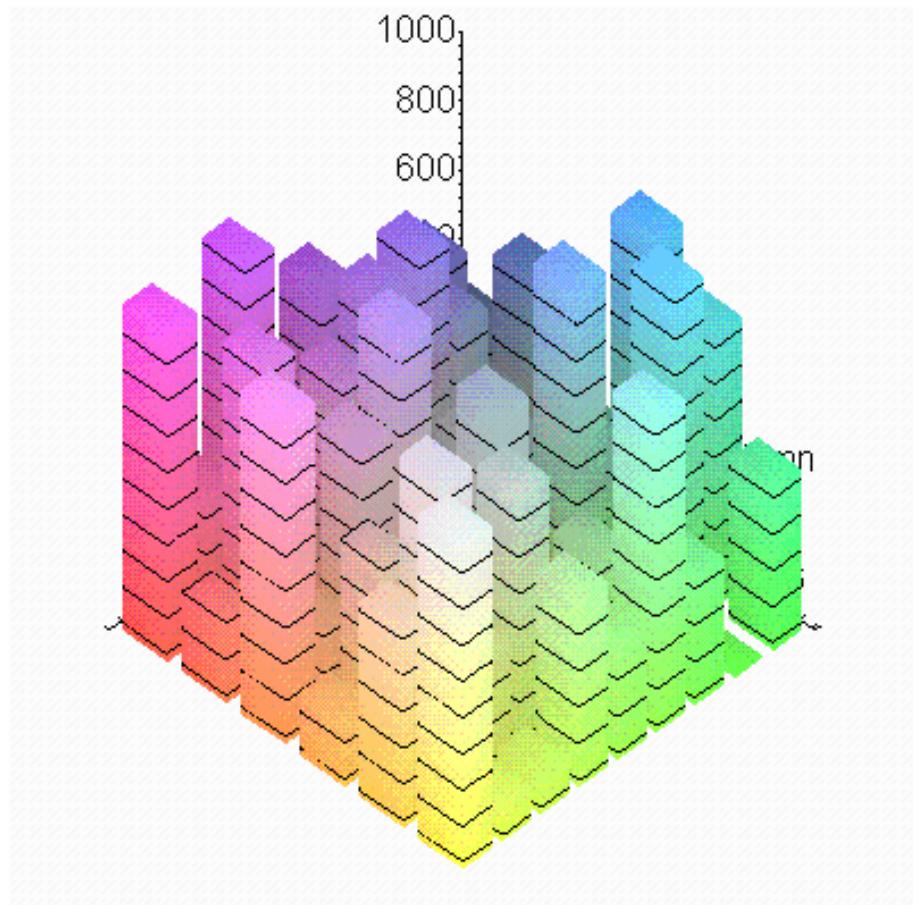
c := 0.54

2. Ручное задание значений для сечений реализаций случайной функции X(t)

```
> R:=Matrix(1..n, 1..m,  
# Ручное задание значений для сечений реализаций  
базовой случайной функции R(t)  
  
[[324,576,248,937,784,465], # Для удобства  
печати диапазоны массива желательно начинать с  
единицы  
  
[573,298,215,365,982,003],  
  
[212,607,375,951,207,365],  
  
[116,879,453,184,376,903],  
  
[745,830,102,749,010,321],  
  
[445,674,936,243,724,535],  
  
[978,231,687,207,327,110],  
  
[384,876,238,546,906,100],  
  
[946,231,934,182,567,934]  
]  
) ;
```

? 324	576	248	937	784	465?
? 573	298	215	365	982	3?
? 212	607	375	951	207	365?
? 116	879	453	184	376	903?
R := ?	745	830	102	749	10
? 445	674	936	243	724	535?
? 978	231	687	207	327	110?
? 384	876	238	546	906	100?
? 946	231	934	182	567	934?

```
> matrixplot(R, heights=histogram, axes=normal,
gap=0.25, style=patchcontour); # Визуализация
базовой случайной функции R(t)
```



```
> X:=Matrix(1..n, 1..m);
# Определение матрицы для значений сечений
случайной функции X(t)
X:=(b+c*R)/1000.;
# Построение заданного варианта случайной
функции X(t)
```

```

? 0   0   0   0   0   0?
?
? 0   0   0   0   0   0?
?
? 0   0   0   0   0   0?
?
? 0   0   0   0   0   0?
?
? 0   0   0   0   0   0?
?
? 0   0   0   0   0   0?
?
? 0   0   0   0   0   0?
?
? 0   0   0   0   0   0?
?
? 0   0   0   0   0   0?
?
X:=? 0   0   0   0   0   0?
?
? 0   0   0   0   0   0?
?
? 0   0   0   0   0   0?
?
? 0   0   0   0   0   0?
?
? 0   0   0   0   0   0?
?
```

```

X:=[[0.1783599999999999, 0.3110399999999993, 0.13392000000000011, 0.50597999999999986,
0.42336000000000014, 0.2510999999999990], [0.30941999999999972, 0.1643199999999994,
0.1160999999999996, 0.1970999999999998, 0.5302799999999974, 0.001619999999999992],
[0.1144799999999999, 0.32778000000000016, 0.2059000000000000, 0.5135399999999996,
0.11178000000000004, 0.1970999999999998], [0.06264000000000014, 0.47466000000000026,
0.24462000000000004, 0.10276000000000004, 0.2030399999999998, 0.4876199999999998],
[0.4022999999999991, 0.4481999999999986, 0.05507999999999970, 0.40445999999999986,
0.008800000000000054, 0.1733399999999994], [0.24030000000000014,
0.36396000000000006, 0.5054400000000000, 0.13122000000000003, 0.39095999999999974,
0.29230000000000004], [0.52812000000000034, 0.12474000000000004, 0.37097999999999977,
0.11178000000000004, 0.17657999999999986, 0.05940000000000015], [0.20735999999999988,
0.47304000000000016, 0.1285199999999994, 0.2948399999999992, 0.48924000000000008,
0.0539999999999994], [0.5108399999999961, 0.12474000000000004, 0.50436000000000030,
0.098280000000000063, 0.30618000000000008, 0.50436000000000030]]
```

3. Задание с помощью RandomMatrix значений для сечений реализаций случайной функции X(t)

> R:=RandomMatrix(n, m, generator=0..1);

```

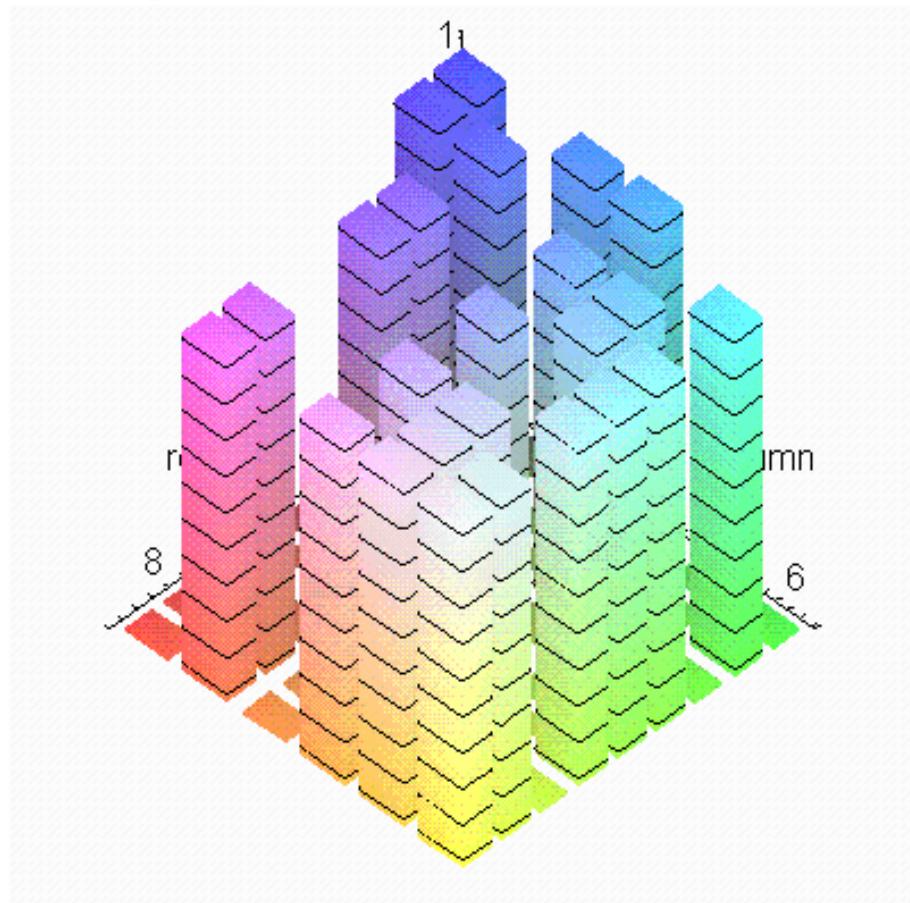
? 1   0   1   1   1   1?
? 0   1   1   0   1   1?
? 1   1   0   0   1   0?
? 0   0   0   1   0   1?
R := ? 0   1   1   1   0   1?
? 1   1   0   0   0   0?
? 1   0   0   0   0   0?
? 0   1   0   1   0   1?
? 0   0   0   0   0   1?

```

```

> matrixplot(R, heights=histogram, axes=normal,
gap=0.25, style=patchcontour);

```



```

> X:=Matrix(1..n, 1..m);
for i from 1 to n do
  for k from 1 to m do
    X[i, k]:=b+c*R[i, k];
  end do;
end do;

```

```

? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
X:=? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?
? 0   0   0   0   0   0?

```

4. Задание с помощью rand значений для сечений реализаций случайной функции X(t)

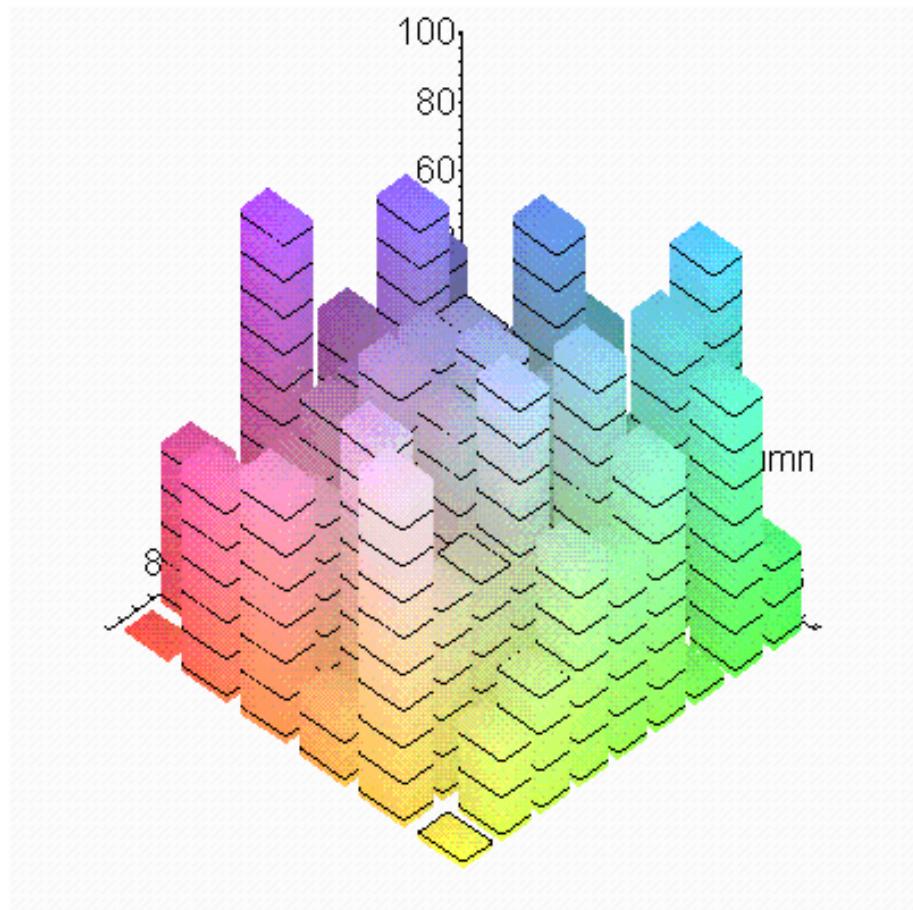
```
> R:=RandomMatrix(n, m, generator=r);
```

```

? 21   33   54   32   98   25?
? 59   30   89   39   86   78?
? 39   21   33   63   52   4?
? 54   99   76   25   92   75?
R := ? 4   57   80   90   20   54?
? 99   56   81   78   99   63?
? 12   48   37   35   55   34?
? 47   11   57   89   57   27?
? 0   61   71   20   96   2?

```

```
> matrixplot(R, heights=histogram, axes=normal,
gap=0.25, style=patchcontour);
```



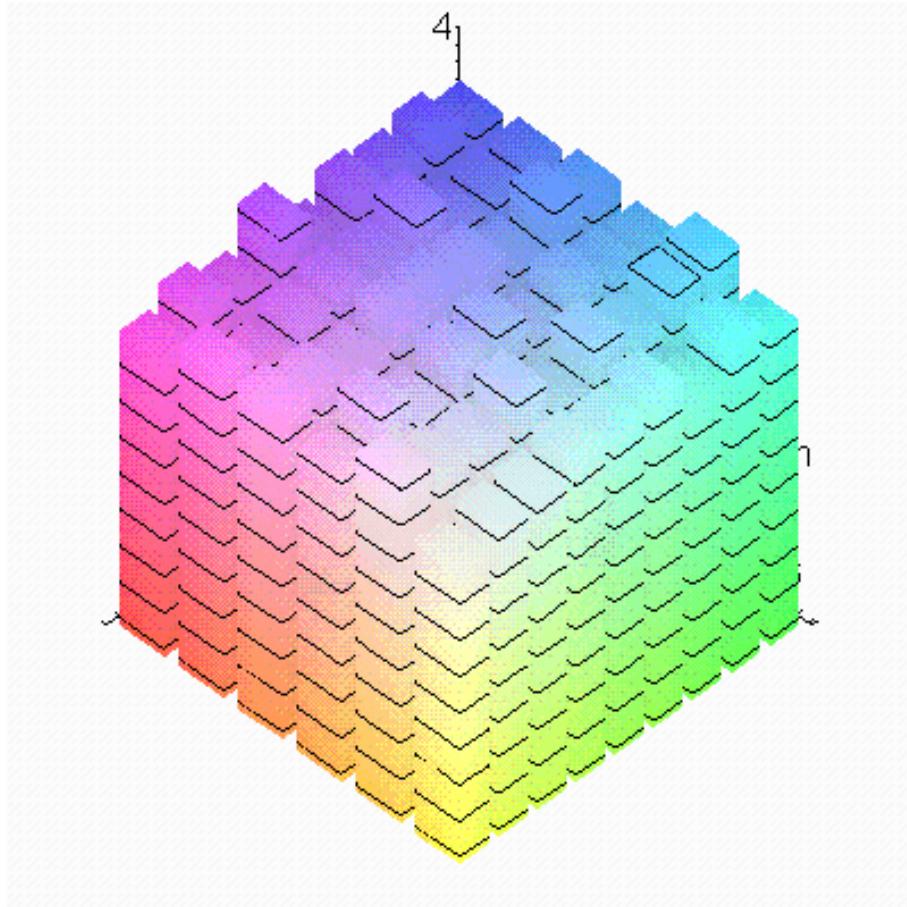
```
> X:=Matrix(1..n, 1..m);
X:=[seq([seq(b+c*R[i, k]/100, k=1..m)], i=1..n)];
```

```
X := [[3.513400000, 3.578200000, 3.691600000, 3.572800000, 3.929200000, 3.535000000],  
      [3.718600000, 3.562000000, 3.880600000, 3.610600000, 3.864400000, 3.821200000],  
      [3.610600000, 3.513400000, 3.578200000, 3.740200000, 3.680800000, 3.421600000],  
      [3.691600000, 3.934600000, 3.810400000, 3.535000000, 3.896800000, 3.805000000],  
      [3.421600000, 3.707800000, 3.832000000, 3.886000000, 3.508000000, 3.691600000],
```

```
[3.934600000, 3.702400000, 3.837400000, 3.821200000, 3.934600000, 3.740200000],  
[3.464800000, 3.659200000, 3.599800000, 3.589000000, 3.697000000, 3.583600000],  
[3.653800000, 3.459400000, 3.707800000, 3.880600000, 3.707800000, 3.545800000],  
[3.4, 3.729400000, 3.783400000, 3.508000000, 3.918400000, 3.410800000]]
```

5. Визуализация случайной функции $X(t)$

```
> matrixplot(x, heights=histogram, axes=normal,  
gap=0.25, style=patchcontour); # Визуализация  
случайной функции  $X(t)$ 
```



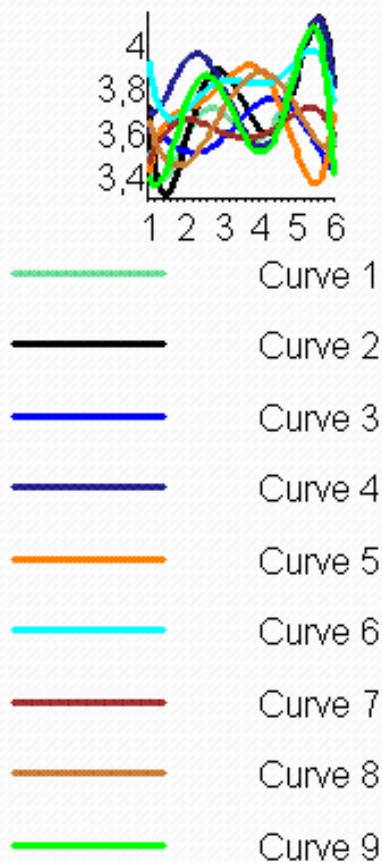
6. Интерполяция и визуализация сечений реализаций случайной функции $X(t)$

```
> W1:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],  
[seq(X[1,i],i=1..m)], z, form=Lagrange):  
W2:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],  
[seq(X[2,i],i=1..m)], z, form=Lagrange):
```

```

W3:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[3,i],i=1..m)], z, form=Lagrange):
W4:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[4,i],i=1..m)], z, form=Lagrange):
W5:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[5,i],i=1..m)], z, form=Lagrange):
W6:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[6,i],i=1..m)], z, form=Lagrange):
W7:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[7,i],i=1..m)], z, form=Lagrange):
W8:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[8,i],i=1..m)], z, form=Lagrange):
W9:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[9,i],i=1..m)], z, form=Lagrange):
plot([W1, W2, W3, W4, W5, W6, W7, W8, W9],
z=1..m, color=[aquamarine, black, blue, navy,
coral, cyan, brown, gold, green],
thickness=[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2],
legend=[`1`, `2`,
`3`, `4`, `5`, `6`, `7`, `8`, `9`]);

```

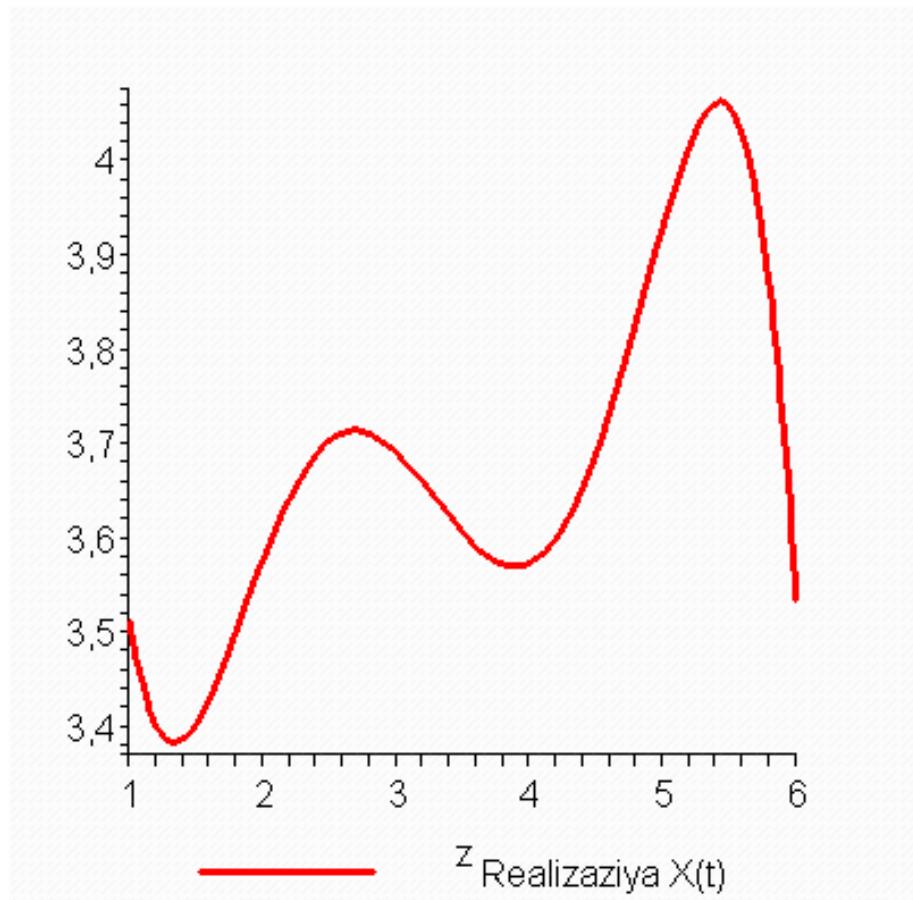


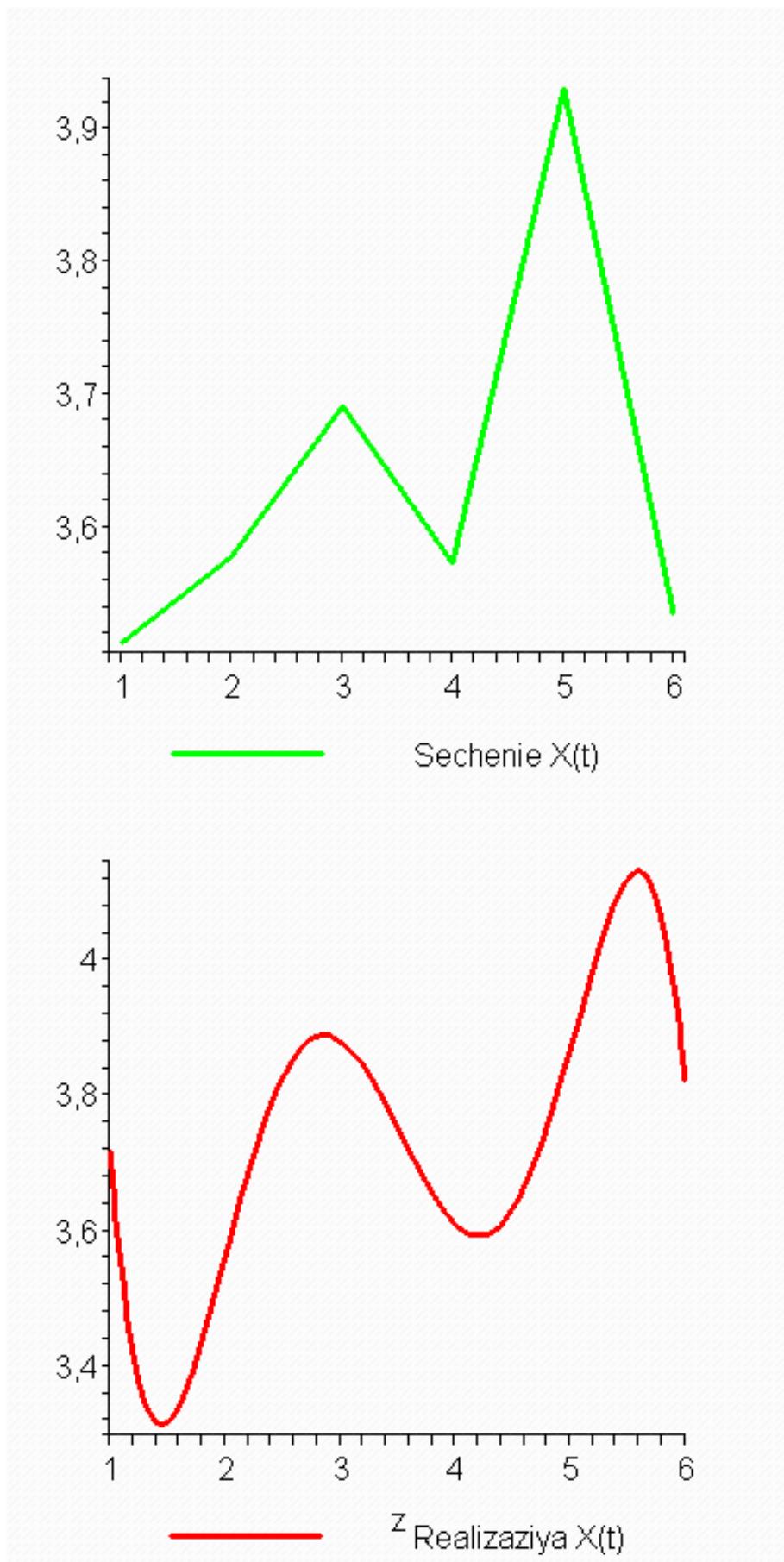
```
> for i from 1 to n do
```

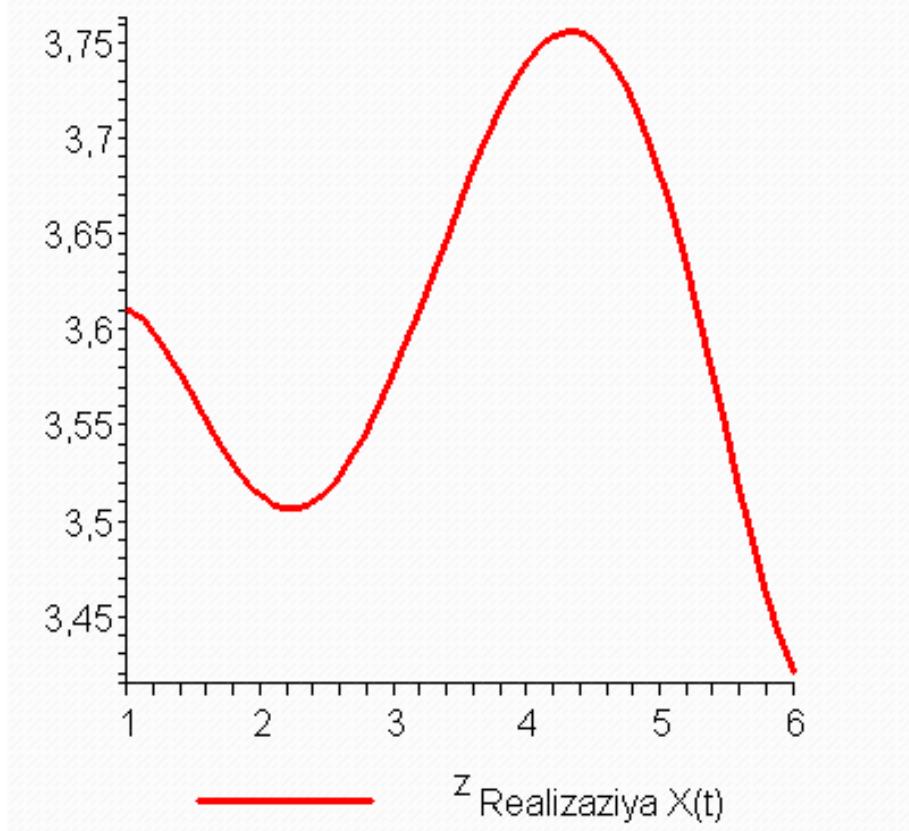
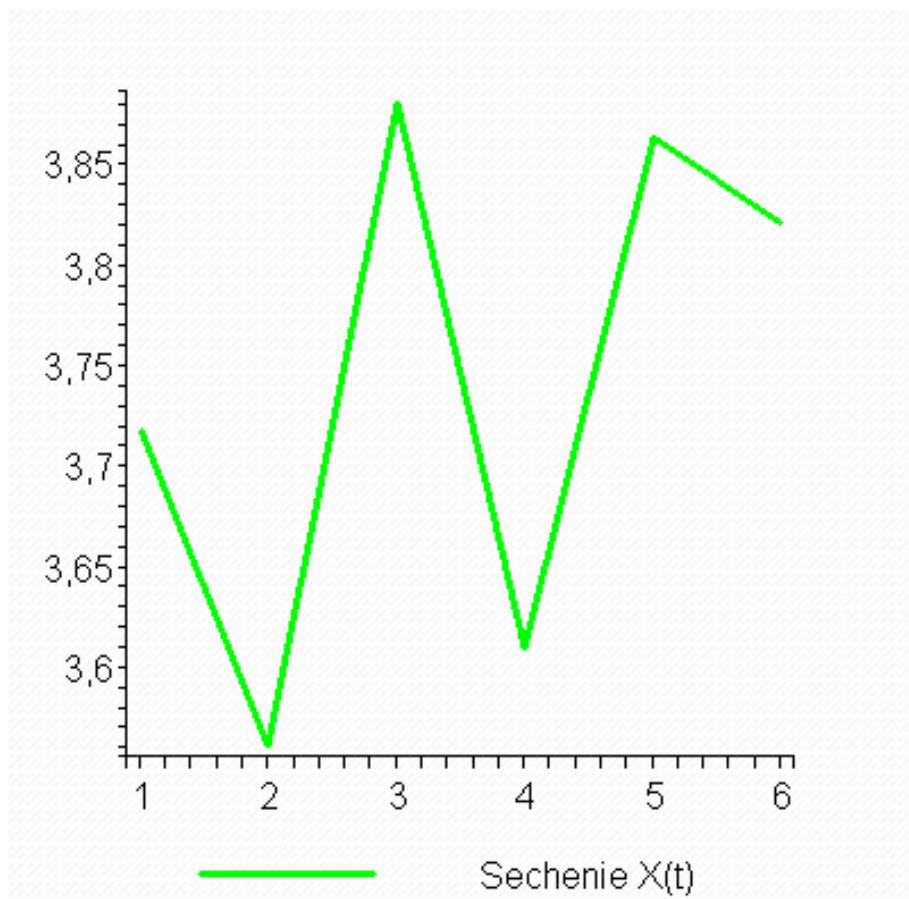
```

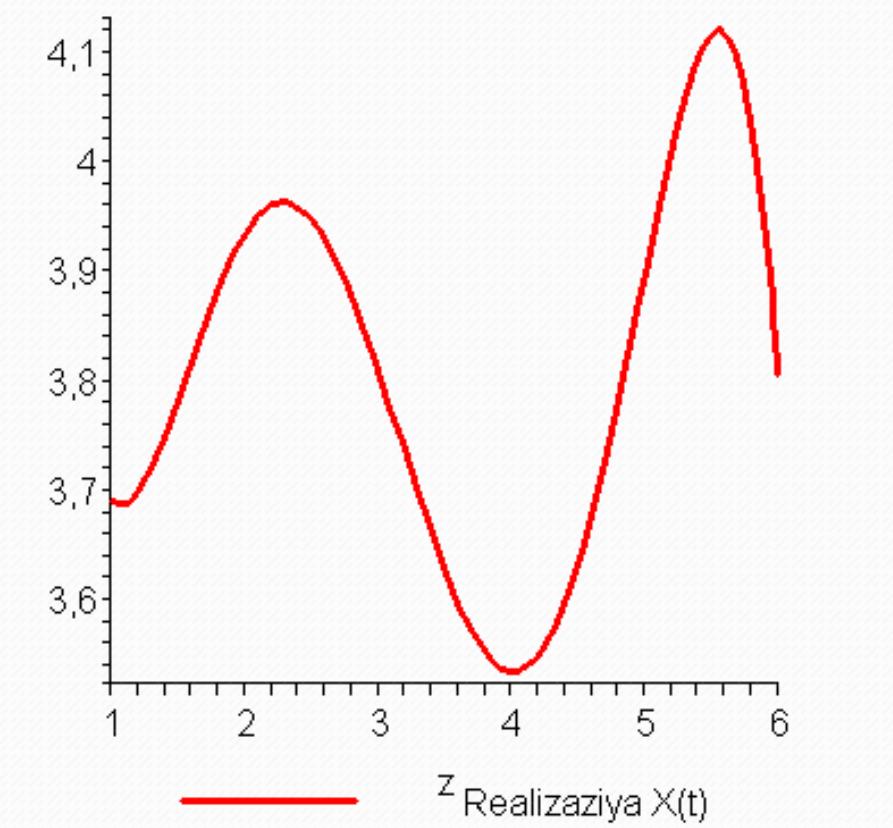
plot(PolynomialInterpolation([seq(k,
k=1..m)], [seq(X[i,k],k=1..m)], z, form=Lagrange),
z=1..m,
thickness=2, color= red,
legend=`Realizaziya X(t)`);
listplot([seq(X[i,k], k=1..m)], thickness=2,
color= green, legend=`Sechenie X(t)`);
end do;

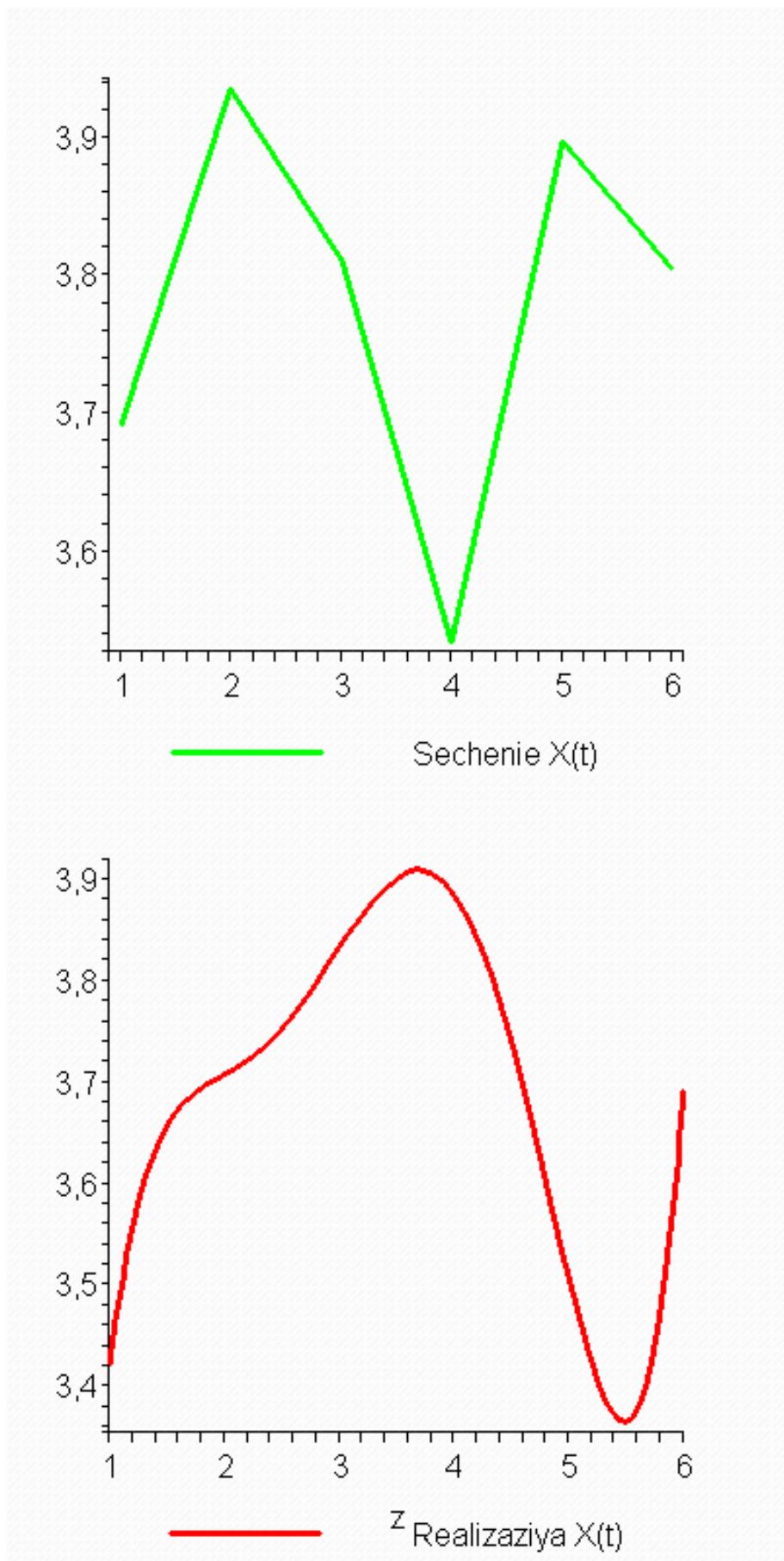
```

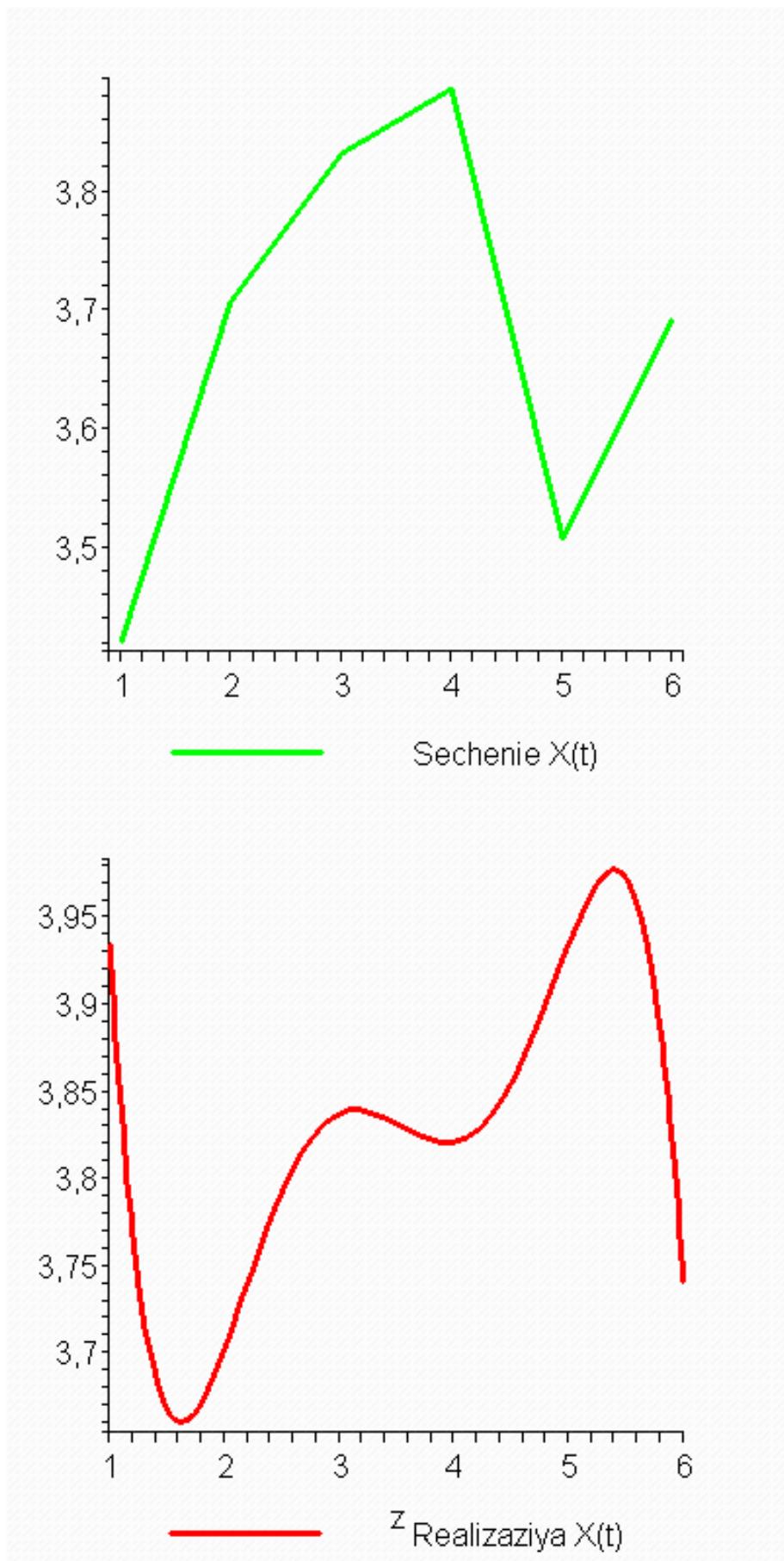


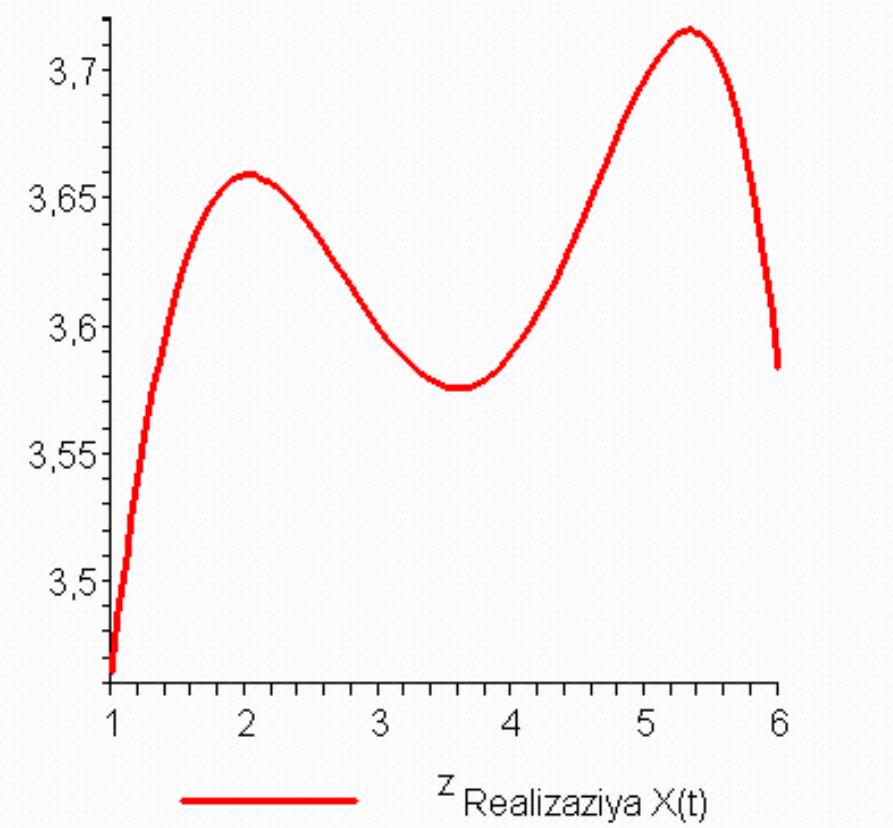
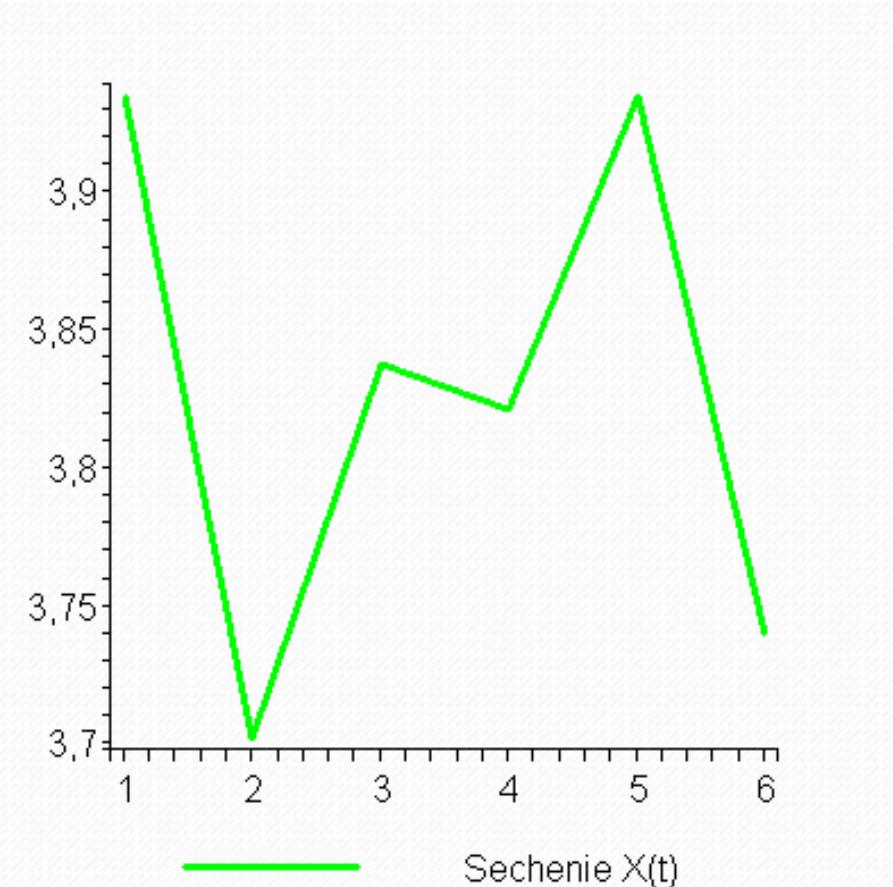


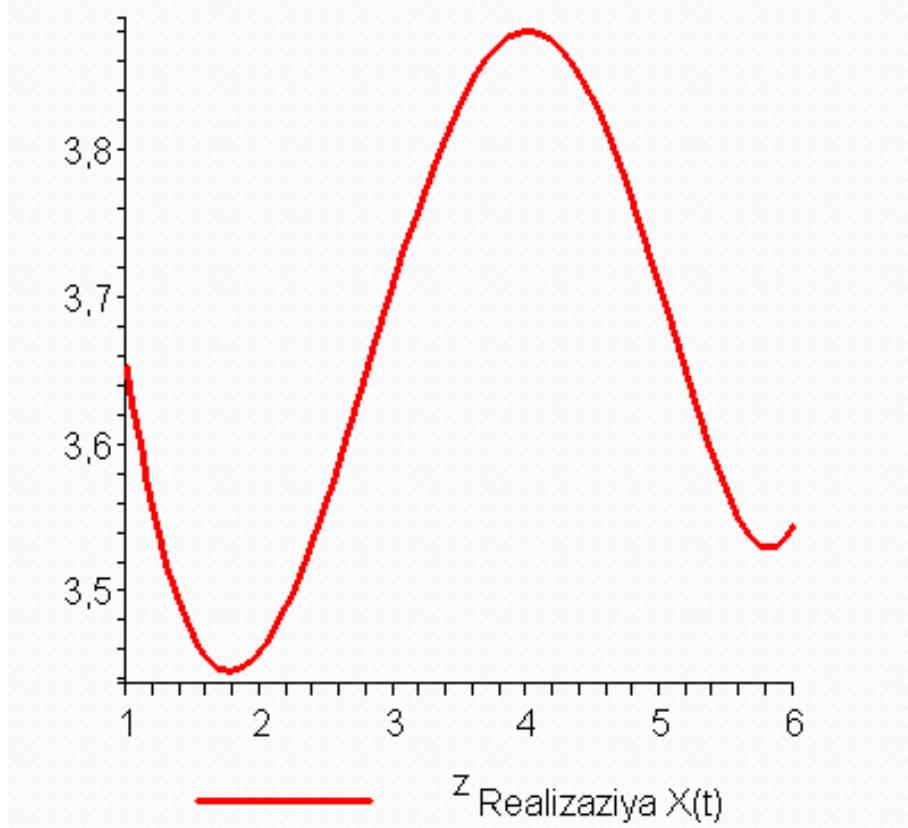
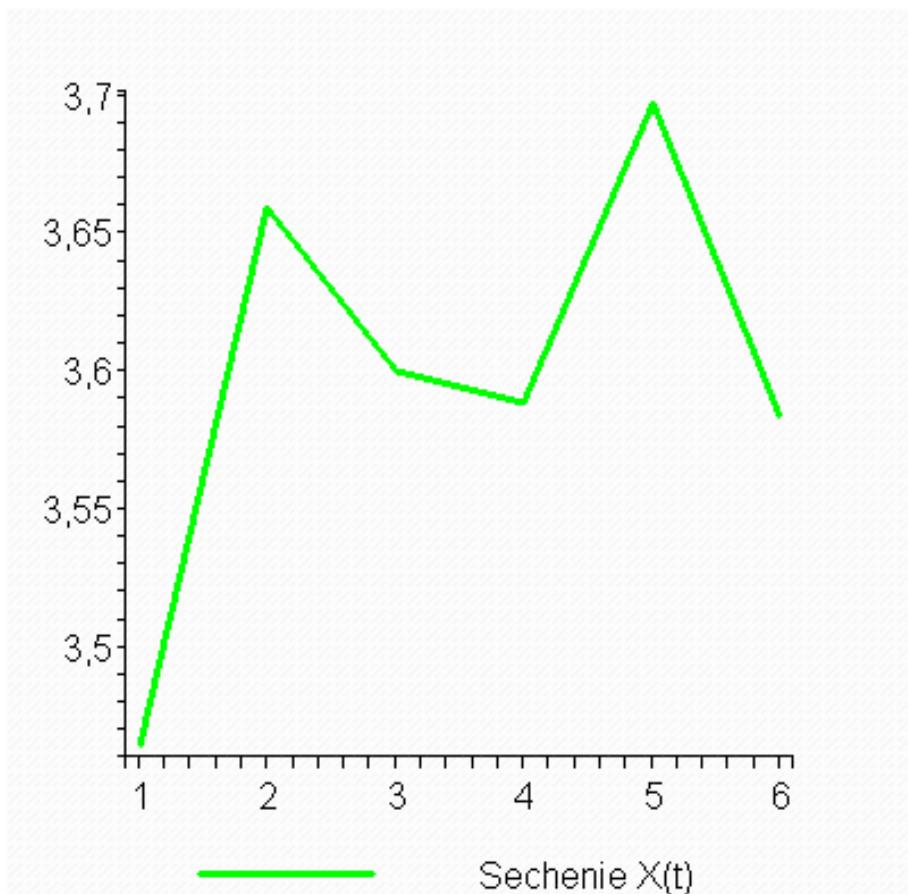


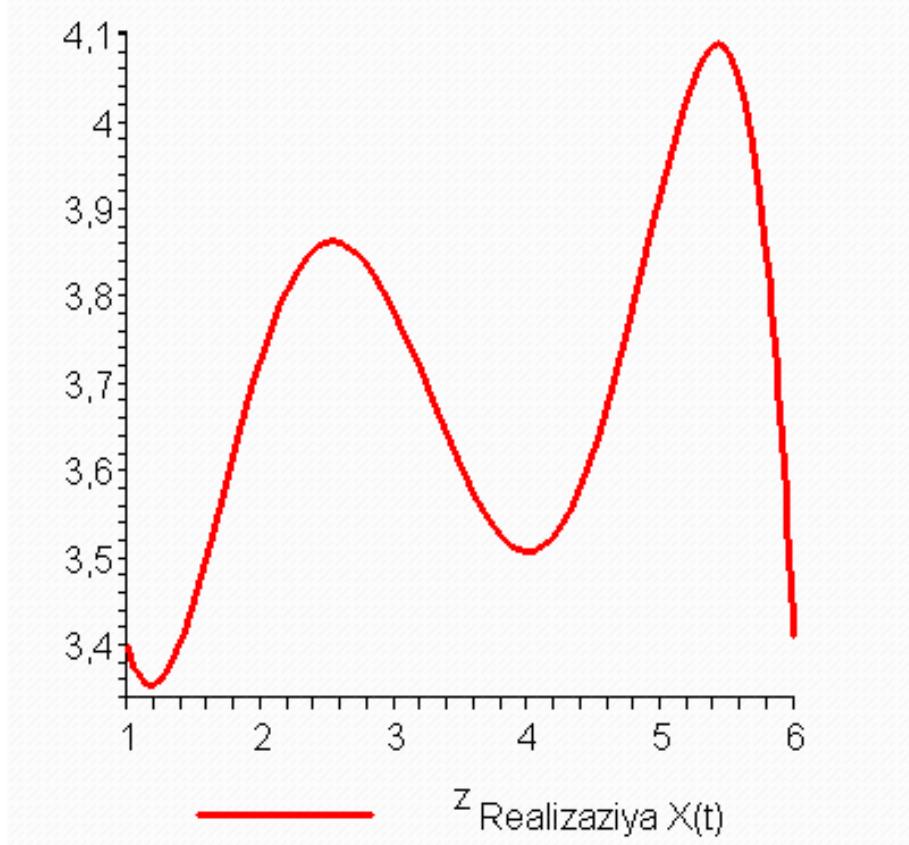
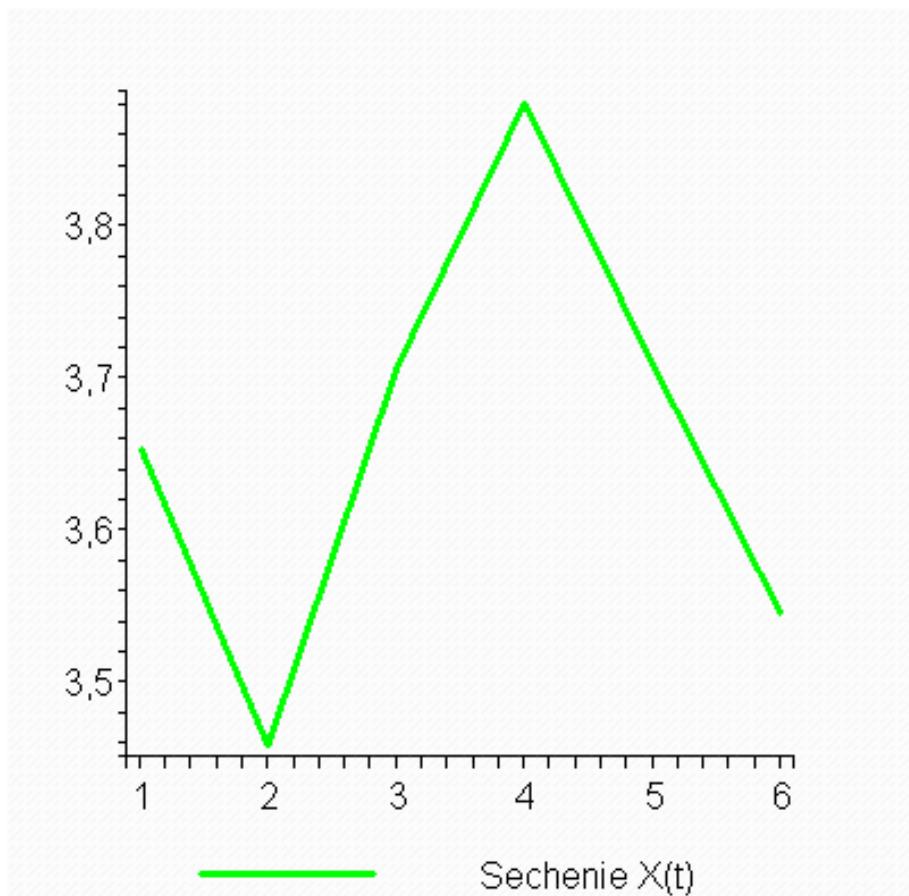


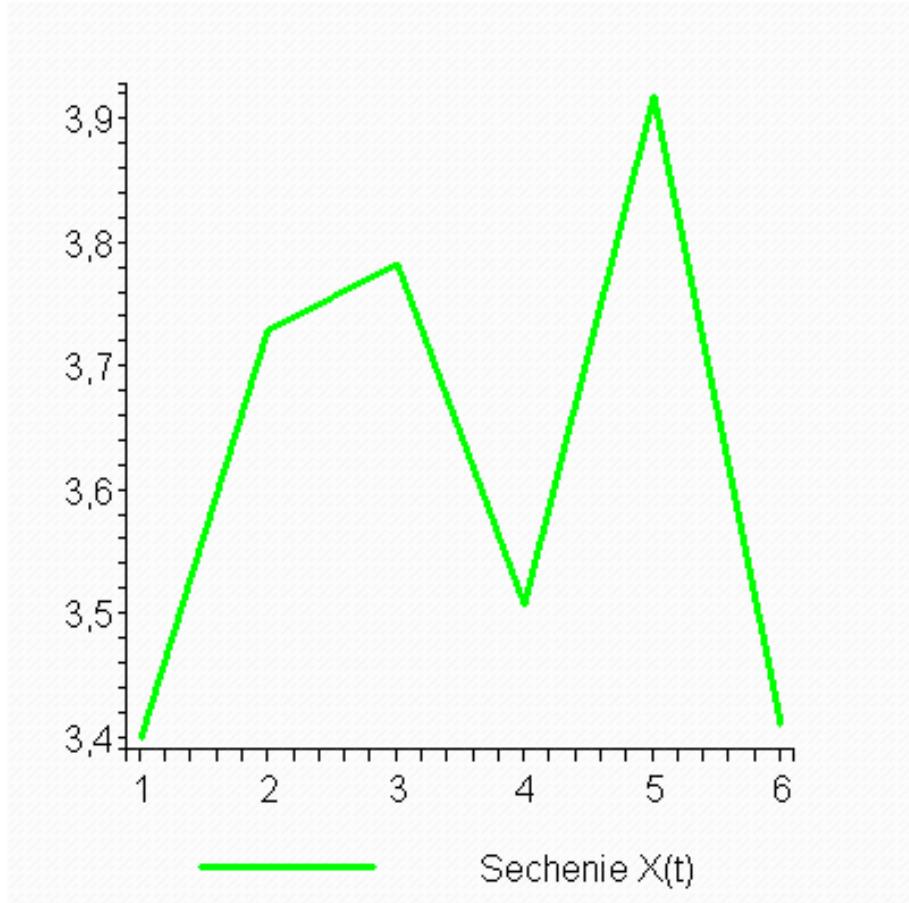








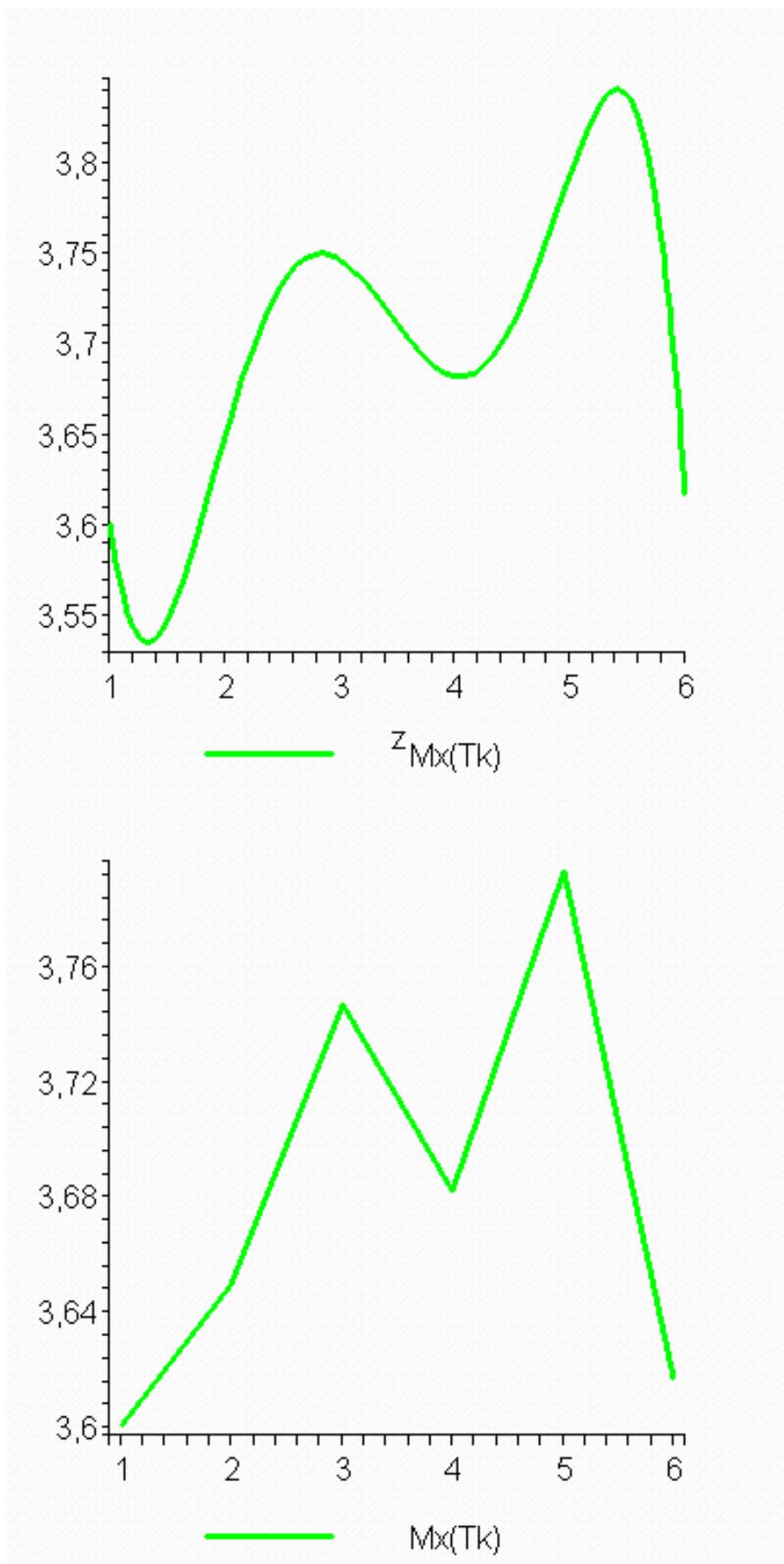




7. Оценка, интерполяция и визуализация математических ожиданий $Mx(Tk)$ значений в сечениях случайной функции $X(t)$

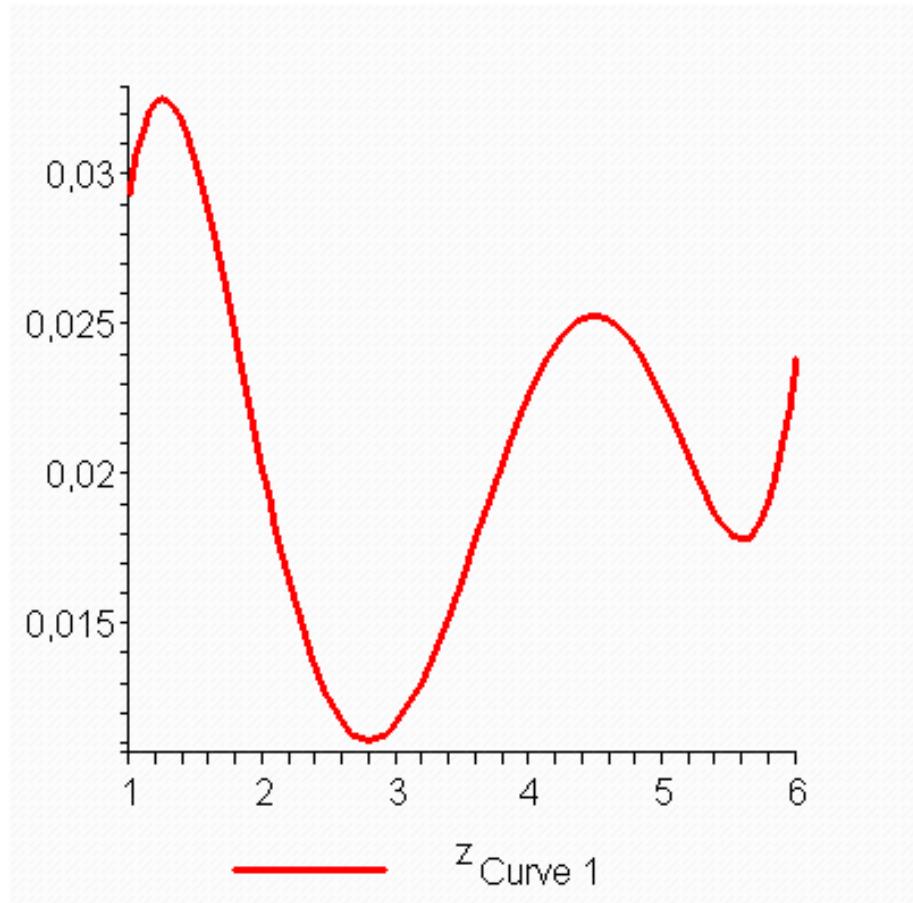
```
> Mx:=[seq(add(X[i,k], i=1..n), k=1..m)]/n;
Mx:=[3.601000000, 3.649600000, 3.746800000, 3.682600000, 3.793000000, 3.617200000]

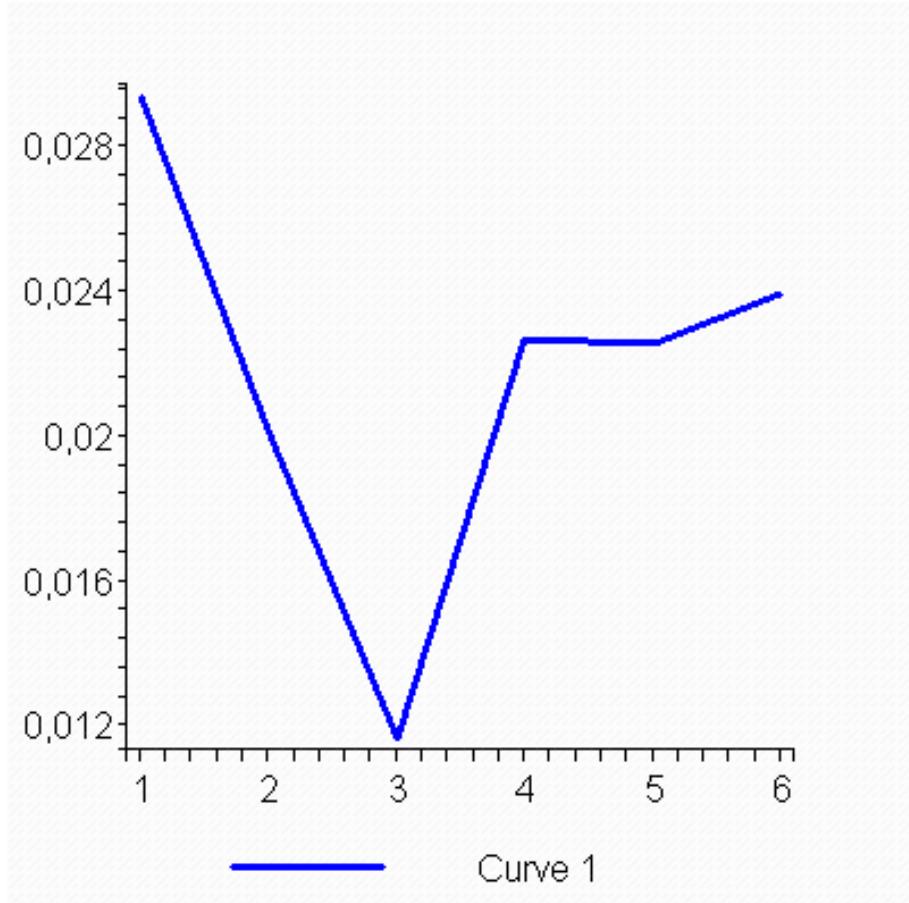
> plot(PolynomialInterpolation([seq(k, k=1..m)], 
Mx, z, form=Lagrange), z=1..m, color=green,
thickness=2, legend=`Mx(Tk)`);
listplot(Mx, color=green, thickness=2,
legend=`Mx(Tk)`);
```



8. Оценка, интерполяция и визуализация дисперсий $Dx(T_k)$ значений в сечениях случайной функции $X(t)$

```
> Dx := [seq(add((X[i,k] -  
Mx[k])^2, i=1..n), k=1..m) / (n-1)];  
Dx := [0.02937708000, 0.02016981000, 0.01166967000, 0.02267190000, 0.02256093000, 0.02392416000]  
  
> plot(PolynomialInterpolation([seq(k, k=1..m)],  
Dx, z, form=Lagrange), z=1..m, color=red,  
thickness=2);  
listplot(Dx, color=blue, thickness=2);
```





9. Оценка, интерполяция и визуализация корреляционных моментов $K_x(T_k, T_l)$ для значений в сечениях случайной функции $X(t)$

```

> Kx:=Matrix(1..m, 1..m);
# Определение матрицы для корреляционных
моментов Kx(Tk, Tl)
whattype(Kx);

for k from 1 to m do
    for l from 1 to m do
        Kx[k, l]:=0;
        for i from 1 to n do
            Kx[k, l]:=Kx[k, l]+(X[i,k]-
Mx[k])*(X[i,l]-Mx[l])/ (n-1);# Расчет

```

корреляционных моментов $K_x(T_k, T_l)$ с помощью циклов

```
    end do;  
end do;  
end do;
```

```
Kx:=[seq([seq(add((X[i,k]-Mx[k])*(X[i,l]-Mx[l]),  
i=1..n), l=1..m)], k=1..m)/(n-1)];#
```

Аналитический расчет корреляционных моментов K_x
`whattype(Kx);`

```
matrixplot(Kx, heights=histogram, axes=normal,  
gap=0.25, style=patchcontour);# Визуализация  
корреляционных моментов  $K_x(T_k, T_l)$ 
```

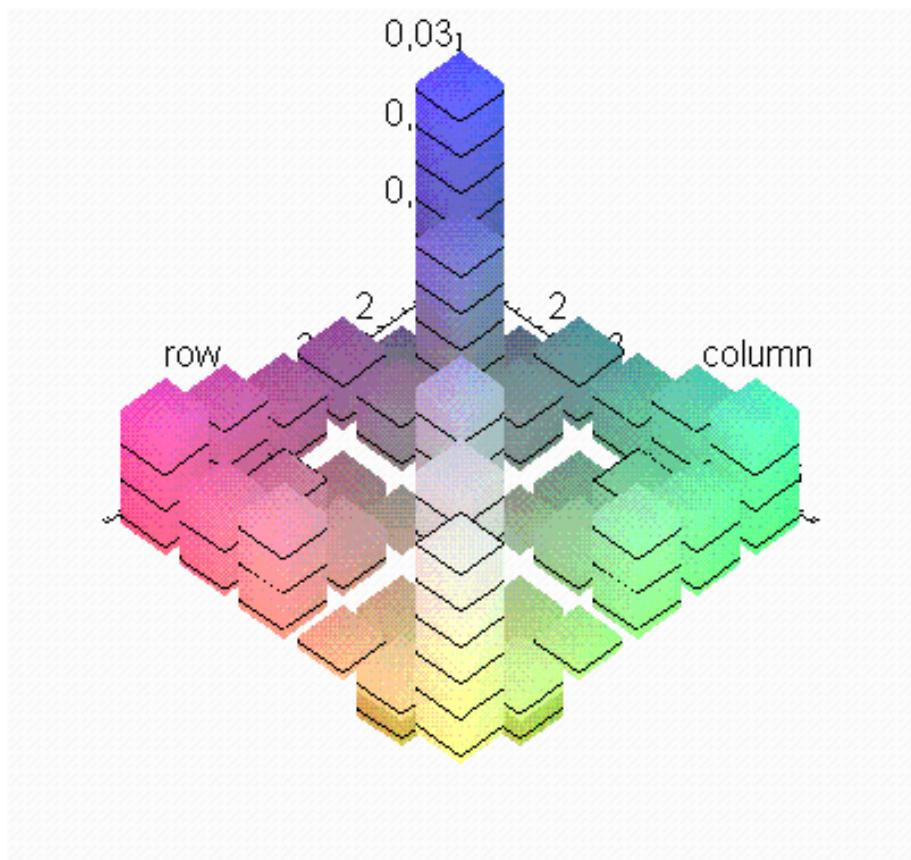
Matrix

$$Kx := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrix

```
Kx:=[[0.02937708000, 0.00003118500000, 0.006282360000, 0.007047000000, 0.01081633500,  
0.01453828500], [0.00003118500000, 0.02016981000, 0.006497415000, -0.008637435000,  
0.005633145000, 0.009471735000], [0.006282360000, 0.006497415000, 0.01166967000,  
0.0008577900000, 0.004765635000, 0.01180089000], [0.007047000000, -0.008637435000,  
0.0008577900000, 0.02267190000, -0.01375015500, 0.001572210000],  
[0.01081633500, 0.005633145000, 0.004765635000, -0.01375015500, 0.02256093000, 0.003056130000],  
[0.01453828500, 0.009471735000, 0.01180089000, 0.001572210000, 0.003056130000, 0.02392416000]]
```

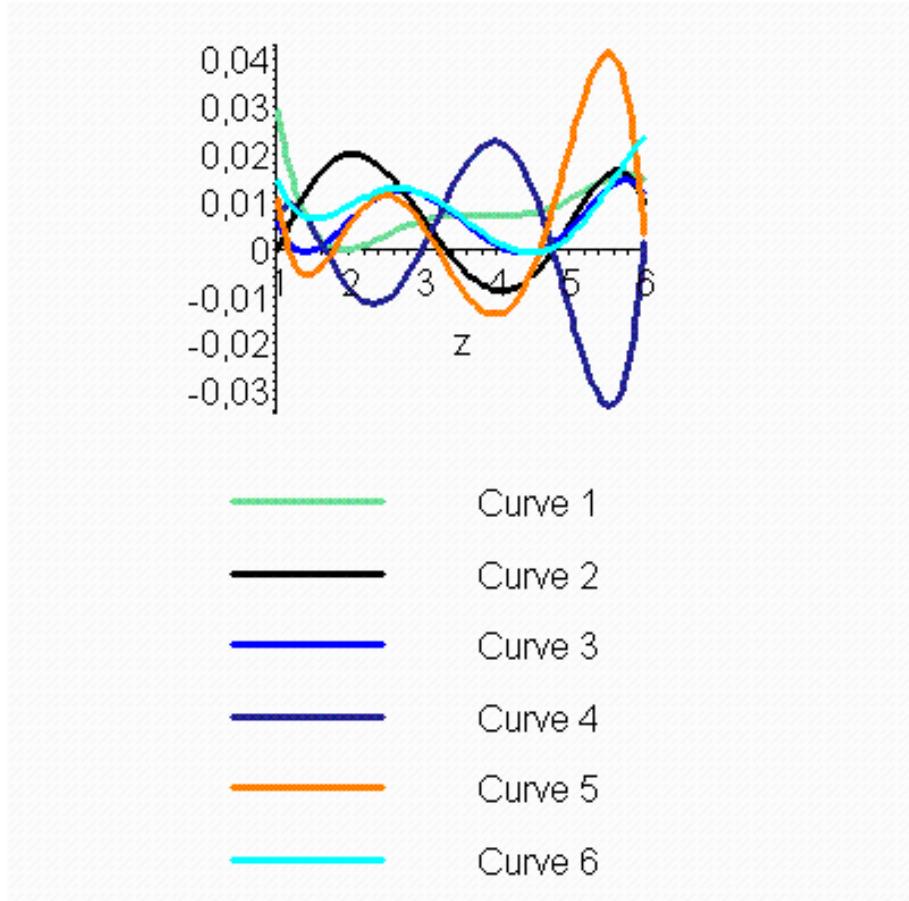
list



```

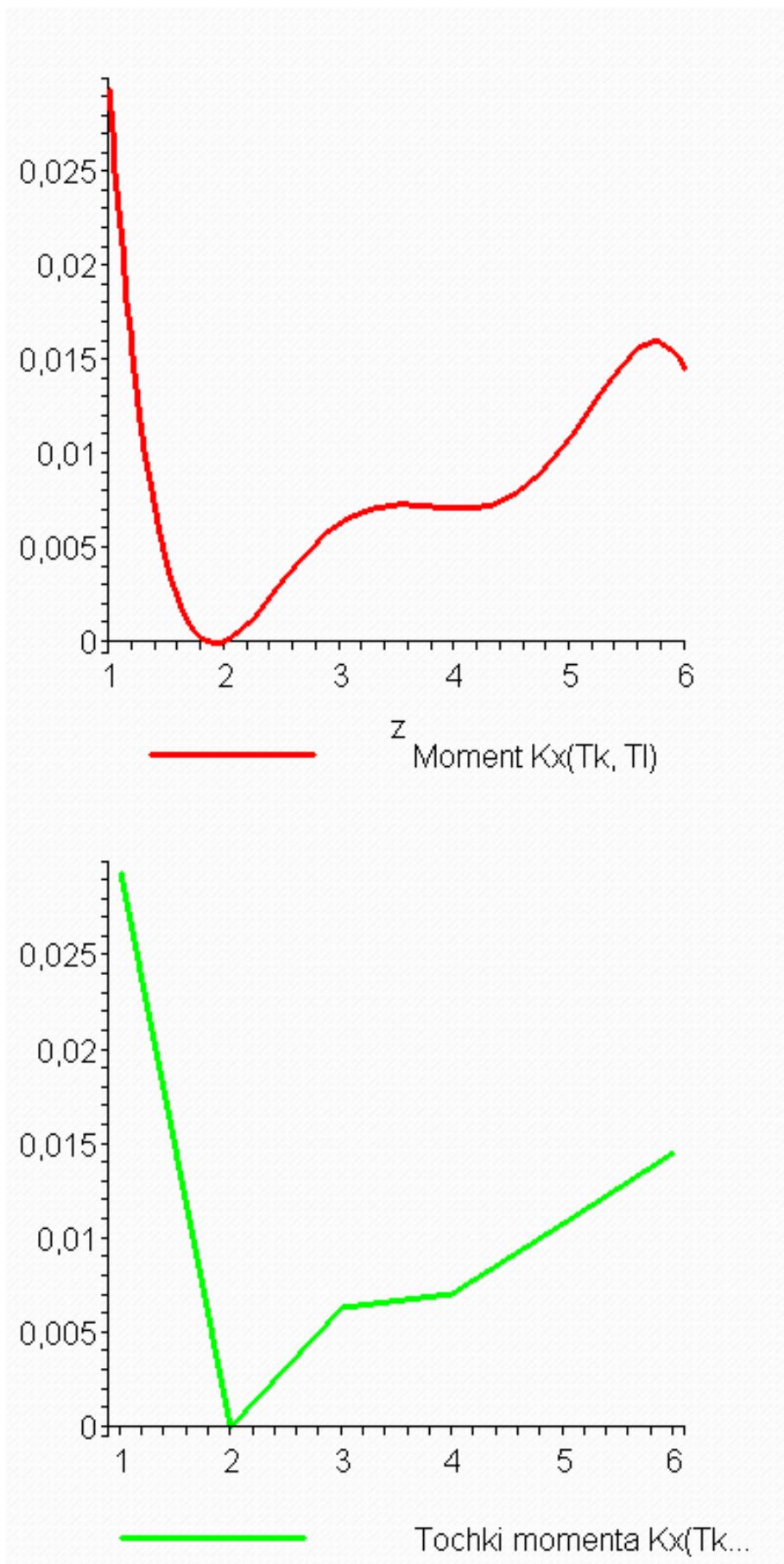
> W1:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(Kx[1,i],i=1..m)], z, form=Lagrange):
W2:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(Kx[2,i],i=1..m)], z, form=Lagrange):
W3:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(Kx[3,i],i=1..m)], z, form=Lagrange):
W4:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(Kx[4,i],i=1..m)], z, form=Lagrange):
W5:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(Kx[5,i],i=1..m)], z, form=Lagrange):
W6:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(Kx[6,i],i=1..m)], z, form=Lagrange):
plot([W1, W2, W3, W4, W5, W6], z=1..m,
color=[aquamarine, black, blue, navy, coral,
cyan],
thickness=[2, 2, 2, 2, 2, 2], legend=[`1`, `2`,
`3`, `4`, `5`, `6`]);

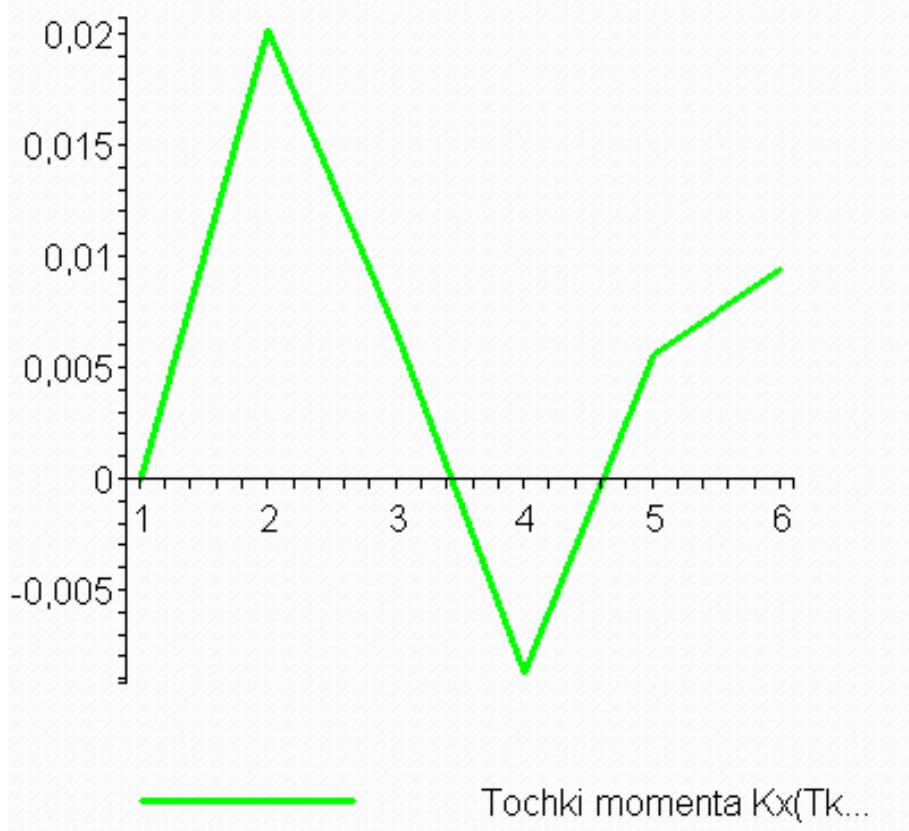
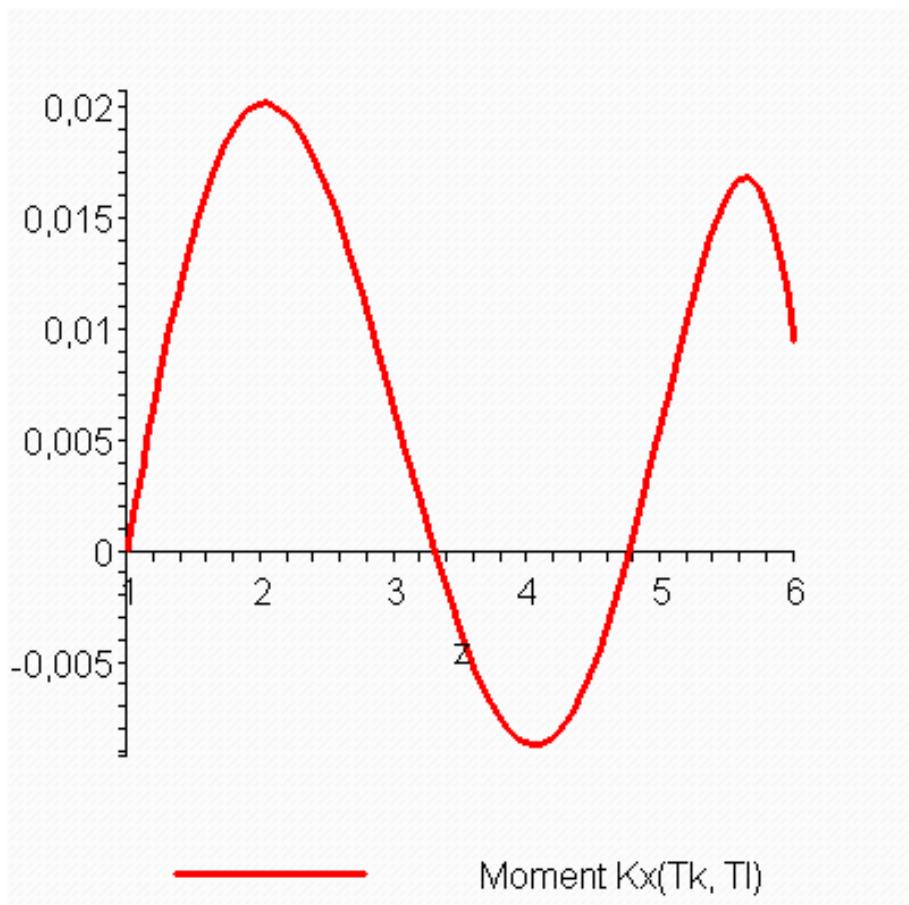
```

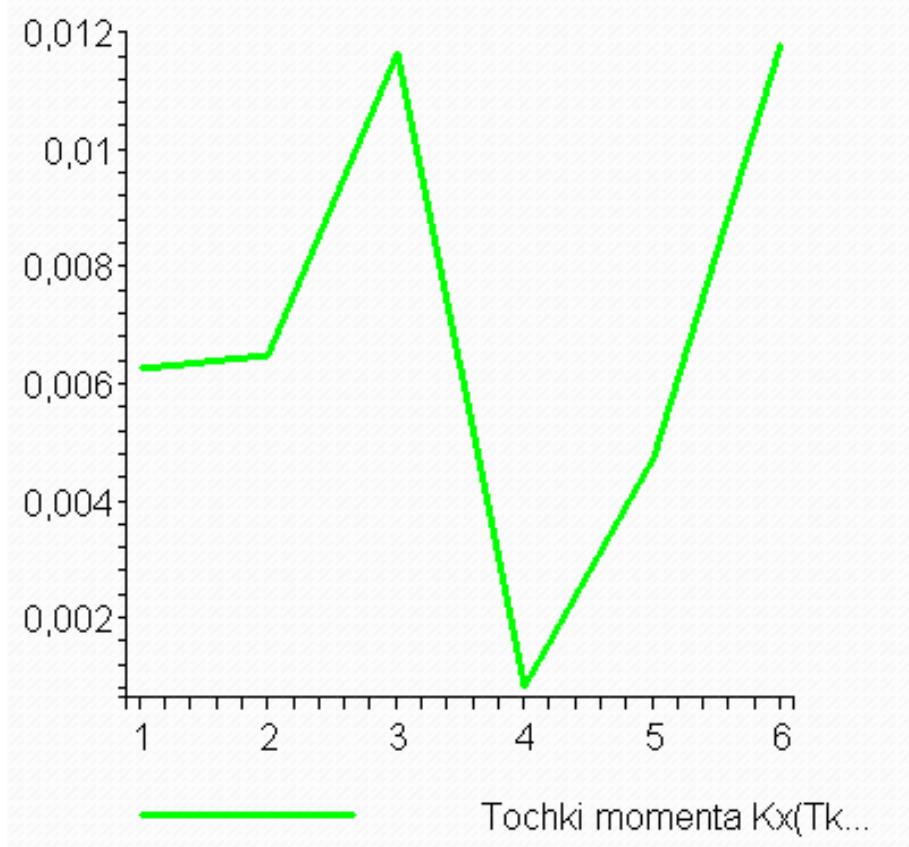
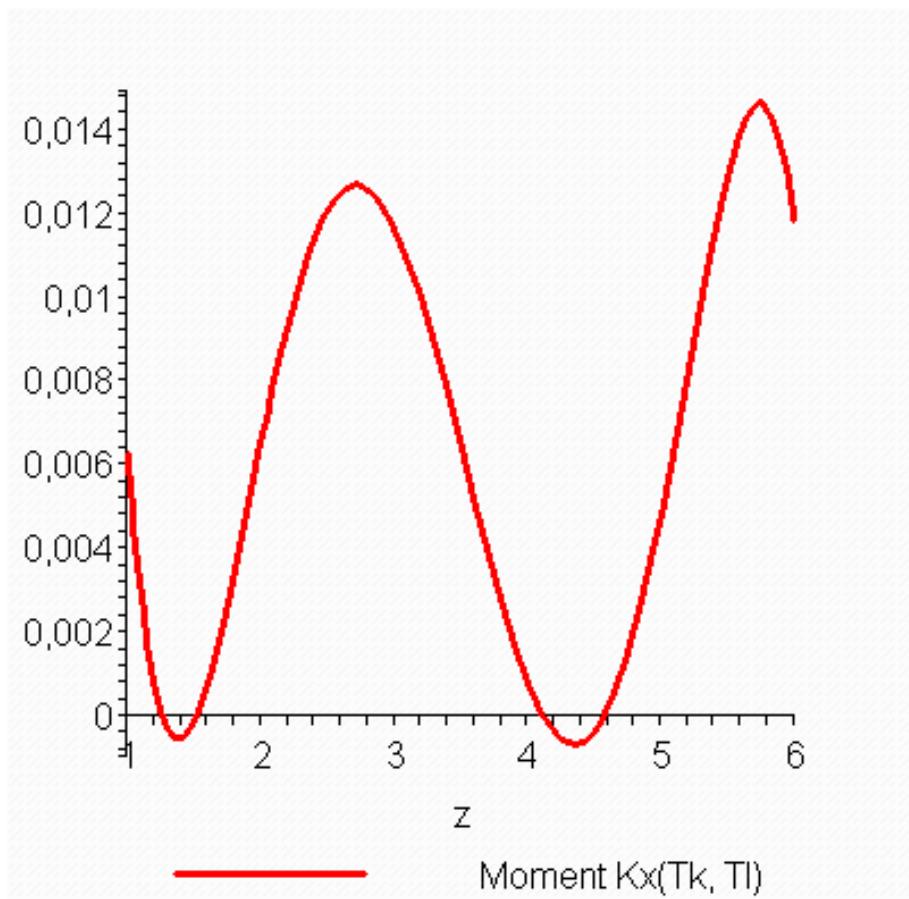


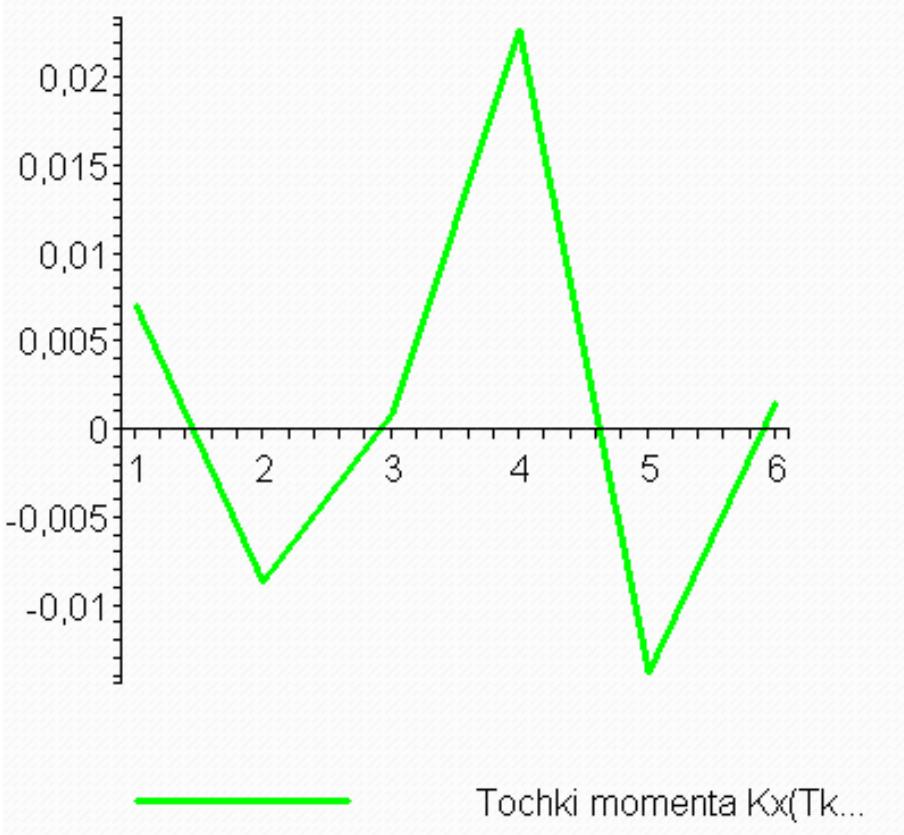
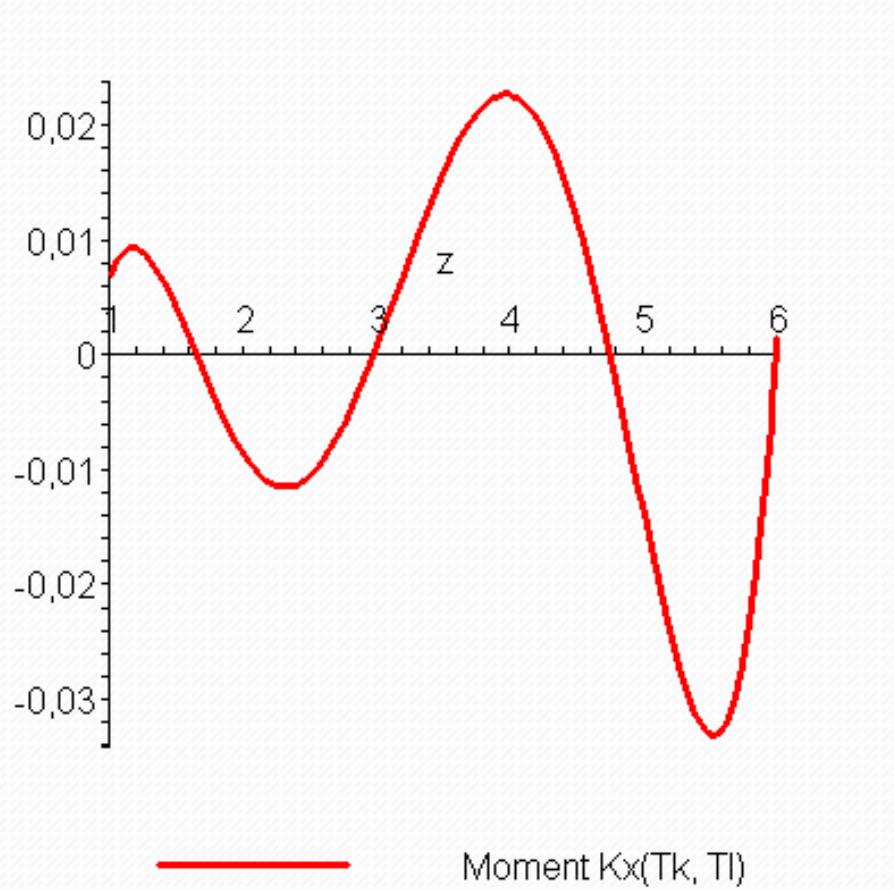
```

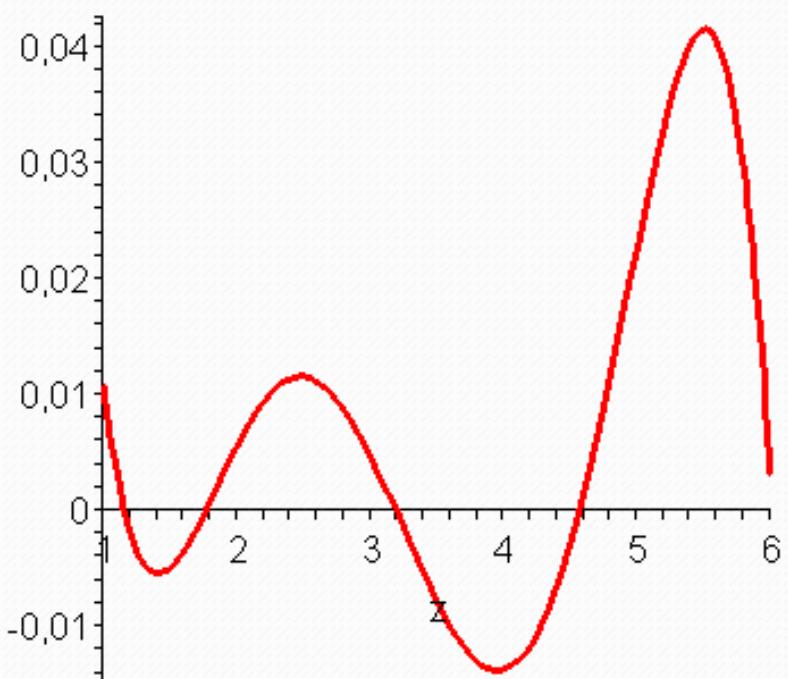
> for i from 1 to m do
    plot(PolynomialInterpolation([seq(k,
k=1..m)], [seq(Kx[i,k],k=1..m)], z,
form=Lagrange ), z=1..m,
        thickness=2, color= red,
legend=`Moment Kx(Tk, Tl)`);
    listplot([seq(Kx[i,k], k=1..m)],
thickness=2, color= green, legend= `Tochki
momenta Kx(Tk, Tl)` );
end do;
    
```







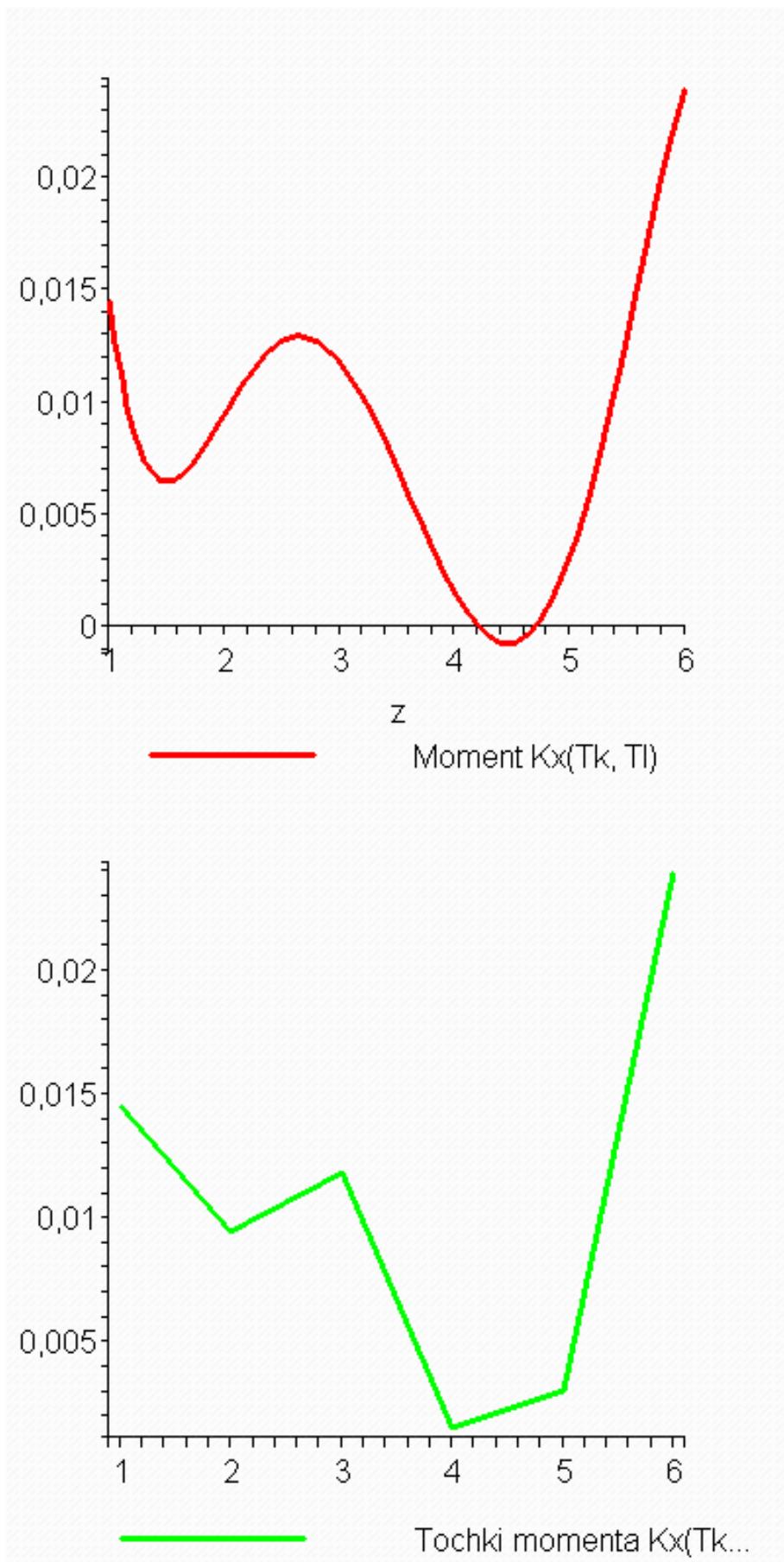




— Moment $K_x(T_k, T_l)$



— Tochki momenta $K_x(T_k, T_l)$



10. Оценка, интерполяция и визуализация нормированной корреляционной функции $R_x(T_k, T_l)$ значений в сечениях случайной функции $X(t)$

```
> Rx:=Matrix(1..m, 1..m);  
# Определение матрицы для нормированной  
корреляционной функции  $R_x(T_k, T_l)$   
whattype(Kx);  
  
for k from 1 to m do  
    for l from 1 to m do  
        Rx[k, l]:=Kx[k, l]/(sqrt(Kx[k,  
k])*sqrt(Kx[1, 1])); # Расчет нормированной  
корреляционной функции  $R_x(T_k, T_l)$  с помощью  
циклов  
    end do;  
end do;  
  
Rx:=[seq([seq(Kx[k, l]/(sqrt(Kx[k,  
k])*sqrt(Kx[1, 1])), k=1..m)], l=1..m)]; #  
Аналитический расчет нормированной  
корреляционной функции  
whattype(Rx);  
  
matrixplot(Rx, heights=histogram, axes=normal,  
gap=0.25, style=patchcontour); # Визуализация  
корреляционных моментов  $K_x(T_k, T_l)$ 
```

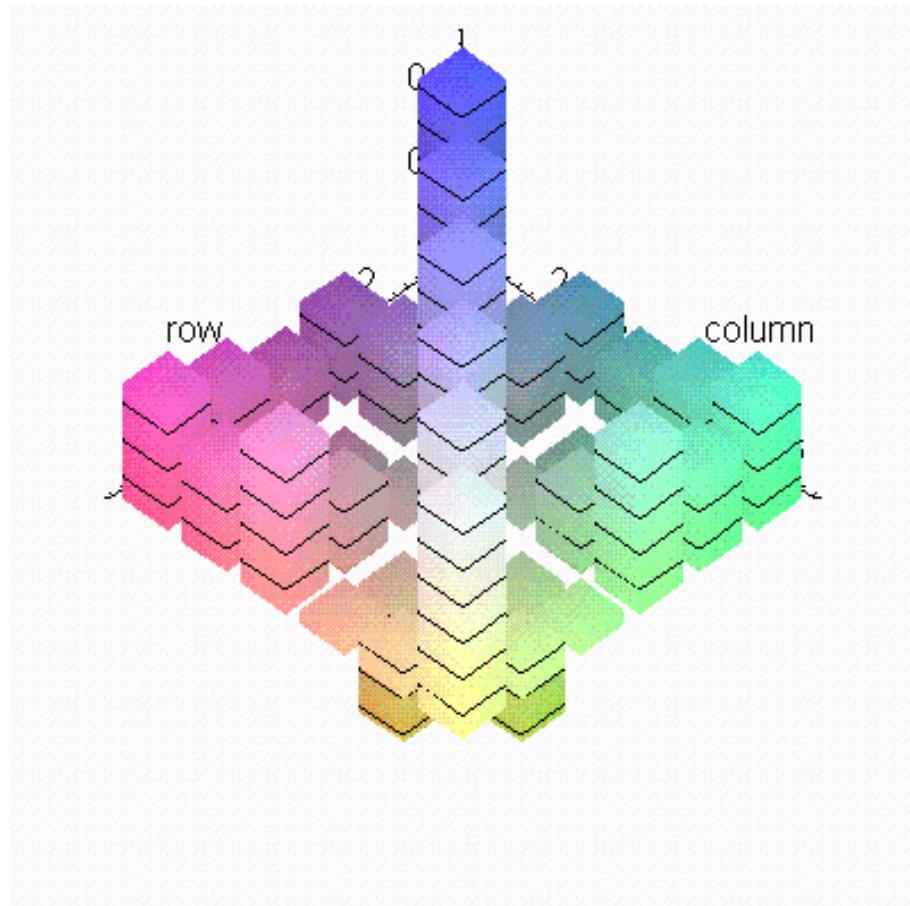
$R_x :=$

? 0	0	0	0	0	0?
? 0	0	0	0	0	0?
? 0	0	0	0	0	0?
? 0	0	0	0	0	0?
? 0	0	0	0	0	0?
? 0	0	0	0	0	0?
? 0	0	0	0	0	0?
? 0	0	0	0	0	0?

list

```
Rx:=[[1.000000000, 0.001281122126, 0.3393041870, 0.2730586884, 0.4201431793, 0.5483912494],  
[0.001281122125, 0.9999999993, 0.4235068270, -0.4039149519, 0.2640714971, 0.4311816660],  
[0.3393041870, 0.4235068270, 1.000000000, 0.05273606645, 0.2937061160, 0.7062640909],  
[0.2730586884, -0.4039149519, 0.05273606645, 1.000000001, -0.6079741807, 0.06750691268],  
[0.4201431794, 0.2640714971, 0.2937061160, -0.6079741807, 1.000000000, 0.1315451910],  
[0.5483912494, 0.4311816659, 0.7062640908, 0.06750691270, 0.1315451910, 1.000000000]]
```

list



11. Оценка математического ожидания Мх корреляционных моментов сечений случайной функции X(t)

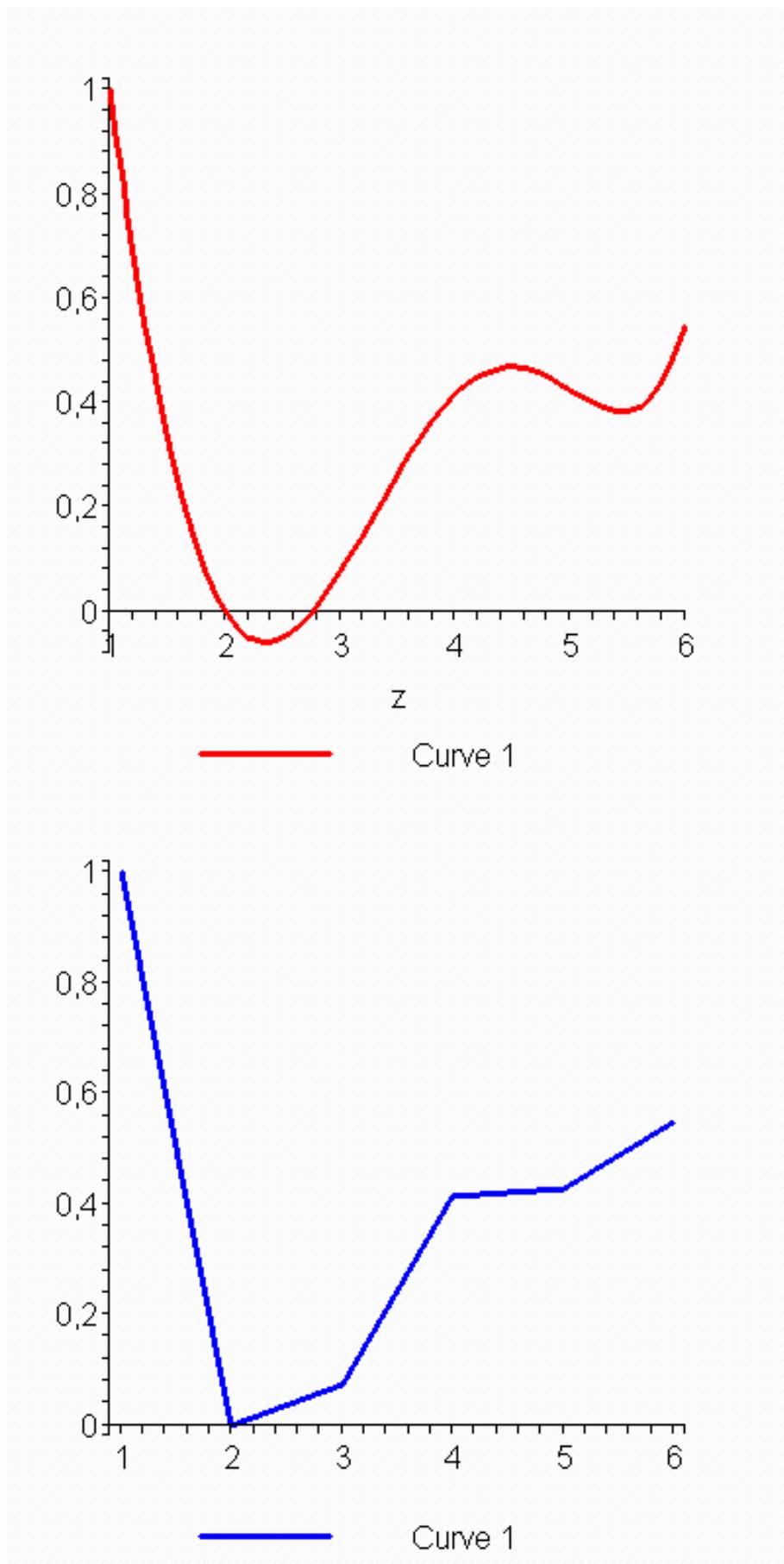
```
> StatMx:=add(Mx [k] , k=1..m) /m;  
StatMx := 3.681700000
```

12. Оценка математического ожидания Dx дисперсий сечений случайной функции $X(t)$

```
> StatDx:=add(Dx[k], k=1..m)/m;  
StatDx := 0.02172892500
```

13. Оценка, интерполяция и визуализация нормированной корреляционной функции $RoX(T_k-T_l)$ значений в сечениях случайной функции $X(t)$

```
> RoX:=[seq(add(Rx[k, k+i], k=1..m-i)/(m-i),  
i=0..m-1)];  
RoX:=[1.000000000, 0.0002190051800, 0.07415056595, 0.4144647587, 0.4256624226, 0.5483912494]  
  
> plot(PolynomialInterpolation([seq(k, k=1..m)],  
RoX, z, form=Lagrange), z=1..m, color=red,  
thickness=2);  
listplot(RoX, color=blue, thickness=2);
```



P.S. Случайная функция задается тремя способами соответственно в разделах 2, 3 и 4. Исполнив один из этих разделов, следует перейти к разделу 5 для дальнейших вычислений

> **stop!!!!** **КОНЕЦ ПРОГРАММЫ ДЛЯ
ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ № 1 ПО ТСМО**

Maple-программа для исследования прохождения стационарной случайной функции через стационарную линейную систему

Лабораторная работа № 2

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ФУНКЦИИ $X(t)$ СТАЦИОНАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ

[Лабораторная работа № 2](#) =====>

D:\TMO\Lab2\Лабораторная работа № 2.mht

1. Инициализация рабочего документа и генератора случайных чисел

```
> restart:  
# Сброс значений всех переменных при повторном запуске  
randomize(): r := rand(1..30): #  
Рандомизация и настройка генератора случайных чисел на диапазон от 1 до 30  
with(LinearAlgebra):  
# Подключение пакета  
with(CurveFitting):  
# Подключение пакета  
with(plots):  
# Подключение пакета  
Warning, the name LeastSquares has been rebound  
Warning, the name changecoords has been redefined
```

2. Задание описания и параметров

для анализа линейной динамической системы

2.1 Задание математического описания

Обозначив через $x(t)$ воздействие на систему, в качестве которого в данном случае рассматривается одна из реализаций случайной функции $X(t)$, а через $y(t)$ – реакцию системы на это воздействие, получим заданное в лабораторной работе описание линейной динамической системы в двух формах:

- а) в дифференциальной форме: $a1 * y'(t) + a0 * y(t) = b1 * x'(t) + b0 * x(t);$
- б) в операторной форме: $(a1?p + a0)?y(t) = (b1?p + b0)?x(t).$

2.2 Задание варианта параметров системы

```
> NomerStudenta := 17;  
# Номер фамилии студента в списке  
преподавателя  
a0 := 1 + 0.02*NomerStudenta; #  
Постоянный коэффициент при y(t)  
a1 := 7 - 0.01*NomerStudenta; #  
Постоянный коэффициент при y'(t):  
b0 := 5 + 0.05*NomerStudenta; #  
Постоянный коэффициент при x(t)  
b1 := 8 + 0.02*NomerStudenta; #  
Постоянный коэффициент при x'(t)
```

```

Mx := 8 + 0.1*NomerStudenta;          #
Математическое ожидание входной
стационарной случайной функции X(t)

# на интервале наблюдения, оценка которой
рассчитывается по формуле (1.7)

# лабораторной работы № 1
Dx := 2 + 0.2*NomerStudenta;          #
Дисперсия входной стационарной случайной
функции X(t) на интервале

# наблюдения, оценка которой рассчитывается
по формуле (1.8) лабораторной

# работы № 1, причем значение нормированной
корреляционной функции

# Кх(0)=Dx согласно таблице 1.5, где она
обозначена через греческую букву "ро"

NomerStudenta := 17

a0 := 1.34
a1 := 6.83
b0 := 5.85
b1 := 8.34
Mx := 9.7
Dx := 5.4

```

3. Математический анализ динамики линейной системы при различных воздействиях

$$a1 * y'(t) + a0 * y(t) = b1 * x'(t) + b0 * x(t)$$

3.1. Свободное движение системы $a1 * y'(t) + a0 * y(t) = 0$ (воздействие отсутствует)

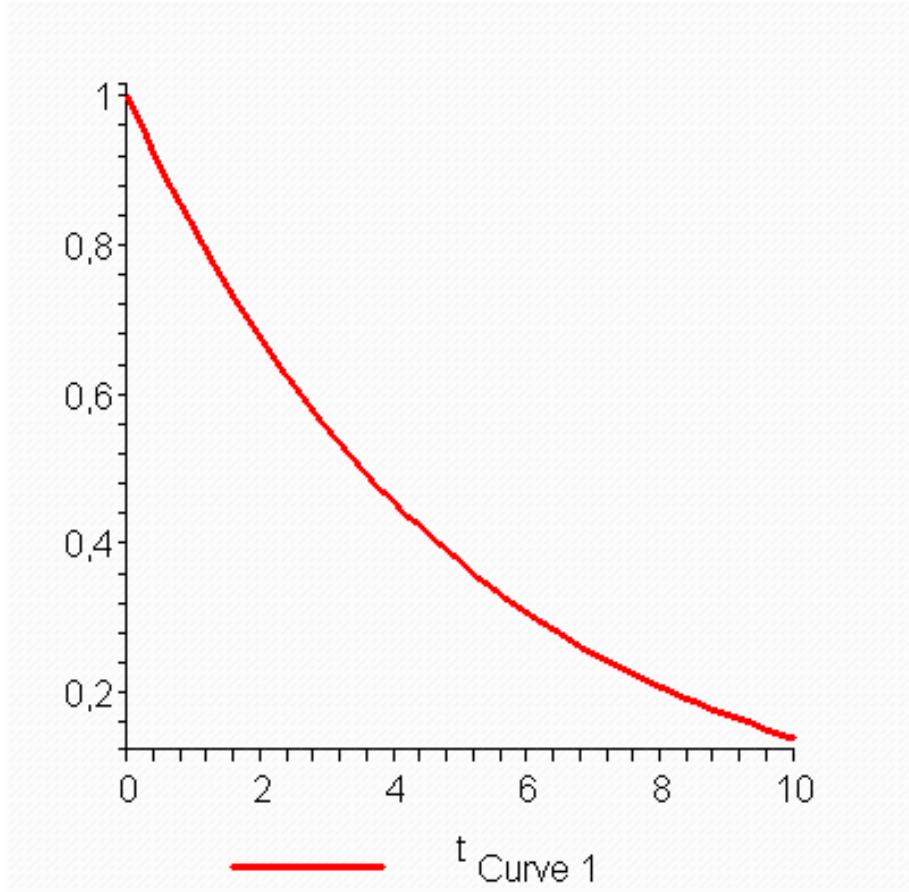
```
> SystemEquation := a1 * diff(y(t), t) + a0
* y(t) = 0; # Уравнение системы на языке
Maple
```

$$\text{SystemEquation} := 6.83 \frac{d}{dt} y(t) + 1.34 y(t) = 0$$

```
> Ry0(t) := dsolve( {SystemEquation,
y(0)=1}, y(t)); # Решение уравнения
системы на языке Maple при y(0) = 0
```

$$Ry0(t) := y(t) = e^{\left(-\frac{134}{683}t\right)}$$

```
> plot(rhs(Ry0(t)), t=0..10.0, color=red,
thickness=2); # Построение графика
свободного движения системы
```



3.2. Движение системы при толчкообразном воздействии $a1 * y'(t) + a0 * y(t) = 1$

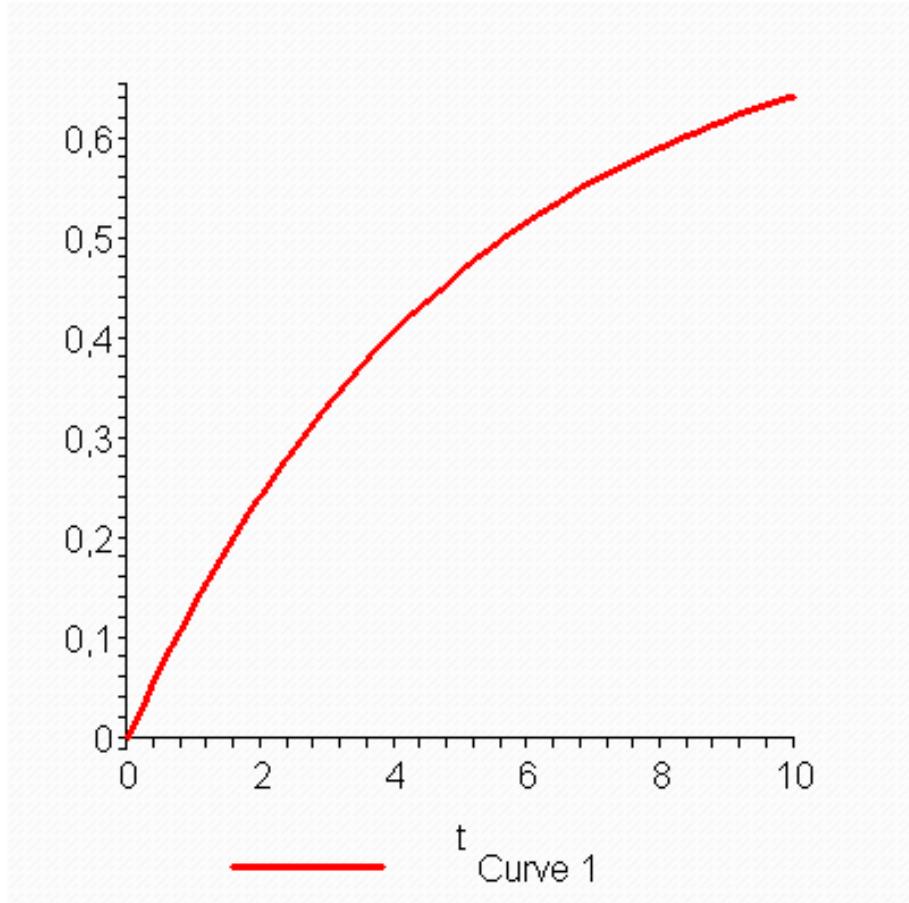
```
> SystemEquation := a1 * diff(y(t), t) + a0
* y(t) = 1; # Уравнение системы на языке
Maple
```

$$SystemEquation := 6.83 \frac{dy(t)}{dt} + 1.34 y(t) = 1$$

```
> Ry1(t) := dsolve( {SystemEquation,
y(0)=0}, y(t)); # Решение уравнения
системы на языке Maple при толчке
```

$$Ry1(t) := y(t) = \frac{50}{67} - \frac{50}{67} e^{-\frac{134}{683} t}$$

```
> plot(rhs(Ry1(t)), t=0..10, color=red,
thickness=2); # Построение
графика движения при толчке
```



3.3. Движение системы при синусоидальном воздействии $a1 * y'(t) + a0 * y(t) = \sin(t)$

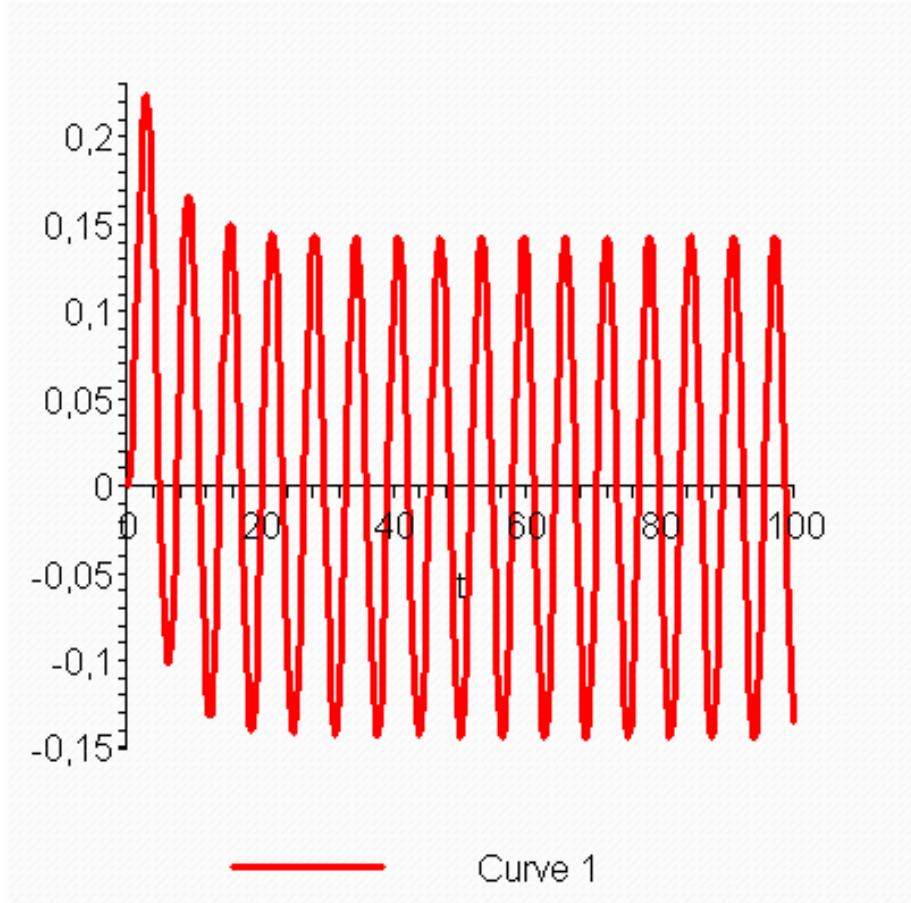
```
> SystemEquation := a1 * diff(y(t), t) + a0
* y(t) = sin(t); # Уравнение системы на
языке Maple
```

$$SystemEquation := 6.83 \frac{d}{dt} y(t) + 1.34 y(t) = \sin(t)$$

```
> RySin(t) := dsolve( {SystemEquation,
y(0)=0}, y(t)); # Решение уравнения
системы на языке Maple при sin(t)
```

$$RySin(t) := y(t) = -\frac{13660}{96889} \cos(t) + \frac{2680}{96889} \sin(t) + \frac{13660}{96889} e^{-\frac{134}{683} t}$$

```
> plot(rhs(RySin(t)), t=0..100, color=red,
thickness=2); # Построение
графика движения при sin(t)
```



>

3.4. Движение системы при заданном воздействии $a1 * y'(t) + a0 * y(t) = b1 * x'(t) + b0 * x(t)$

```
> x(t) := exp(-t) * sin(10*t);
SystemEquation := a1 * diff(y(t), t) + a0 *
y(t) = b1 * diff(x(t), t) + b0 * x(t); #
Уравнение системы на языке Maple
```

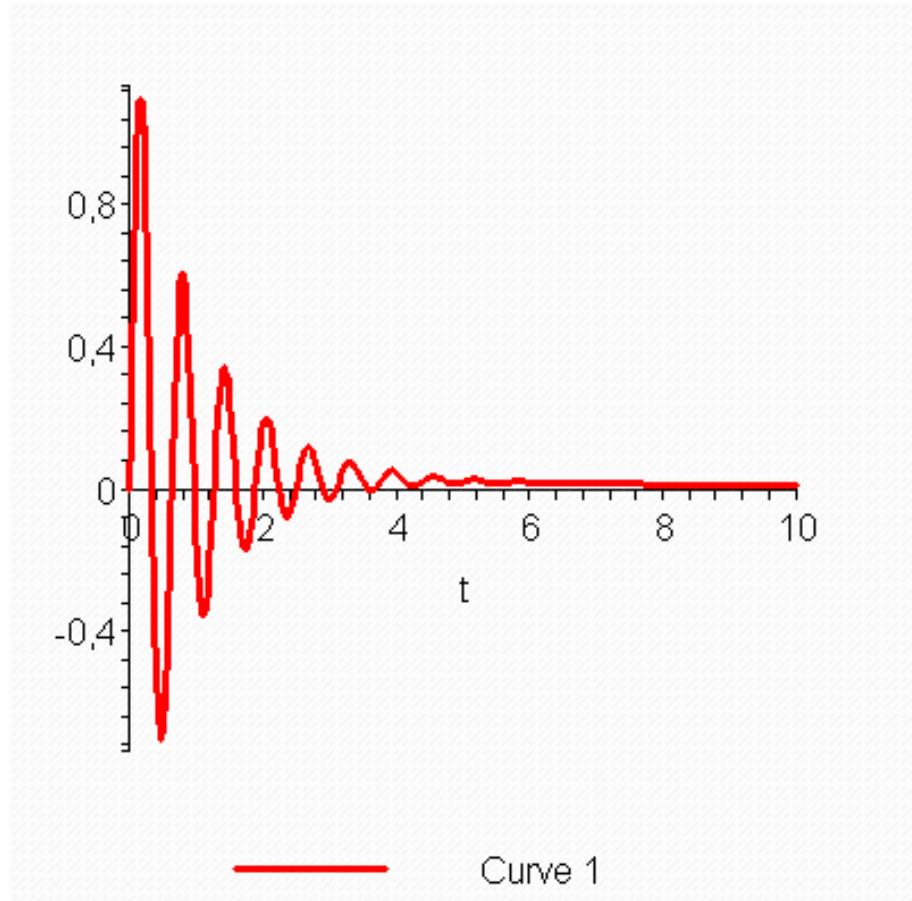
$$x(t) := e^{(-t)} \sin(10t)$$

$$\text{SystemEquation} := 6.83 \frac{d}{dt} y(t) + 1.34 y(t) = -2.49 e^{(-t)} \sin(10t) + 83.40 e^{(-t)} \cos(10t)$$

```
> RyX(t) := dsolve( {SystemEquation,
y(0)=0}, y(t));
# Решение заданного
уравнения системы на языке Maple
```

$$RyX(t) := y(t) = -\frac{2877990}{46950301} e^{(-t)} \cos(10t) + \frac{57098901}{46950301} e^{(-t)} \sin(10t) + \frac{2877990}{46950301} e^{\frac{-134}{683}t}$$

```
> plot(rhs(RyX(t)), t=0..10, color=red,
      thickness=2); # Построение
      графика движения при sin(t)
```



>

4. Амплитудно-фазовый частотный анализа линейной динамической системы

```
> An(p) := a1*p + a0;
# Дифференциальный операторный полином
выхода для y(t)
Bm(p) := b1*p + b0;
# Дифференциальный операторный полином
входа для x(t)
K(p) := Bm(p)/An(p);
# Передаточная функция линейной
динамической системы
```

```

An(iw) := a1 * I * w + a0;
# Частотный операторный полином выхода для
y(t)
Bm(iw) := b1* I * w + b0;
# Частотный операторный полином входа для
x(t)
K(iw) := Bm(iw)/An(iw);
# Частотная функция линейной динамической
системы системы
Amlituda(iw) := abs(K(iw));
# Амплитудно-частотная характеристика
Faza(iw) := arctan(Im(K(iw))/Re(K(iw))); #
# Фазово-частотная характеристика

```

$$An(p) := 6.83 p + 1.34$$

$$Bm(p) := 8.34 p + 5.85$$

$$K(p) := \frac{8.34 p + 5.85}{6.83 p + 1.34}$$

$$An(iw) := 6.83 I w + 1.34$$

$$Bm(iw) := 8.34 I w + 5.85$$

$$K(iw) := \frac{8.34 I w + 5.85}{6.83 I w + 1.34}$$

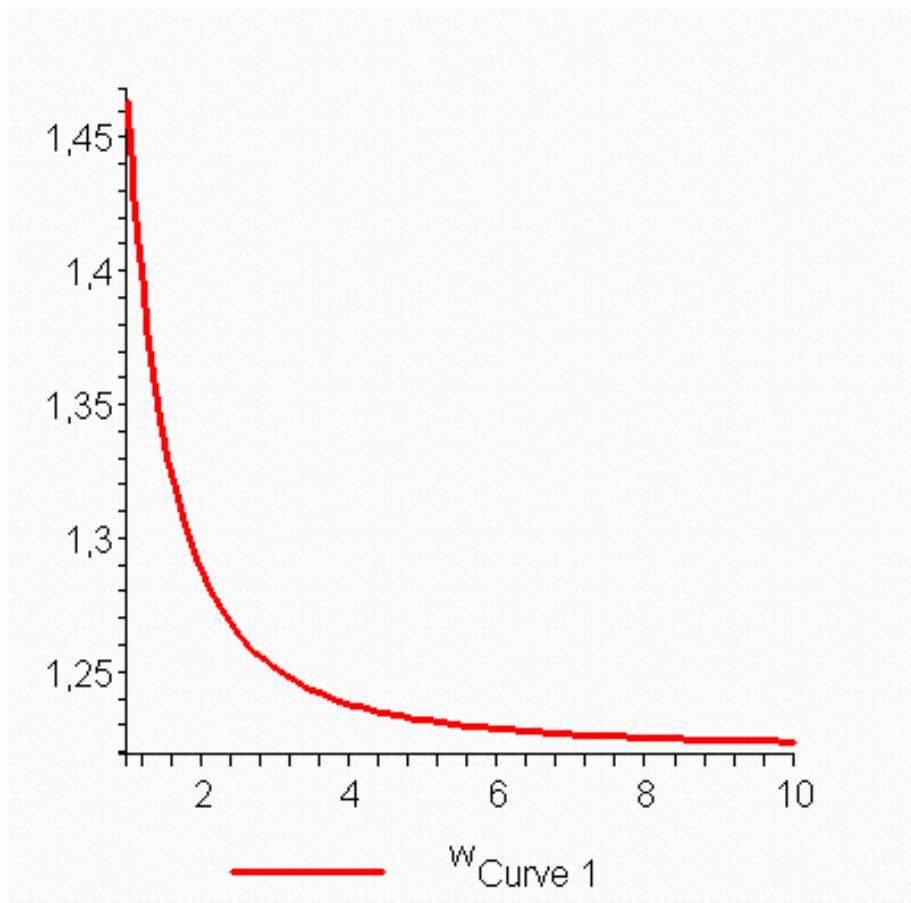
$$Amlituda(iw) := \frac{?8.34 I w + 5.85?}{?6.83 I w + 1.34?}$$

$$Faza(iw) := \arctan\left(\frac{?8.34 I w + 5.85?}{?6.83 I w + 1.34?}\right)$$

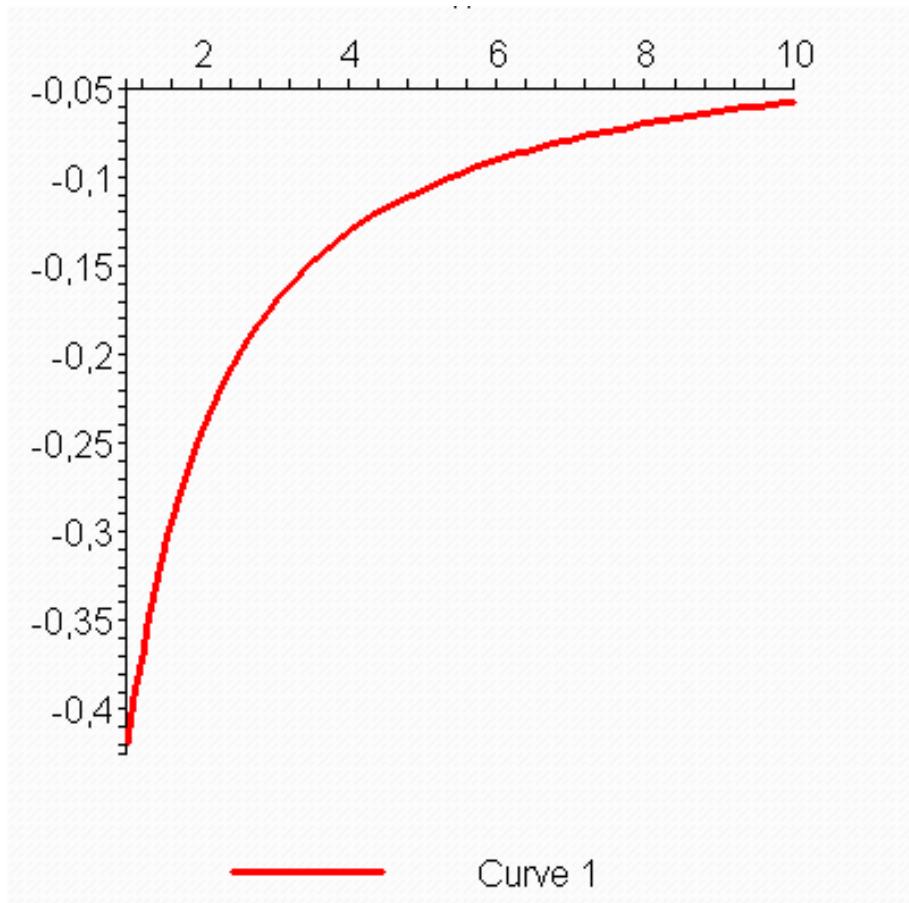
```

> plot(Amlituda(iw), w=1..10, color=red,
thickness=2); # Построение графика
амплитудно-частотный характеристики

```



```
> plot(Faza(iw), w=1..10, color=red,  
thickness=2); # Построение графика  
фазово-частотный характеристики
```



5. Статистический анализ линейной динамической системы

5.1. Нахождение математического ожидания на выходе

```
> My := b0/a0*Mx;
# Математическое ожидание My выходной
случайной функции Y(t)
```

My := 42.34701493

5.2. Нахождение спектральной плотности на выходе по входной корреляционной функции RoX

```
> RoX(tau) := Dx*exp(-abs(tau));
# Корреляционная функция для X(t)
RoX(t) := 5.4 e(-|t|)
```

```

> IntForSx(w) := Int(RoX(tau)*exp(I*w*tau),
tau=-infinity..infinity)=

int(RoX(tau)*exp(I*w*tau), tau=-
infinity..infinity);

# Интеграл для спектральной плотности Sx(w)
на входе

```

$$IntForSx(w) := \int_{-\infty}^{\infty} 5.4 e^{(-|t|)} e^{(Iw t)} dt = -\frac{10.80000000}{(1. + 1. I w)(-1. + 1. I w)}$$

```

> Sx(w) := 1/(2*Pi)*IntForSx(w);
# Спектральная плотность Sx(w) на входе для
X(t)

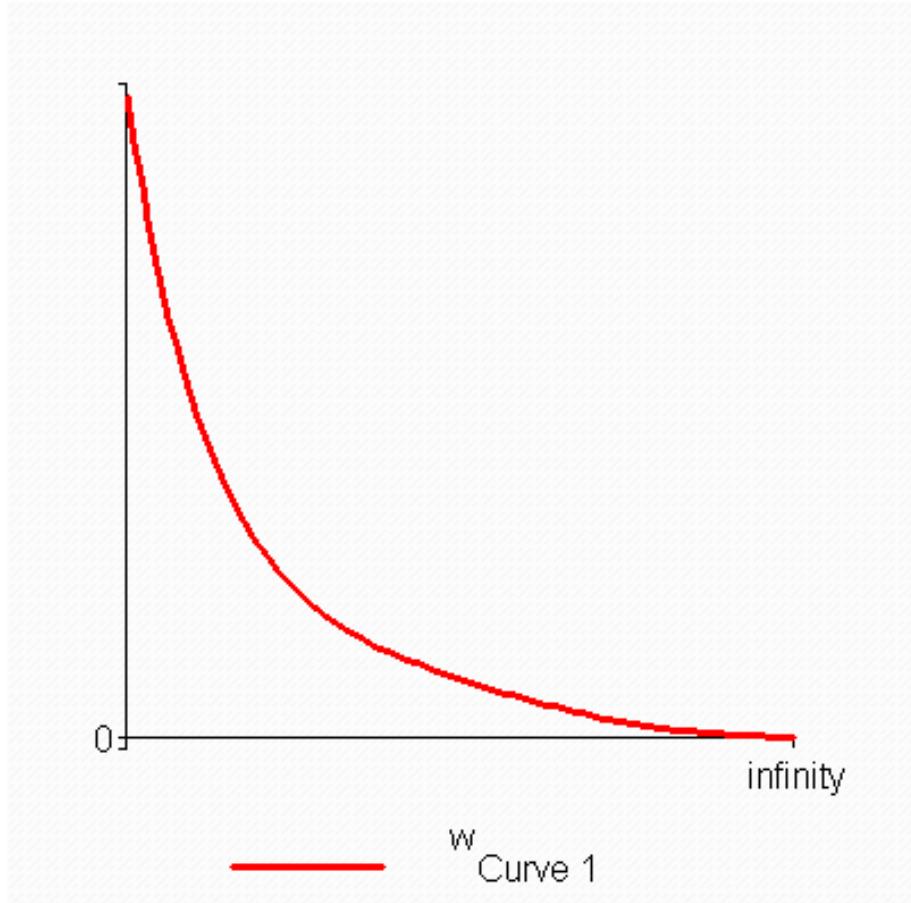
```

$$Sx(w) := \frac{\int_{-\infty}^{\infty} 5.4 e^{(-|t|)} e^{(Iw t)} dt}{2 \pi} = -\frac{5.40000000}{\pi (1. + 1. I w)(-1. + 1. I w)}$$

```

> plot(rhs(Sx(w)), w=1..infinity, color=red,
thickness=2); # Построение графика
спектральной плотности Sx(w) на входе

```



5.3. Нахождение квадрата модуля частотной характеристики линейной системы

```
> SqrAbsK(iw) := abs(K(iw))^2;
# Квадрат модуля амплитудно-фазовой
частотная характеристика
```

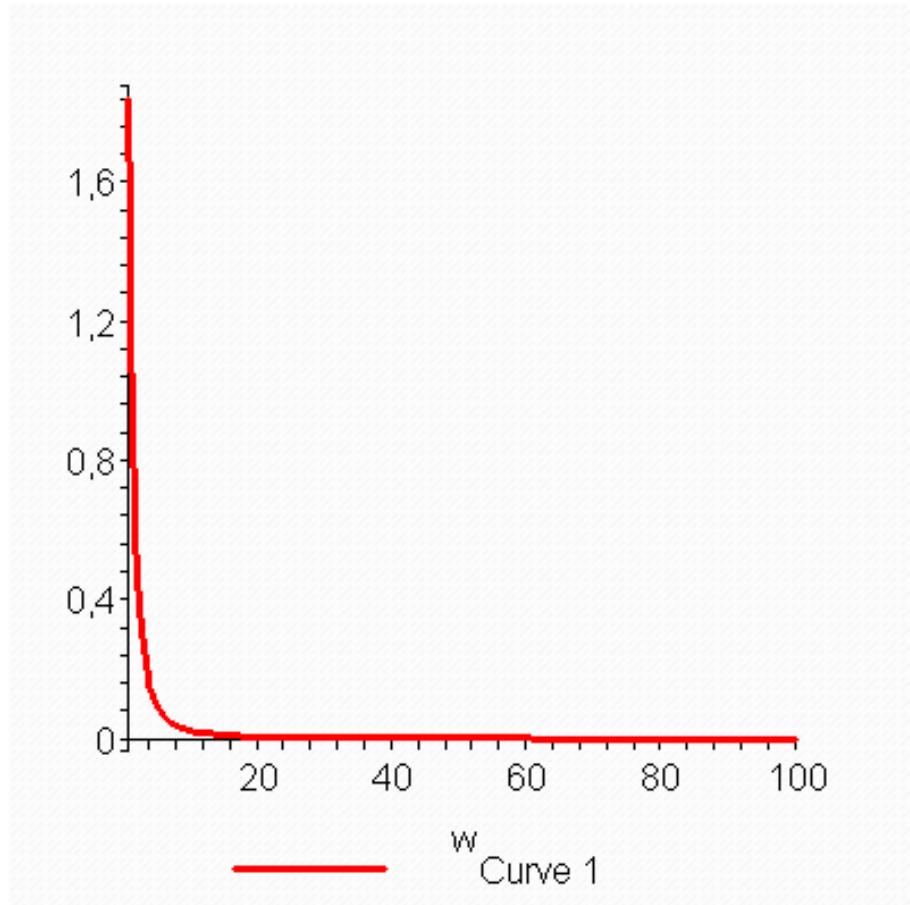
$$SqrAbsK(iw) := \frac{?8.34 I w + 5.85?^2}{?6.83 I w + 1.34?}$$

5.4. Нахождение спектральной плотности на выходе

```
> Sy(w) := SqrAbsK(iw) * Sx(w);
# Спектральная плотность Sy(w) на выходе
для Y(t)
```

$$Sy(w) := \frac{\frac{?8.34 I w + 5.85?^2 ?}{?6.83 I w + 1.34?} ?^2 ?}{2 p} = - \frac{5.4 e^{(-|t|)} e^{(I w t)} dt}{p (1. + 1. I w) (-1. + 1. I w)}$$

```
> plot(rhs(Sy(w)), w=1..100, color=red,
thickness=2); # Построение графика
спектральная плотность Sy(w) на выходе для
Y(t)
```



5.5. Нахождение по спектральной плотности корреляционной функции на выходе системы

```
> LeftRoY(tau) :=  
int(rhs(Sy(w)) * exp(I*w*tau), w=-infinity..0);  
  
LeftRoY(t) := -8.102237201 10^-9 I ? 3.80244947 10^8 Ei(1., 0.1961932650 t) e^(1.196193265 t)  
- 8.3559586 10^7 Ei(1., -1. t) - 3.80244947 10^8 Ei(1., -0.1961932650 t) e^(0.8038067350 t)
```

```

+ 8.3559586 107 e(2..t) Ei(1., t)? e(-1..t)

> RightRoY(tau) :=  

int(rhs(Sy(w)) *exp(I*w*tau), w=0..infinity);

RightRoY(t) := 8.102237201 10-9 I? 3.80244947 108 Ei(1., 0.1961932650 t) e(1.196193265 t)  

- 8.3559586 107 Ei(1., -1..t) - 3.80244947 108 Ei(1., -0.1961932650 t) e(0.8038067350 t)  

+ 8.3559586 107 e(2..t) Ei(1., t)? e(-1..t)

> RoY(tau) := LeftRoY(tau) +  

RightRoY(tau);  

RoY(t) := 0. I

> RoY(tau) := int(rhs(Sy(w)) *exp(I*w*tau),  

w=-1000..1000);

RoY(t) := -8.102237201 10-9 I? -3.80244947 108 Ei(1., 1000. I t + 0.1961932650 t) e(1.196193265 t)  

+ 8.3559586 107 Ei(1., 1000. I t - 1..t)  

+ 3.80244947 108 Ei(1., 1000. I t - 0.1961932650 t) e(0.8038067350 t)  

- 8.3559586 107 e(2..t) Ei(1., 1000. I t + t)  

+ 3.80244947 108 Ei(1., -1000. I t + 0.1961932650 t) e(1.196193265 t)  

- 8.3559586 107 Ei(1., -1000. I t - 1..t)  

- 3.80244947 108 Ei(1., -1000. I t - 0.1961932650 t) e(0.8038067350 t)  

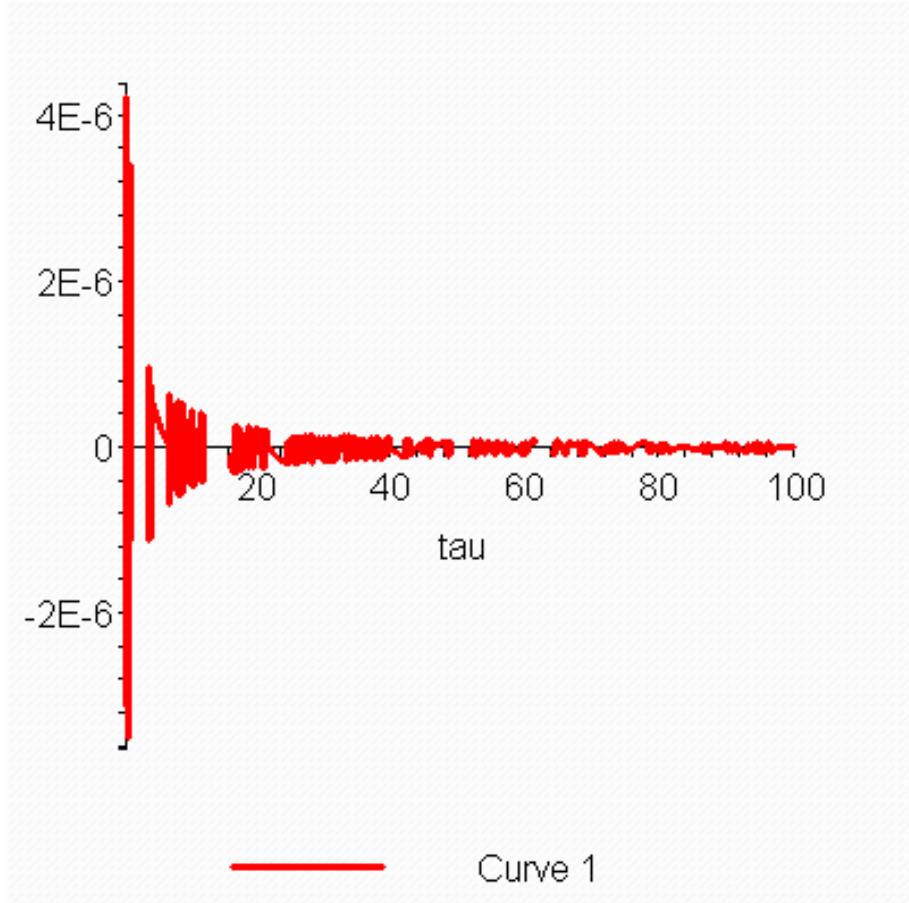
+ 8.3559586 107 e(2..t) Ei(1., -1000. I t + t)? e(-1..t)

> plot(RoY(tau), tau=1..100, color=red,  

thickness=2); # Построение графика  

фазово-частотный характеристики

```



5.6. Нахождение дисперсии Dy на выходе системы

> $Sy(w)$;

$$\frac{\frac{?8.34 I w + 5.85?^2}{?6.83 I w + 1.34?} \int_0^w 5.4 e^{-|t|} e^{(I w t)} dt}{2 p} = -\frac{5.400000000 \frac{?8.34 I w + 5.85?^2}{?6.83 I w + 1.34?}}{p (1. + 1. I w) (-1. + 1. I w)}$$

> $rhs(Sy(w))$;

$$-\frac{5.400000000 \frac{?8.34 I w + 5.85?^2}{?6.83 I w + 1.34?}}{p (1. + 1. I w) (-1. + 1. I w)}$$

> $Dy := 2 * \text{int}(rhs(Sy(w)), w=0..infinity)$;
Точное значение дисперсии Dy на выходе
системы

$$Dy := 23.61129518$$

```
> Dy:=2*int(rhs(Sy(w)), w=0..100);
# Приближенное значение дисперсии Dy на
выходе системы
```

Dy := 23.56003778

```
> Dy:=2*int(rhs(Sy(w)), w=0..1000000); #
Приближенное значение дисперсии Dy на
выходе системы
```

Dy := 23.61129006

6. Экспериментальный статистический анализ линейной динамической системы

6.1. Задание с помощью rand значений для сечений реализаций случайной функции X(t)

```
> n:=9;
# Число реализаций случайной функции X(t)
m:=6;
# Число сечений реализаций случайной функции
X(t)
b:=3.4;
# Аддитивная постоянная составляющая случайной
функции X(t)
c:=0.54;
# Мультипликативный постоянный коэффициент
случайной функции X(t)

n := 9
m := 6
b := 3.4
c := 0.54

> R:=RandomMatrix(n, m, generator=r);
```

```

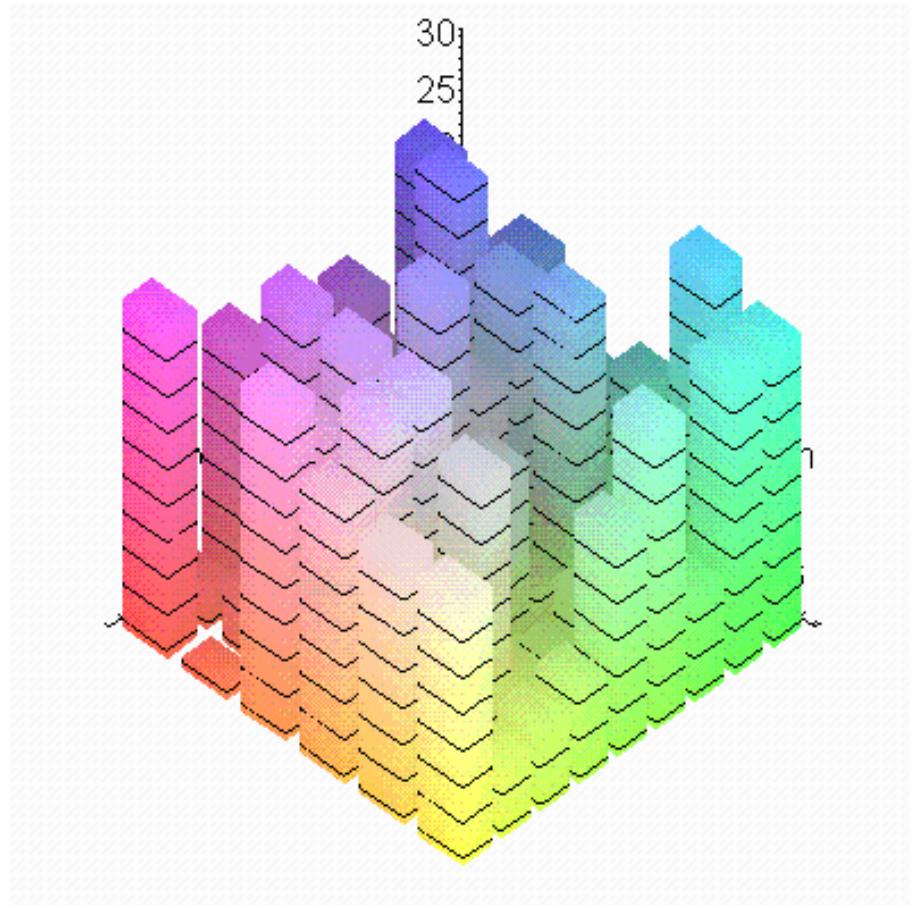
? 1   19   12   15   29   26?
? 26  20   5    8    6    26?
? 10  30   25   27   9    9?
? 19  3    18   4    7    26?
R := ? 7    8    29   17   4    19?
? 3    11   7    4    5    8?
? 22  29   29   29   25   7?
? 3    5    24   29   9    6?
? 29  1    29   24   23   23?

```

```

> matrixplot(R, heights=histogram, axes=normal,
gap=0.25, style=patchcontour);

```



```

> X:=Matrix(1..n, 1..m);
X:=[seq([seq((b+c*R[i, k])/100, k=1..m)], i=1..n)];

```

```

? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
X:=? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?
? 0      0      0      0      0      0?

```

```

X:=[[3.405400000, 3.502600000, 3.464800000, 3.481000000, 3.556600000, 3.540400000],
[3.540400000, 3.508000000, 3.427000000, 3.443200000, 3.432400000, 3.540400000],
[3.454000000, 3.562000000, 3.535000000, 3.545800000, 3.448600000, 3.448600000],
[3.502600000, 3.416200000, 3.497200000, 3.421600000, 3.437800000, 3.540400000],
[3.437800000, 3.443200000, 3.556600000, 3.491800000, 3.421600000, 3.502600000],
[3.416200000, 3.459400000, 3.437800000, 3.421600000, 3.427000000, 3.443200000],
[3.518800000, 3.556600000, 3.556600000, 3.556600000, 3.535000000, 3.437800000],
[3.416200000, 3.427000000, 3.529600000, 3.556600000, 3.448600000, 3.432400000],
[3.556600000, 3.405400000, 3.556600000, 3.529600000, 3.524200000, 3.524200000]]

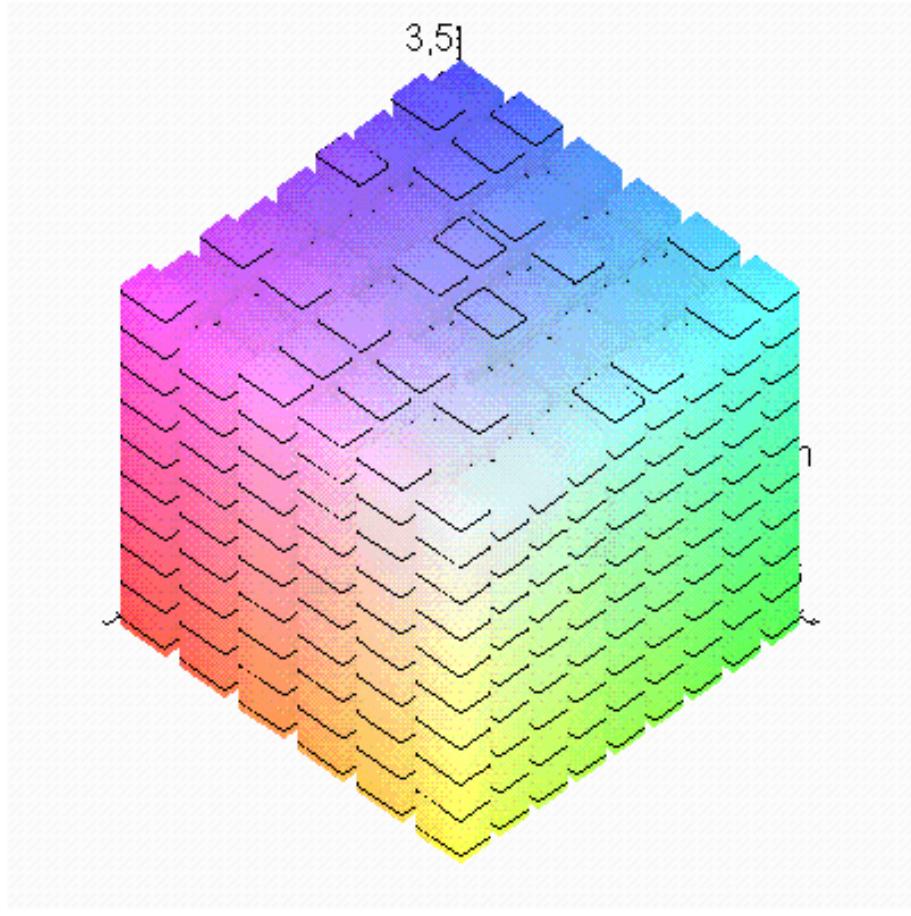
```

6.2. Визуализация случайной функции X(t)

```

> matrixplot(X, heights=histogram, axes=normal,
gap=0.25, style=patchcontour); # Визуализация
случайной функции X(t)

```



6.3. Интерполяция и визуализация сечений реализаций случайной функции $X(t)$

```
> W1:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[1,i],i=1..m)], t, form=Lagrange ):
W2:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[2,i],i=1..m)], t, form=Lagrange ):
W3:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[3,i],i=1..m)], t, form=Lagrange ):
W4:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[4,i],i=1..m)], t, form=Lagrange ):
W5:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[5,i],i=1..m)], t, form=Lagrange ):
W6:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[6,i],i=1..m)], t, form=Lagrange ):
W7:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[7,i],i=1..m)], t, form=Lagrange ):
W8:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[8,i],i=1..m)], t, form=Lagrange ):
```

```

W9:=PolynomialInterpolation([seq(i, i=1..m)],
[seq(X[9,i],i=1..m)], t, form=Lagrange):
plot([W1, W2, W3, W4, W5, W6, W7, W8, W9],
t=1..m, color=[aquamarine, black, blue, navy,
coral, cyan, brown, gold, green],
thickness=[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2],
legend=[`1`, `2`,
`3`, `4`, `5`, `6`, `7`, `8`, `9`]);
for i from 1 to n do
plot(PolynomialInterpolation([seq(k,
k=1..m)], [seq(X[i,k],k=1..m)], z, form=Lagrange),
z=1..m,
thickness=2, color= red,
legend=`Realizaziya X(t)`);
listplot([seq(X[i,k], k=1..m)], thickness=2,
color= green, legend=`Sechenie X(t)`);
end do;

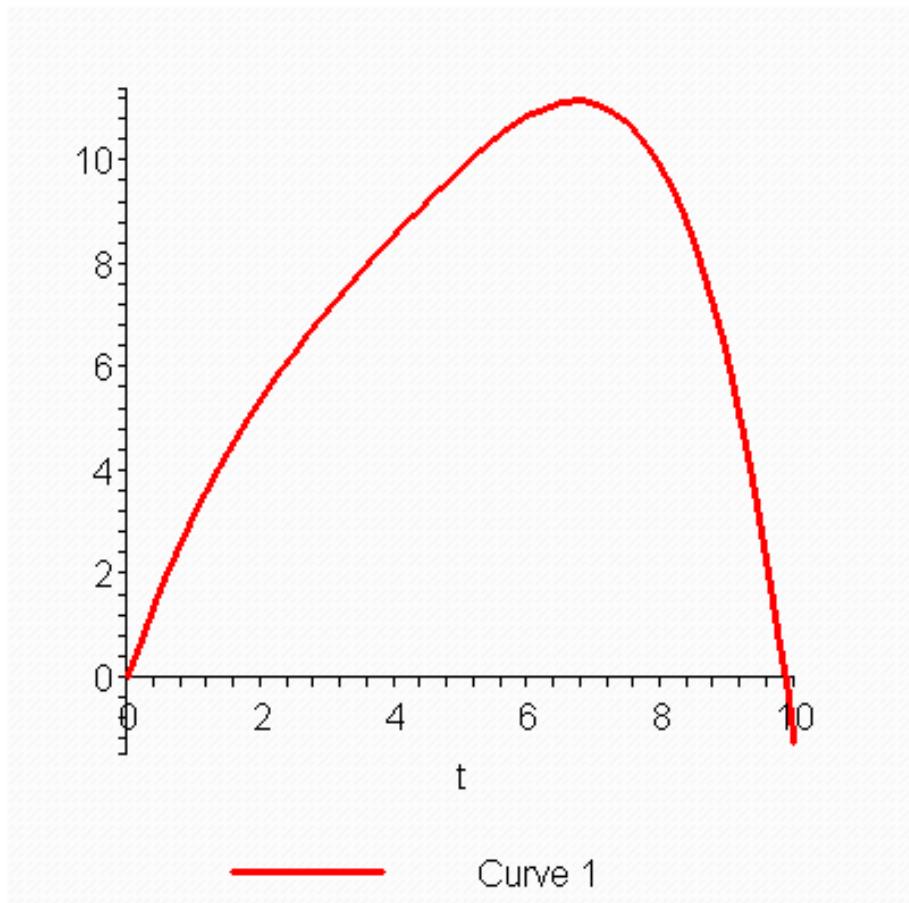
```

6.4. Движение системы при заданном случайному воздействии $W_1(t)$

> $x(t) := W_1;$
 $\text{SystemEquation} := a_1 * \text{diff}(y(t), t) + a_0 * y(t) = b_1 * \text{diff}(x(t), t) + b_0 * x(t); \#$
Уравнение системы на языке Maple

$$x(t) := -0.02837833333 (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.1459416667 (t - 1) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6) - 0.2887333333 (t - 1) (t - 2) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.2900833333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 5) (t - 6) - 0.1481916667 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 6) + 0.02950333333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5)$$

> $RyW1(t) := \text{dsolve}(\{\text{SystemEquation}, y(0)=0\}, y(t)); \# \text{Решение заданного уравнения системы на языке Maple}$
> $\text{plot}(\text{rhs}(RyW1(t)), t=0..10, \text{color}=red,$
 $\text{thickness}=2); \# \text{Построение графика движения при } W_1$



```

> x(t) := W2;
SystemEquation := a1 * diff(y(t), t) + a0 * 
y(t) = b1 * diff(x(t), t) + b0 * x(t); #
Уравнение системы на языке Maple

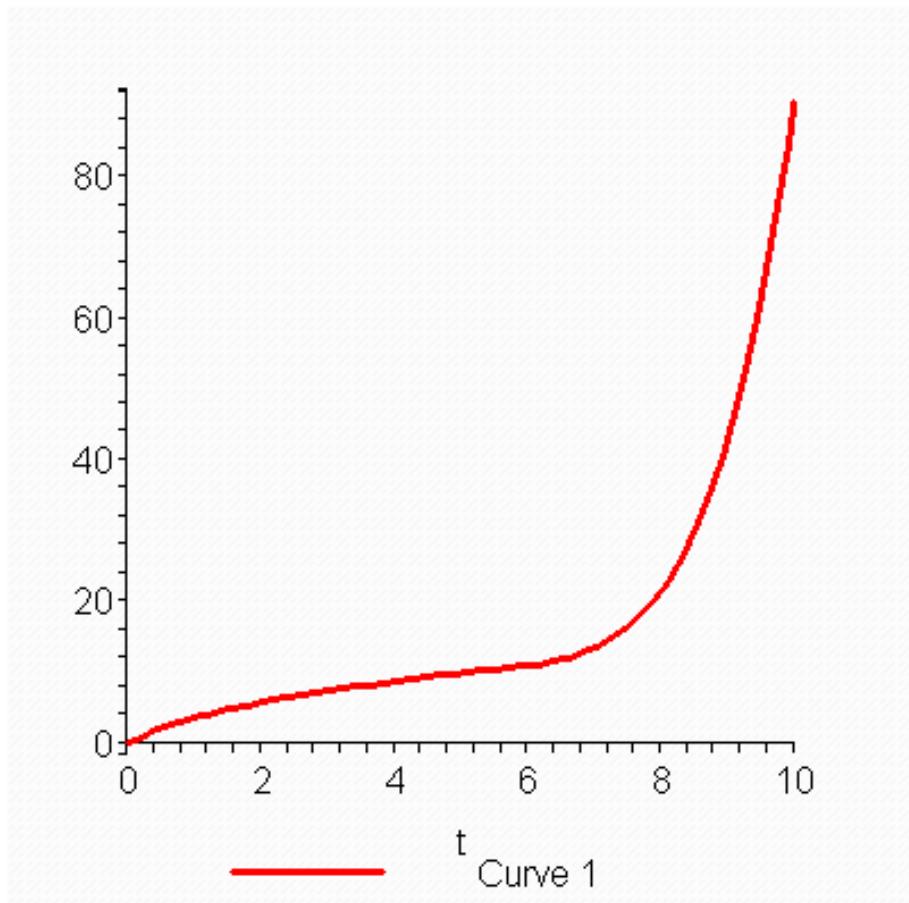
```

```

x(t) := -0.02950333333 (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.1461666667 (t - 1) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6)
- 0.2855833333 (t - 1) (t - 2) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.2869333333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 5) (t - 6)
- 0.1430166667 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 6) + 0.02950333333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5)

> RyW2(t) := dsolve( {SystemEquation,
y(0)=0}, y(t)); # Решение заданного
уравнения системы на языке Maple
> plot(rhs(RyW2(t)), t=0..10, color=red,
thickness=2); # Построение
графика движения при W2

```



```

> x(t) := W3;
SystemEquation := a1 * diff(y(t), t) + a0 * 
y(t) = b1 * diff(x(t), t) + b0 * x(t); #
Уравнение системы на языке Maple

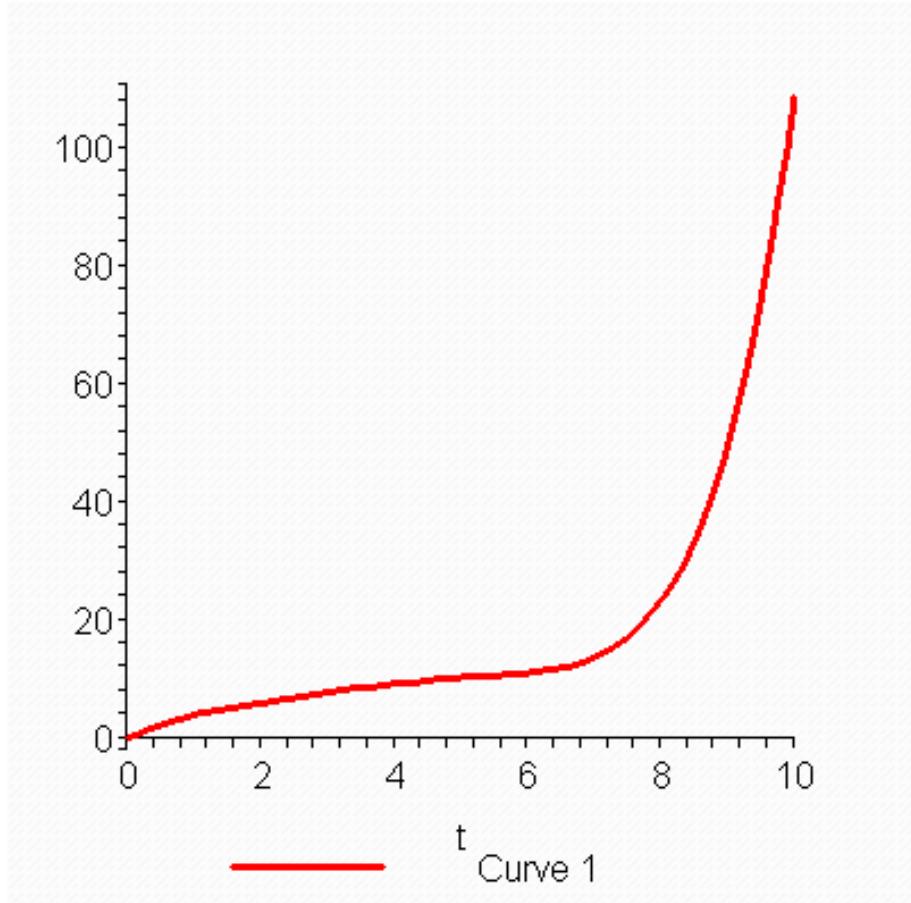
```

```

x(t) := -0.02878333333 (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.1484166667 (t - 1) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6)
- 0.2945833333 (t - 1) (t - 2) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.2954833333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 5) (t - 6)
- 0.1436916667 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 6) + 0.02873833333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5)

> RyW3(t) := dsolve( {SystemEquation,
y(0)=0}, y(t)); # Решение заданного
уравнения системы на языке Maple
> plot(rhs(RyW3(t)), t=0..10, color=red,
thickness=2); # Построение
графика движения при W3

```



```

> x(t) := W4;
SystemEquation := a1 * diff(y(t), t) + a0 *
y(t) = b1 * diff(x(t), t) + b0 * x(t); #
Уравнение системы на языке Maple

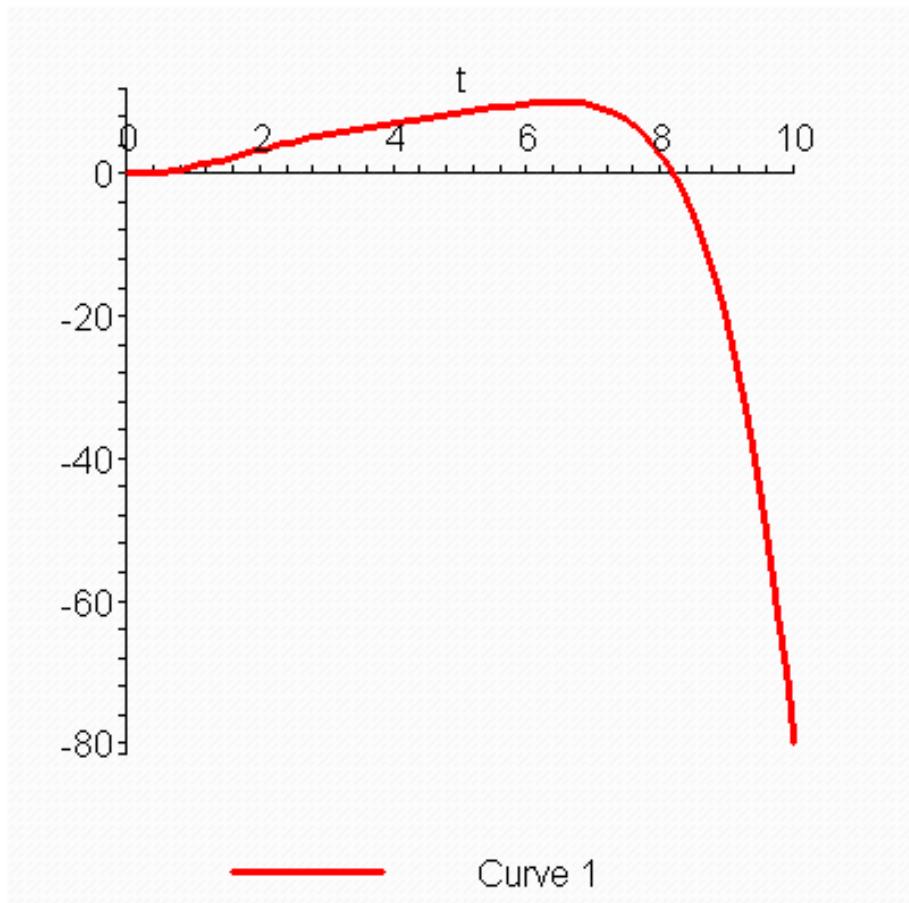
```

```

x(t) := -0.02918833333 (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.1423416667 (t - 1) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6)
- 0.2914333333 (t - 1) (t - 2) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.2851333333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 5) (t - 6)
- 0.1432416667 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 6) + 0.02950333333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5)

> RyW4(t) := dsolve( {SystemEquation,
y(0)=0}, y(t)); # Решение заданного
уравнения системы на языке Maple
> plot(rhs(RyW4(t)), t=0..10, color=red,
thickness=2); # Построение
графика движения при W4

```



```

> x(t) := W5;
SystemEquation := a1 * diff(y(t), t) + a0 * 
y(t) = b1 * diff(x(t), t) + b0 * x(t); #
Уравнение системы на языке Maple

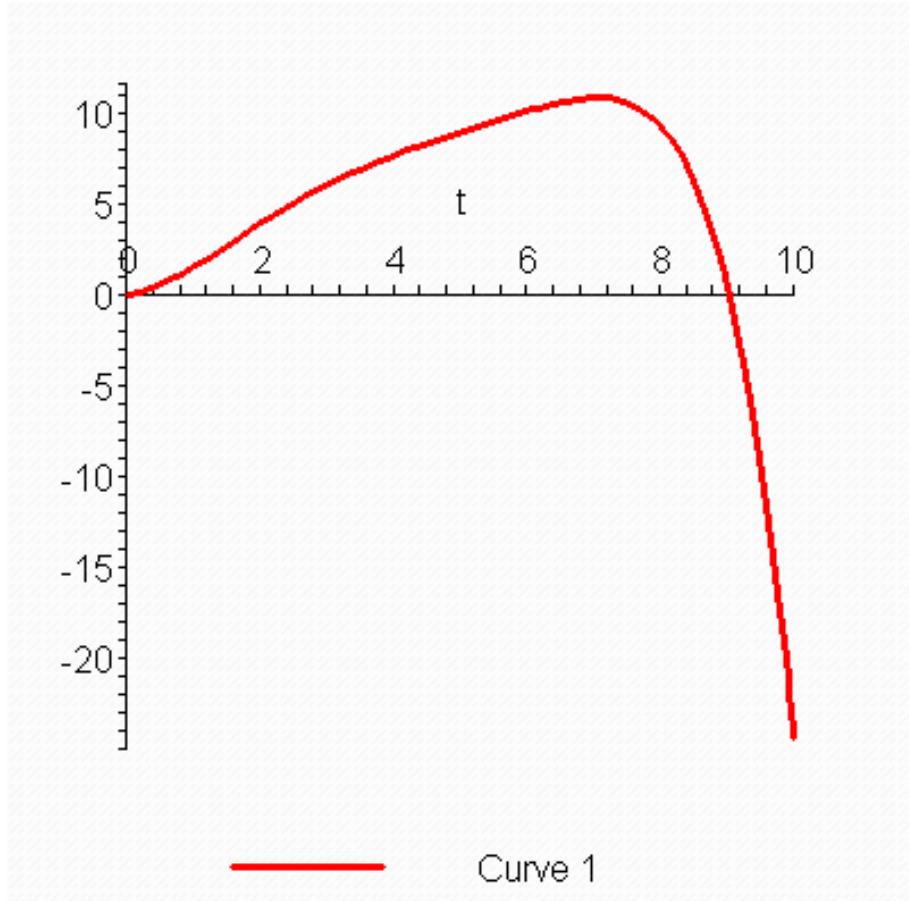
```

```

x(t) := -0.02864833333 (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.1434666667 (t - 1) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6)
- 0.2963833333 (t - 1) (t - 2) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.2909833333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 5) (t - 6)
- 0.1425666667 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 6) + 0.02918833333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5)

> RyW5(t) := dsolve( {SystemEquation,
y(0)=0}, y(t)); # Решение заданного
уравнения системы на языке Maple
> plot(rhs(RyW5(t)), t=0..10, color=red,
thickness=2); # Построение
графика движения при W5

```



```

> x(t) := W6;
SystemEquation := a1 * diff(y(t), t) + a0 * 
y(t) = b1 * diff(x(t), t) + b0 * x(t); #
Уравнение системы на языке Maple

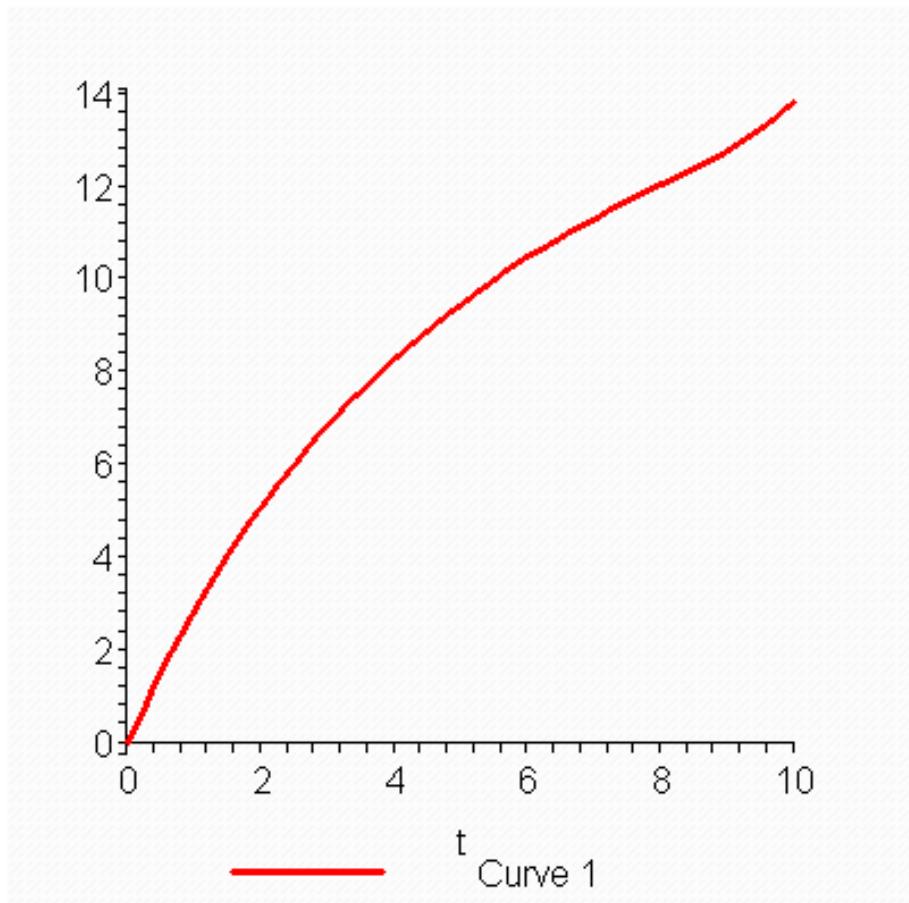
```

```

x(t) := -0.02846833333 (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.1441416667 (t - 1) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6)
- 0.2864833333 (t - 1) (t - 2) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.2851333333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 5) (t - 6)
- 0.1427916667 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 6) + 0.02869333333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5)

> RyW6(t) := dsolve( {SystemEquation,
y(0)=0}, y(t)); # Решение заданного
уравнения системы на языке Maple
> plot(rhs(RyW6(t)), t=0..10, color=red,
thickness=2); # Построение
графика движения при W6

```



```

> x(t):=W7;
SystemEquation := a1 * diff(y(t), t) + a0 *
y(t) = b1 * diff(x(t),t) + b0 * x(t): #
Уравнение системы на языке Maple

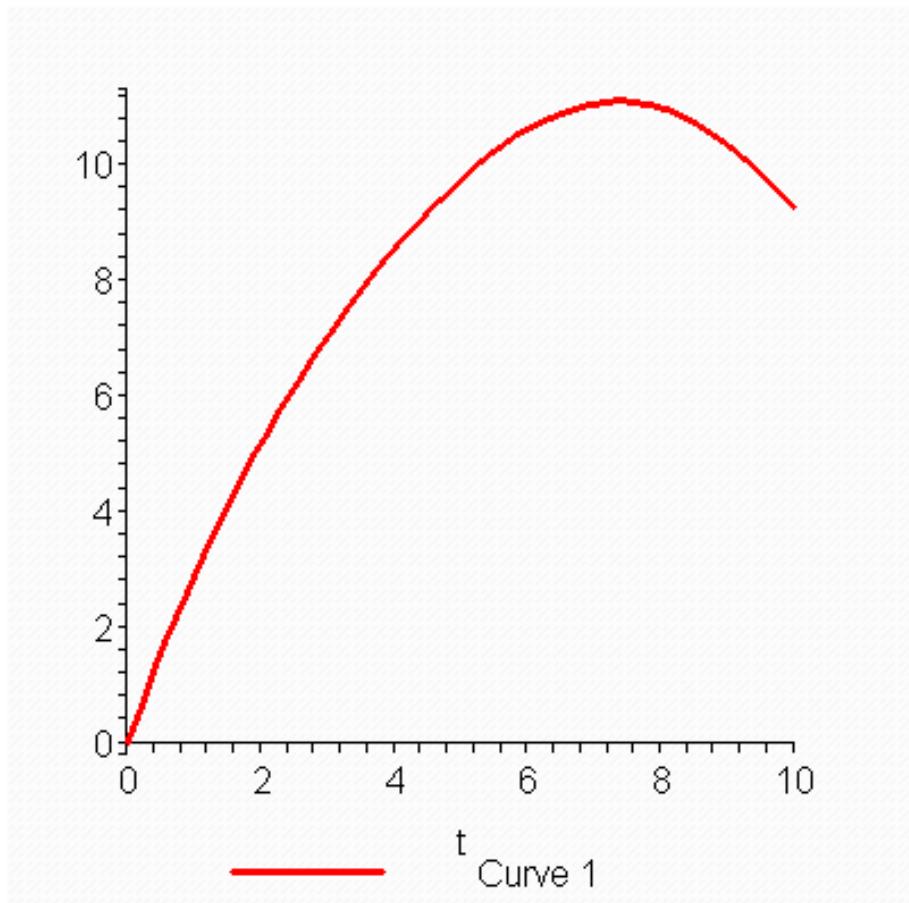
```

```

x(t):=-0.02932333333 (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.1481916667 (t - 1) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6)
- 0.2963833333 (t - 1) (t - 2) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.2963833333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 5) (t - 6)
- 0.1472916667 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 6) + 0.02864833333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5)

> RyW7(t) := dsolve( {SystemEquation,
y(0)=0}, y(t)): # Решение заданного
уравнения системы на языке Maple
> plot(rhs(RyW7(t)), t=0..10,color=red,
thickness=2); # Построение
графика движения при W7

```



```

> x(t) := W8;
SystemEquation := a1 * diff(y(t), t) + a0 *
y(t) = b1 * diff(x(t), t) + b0 * x(t); #
Уравнение системы на языке Maple

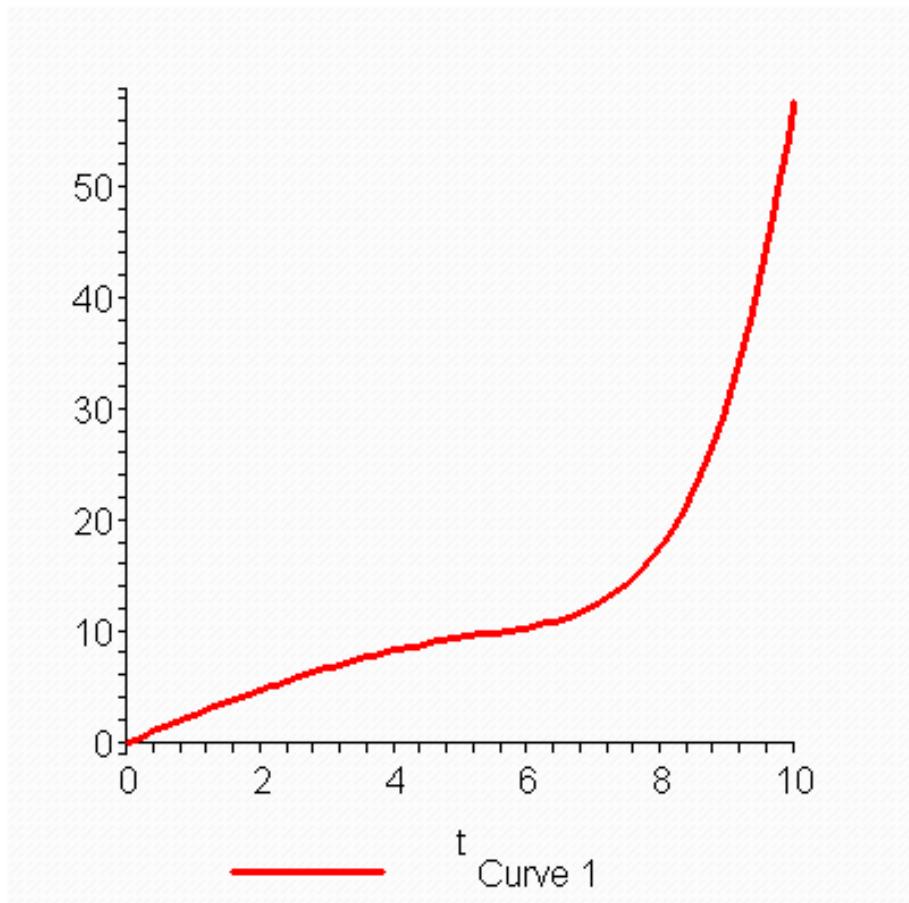
```

```

x(t) := -0.02846833333 (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.1427916667 (t - 1) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6)
- 0.2941333333 (t - 1) (t - 2) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.2963833333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 5) (t - 6)
- 0.1436916667 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 6) + 0.02860333333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5)

> RyW8(t) := dsolve( {SystemEquation,
y(0)=0}, y(t)); # Решение заданного
уравнения системы на языке Maple
> plot(rhs(RyW8(t)), t=0..10, color=red,
thickness=2); # Построение
графика движения при W8

```



```

> x(t):=W9;
SystemEquation := a1 * diff(y(t), t) + a0 *
y(t) = b1 * diff(x(t),t) + b0 * x(t): #
Уравнение системы на языке Maple

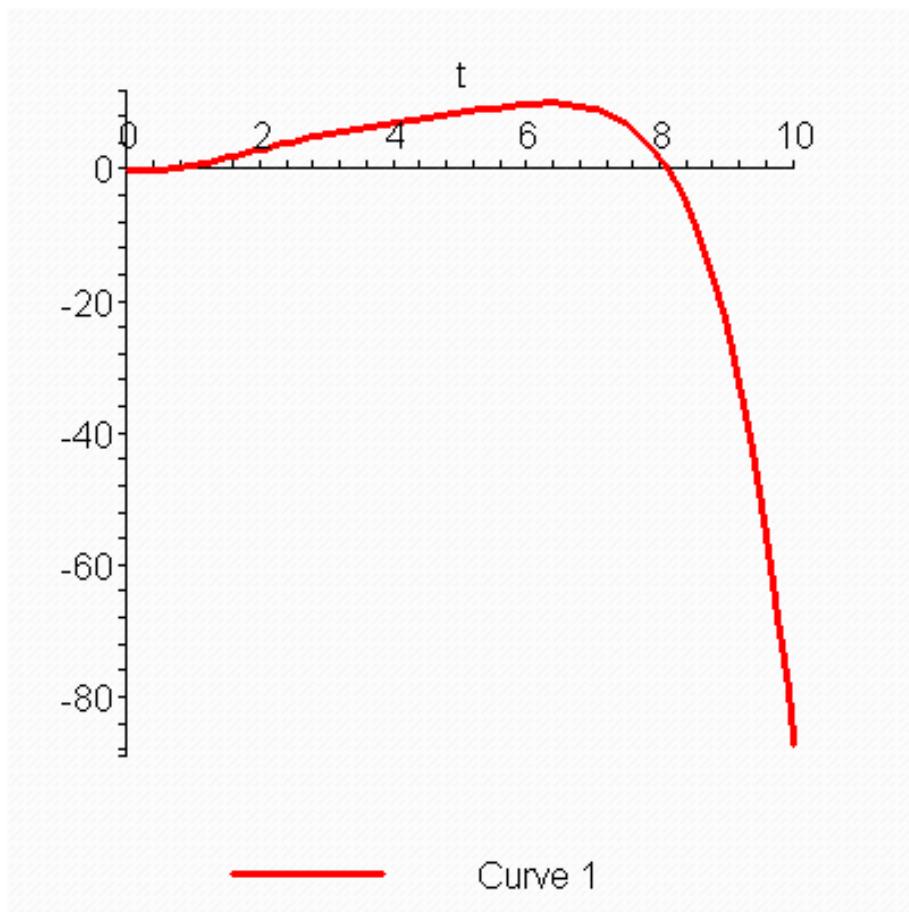
```

```

x(t):=-0.02963833333 (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.1418916667 (t - 1) (t - 3) (t - 4) (t - 5) (t - 6)
- 0.2963833333 (t - 1) (t - 2) (t - 4) (t - 5) (t - 6) + 0.2941333333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 5) (t - 6)
- 0.1468416667 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 6) + 0.02936833333 (t - 1) (t - 2) (t - 3) (t - 4) (t - 5)

> RyW9(t) := dsolve( {SystemEquation,
y(0)=0}, y(t)): # Решение заданного
уравнения системы на языке Maple
> plot(rhs(RyW9(t)), t=0..10,color=red,
thickness=2); # Построение
графика движения при W9

```



>

6.5. Формирование матрицы сечений реализаций выходной случайной функции $Y(t)$

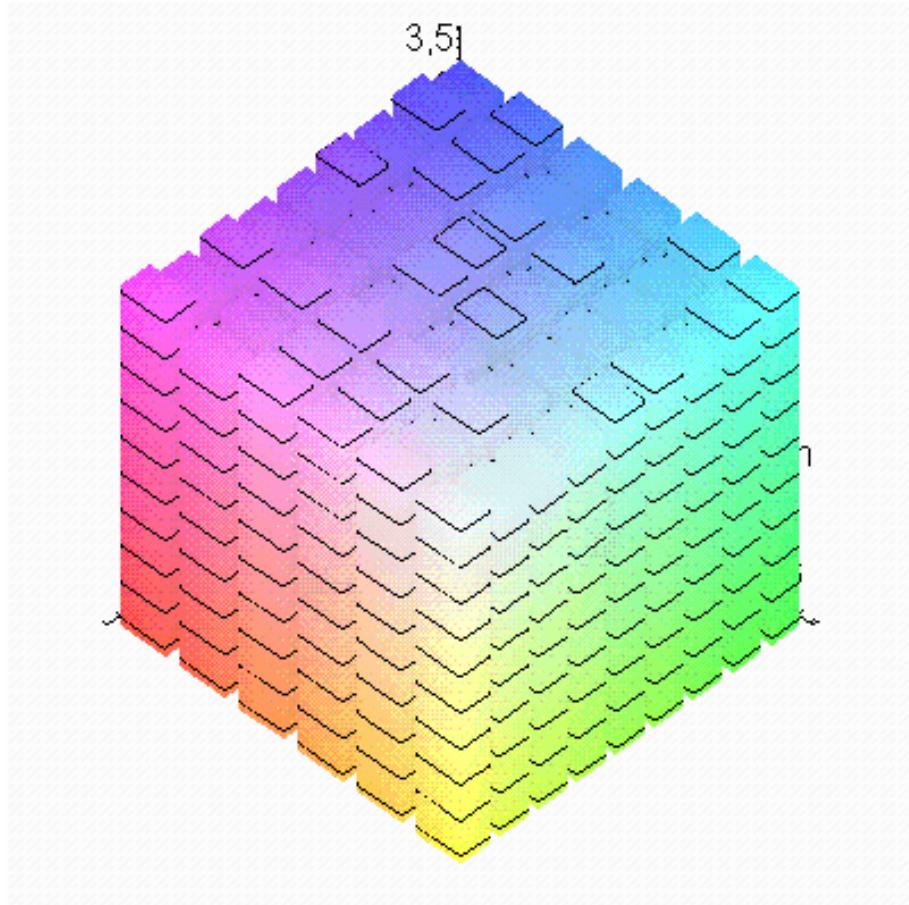
```

> RyW:=Matrix(1..n, 1..m):
> for t from 1 to m do
    RyW[1, t]:=w1(t):
end do:
for t from 1 to m do
    RyW[2, t]:=w2(t):
end do:
for t from 1 to m do
    RyW[3, t]:=w3(t):
end do:
for t from 1 to m do
    RyW[4, t]:=w4(t):
end do:
for t from 1 to m do
    RyW[5, t]:=w5(t):
end do:
```

```

for t from 1 to m do
    RyW[6, t]:=w6(t):
end do:
for t from 1 to m do
    RyW[7, t]:=w7(t):
end do:
for t from 1 to m do
    RyW[8, t]:=w8(t):
end do:
for t from 1 to m do
    RyW[9, t]:=w9(t):
end do:
RyW;
matrixplot(RyW, heights=histogram, axes=normal,
gap=0.25, style=patchcontour);
[[3.405400000, 3.502600001, 3.464800000, 3.481000000, 3.556600001, 3.540400000],
 [3.540400000, 3.508000001, 3.427000000, 3.443200000, 3.432400001, 3.540400000],
 [3.454000000, 3.562000001, 3.535000000, 3.545800000, 3.448600001, 3.448600000],
 [3.502600000, 3.416200001, 3.497200000, 3.421600000, 3.437800001, 3.540400000],
 [3.437800000, 3.443200001, 3.556600000, 3.491800000, 3.421600001, 3.502600000],
 [3.416200000, 3.459400001, 3.437800000, 3.421600000, 3.427000001, 3.443200000],
 [3.518800000, 3.556600001, 3.556600000, 3.556600000, 3.535000001, 3.437800000],
 [3.416200000, 3.427000001, 3.529600000, 3.556600000, 3.448600001, 3.432400000],
 [3.556600000, 3.405400001, 3.556600000, 3.529600000, 3.524200001, 3.524200000]]

```

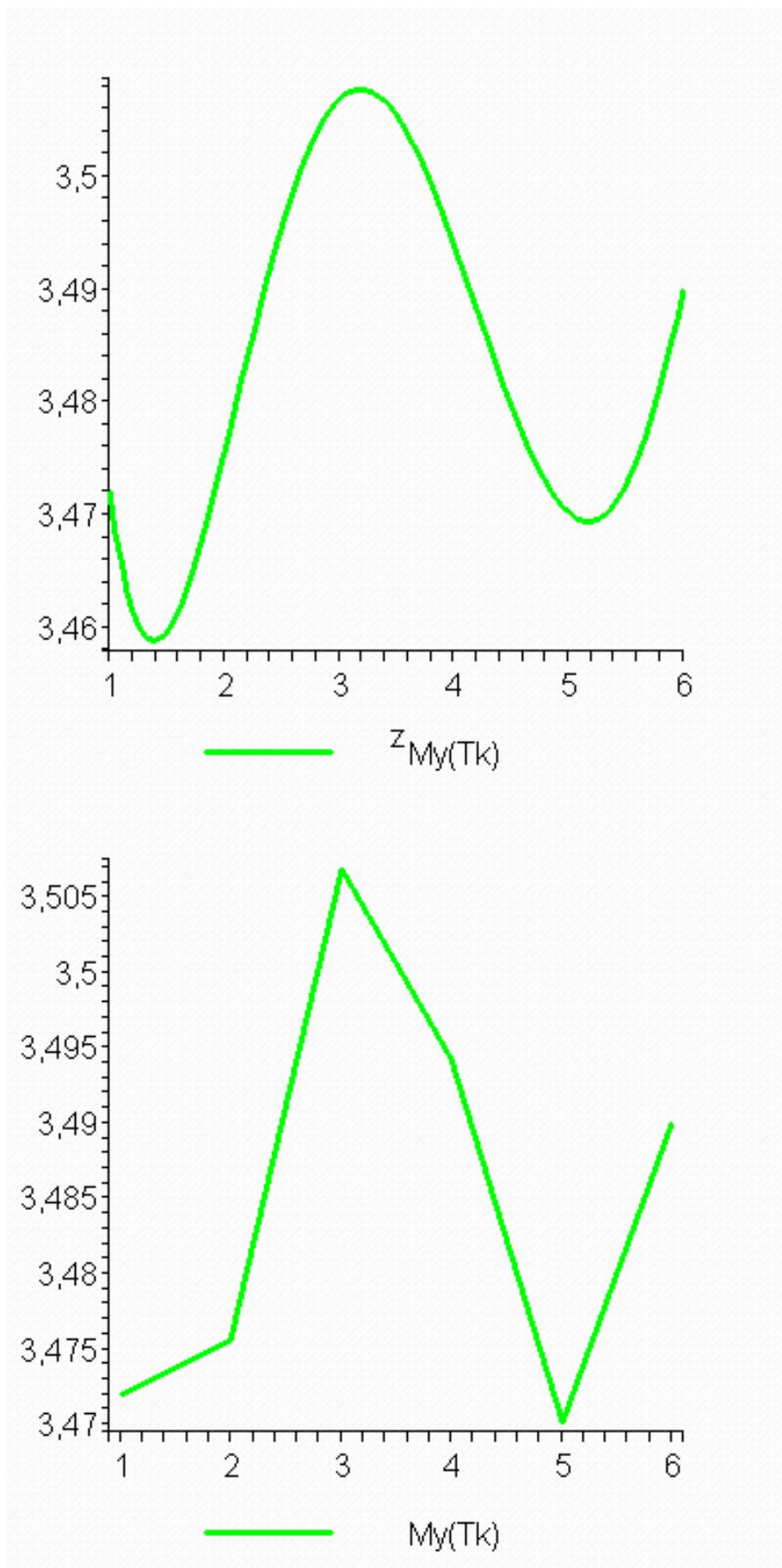


6.6. Оценка, интерполяция и визуализация математических ожиданий $My(T_k)$ значений в сечениях случайной функции $Y(t)$

```
> My:=[seq(add(RyW[i,k], i=1..n), k=1..m)]/n;
```

```
My:=[3.472000000, 3.475600000, 3.506800000, 3.494200000, 3.470200000, 3.490000000]
```

```
> plot(PolynomialInterpolation([seq(k, k=1..m)],  
My, z, form=Lagrange), z=1..m, color=green,  
thickness=2, legend='My(Tk)');  
listplot(My, color=green, thickness=2,  
legend='My(Tk)');
```



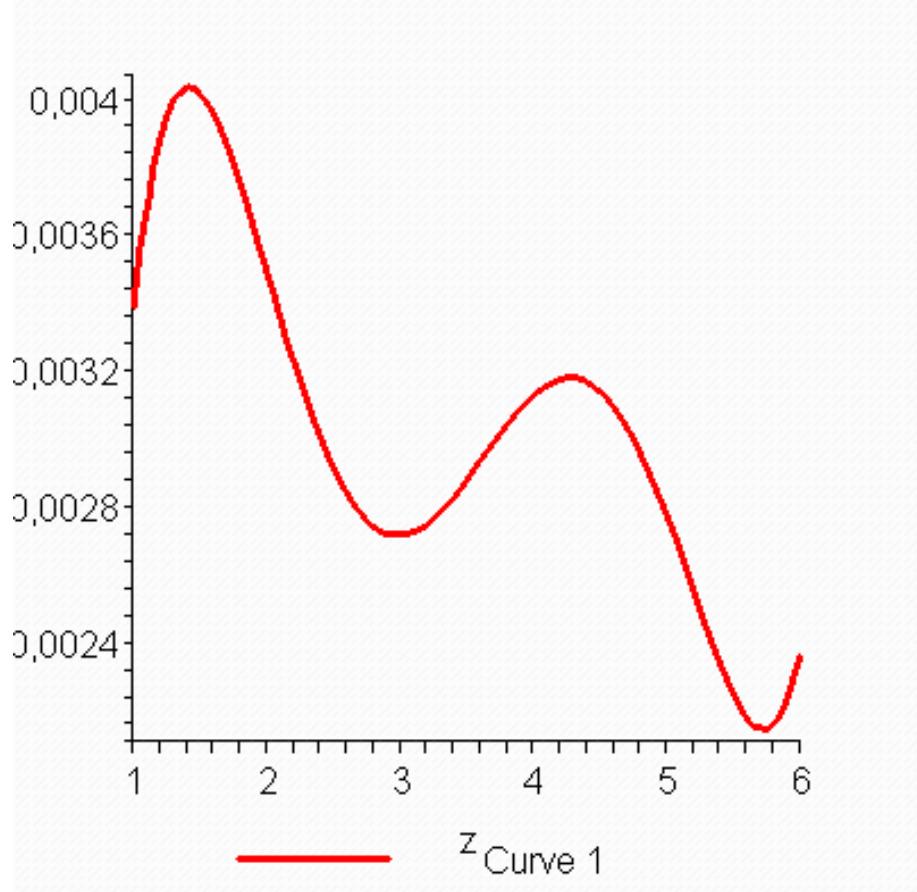
>

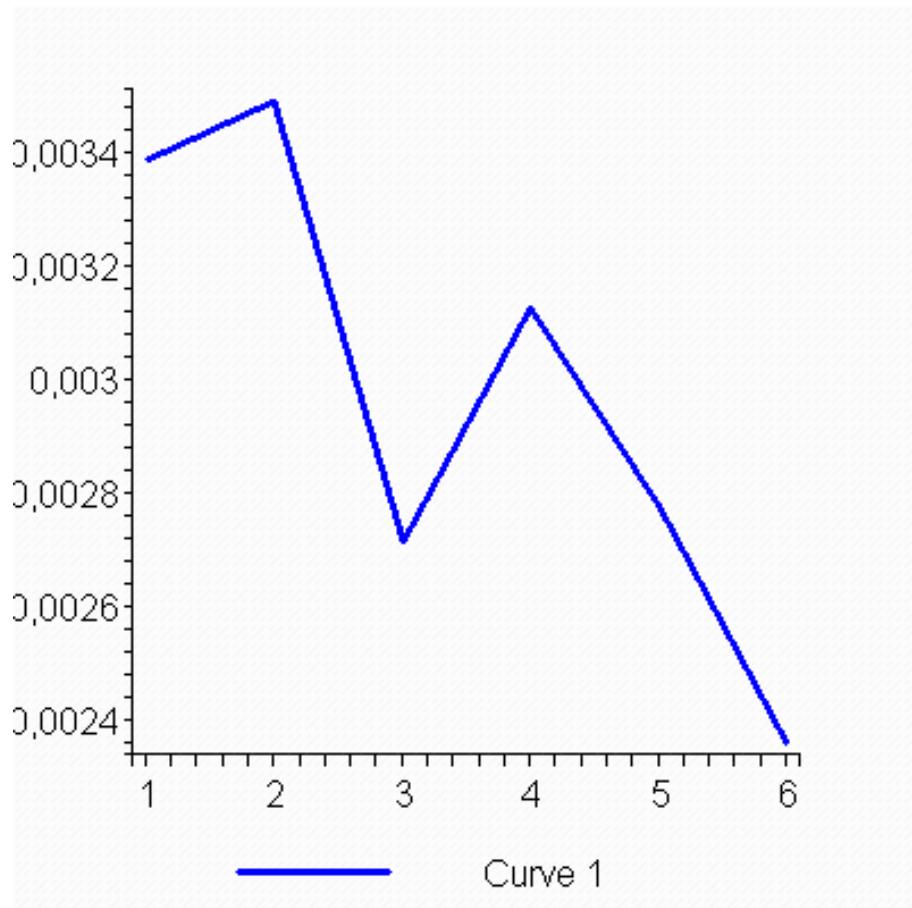
6.7. Оценка, интерполяция и визуализация дисперсий

Dy(Tk) значений в сечениях случайной функции Y(t)

```
> Dy:=[seq(add((X[i,k]-
My[k])^2,i=1..n),k=1..m)/(n-1)];
Dy:=[0.003389850000, 0.003491910000, 0.002717550000, 0.003128220000, 0.002777490000,
0.002361960000]

> plot(PolynomialInterpolation([seq(k, k=1..m)], 
Dy, z, form=Lagrange ), z=1..m,color=red,
thickness=2);
listplot(Dy, color=blue, thickness=2);
```





>

6.8. Оценка, интерполяция и визуализация корреляционных моментов $Ky(T_k, T_l)$ для значений в сечениях

случайной функции
 $Y(t)$

```

> Ky:=Matrix(1..m, 1..m);
# Определение матрицы для корреляционных
моментов Ky(Tk, Tl)
whattype(Ky);

for k from 1 to m do
    for l from 1 to m do
        Ky[k, l]:=0;
        for i from 1 to n do
            Ky[k, l]:=Ky[k, l]+(RyW[i,k]-
My[k])*(RyW[i,l]-My[l])/(n-1);# Расчет

```

корреляционных моментов $K_y(T_k, T_l)$ с помощью циклов

```
    end do;  
end do;  
end do;
```

```
 $K_y := [\text{seq}([\text{seq}(\text{add}((R_y W[i,k] - M_y[k]) * (R_y W[i,l] - M_y[l])), i=1..n), l=1..m)], k=1..m)] / (n-1);$ 
```

Аналитический расчет корреляционных моментов K_y
`whattype(Ky);`

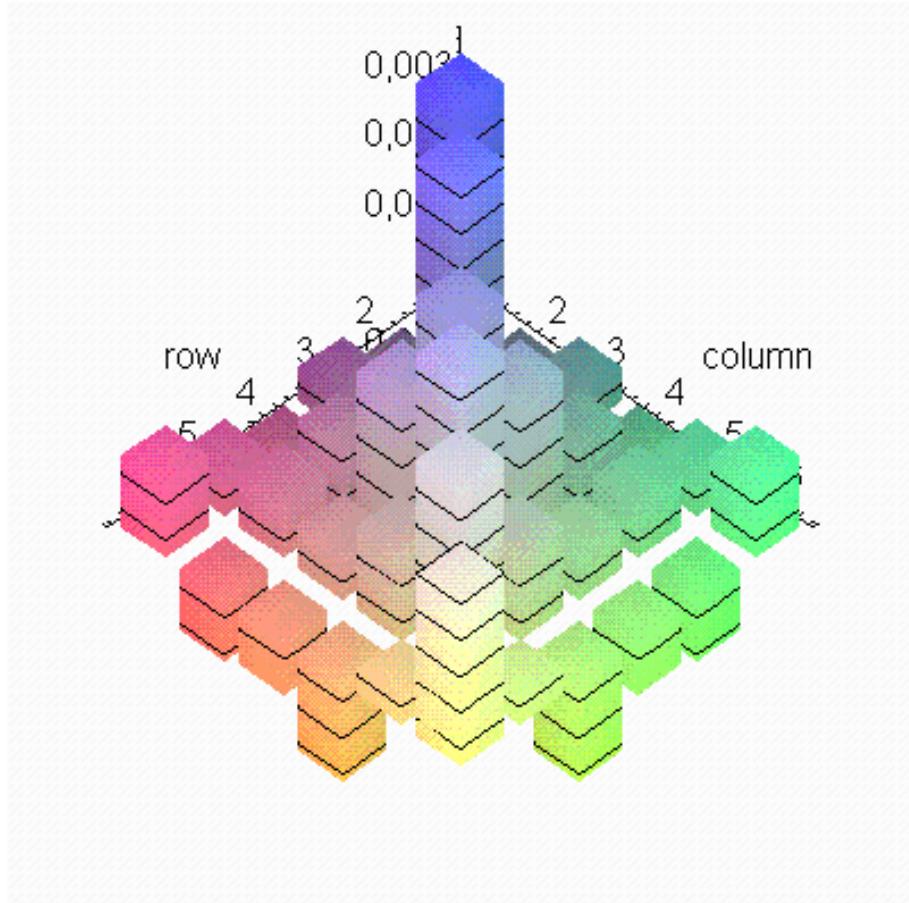
`matrixplot(Ky, heights=histogram, axes=normal,
gap=0.25, style=patchcontour); # Визуализация
корреляционных моментов $K_x(T_k, T_l)$`

$$K_y := \begin{bmatrix} ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

Matrix

```
 $K_y := [[0.003389850000, -0.0000473850000, 0.0004945050000, 0.0001008450000, 0.0004920750000,$   
 $0.001027890000], [-0.0000473850000, 0.003491909999, -0.0002223450000, 0.0009440549994,$   
 $0.0007435800001, -0.0008820900001], [0.0004945050000, -0.0002223450000, 0.002717550000,$   
 $0.002244915000, 0.0006342300000, -0.0007678800000], [0.0001008450000, 0.0009440549994,$   
 $0.002244915000, 0.003128220000, 0.001235655000, -0.001413045000], [0.0004920750000,$   
 $0.0007435800001, 0.0006342300000, 0.001235655000, 0.002777490000, 0.0003535649999],$   
 $[0.001027890000, -0.0008820900001, -0.0007678800000, -0.001413045000, 0.0003535649999,$   
 $0.002361960000]]$ 
```

list



6.9. Оценка, интерполяция и визуализация нормированной корреляционной функции $R_y(T_k, T_l)$ значений в сечениях случайной функции $Y(t)$

```

> Ry:=Matrix(1..m, 1..m);
# Определение матрицы для нормированной
# корреляционной функции Ry(Tk, Tl)
whattype(Ky);

for k from 1 to m do
    for l from 1 to m do
        Ry[k, l]:=Ky[k, l]/(sqrt(Ky[k,
k])*sqrt(Ky[1, 1]));# Расчет нормированной
# корреляционной функции Ry(Tk, Tl) с помощью
циклов
    end do;
end do;

```

```

Ry:=[seq([seq(Ky[k, l]/(sqrt(Ky[k,
k])*sqrt(Ky[l, l])), k=1..m)], l=1..m)] ;

# Аналитический расчет нормированной
корреляционной функции
whattype(Ry) ;

matrixplot(Ry, heights=histogram, axes=normal,
gap=0.25, style=patchcontour); # Визуализация
корреляционных моментов Ky(Tk, Tl)

```

$$Ry := \begin{bmatrix} ? & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 0 & ? & 0 & 0 & 0 \\ ? & 0 & 0 & ? & 0 & 0 \\ ? & 0 & 0 & 0 & ? & 0 \\ ? & 0 & 0 & 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

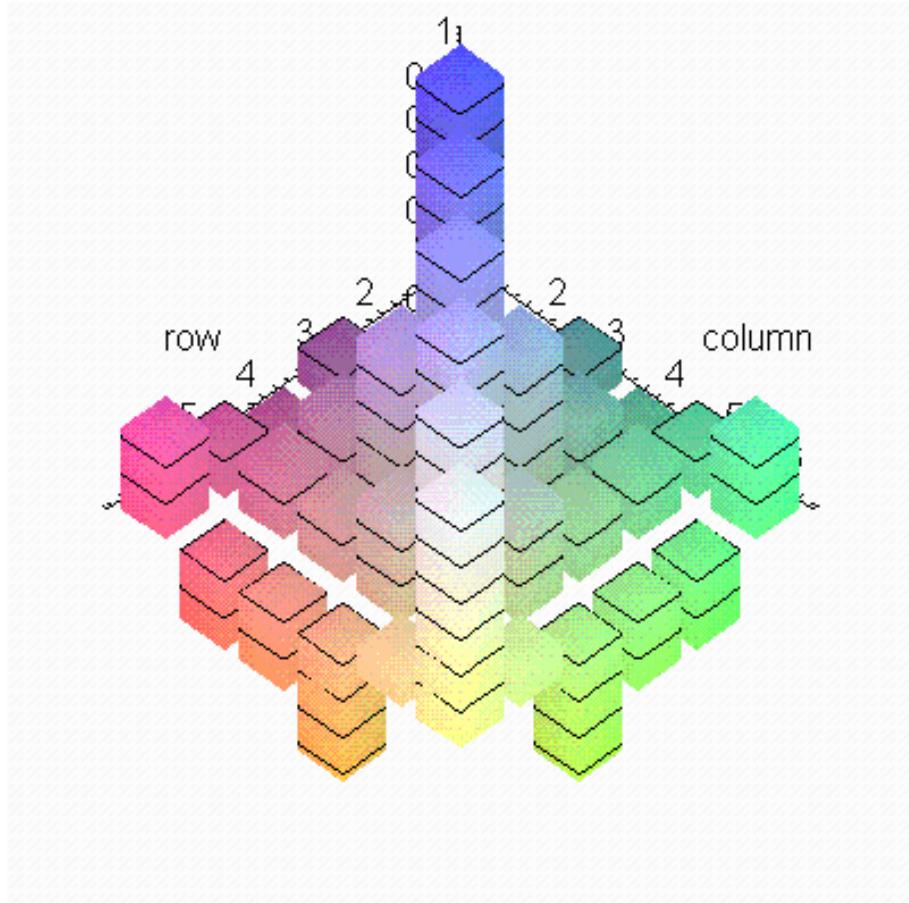
list

```

Ry:=[[1.000000000, -0.01377270114, 0.1629264800, 0.03096816595, 0.1603669275, 0.3632621350],
[-0.01377270114, 1.000000000, -0.07217837082, 0.2856387549, 0.2387645945, -0.3071461731],
[0.1629264800, -0.07217837082, 0.9999999998, 0.7699499337, 0.2308509983, -0.3030877022],
[0.03096816595, 0.2856387551, 0.7699499336, 1.000000000, 0.4192010238, -0.5198416581],
[0.1603669275, 0.2387645946, 0.2308509985, 0.4192010238, 1.000000000, 0.1380405705],
[0.3632621350, -0.3071461730, -0.3030877023, -0.5198416580, 0.1380405705, 1.000000000]]

```

list



>

6.10. Оценка математического ожидания M_x корреляционных моментов сечений случайной функции $Y(t)$

```
> StatMy:=add(My[k], k=1..m)/m;
StatMy := 3.484800000
```

>

6.11. Оценка математического ожидания D_y дисперсий сечений случайной функции $Y(t)$

```
> StatDy:=add(Dy[k], k=1..m)/m;
StatDy := 0.002977830000
```

>

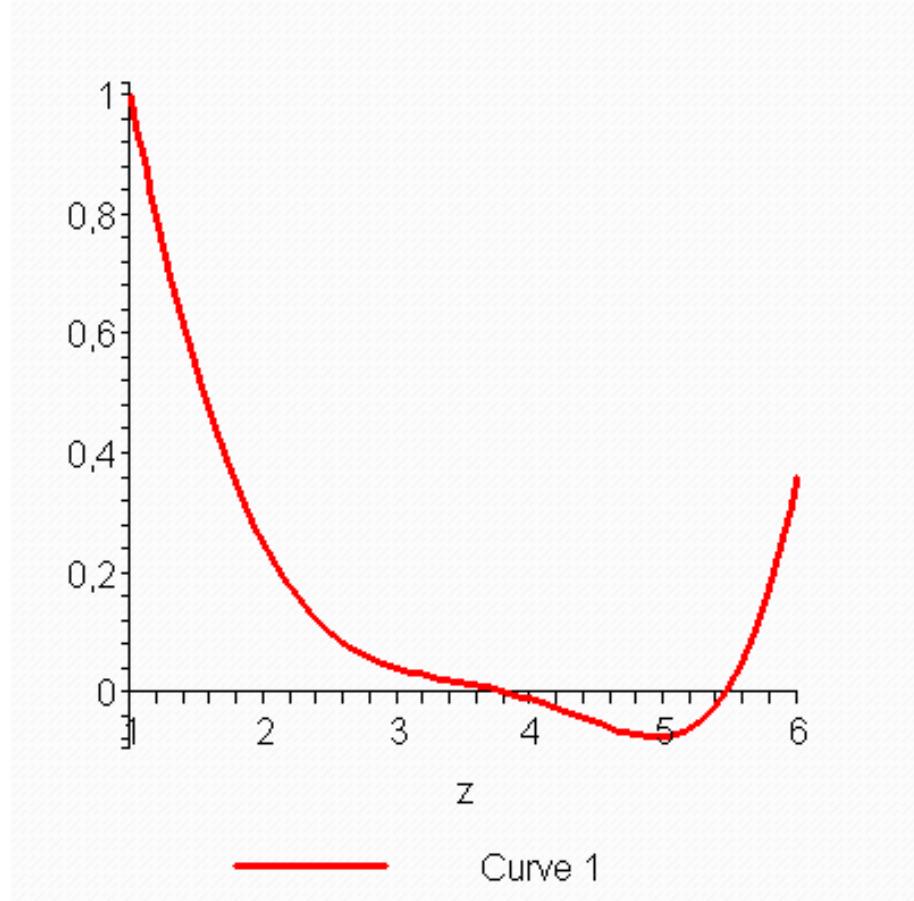
6.12. Оценка, интерполяция и визуализация нормированной корреляционной функции $RoY(T_k-T_l)$ значений в сечениях случайной функции $X(t)$

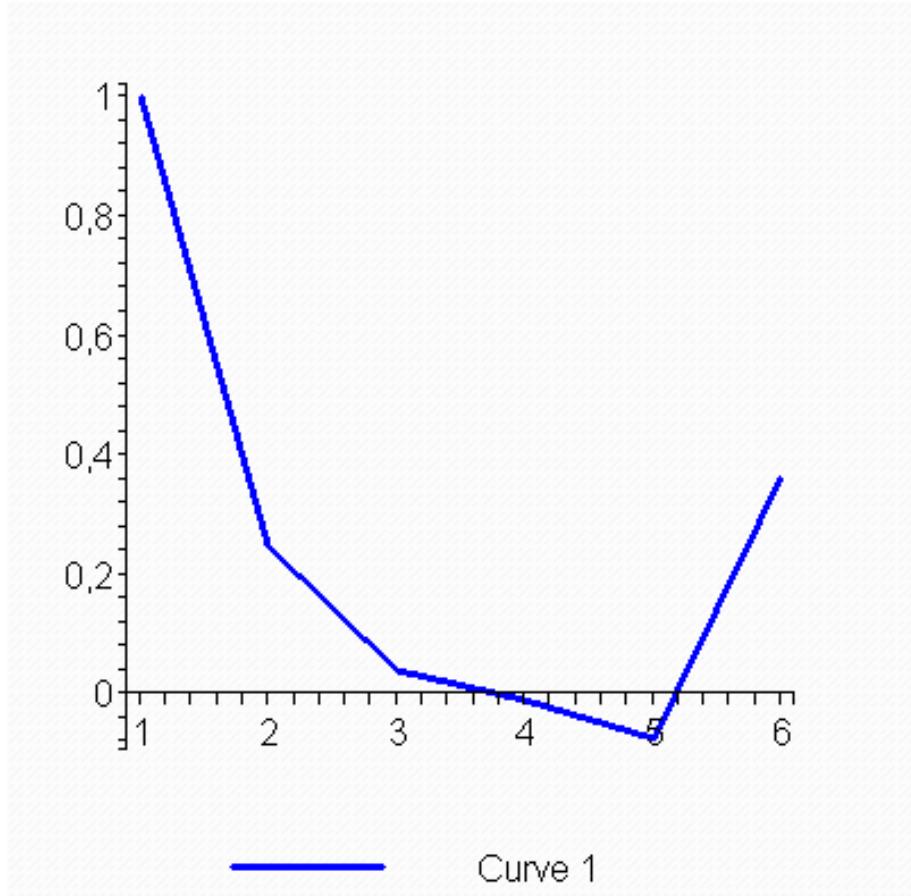
```

> RoY:=[seq(add(Ry[k, k+i], k=1..m-i)/(m-i),
i=0..m-1)] ;
RoY:=[1.000000000, 0.2482480912, 0.03989364378, -0.01111831393, -0.07338962280, 0.3632621350]

> plot(PolynomialInterpolation([seq(k, k=1..m)], RoY, z, form=Lagrange), z=1..m, color=red,
thickness=2);
listplot(RoY, color=blue, thickness=2);

```





7. Имитационное моделирование линейной динамической системы с помощью Simulink

[Экранные формы модели](#) ======> D:\TMO\Lab2\Экранные
формы модели.mht

> stop!!!! КОНЕЦ ПРОГРАММЫ ДЛЯ
ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ № 2 ПО ТСМО

ЭКРАННЫЕ ФОРМЫ ДЛЯ ПРОХОЖДЕНИЯ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ДИНАМИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ

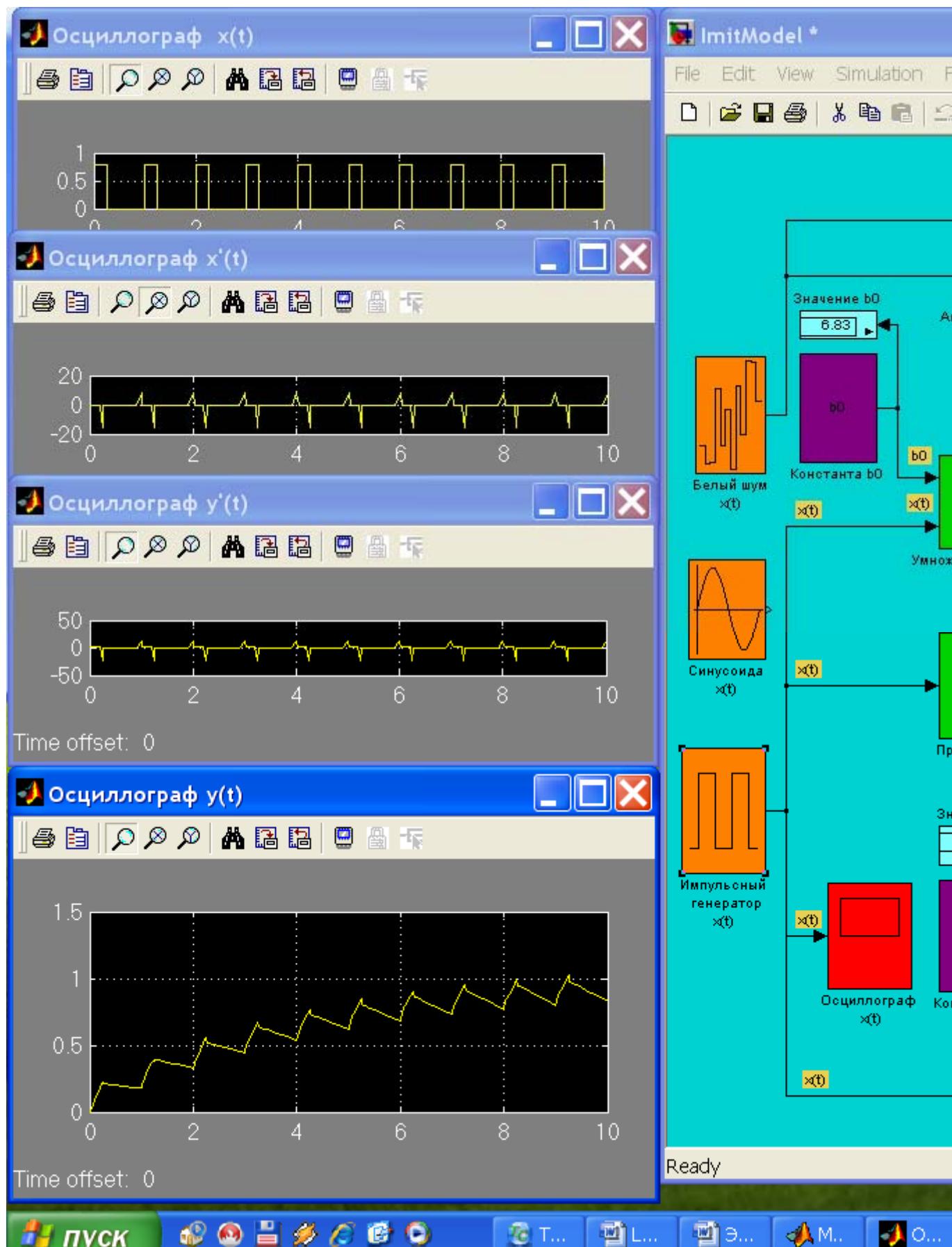


Рисунок 1 — Динамика системы при воздействии импульсного генератора с параметрами 0.8/1сек/25%

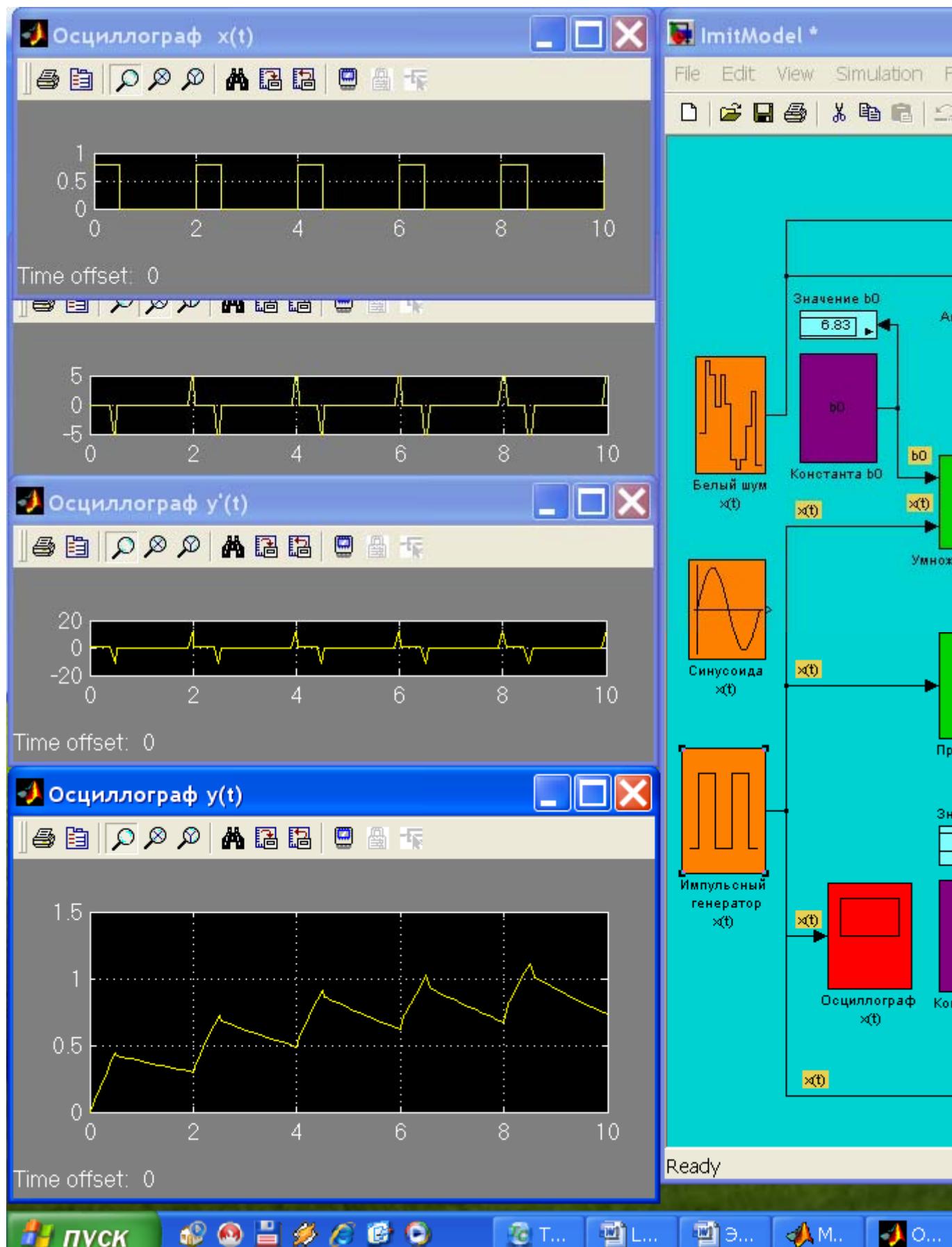


Рисунок 2 — Динамика системы при воздействии импульсного генератора с параметрами 0.8/2сек/25%

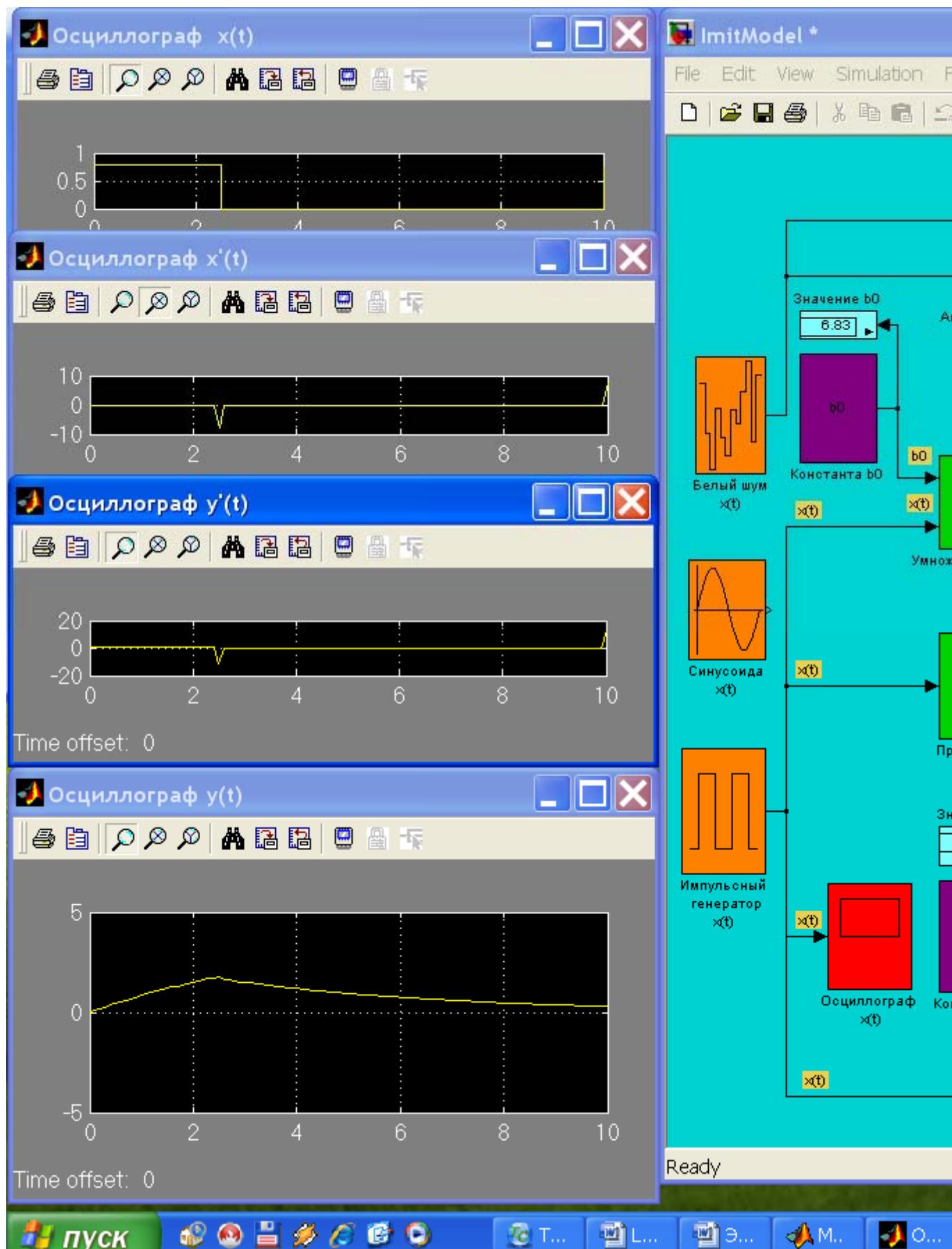


Рисунок 3 — Динамика системы при воздействии импульсного генератора с параметрами 0.8/10сек/25%

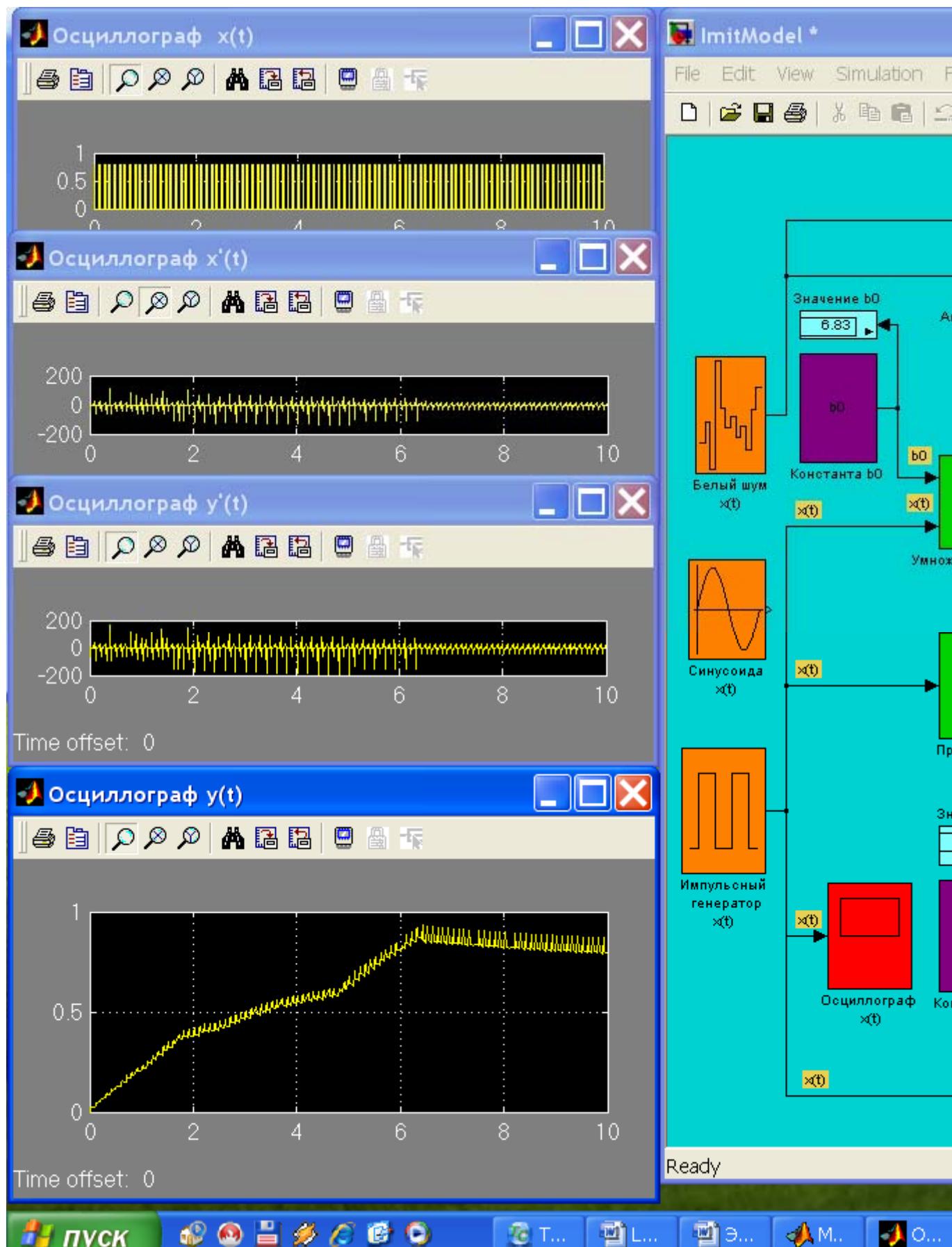


Рисунок 4 — Динамика системы при воздействии импульсного генератора с параметрами 0.8/0.1сек/25%

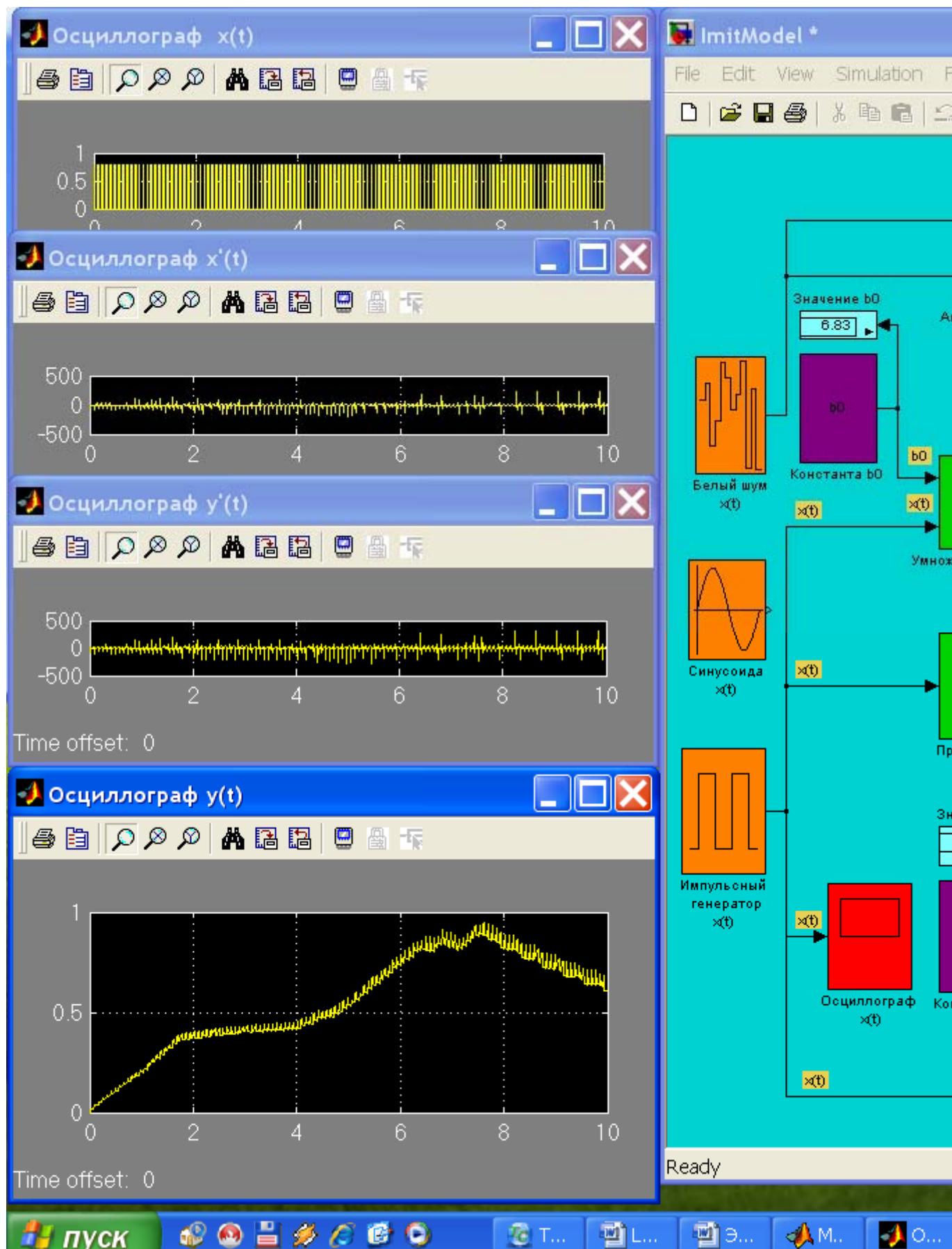


Рисунок 5 — Динамика системы при воздействии импульсного генератора с параметрами 0.8/0.08сек/25%

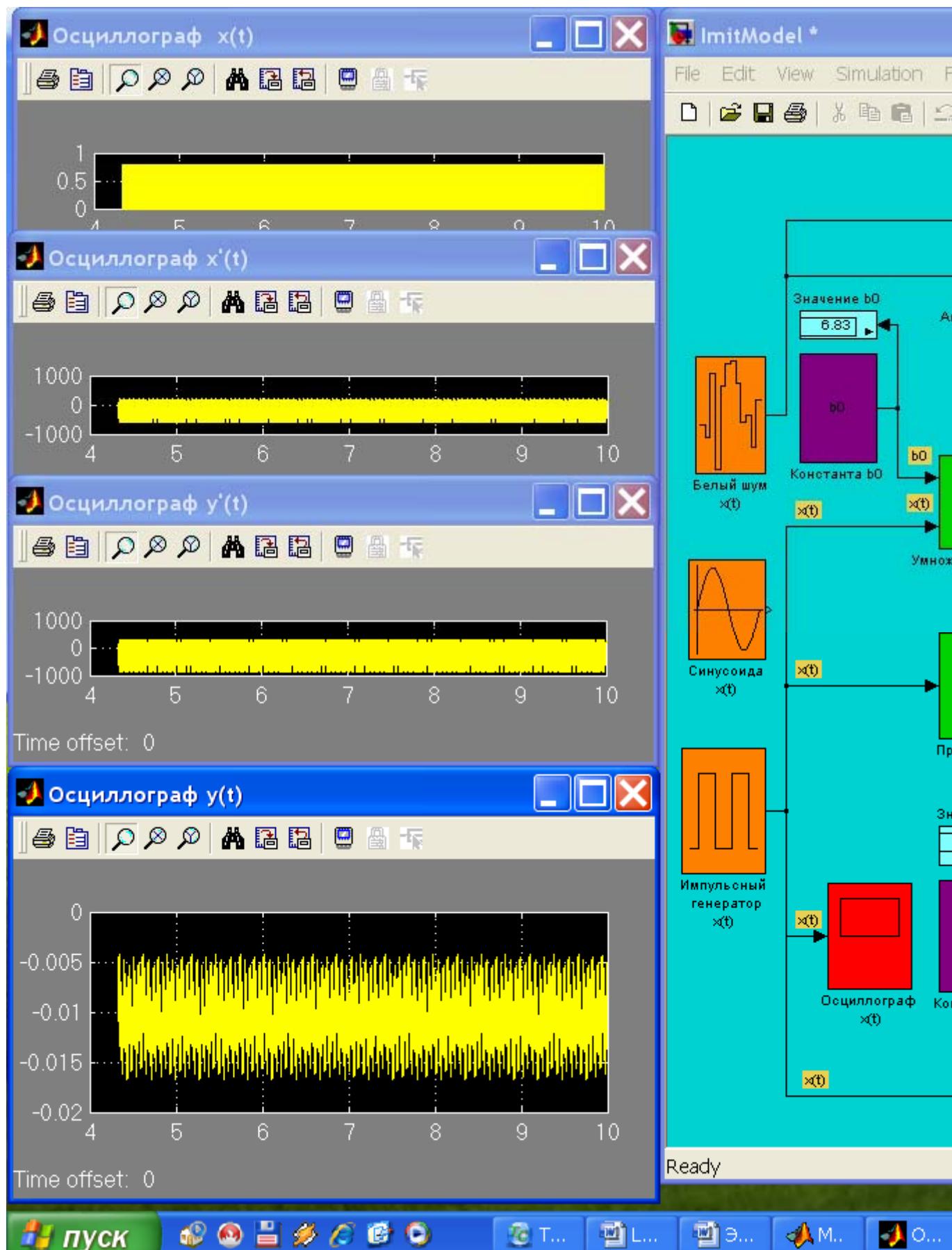


Рисунок 6 — Динамика системы при воздействии импульсного генератора с параметрами 0.8/0.01сек/25%

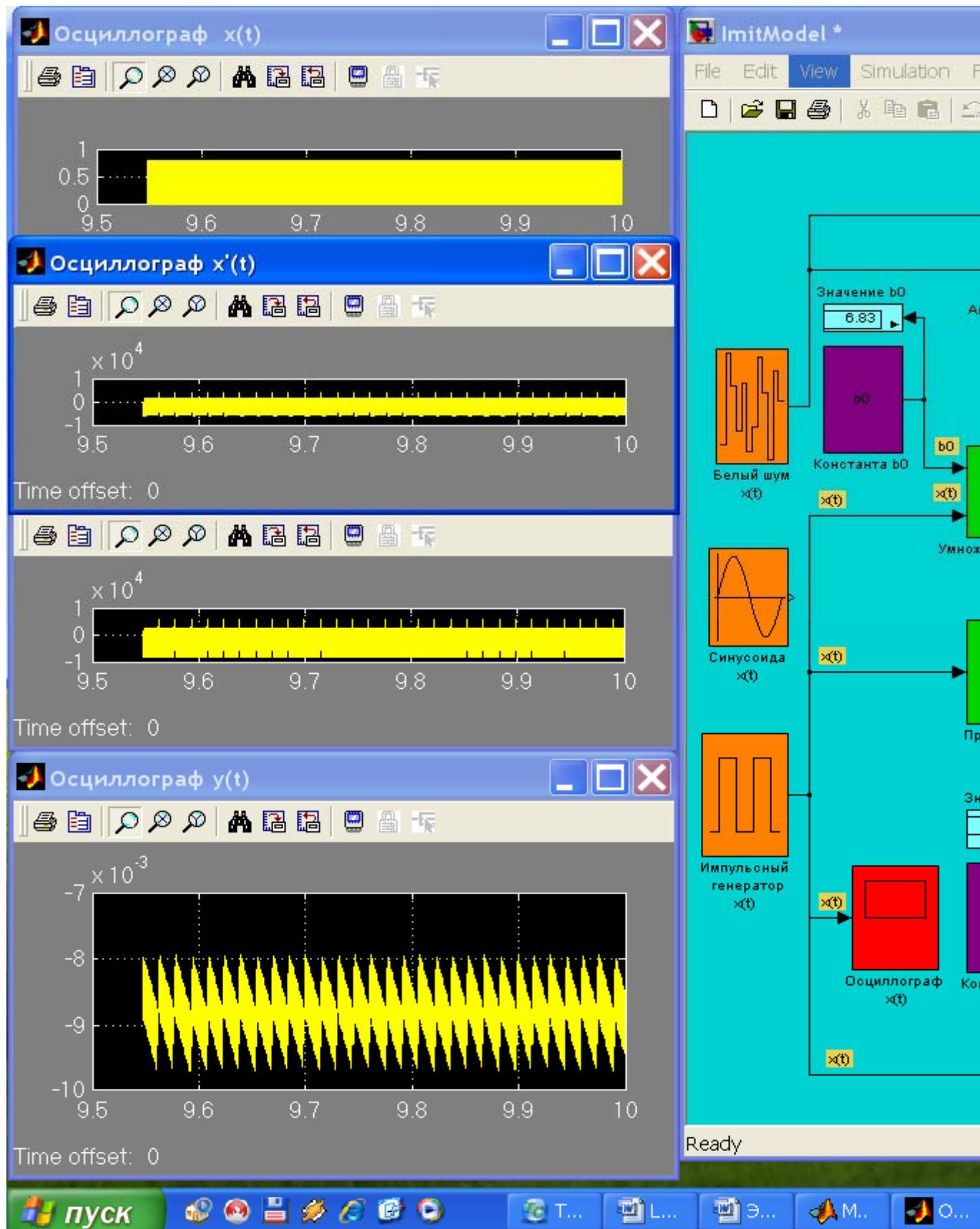


Рисунок 7 — Динамика системы при воздействии импульсного генератора с параметрами 0.8/0.001сек/25%

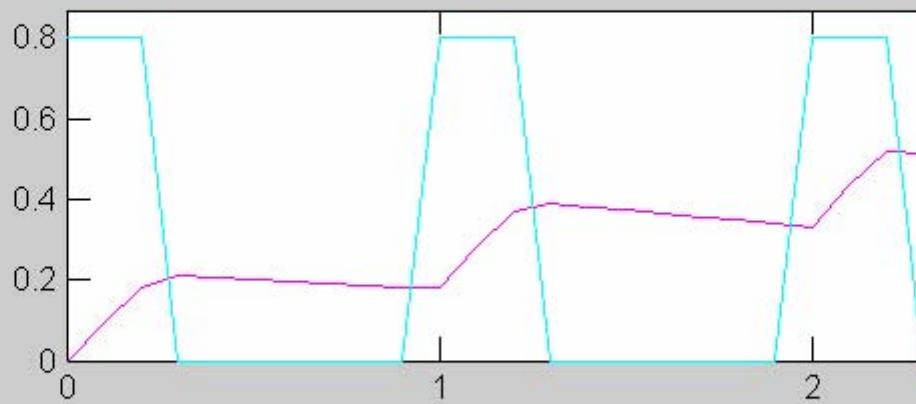


Figure No. 1: ImitModel/Анализатор_спектра

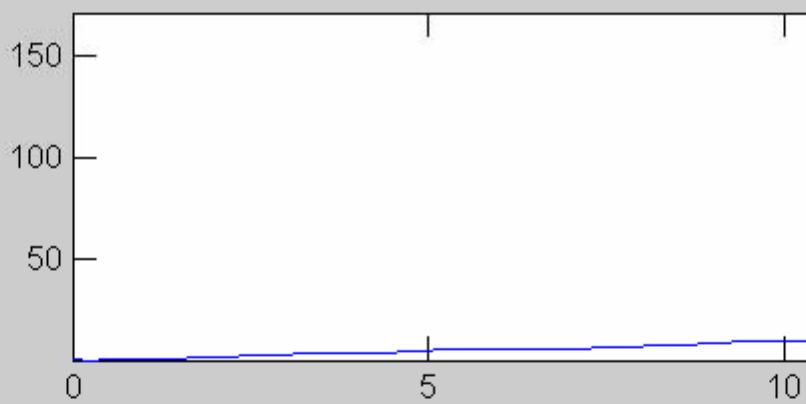
File Edit View Insert Tools Window Help



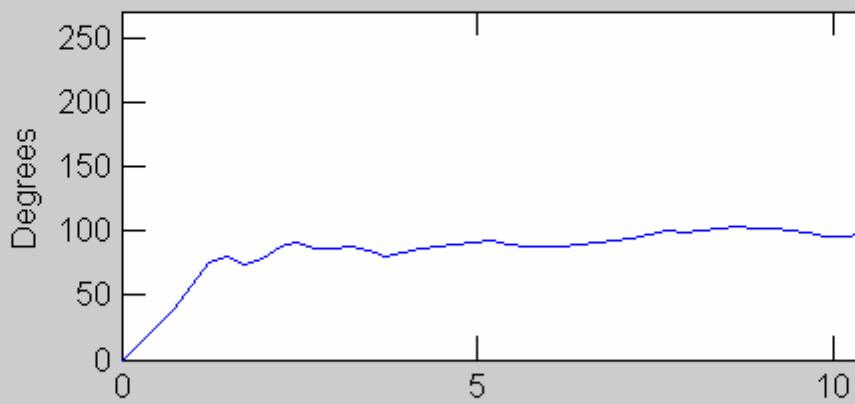
Time histo



Trans



Tran



F

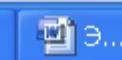


Рисунок 8 — Спектральные характеристики выходного сигнала при воздействии импульсного генератора с параметрами 0.8/1сек/25%

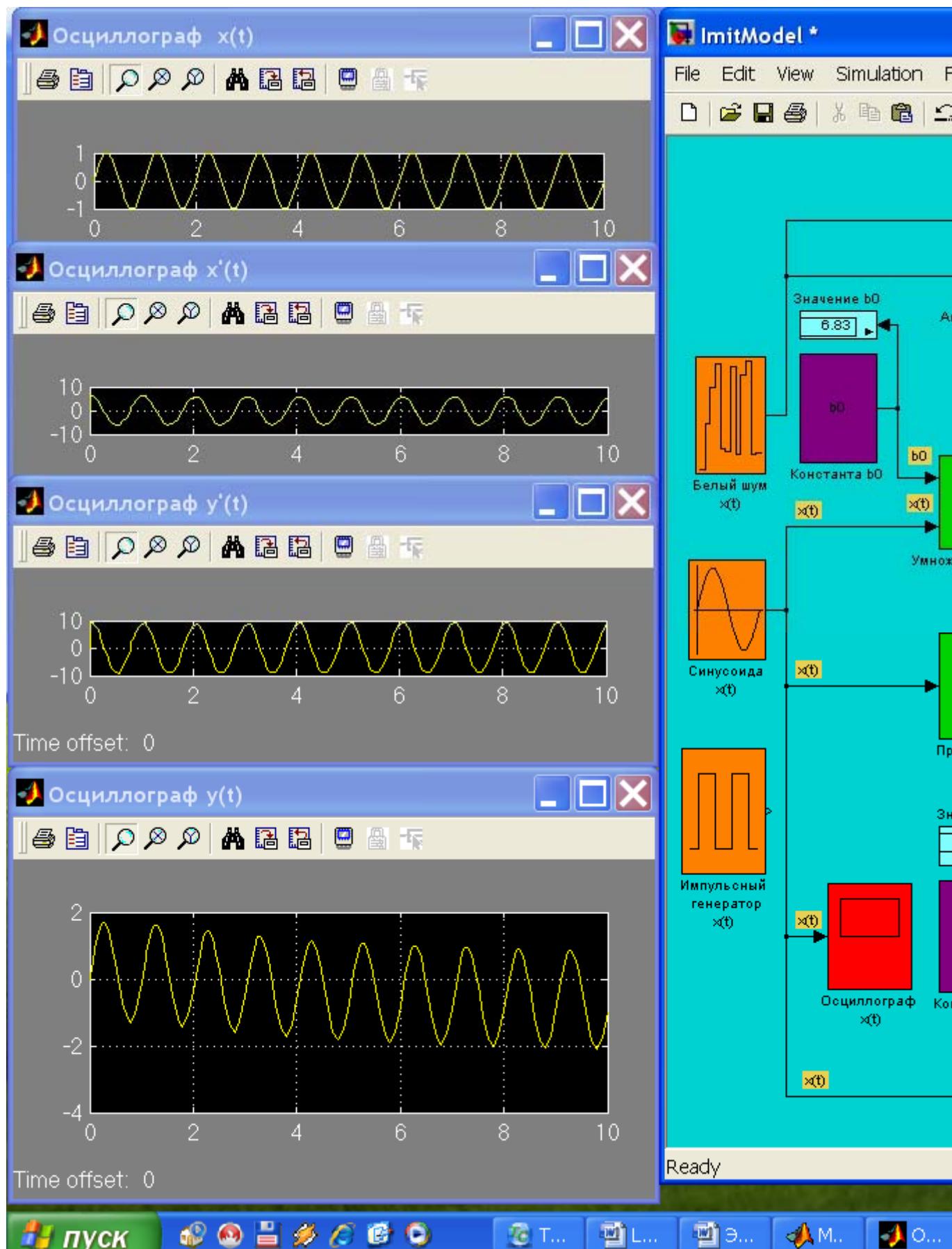


Рисунок 9 — Динамика системы при воздействии синусоидального генератора с параметрами 1/1Гц/25%

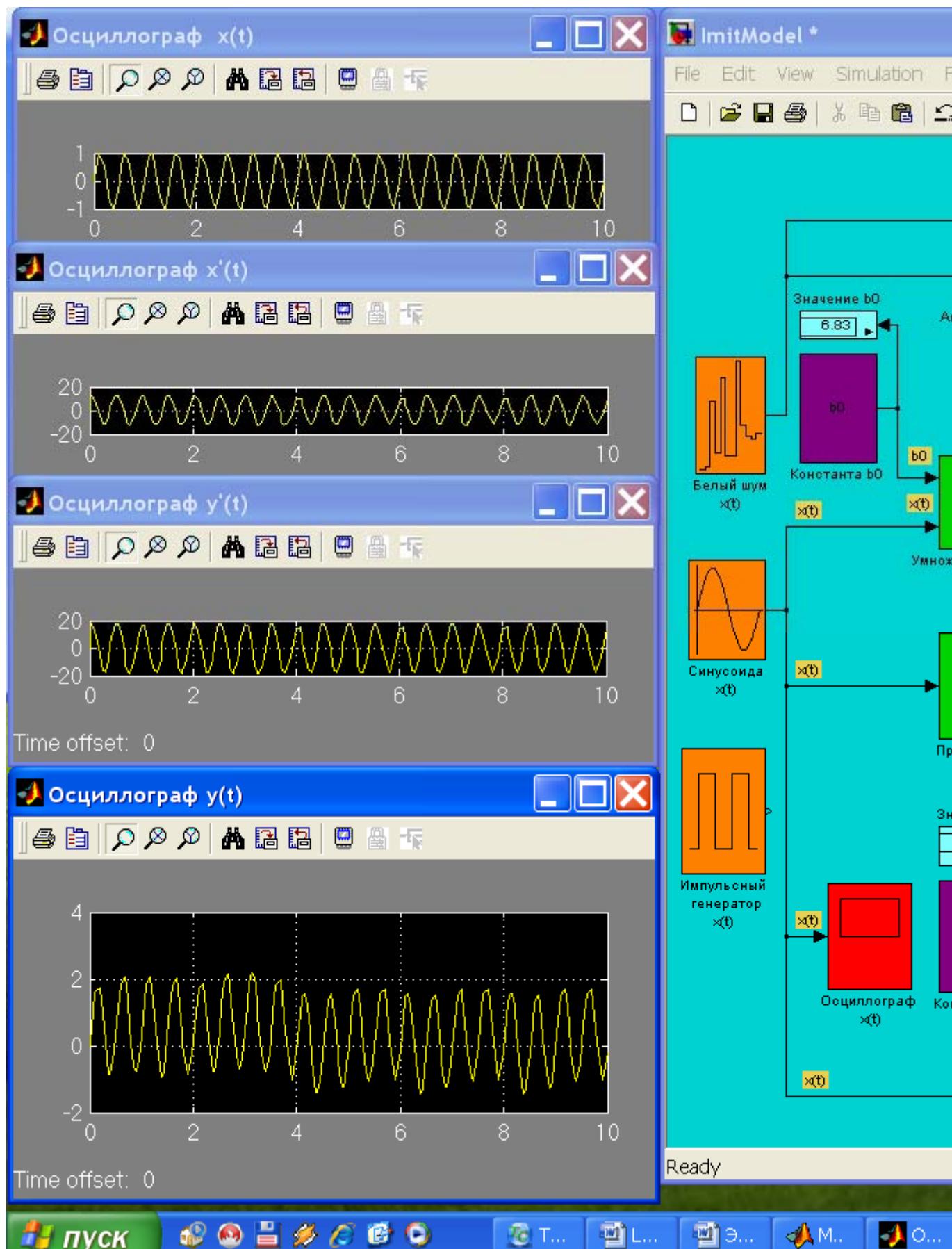


Рисунок 10 — Динамика системы при воздействии синусоидального генератора с параметрами 1/2Гц/25%

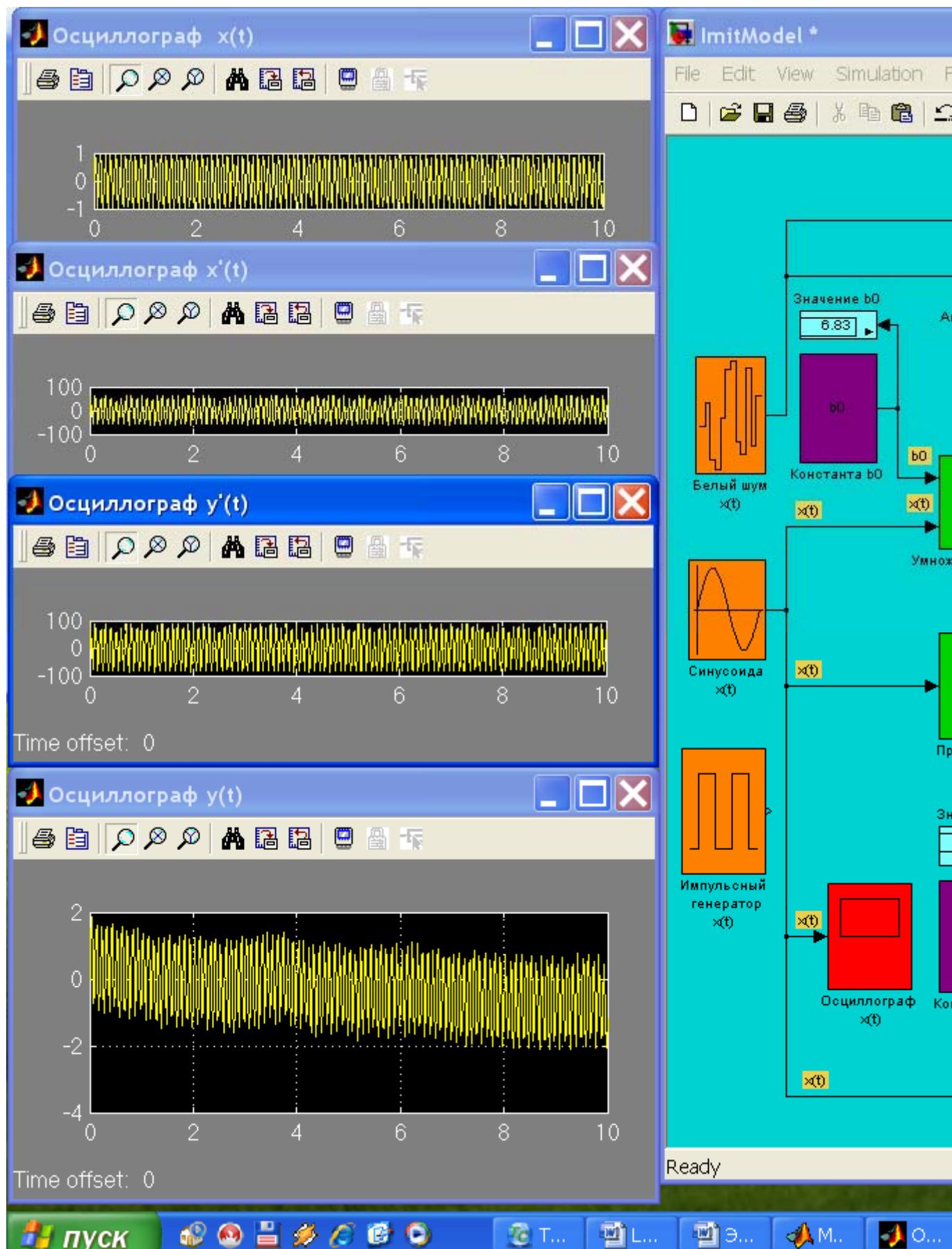


Рисунок 11 — Динамика системы при воздействии синусоидального генератора с параметрами 1/10Гц/25%



Рисунок 12 — Динамика системы при воздействии синусоидального генератора с параметрами 1/1000Гц/25%

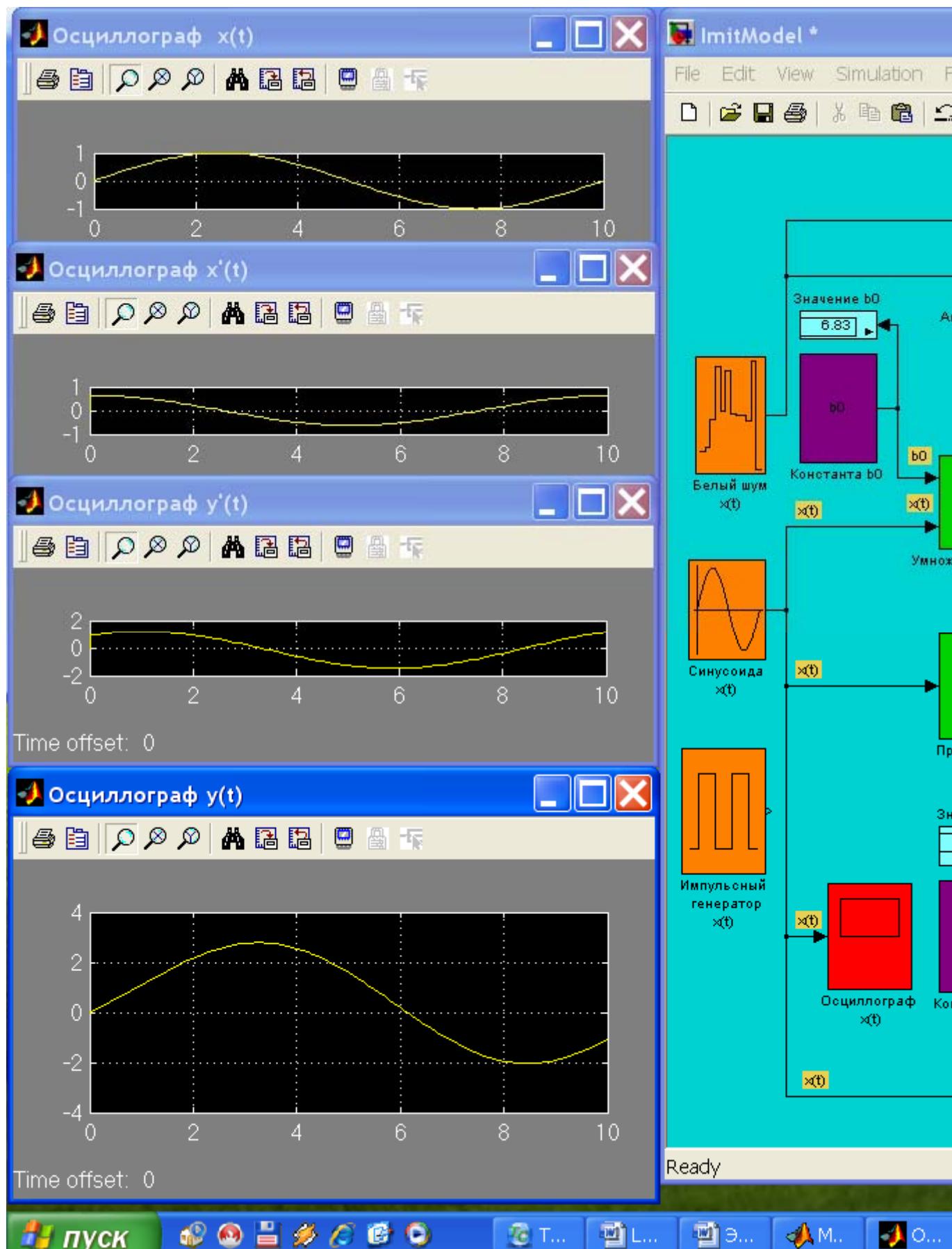


Рисунок 13 — Динамика системы при воздействии синусоидального генератора с параметрами 1/0.1Гц/25%

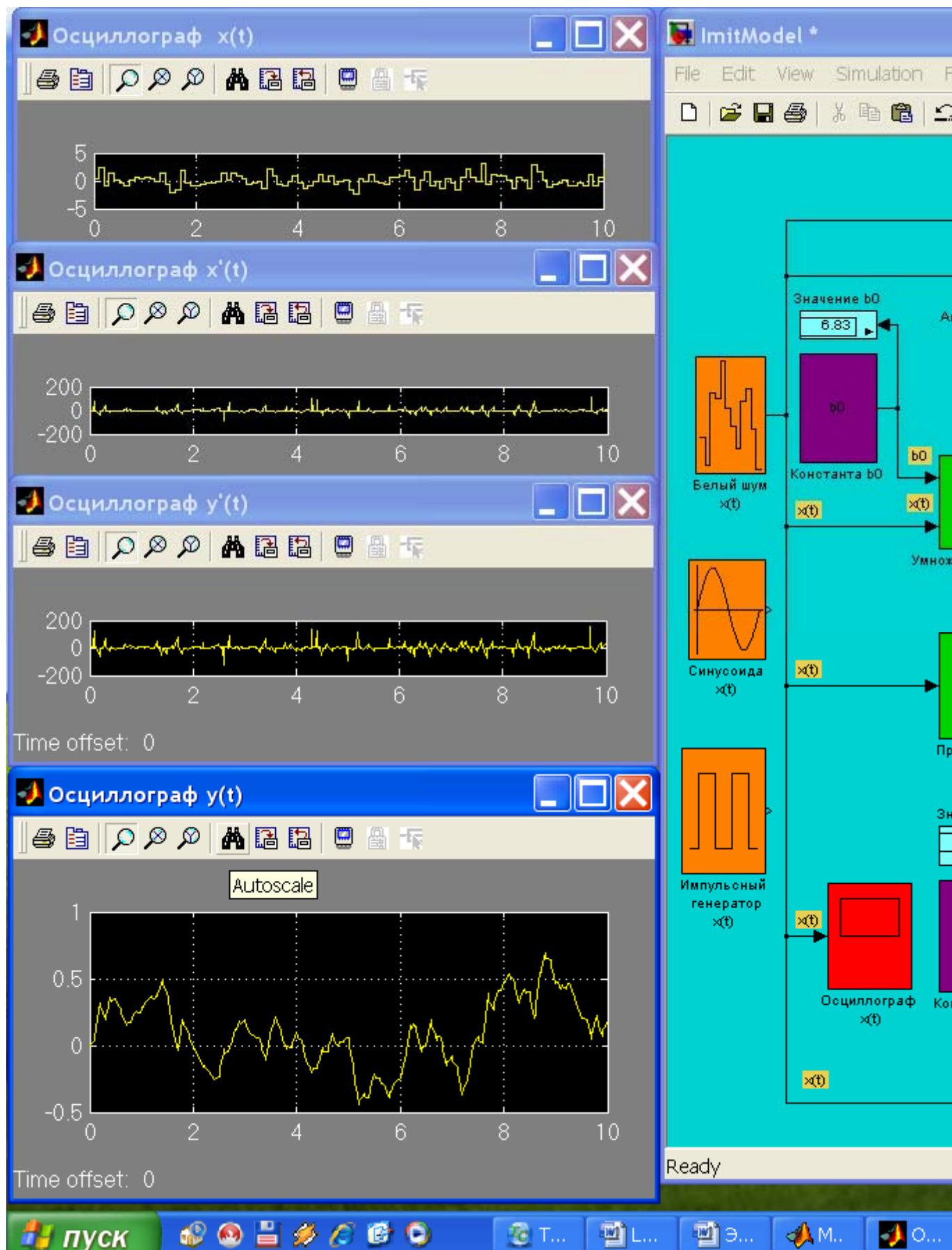
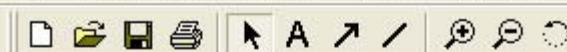


Рисунок 14 — Динамика системы при воздействии генератора белого шума с параметрами 0.1/0.1сек

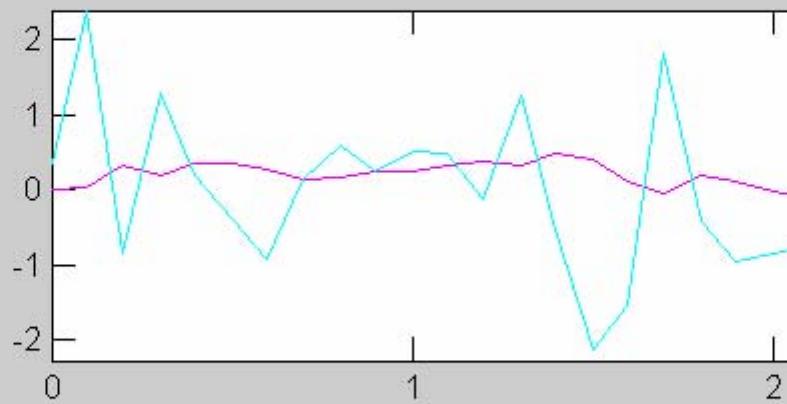


Figure No. 1: ImitModel/Анализатор_спектра

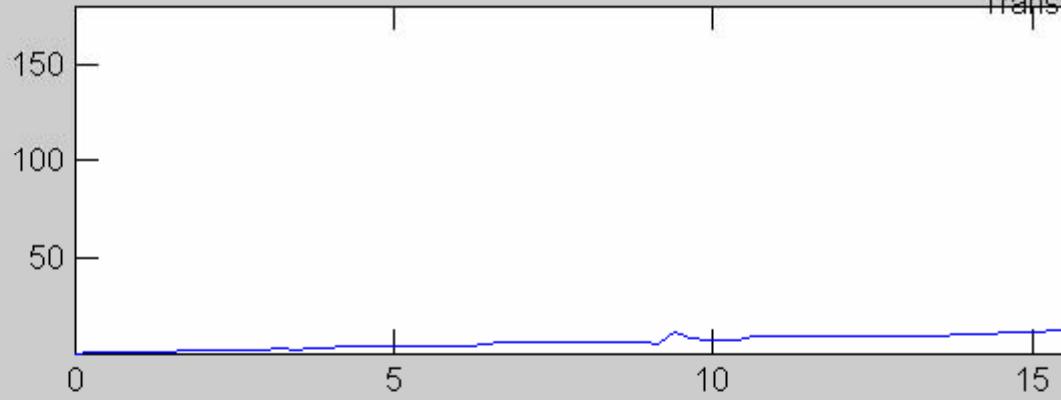
File Edit View Insert Tools Window Help



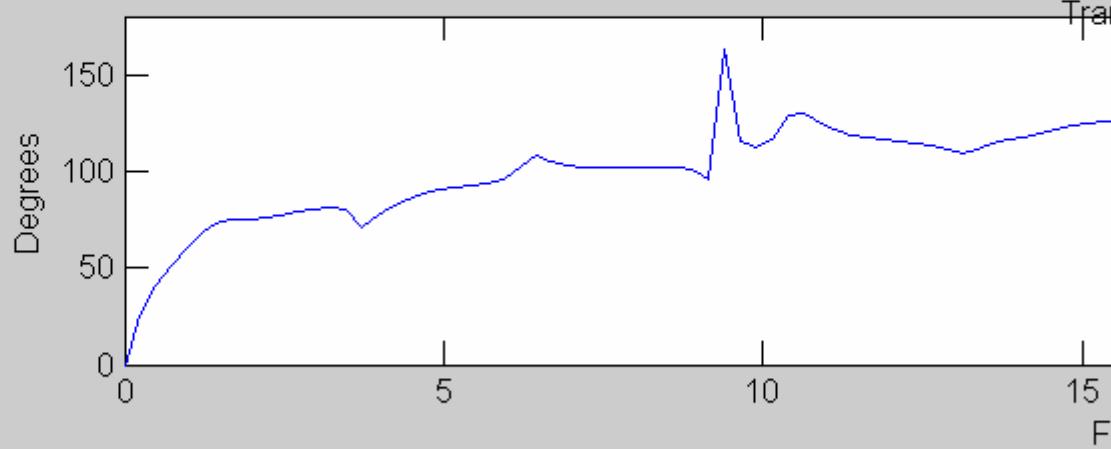
Time histo



Trans



F



Trans

F



Рисунок 15 — Спектральные характеристики выходного сигнала при воздействии генератора белого шума с параметрами 0.1/0.1сек

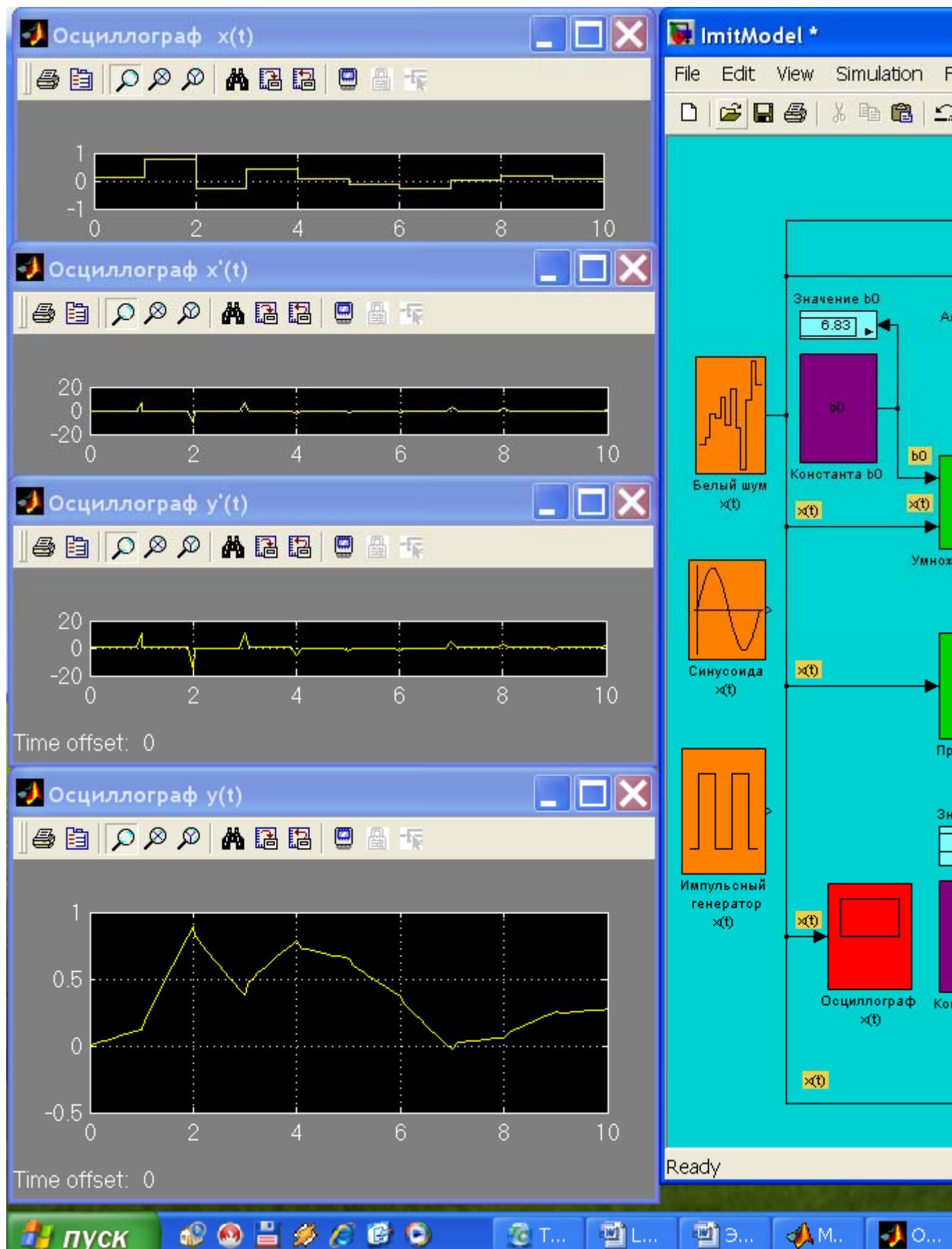


Рисунок 16 — Динамика системы при воздействии генератора белого шума с параметрами 0.1/1сек

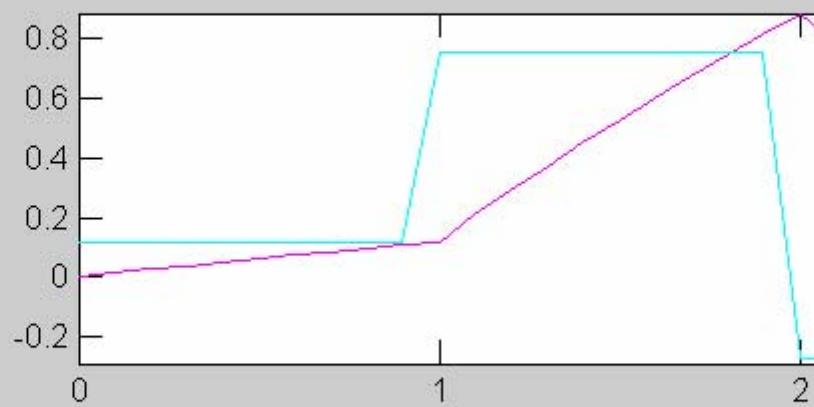


Figure No. 1: ImitModel/Анализатор_спектра

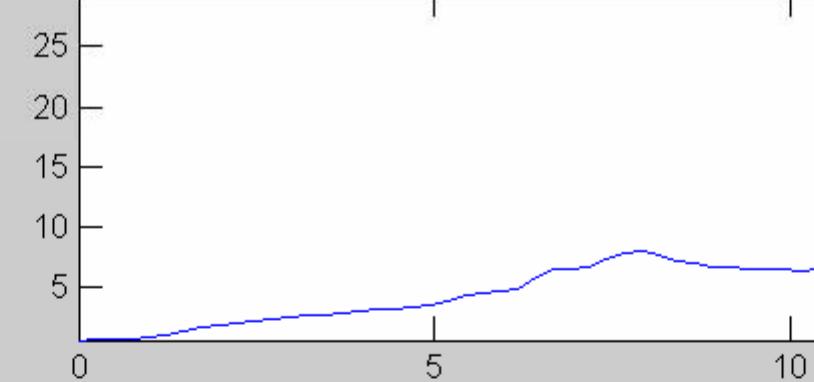
File Edit View Insert Tools Window Help



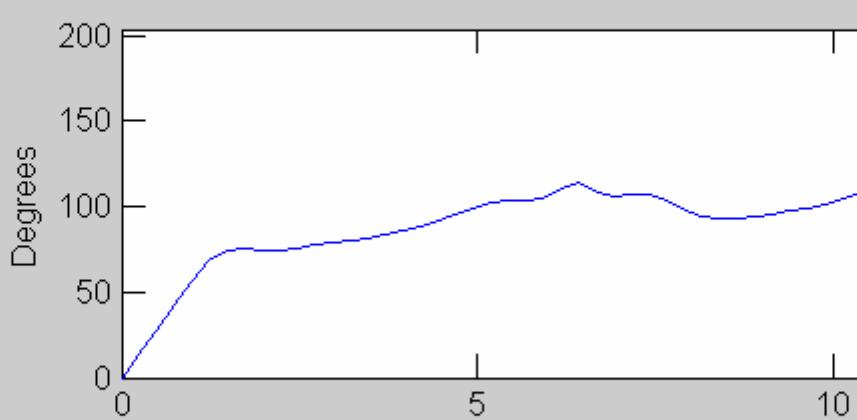
Time histo



Trans



F



F



Рисунок 17 — Спектральные характеристики выходного сигнала при воздействии генератора белого шума с параметрами 0.1/1сек

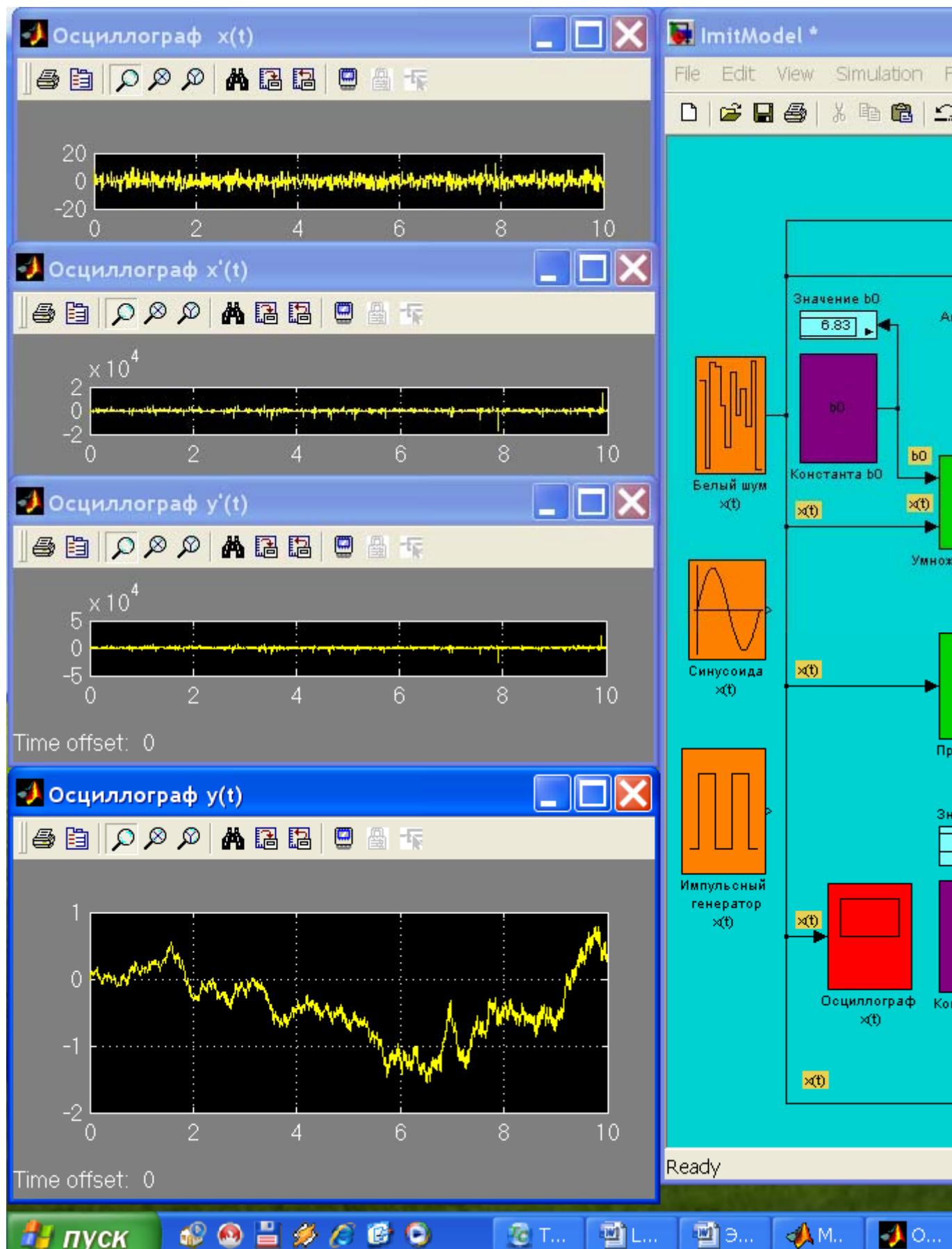


Рисунок 18 — Динамика системы при воздействии генератора белого шума с параметрами 0.1/0.01сек

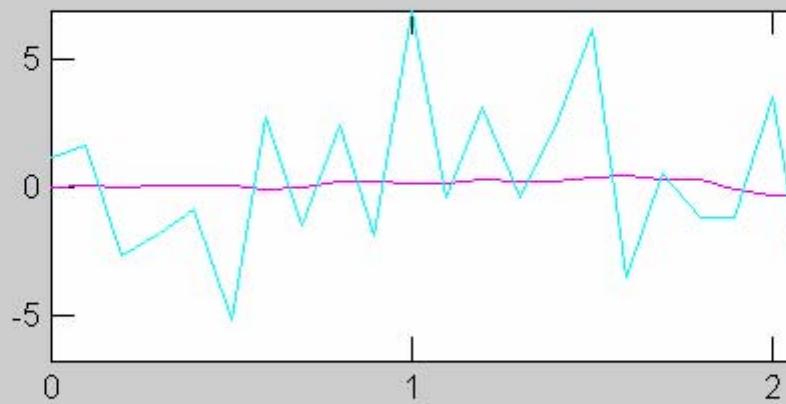


Figure No. 1: ImitModel/Анализатор_спектра

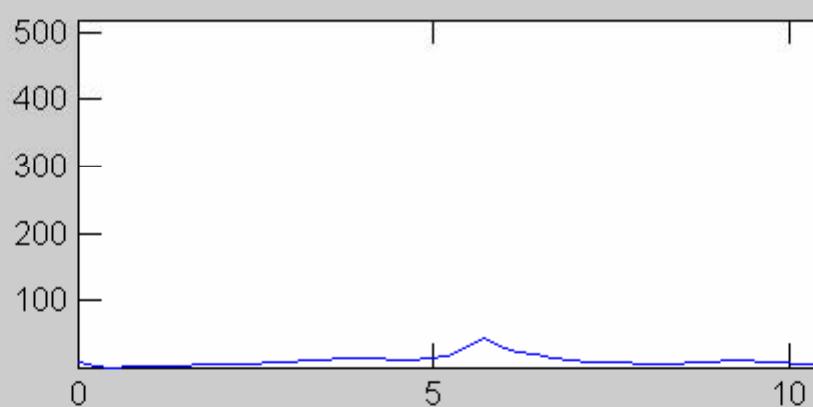
File Edit View Insert Tools Window Help



Time histo

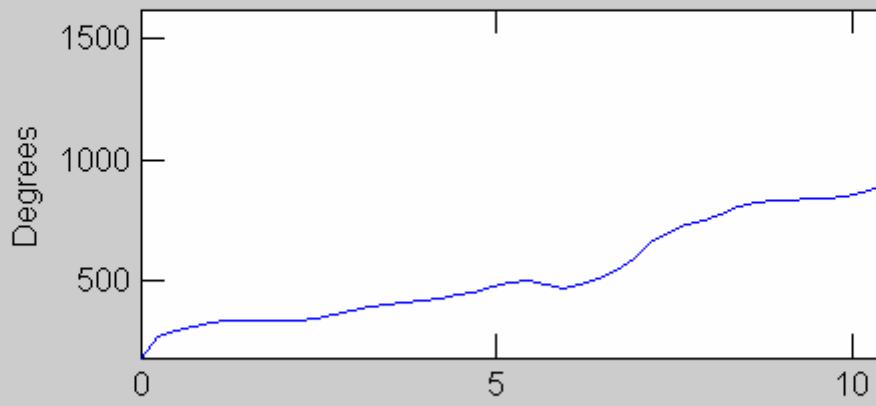


Trans



F

Tran



F



Рисунок 19 — Спектральные характеристики выходного сигнала при воздействии генератора белого шума с параметрами 0.1/0.01сек

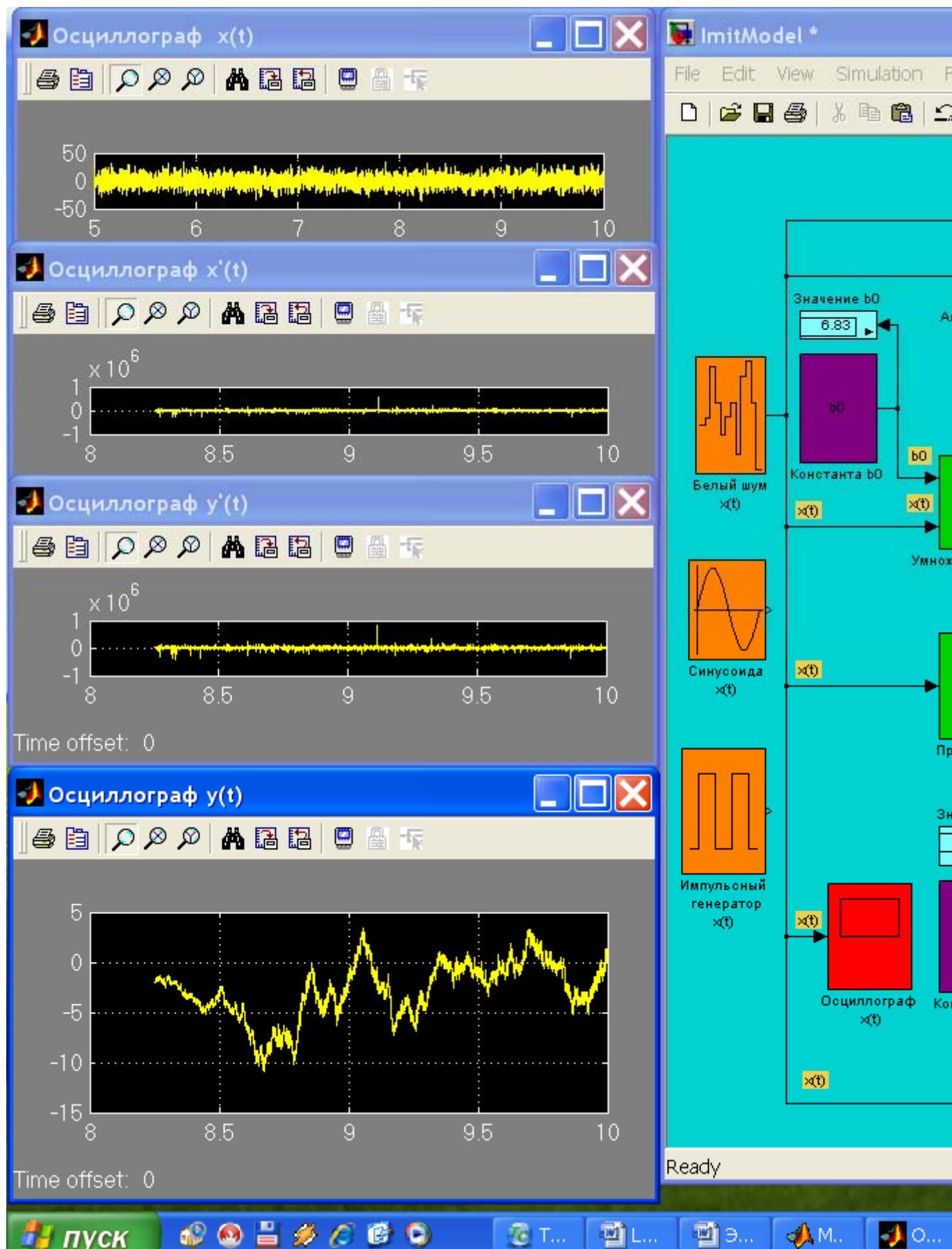
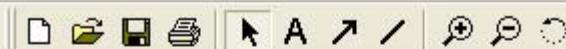


Рисунок 20 — Динамика системы при воздействии генератора белого шума с параметрами 0.1/0.001сек

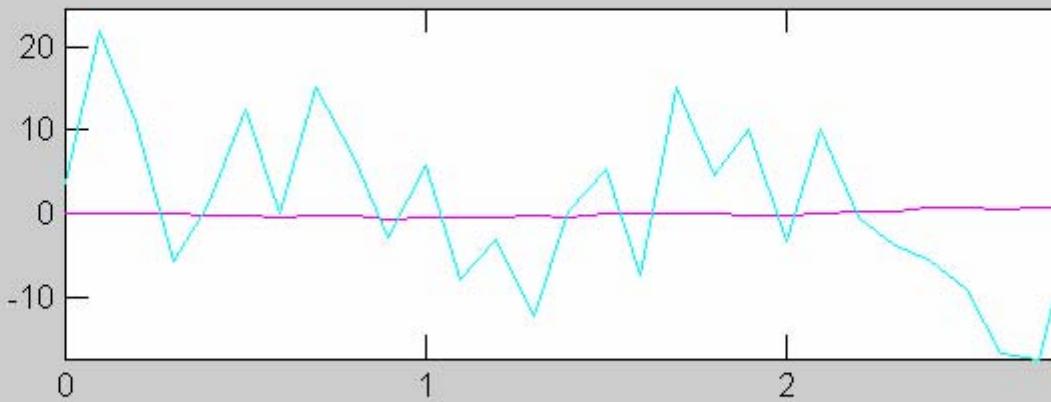


Figure No. 1: ImitModel/Анализатор_спектра

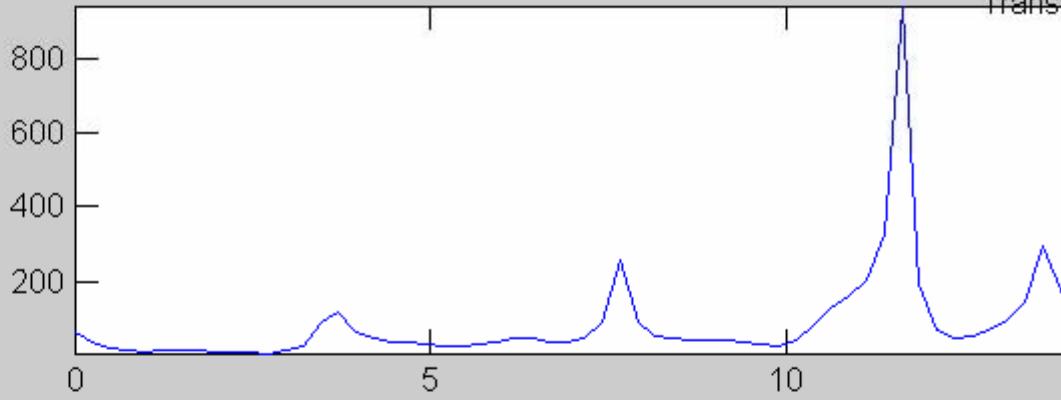
File Edit View Insert Tools Window Help



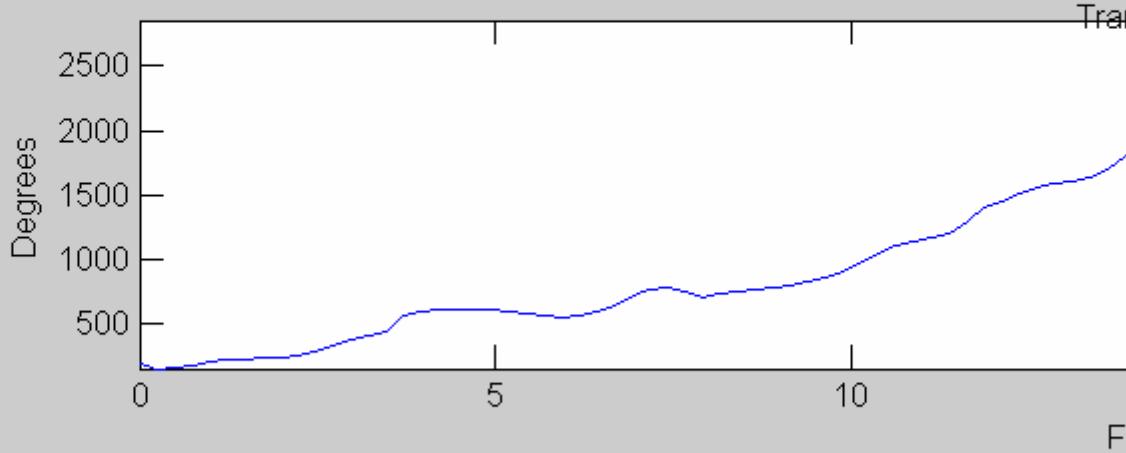
Time histo



Trans



F



F



Рисунок 21 — Спектральные характеристики выходного сигнала при воздействии генератора белого шума с параметрами 0.1/0.001сек

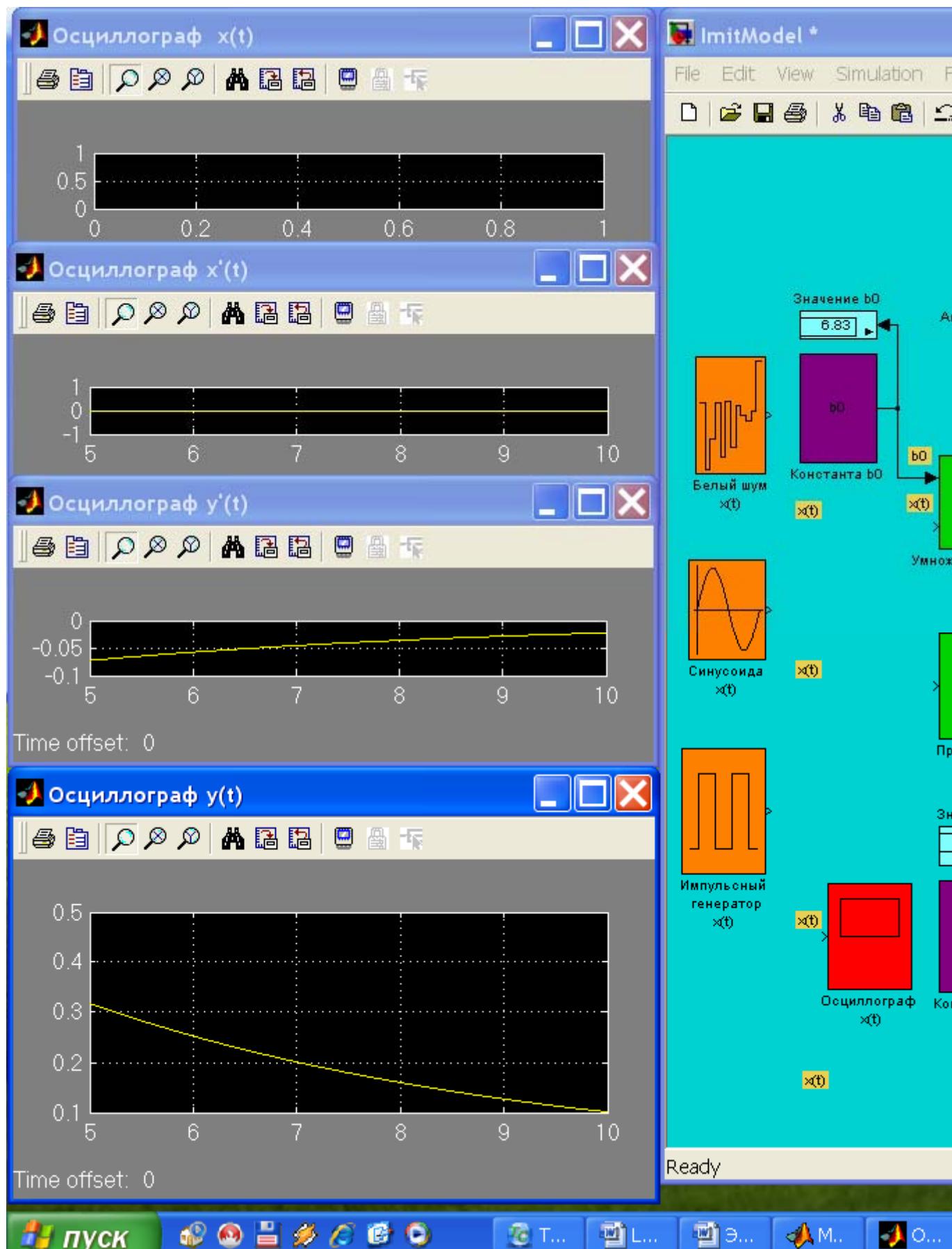


Рисунок 22 — Динамика свободного движения системы при $y(0) = 1$



Figure No. 1: ImitModel/Анализатор_спектра

File Edit View Insert Tools Window Help

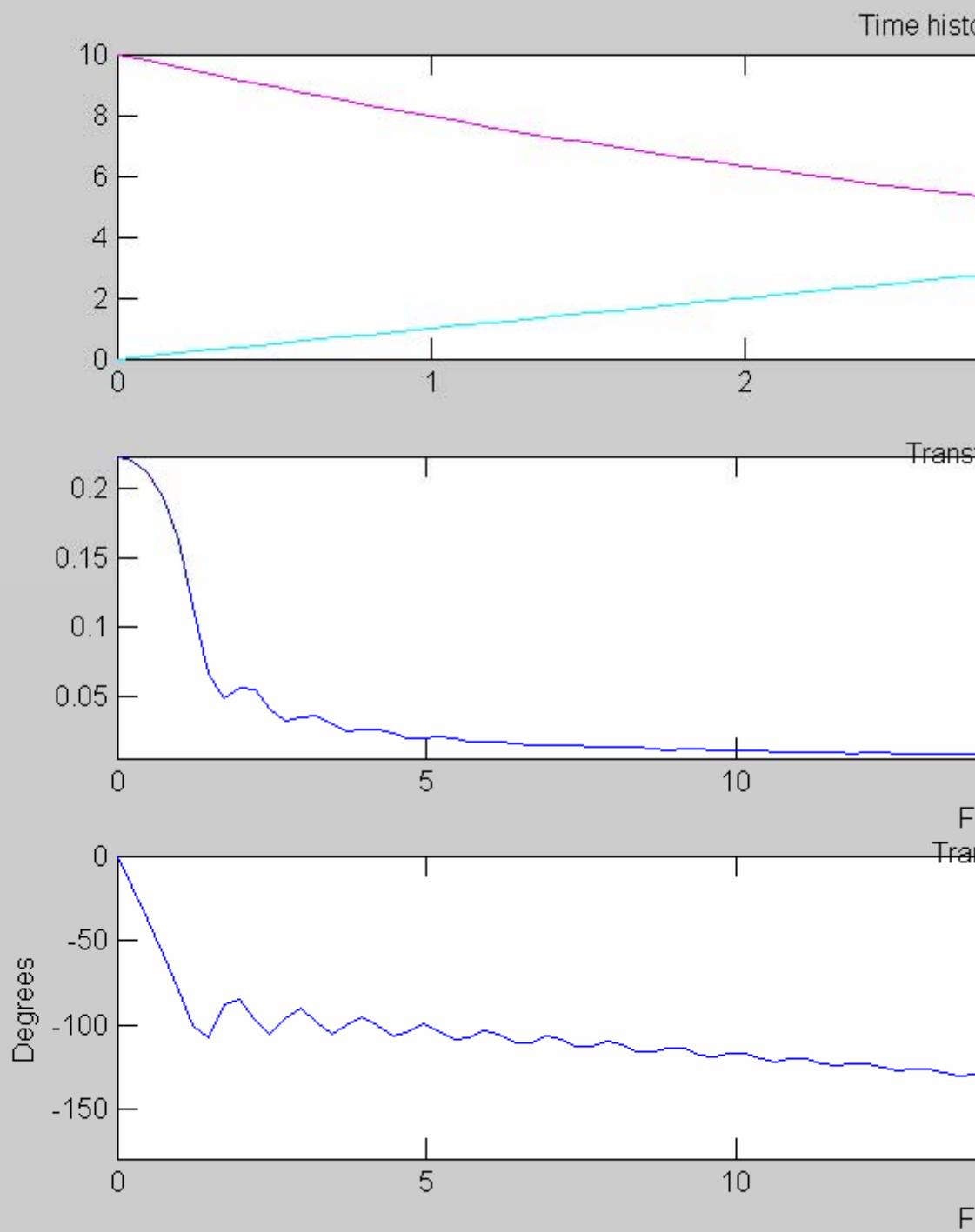


Рисунок 23 — Спектральные характеристики выходного сигнала свободного движения системы при $y(0) = 1$

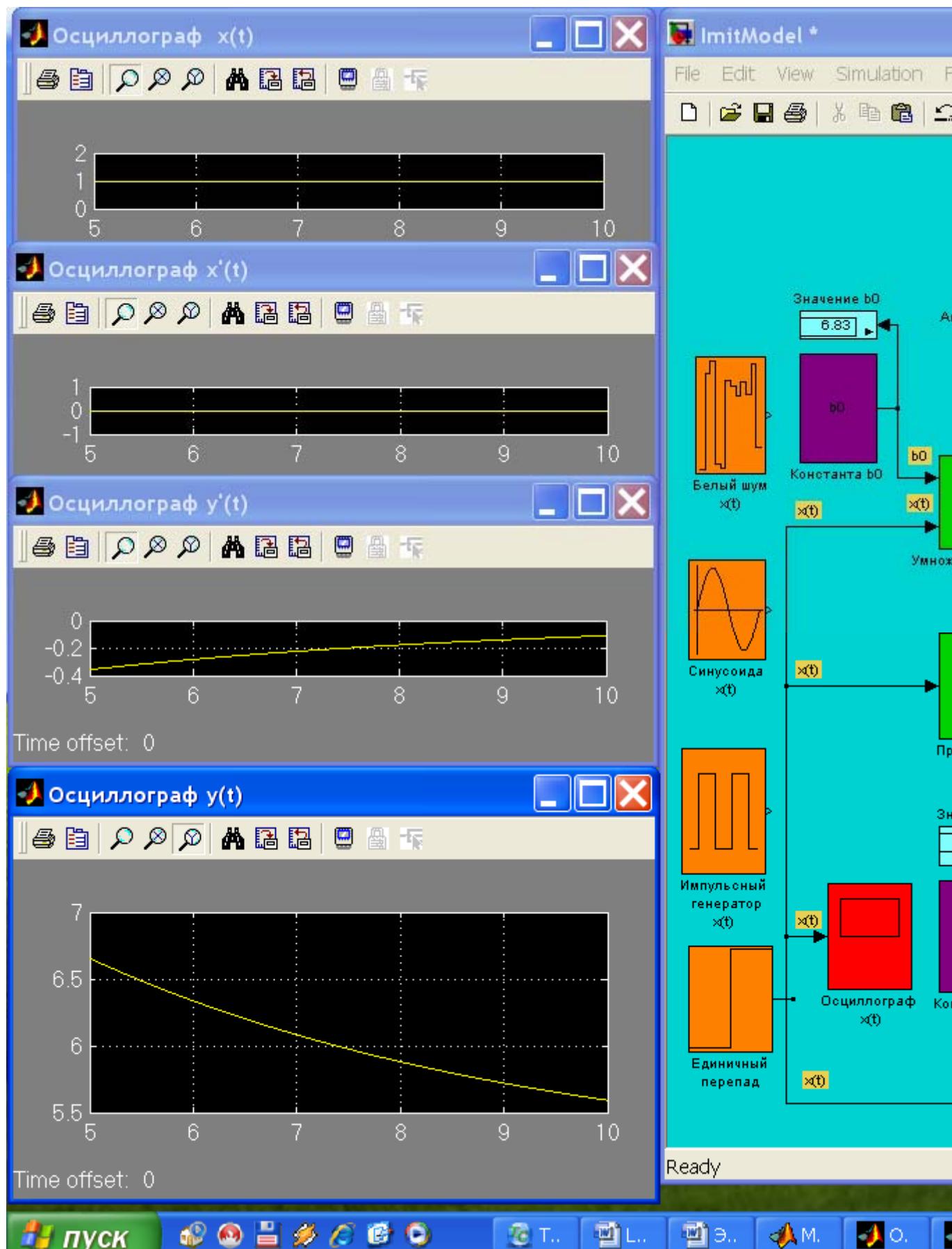
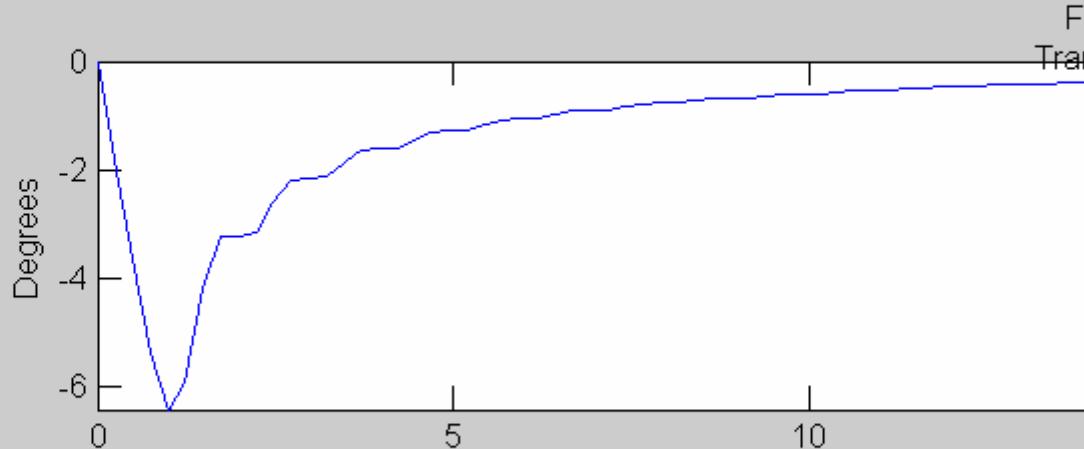
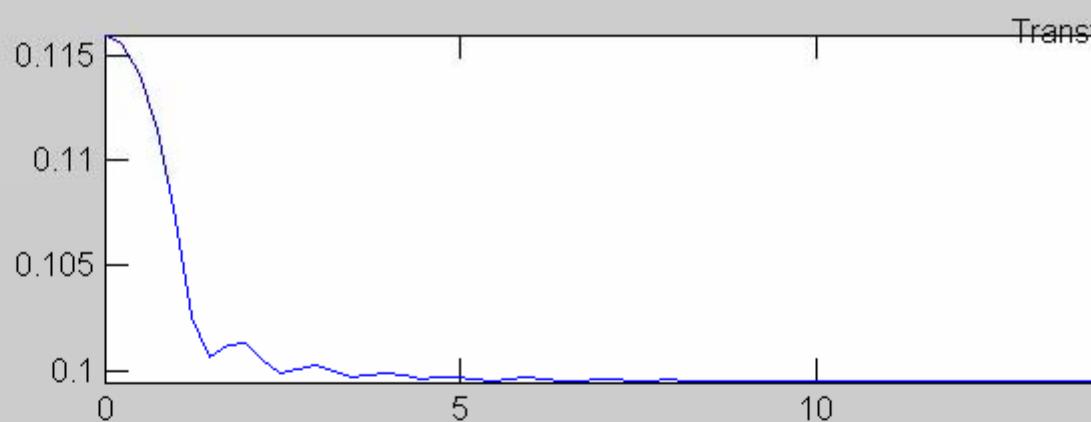
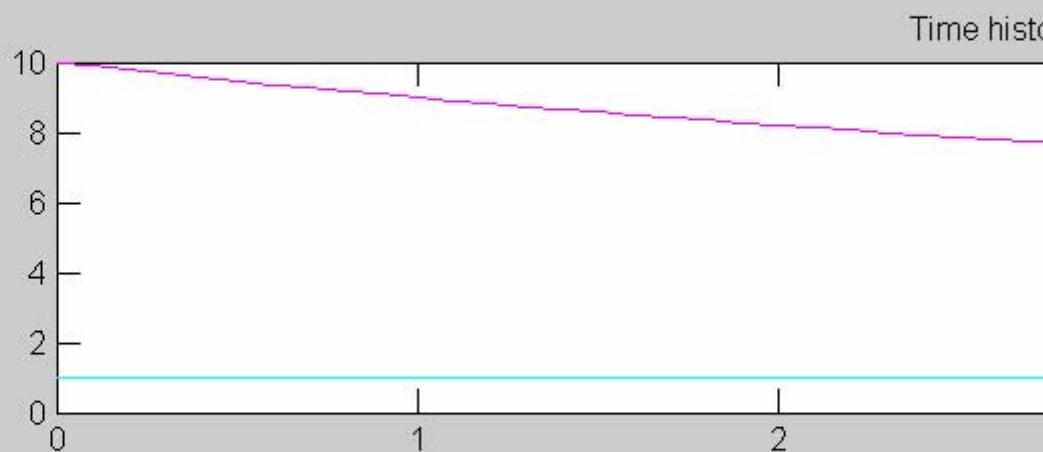
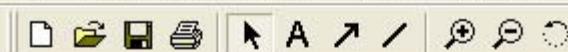


Рисунок 24 — Динамика системы при воздействии генератора единичного перепада с параметрами 0/1



Figure No. 1: ImitModel/Анализатор_спектра

File Edit View Insert Tools Window Help



пуск



Рисунок 25 — Спектральные характеристики выходного сигнала движения системы при воздействии генератора единичного перепада с параметрами 0/1

Maple-программа для исследования марковского процесса с дискретными состояниями и дискретным временем

Лабораторная работа № 3

Марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем

Создание матрицы вероятностей состояний

```

> restart:
# Сброс значений всех переменных при повторном запуске
with(LinearAlgebra):
with(CurveFitting):
with(plots):
n:=4;
# Число состояний системы S
StudentNumber:=17;      # Задание для студента номера варианта при расчете вероятностей переходов системы S
c:=0.002*StudentNumber;# Задание вариации для номера варианта при расчете вероятностей переходов системы S
Pi1:=Matrix(1..n, 1..n, [[0.1+c, 0.2+c, 0.3-c,
0.4-c], # Задание матрицы вероятностей переходов
Pij системы S
[0.2+c, 0.2-c, 0.3+c, 0.3-c],
[0.4+c, 0.2+c, 0.1-c, 0.3-c],
[0.5+c, 0.2+c, 0.2-c, 0.1-c]]);
matrixplot(Pi1, heights=histogram, axes=normal,
gap=0.25, style=patchcontour);# Визуализация матрицы вероятностей переходов Pij
Warning, the name LeastSquares has been rebound

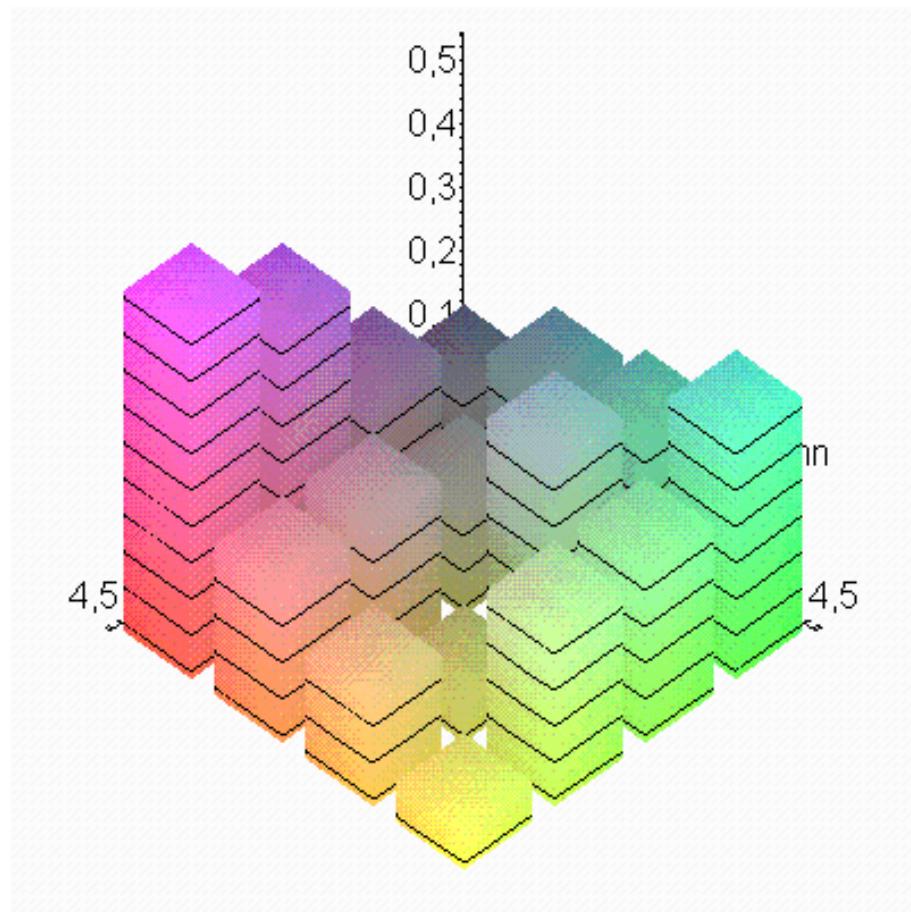
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined  
n := 4
```

```
StudentNumber := 17
```

```
c := 0.034
```

```
? 0.134      0.234      0.266      0.366?  
? ?  
? 0.234      0.166      0.334      0.266?  
? ?  
? 0.434      0.234      0.066      0.266?  
? ?  
? 0.534      0.234      0.166      0.066?
```



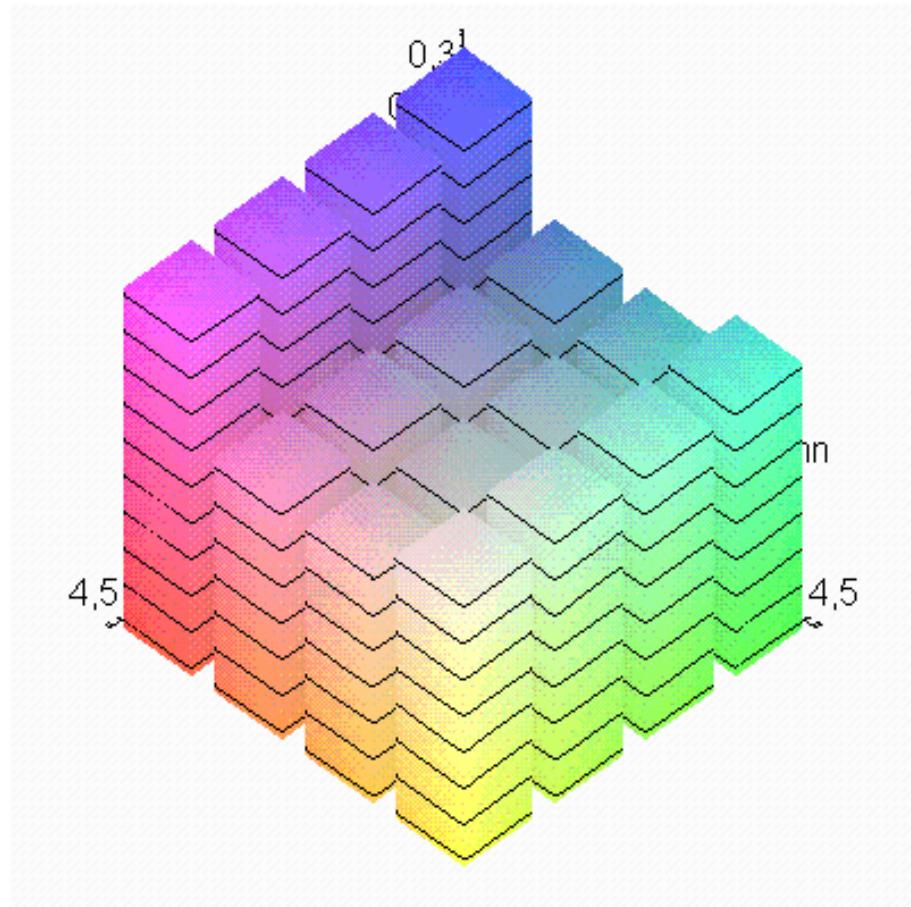
Вычисление и визуализация матрицы вероятностей переходов P_{ik} через k шагов

```
> k:=10;                      # Задание числа переходов  
системы S от 2 и до любого большого числа n  
Pik:=Pi1^k;      # Расчет матрицы вероятностей  
переходов  $P_{ik}$  системы за  $k$  шагов  
matrixplot(Pik, heights=histogram, axes=normal,  
gap=0.25, style=patchcontour); # Визуализация  
матрицы вероятностей переходов  $P_{ik}$ 
```

системы за k шагов

$k := 10$

$Pik := [[0.319255007425857328, 0.219101123595042552, 0.213385981611026787, 0.248257887368073748], [0.319246129174509008, 0.219101123597156472, 0.213389369899161407, 0.248263377329173502], [0.319227194925857326, 0.219101123595042524, 0.213396606611026773, 0.248275074868073736], [0.319210007425857368, 0.219101123595042552, 0.213403169111026775, 0.248285699868073750]]$



Проверка матрицы вероятностей переходов Pik через k шагов

```
SumPik1j:=add(Pik[1, j], j=1..n);  
SumPik2j:=add(Pik[2, j], j=1..n);  
SumPik3j:=add(Pik[3, j], j=1..n);  
SumPik4j:=add(Pik[4, j], j=1..n);
```

$SumPik1j := 1.000000000$

$SumPik2j := 1.000000000$

SumPik3j := 1.000000000

SumPik4j := 1.000000000

Вычисление матрицы переходов после 1, 2, 4 и 8 шагов из заданного начального распределения P0(0.2,0.3,0.4,0.1)

```
> P0:=Vector[row]([0.2, 0.3, 0.4, 0.1]);  
P1:=VectorMatrixMultiply(P0, Pi1);  
Pi2:=Pi1^2; # Расчет матрицы вероятностей  
переходов Pijk системы за 2 шага  
P2:=VectorMatrixMultiply(P1, Pi1);  
P2:=VectorMatrixMultiply(P0, Pi2);  
Pi4:=Pi1^4; # Расчет матрицы вероятностей  
переходов Pijk системы за 4 шага  
P4:=VectorMatrixMultiply(P0, Pi4);  
Pi8:=Pi1^8; # Расчет матрицы вероятностей  
переходов Pijk системы за 8 шагов  
P8:=VectorMatrixMultiply(P0, Pi8);
```

P0 := [0.2, 0.3, 0.4, 0.1]

P1 := [0.32400000000000010, 0.21360000000000012, 0.19640000000000020, 0.26600000000000014]

*p2 := [[0.3835999999999996, 0.21808800000000032, 0.19211200000000005, 0.20620000000000022],
[0.35720000000000018, 0.22271200000000021, 0.18388800000000024, 0.23620000000000022],
[0.28360000000000019, 0.21808800000000032, 0.24211200000000022, 0.25619999999999984],
[0.23360000000000030, 0.21808800000000032, 0.24211200000000022, 0.30620000000000028]]*

P2 := [0.32068000000000021, 0.21947520000000038, 0.21464480000000024, 0.24520000000000030]

P2 := [0.32068000000000021, 0.21947520000000038, 0.21464480000000024, 0.24520000000000002]

*p4 := [[0.32770127680000052, 0.21909643891200036, 0.21023404428800022, 0.24296824000000030],
[0.32390160320000054, 0.21911782028800060, 0.21128481651200040, 0.24569576000000042],
[0.31520127680000040, 0.21909643891200036, 0.21523404428800026, 0.25046824000000009],
[0.30770127680000034, 0.21909643891200064, 0.21773404428800028, 0.25546824000000068]]*

P4 := [0.31956137472000068, 0.21910285332480062, 0.213299275955200041, 0.248036496000000024]

*p8 := [[0.319381491491612158, 0.219101123495340722, 0.213337696761826096, 0.248179688251221332],
[0.319313725196562258, 0.219101123952503974, 0.213363429489902112, 0.248221721361032016],*

[0.319168991491612152, 0.219101123495340722, 0.213418946761826100, 0.248310938251221330],
[0.319037741491612182, 0.219101123495340722, 0.213468946761826123, 0.248392188251221336]]

$P8 := [0.319241786603097210, 0.219101123632489708, 0.213391041580248908, 0.248266048184164534]$

Вычисление матрицы переходов после 1, 2, 4 и 8 шагов из заданного начального распределения $P0(1,0,0,0)$

```
> P0:=Vector[row]([1, 0, 0, 0]);
P1:=VectorMatrixMultiply(P0, Pi1);
Pi2:=Pi1^2;    # Расчет матрицы вероятностей
переходов  $P_{ijk}$  системы за 2 шага
P2:=VectorMatrixMultiply(P1, Pi1);
P2:=VectorMatrixMultiply(P0, Pi2);
Pi4:=Pi1^4;    # Расчет матрицы вероятностей
переходов  $P_{ijk}$  системы за 4 шага
P4:=VectorMatrixMultiply(P0, Pi4);
Pi8:=Pi1^8;    # Расчет матрицы вероятностей
переходов  $P_{ijk}$  системы за 8 шагов
P8:=VectorMatrixMultiply(P0, Pi8);
P0:=[1, 0, 0, 0]
```

$P1 := [0.13400000000000008, 0.234000000000000014, 0.266000000000000014, 0.36599999999999992]$

$p2 := [[0.38359999999999996, 0.218088000000000032, 0.192112000000000005, 0.206200000000000022],$
[0.357200000000000018, 0.222712000000000021, 0.183888000000000024, 0.236200000000000022],
[0.283600000000000019, 0.218088000000000032, 0.242112000000000022, 0.25619999999999984],
[0.233600000000000030, 0.218088000000000032, 0.242112000000000022, 0.306200000000000028]]

$P2 := [0.38359999999999996, 0.218088000000000032, 0.192112000000000005, 0.206200000000000022]$

$P2 := [0.38359999999999996, 0.218088000000000032, 0.192112000000000005, 0.206200000000000022]$

$p4 := [[0.32770127680000052, 0.21909643891200036, 0.210234044288000022, 0.242968240000000030],$
[0.32390160320000054, 0.21911782028800060, 0.211284816512000040, 0.245695760000000042],
[0.31520127680000040, 0.21909643891200036, 0.21523404428800026, 0.250468240000000009],
[0.30770127680000034, 0.21909643891200064, 0.21773404428800028, 0.255468240000000068]]

$P4 := [0.32770127680000052, 0.21909643891200036, 0.210234044288000022, 0.242968240000000030]$

$p8 := [[0.319381491491612158, 0.219101123495340722, 0.213337696761826096, 0.248179688251221332],$
[0.319313725196562258, 0.219101123952503974, 0.213363429489902112, 0.248221721361032016],
[0.319168991491612152, 0.219101123495340722, 0.213418946761826100, 0.248310938251221330],

[0.319037741491612182, 0.219101123495340722, 0.213468946761826123, 0.248392188251221336]]

P8 := [0.319381491491612158, 0.219101123495340722, 0.213337696761826096, 0.248179688251221332]

>

Решение системы уравнений для финальных вероятностей переходов p1, p2, p3 и p4

```
> SymPi:=solve ({p1*p11+p2*p21+p3*p31+p4*p41=p1 ,
p1*p12+p2*p22+p3*p32+p4*p42=p2 ,
p1*p13+p2*p23+p3*p33+p4*p43=p3 ,
p1+p2+p3+p4=1} , {p1 , p2 , p3 , p4}) ;
SumPi:=rhs (SymPi[1])+rhs (SymPi[2])+rhs (SymPi[3])
+rhs (SymPi[4]) ;
SymPi:={p1 = (-p41 - p43 p31 - p41 p22 p33 + p42 p21 p33 - p42 p23 p31 - p21 p43 p32 + p23 p41 p32
+ p22 p43 p31 + p41 p33 + p41 p22 - p42 p21)/(-1 + p23 p32 - p22 p33 + p11 - p41 + p13 p31 - p11 p33
- p13 p41 + p11 p43 + p33 - p43 + p22 + p12 p43 p21 + p42 p23 p11 - p43 p31 + p21 p12 - p22 p11
+ p42 p33 + p42 p11 - p43 p32 - p11 p43 p22 - p42 - p41 p23 p12 + p13 p41 p22 - p13 p42 p21
+ p41 p12 p33 - p41 p22 p33 + p23 p12 p31 + p42 p21 p33 - p42 p23 p31 - p23 p11 p32 - p21 p12 p33
- p21 p43 p32 + p23 p41 p32 + p22 p11 p33 - p42 p11 p33 - p12 p43 p31 + p22 p43 p31 + p13 p21 p32
- p41 p12 + p41 p33 - p13 p41 p32 - p13 p22 p31 + p13 p42 p31 + p11 p43 p32 + p41 p22 - p23 p42
+ p22 p43 - p42 p21), p3 = - (-p22 p43 + p41 p23 p12 + p43 - p42 p23 p11 + p11 p43 p22 - p11 p43
- p12 p43 p21 + p13 p42 p21 + p13 p41 p22 + p23 p42)/(-1 + p23 p32 - p22 p33 + p11 - p41
+ p13 p31 - p11 p33 - p13 p41 + p11 p43 + p33 - p43 + p22 + p12 p43 p21 + p42 p23 p11 - p43 p31
+ p21 p12 - p22 p11 + p42 p33 + p42 p11 - p43 p32 - p11 p43 p22 - p42 - p41 p23 p12 + p13 p41 p22
- p13 p42 p21 + p41 p12 p33 - p41 p22 p33 + p23 p12 p31 + p42 p21 p33 - p42 p23 p31 - p23 p11 p32
- p21 p12 p33 - p21 p43 p32 + p23 p41 p32 + p22 p11 p33 - p42 p11 p33 - p12 p43 p31 + p22 p43 p31
+ p13 p21 p32 - p41 p12 + p41 p33 - p13 p41 p32 - p13 p22 p31 + p13 p42 p31 + p11 p43 p32
+ p41 p22 - p23 p42 + p22 p43 - p42 p21), p2 = - (-p13 p42 p31 + p13 p41 p32 + p42 p11 p33
+ p12 p43 p31 + p41 p12 + p43 p32 + p42 - p42 p11 - p42 p33 - p11 p43 p32 - p41 p12 p33)/(-1
+ p23 p32 - p22 p33 + p11 - p41 + p13 p31 - p11 p33 - p13 p41 + p11 p43 + p33 - p43 + p22
+ p12 p43 p21 + p42 p23 p11 - p43 p31 + p21 p12 - p22 p11 + p42 p33 + p42 p11 - p43 p32
- p11 p43 p22 - p42 - p41 p23 p12 + p13 p41 p22 - p13 p42 p21 + p41 p12 p33 - p41 p22 p33
+ p23 p12 p31 + p42 p21 p33 - p42 p23 p31 - p23 p11 p32 - p21 p12 p33 - p21 p43 p32 + p23 p41 p32
+ p22 p11 p33 - p42 p11 p33 - p12 p43 p31 + p22 p43 p31 + p13 p21 p32 - p41 p12 + p41 p33
- p13 p41 p32 - p13 p22 p31 + p13 p42 p31 + p11 p43 p32 + p41 p22 - p23 p42 + p22 p43 - p42 p21), p4 =

```

$$\begin{aligned} & (-p21 p12 p33 + p23 p12 p31 + p21 p12 - 1 + p23 p32 - p22 p33 + p11 + p13 p31 - p11 p33 + p33 + p22 \\ & - p22 p11 - p23 p11 p32 + p22 p11 p33 + p13 p21 p32 - p13 p22 p31) / (-1 + p23 p32 - p22 p33 + p11 \\ & - p41 + p13 p31 - p11 p33 - p13 p41 + p11 p43 + p33 - p43 + p22 + p12 p43 p21 + p42 p23 p11 \\ & - p43 p31 + p21 p12 - p22 p11 + p42 p33 + p42 p11 - p43 p32 - p11 p43 p22 - p42 - p41 p23 p12 \\ & + p13 p41 p22 - p13 p42 p21 + p41 p12 p33 - p41 p22 p33 + p23 p12 p31 + p42 p21 p33 - p42 p23 p31 \\ & - p23 p11 p32 - p21 p12 p33 - p21 p43 p32 + p23 p41 p32 + p22 p11 p33 - p42 p11 p33 - p12 p43 p31 \\ & + p22 p43 p31 + p13 p21 p32 - p41 p12 + p41 p33 - p13 p41 p32 - p13 p22 p31 + p13 p42 p31 \\ & + p11 p43 p32 + p41 p22 - p23 p42 + p22 p43 - p42 p21) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
SumPi := & (-p41 - p43 p31 - p41 p22 p33 + p42 p21 p33 - p42 p23 p31 - p21 p43 p32 + p23 p41 p32 \\
& + p22 p43 p31 + p41 p33 + p41 p22 - p42 p21) / (-1 + p23 p32 - p22 p33 + p11 - p41 + p13 p31 - p11 p33 \\
& - p13 p41 + p11 p43 + p33 - p43 + p22 + p12 p43 p21 + p42 p23 p11 - p43 p31 + p21 p12 - p22 p11 \\
& + p42 p33 + p42 p11 - p43 p32 - p11 p43 p22 - p42 - p41 p23 p12 + p13 p41 p22 - p13 p42 p21 \\
& + p41 p12 p33 - p41 p22 p33 + p23 p12 p31 + p42 p21 p33 - p42 p23 p31 - p23 p11 p32 - p21 p12 p33 \\
& - p21 p43 p32 + p23 p41 p32 + p22 p11 p33 - p42 p11 p33 - p12 p43 p31 + p22 p43 p31 + p13 p21 p32 \\
& - p41 p12 + p41 p33 - p13 p41 p32 - p13 p22 p31 + p13 p42 p31 + p11 p43 p32 + p41 p22 - p23 p42 \\
& + p22 p43 - p42 p21) \cdot (-p22 p43 + p41 p23 p12 + p43 - p42 p23 p11 + p11 p43 p22 - p11 p43 \\
& - p12 p43 p21 + p13 p42 p21 + p13 p41 - p13 p41 p22 + p23 p42) / (-1 + p23 p32 - p22 p33 + p11 - p41 \\
& + p13 p31 - p11 p33 - p13 p41 + p11 p43 + p33 - p43 + p22 + p12 p43 p21 + p42 p23 p11 - p43 p31 \\
& + p21 p12 - p22 p11 + p42 p33 + p42 p11 - p43 p32 - p11 p43 p22 - p42 - p41 p23 p12 + p13 p41 p22 \\
& - p13 p42 p21 + p41 p12 p33 - p41 p22 p33 + p23 p12 p31 + p42 p21 p33 - p42 p23 p31 - p23 p11 p32 \\
& - p21 p12 p33 - p21 p43 p32 + p23 p41 p32 + p22 p11 p33 - p42 p11 p33 - p12 p43 p31 + p22 p43 p31 \\
& + p13 p21 p32 - p41 p12 + p41 p33 - p13 p41 p32 - p13 p22 p31 + p13 p42 p31 + p11 p43 p32 \\
& + p41 p22 - p23 p42 + p22 p43 - p42 p21) \cdot (-p13 p42 p31 + p13 p41 p32 + p42 p11 p33 + p12 p43 p31 \\
& + p41 p12 + p43 p32 + p42 - p42 p11 - p42 p33 - p11 p43 p32 - p41 p12 p33) / (-1 + p23 p32 - p22 p33 \\
& + p11 - p41 + p13 p31 - p11 p33 - p13 p41 + p11 p43 + p33 - p43 + p22 + p12 p43 p21 + p42 p23 p11 \\
& - p43 p31 + p21 p12 - p22 p11 + p42 p33 + p42 p11 - p43 p32 - p11 p43 p22 - p42 - p41 p23 p12 \\
& + p13 p41 p22 - p13 p42 p21 + p41 p12 p33 - p41 p22 p33 + p23 p12 p31 + p42 p21 p33 - p42 p23 p31 \\
& - p23 p11 p32 - p21 p12 p33 - p21 p43 p32 + p23 p41 p32 + p22 p11 p33 - p42 p11 p33 - p12 p43 p31 \\
& + p22 p43 p31 + p13 p21 p32 - p41 p12 + p41 p33 - p13 p41 p32 - p13 p22 p31 + p13 p42 p31 \\
& + p11 p43 p32 + p41 p22 - p23 p42 + p22 p43 - p42 p21) ^+ (-p21 p12 p33 + p23 p12 p31 + p21 p12 - 1 \\
& + p23 p32 - p22 p33 + p11 + p13 p31 - p11 p33 + p33 + p22 - p22 p11 - p23 p11 p32 + p22 p11 p33 \\
& + p13 p21 p32 - p13 p22 p31) / (-1 + p23 p32 - p22 p33 + p11 - p41 + p13 p31 - p11 p33 - p13 p41 \\
& + p11 p43 + p33 - p43 + p22 + p12 p43 p21 + p42 p23 p11 - p43 p31 + p21 p12 - p22 p11 + p42 p33 \\
& + p42 p11 - p43 p32 - p11 p43 p22 - p42 - p41 p23 p12 + p13 p41 p22 - p13 p42 p21 + p41 p12 p33 \\
& - p41 p22 p33 + p23 p12 p31 + p42 p21 p33 - p42 p23 p31 - p23 p11 p32 - p21 p12 p33 - p21 p43 p32 \\
& + p23 p41 p32 + p22 p11 p33 - p42 p11 p33 - p12 p43 p31 + p22 p43 p31 + p13 p21 p32 - p41 p12 \\
& + p41 p33 - p13 p41 p32 - p13 p22 p31 + p13 p42 p31 + p11 p43 p32 + p41 p22 - p23 p42 + p22 p43
\end{aligned}$$

```

-p42 p21)

>
p11:=Pi1[1,1];p12:=Pi1[1,2];p13:=Pi1[1,3];p14:=P
i1[1,4];
p21:=Pi1[2,1];p22:=Pi1[2,2];p23:=Pi1[2,3];p24:=P
i1[2,4];
p31:=Pi1[3,1];p32:=Pi1[3,2];p33:=Pi1[3,3];p14:=P
i1[3,4];
p41:=Pi1[4,1];p42:=Pi1[4,2];p43:=Pi1[4,3];p14:=P
i1[4,4];
p1Sym:=rhs(SymPi[1]);
p2Sym:=rhs(SymPi[2]);
p3Sym:=rhs(SymPi[3]);
p4Sym:=rhs(SymPi[4]);
SymSumPi:=p1Sym+p2Sym+p3Sym+p4Sym;
SetPi:=solve({p1*p11+p2*p21+p3*p31+p4*p41=p1,
p1*p12+p2*p22+p3*p32+p4*p42=p2,
p1*p13+p2*p23+p3*p33+p4*p43=p3,
p1+p2+p3+p4=1},{p1,p2,p3,p4});
SumPi:=rhs(SetPi[1])+rhs(SetPi[2])+rhs(SetPi[3])
+rhs(SetPi[4]);

```

p11 := 0.134

p12 := 0.234

p13 := 0.266

p14 := 0.366

p21 := 0.234

p22 := 0.166

p23 := 0.334

p24 := 0.266

p31 := 0.434

p32 := 0.234

$p33 := 0.066$

$p14 := 0.266$

$p41 := 0.534$

$p42 := 0.234$

$p43 := 0.166$

$p14 := 0.066$

$p1Sym := 0.2191011236$

$p2Sym := 0.2133932584$

$p3Sym := 0.2482696629$

$p4Sym := 0.3192359551$

$SymSumPi := 1.000000000$

$SetPi := \{p2 = 0.2191011236, p3 = 0.2133932584, p4 = 0.2482696629, p1 = 0.3192359551\}$

$SumPi := 1.000000000$

>

>

Maple-программа для исследования марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем

Лабораторная работа № 4

Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

1. Создание и визуализация матрицы плотностей вероятностей переходов L_{ij} системы S

```

> restart:
# Сброс значений всех переменных при повторном запуске
with(LinearAlgebra):
with(CurveFitting):
with(plots):
n:=4;
# Число состояний системы S
m:=10;
# Число шагов интегрирования методом Рунге-Кутта
k:=17;                      # Задание для студента
                               номера варианта при расчете вероятностей
                               переходов системы S
Lij:=Matrix(1..n, 1..n, [[0,
3+0.02*k,    4+0.01*k, 0
], # Задание матрицы плотностей вероятностей
переходов Lij
[1.5+0.03*k, 0,          0,
2.5+0.02*k],
[3.5+0.01*k, 4.5+0.02*k, 0,          0
], [
5-0.02*k,   4-0.03*k,    0
); [
]

```

```

matrixplot(Lij, heights=histogram, axes=normal,
gap=0.25, style=patchcontour);# Визуализация
матрицы вероятностей переходов Pij

```

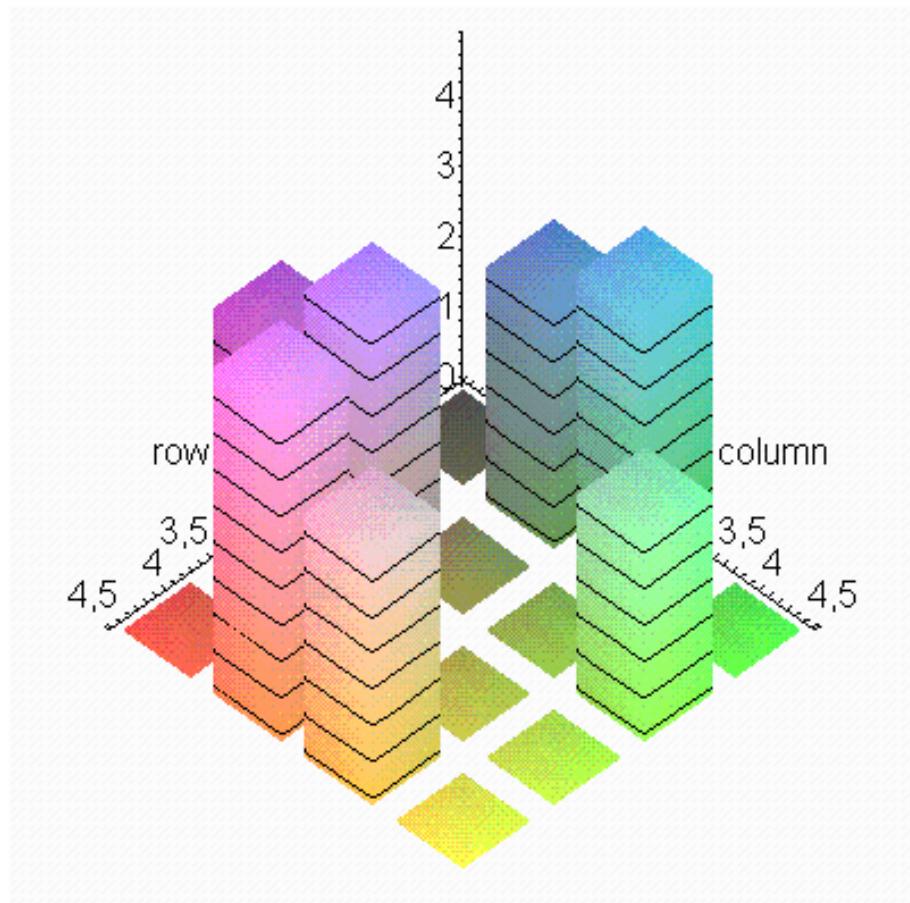
Warning, the name LeastSquares has been rebound
 Warning, the name changecoords has been redefined

$n := 4$

$m := 10$

$k := 17$

?	0	3.34	4.17	0?
?	2.01	0	0	2.84?
?	3.67	4.84	0	0?
?	0	4.66	3.49	0?



2. Составление уравнений Колмогорова А.Н. для вероятностей состояний $p_i(t)$

```

> diff(p[1](t), t)=-add(Lij[1,j],
j=1..n)*p[1](t)+add(Lij[i,1]*p[i](t), i=1..n);

```

$$\frac{d}{dt} p_1(t) = -7.51 p_1(t) + 2.01 p_2(t) + 3.67 p_3(t)$$

```

> diff(p[2](t), t)=-add(Lij[2,j],
j=1..n)*p[2](t)+add(Lij[i,2]*p[i](t), i=1..n);
      
$$\frac{d}{dt} p_2(t) = -4.85 p_2(t) + 3.34 p_1(t) + 4.84 p_3(t) + 4.66 p_4(t)$$


> diff(p[3](t), t)=-add(Lij[3,j],
j=1..n)*p[3](t)+add(Lij[i,3]*p[i](t), i=1..n);
      
$$\frac{d}{dt} p_3(t) = -8.51 p_3(t) + 4.17 p_1(t) + 3.49 p_4(t)$$


> diff(p[4](t), t)=-add(Lij[4,j],
j=1..n)*p[4](t)+add(Lij[i,4]*p[i](t), i=1..n);
      
$$\frac{d}{dt} p_4(t) = -8.15 p_4(t) + 2.84 p_2(t)$$


> ODESystem:={diff(p[1](t), t)=-add(Lij[1,j],
j=1..n)*p[1](t)+add(Lij[i,1]*p[i](t), i=1..n),
      diff(p[2](t), t)=-add(Lij[2,j],
j=1..n)*p[2](t)+add(Lij[i,2]*p[i](t), i=1..n),
      diff(p[3](t), t)=-add(Lij[3,j],
j=1..n)*p[3](t)+add(Lij[i,3]*p[i](t), i=1..n),
      diff(p[4](t), t)=-add(Lij[4,j],
j=1..n)*p[4](t)+add(Lij[i,4]*p[i](t), i=1..n)};

ODESystem := ?  $\frac{d}{dt} p_4(t) = -8.15 p_4(t) + 2.84 p_2(t)$ ,  $\frac{d}{dt} p_3(t) = -8.51 p_3(t) + 4.17 p_1(t) + 3.49 p_4(t)$ ,
?  $\frac{d}{dt} p_1(t) = -7.51 p_1(t) + 2.01 p_2(t) + 3.67 p_3(t)$ ,  $\frac{d}{dt} p_2(t) = -4.85 p_2(t) + 3.34 p_1(t) + 4.84 p_3(t) + 4.66 p_4(t)$ 
?
```

3. Решение уравнений Колмогорова А.Н. для вероятностей состояний $p_i(t)$ в общем виде

PSi:=dsolve(ODESystem):

```
> diff(rhs(PSi[1]), t) :
> rhs(PSi[1]):
> diff(rhs(PSi[1]), t):
```

4. Решение уравнений Колмогорова А.Н. для вероятностей состояний $p_i(t)$ при заданных начальных условиях

```
> ODESystemInit:={diff(p[1](t), t)=-add(Lij[1,j],  
j=1..n)*p[1](t)+add(Lij[i,1]*p[i](t), i=1..n),  
diff(p[2](t),  
t)=-add(Lij[2,j],  
j=1..n)*p[2](t)+add(Lij[i,2]*p[i](t), i=1..n),  
diff(p[3](t),  
t)=-add(Lij[3,j],  
j=1..n)*p[3](t)+add(Lij[i,3]*p[i](t), i=1..n),  
diff(p[4](t),  
t)=-add(Lij[4,j],  
j=1..n)*p[4](t)+add(Lij[i,4]*p[i](t), i=1..n),  
p[1](0)=0.2,  
p[2](0)=0.25, p[3](0)=0.3, p[4](0)=0.25  
};  
PSiInit:=dsolve(ODESystemInit):
```

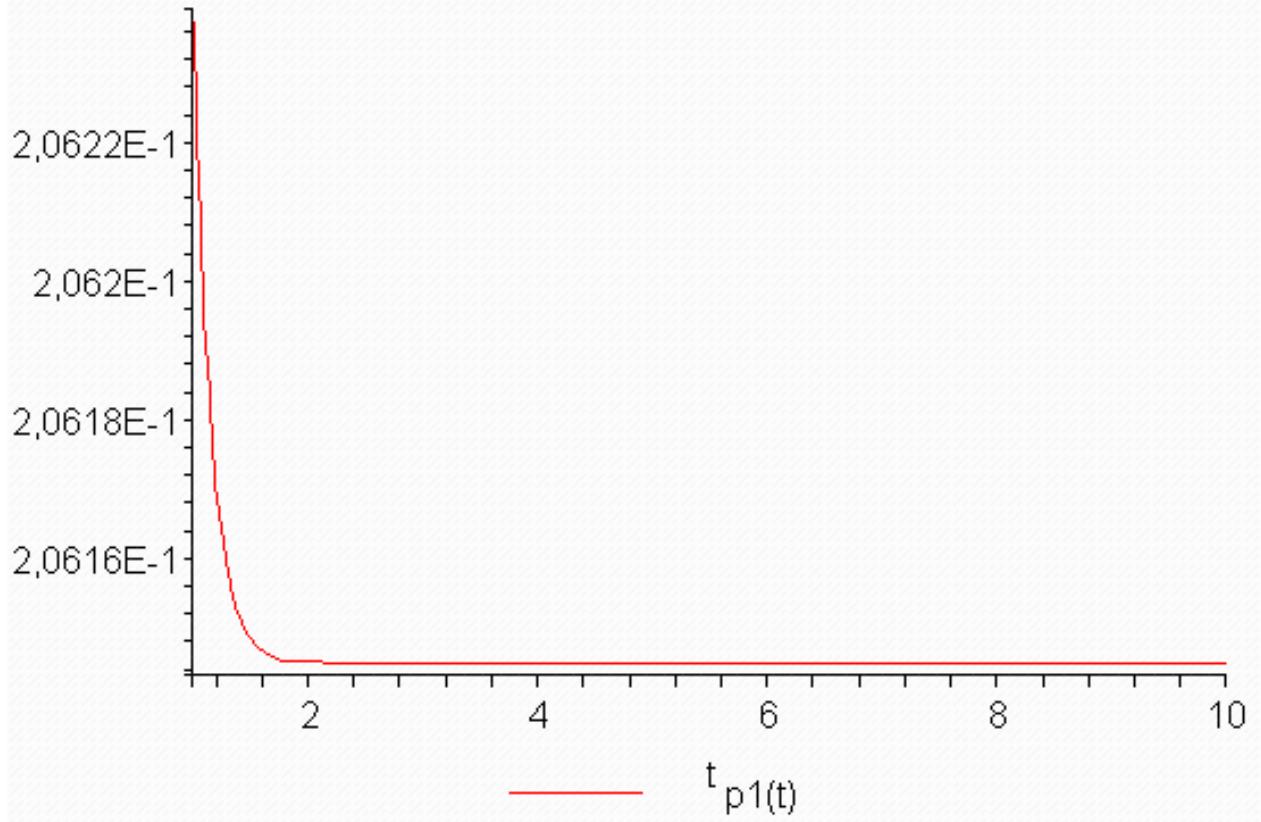
$$ODESystemInit := \begin{cases} \frac{d}{dt} p_4(t) = -8.15 p_4(t) + 2.84 p_2(t), & \frac{d}{dt} p_3(t) = -8.51 p_3(t) + 4.17 p_1(t) + 3.49 p_4(t), \\ \frac{d}{dt} p_1(t) = -7.51 p_1(t) + 2.01 p_2(t) + 3.67 p_3(t), \\ \frac{d}{dt} p_2(t) = -4.85 p_2(t) + 3.34 p_1(t) + 4.84 p_3(t) + 4.66 p_4(t), & p_1(0) = 0.2, p_2(0) = 0.25, p_3(0) = 0.3, \\ p_4(0) = 0.25 \end{cases}$$

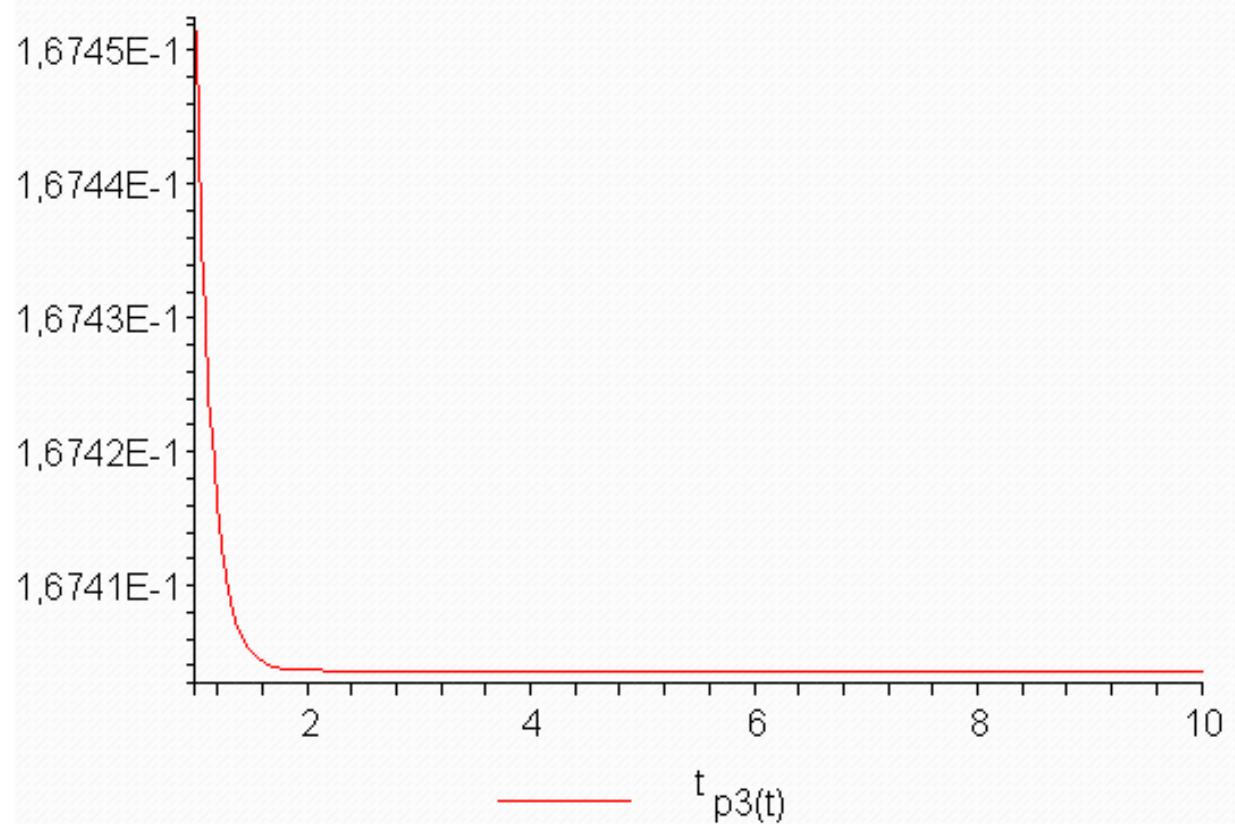
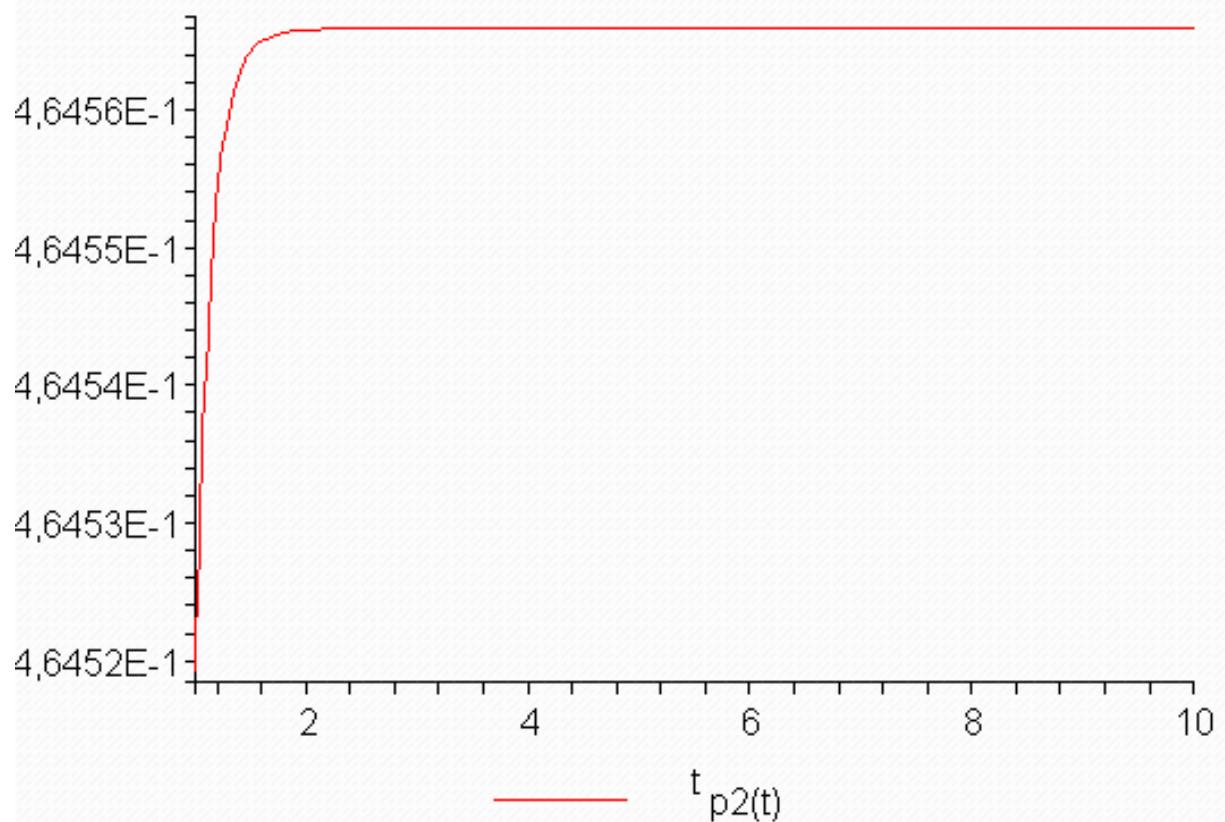
5. Визуализация решений уравнений Колмогорова А.Н. для вероятностей состояний $p_i(t)$

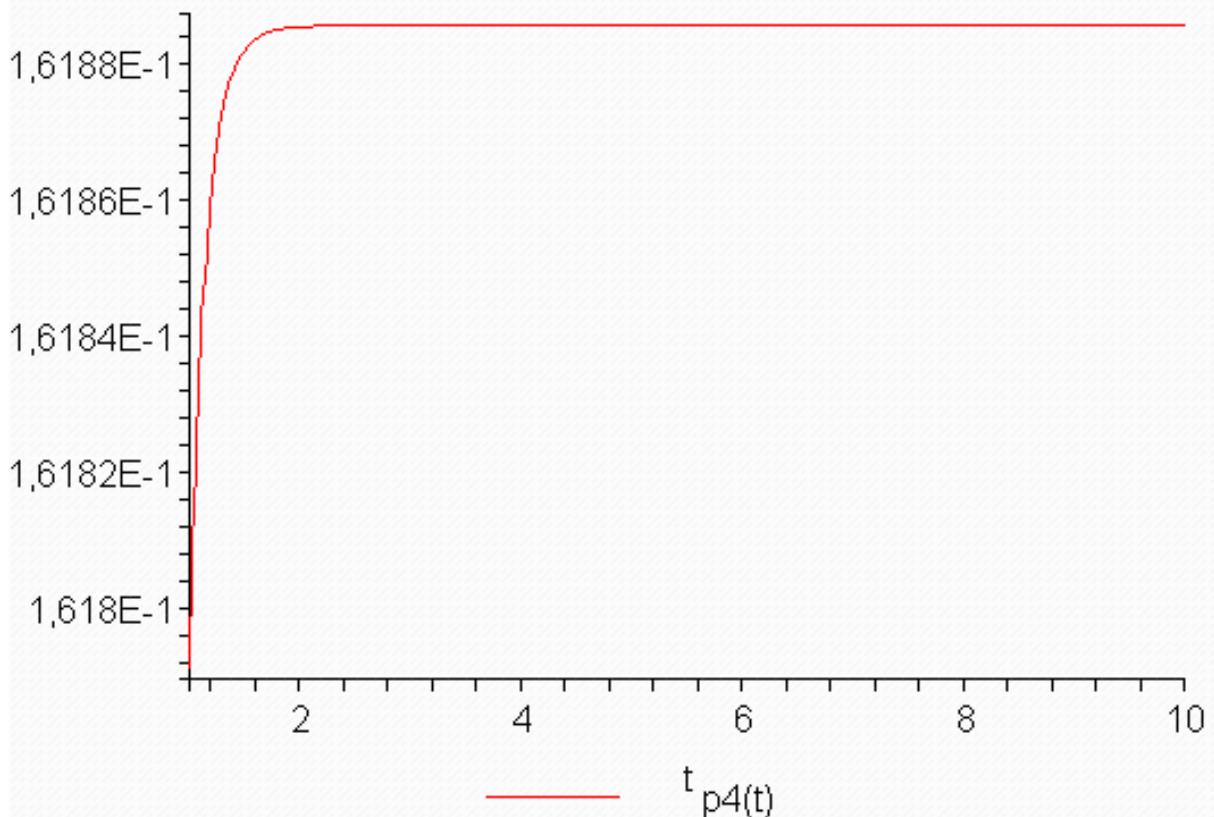
при заданных начальных
условиях

```
> p1(t):=rhs(PSiInit[2]):
```

```
p2(t) :=rhs(PSiInit[4]):  
p3(t) :=rhs(PSiInit[1]):  
p4(t) :=rhs(PSiInit[3]):  
plot(p1(t), t=1..10);  
plot(p2(t), t=1..10);  
plot(p3(t), t=1..10);  
plot(p4(t), t=1..10);
```







>

6. Решение системы уравнений для финальных вероятностей переходов $pf1$, $pf2$, $pf3$ и $pf4$

```
> SymPi:=solve({-add(Lij[1,j],  
j=1..n)*pf[1]+add(Lij[i,1]*pf[i], i=1..n)=0,  
-add(Lij[2,j],  
j=1..n)*pf[2]+add(Lij[i,2]*pf[i], i=1..n)=0,  
-add(Lij[3,j],  
j=1..n)*pf[3]+add(Lij[i,3]*pf[i], i=1..n)=0,  
pf[1]+pf[2]+pf[3]+pf[4]=1  
}, {pf[1], pf[2],  
pf[3], pf[4]})  
);
```

$SymPi := \{pf_3 = 0.1674036453, pf_1 = 0.2061449733, pf_4 = 0.1618855253, pf_2 = 0.4645658561\}$

>

```
SumPi:=rhs(SymPi[1])+rhs(SymPi[2])+rhs(SymPi[3])  
+rhs(SymPi[4]);
```

```

SumPi := 1.000000000

> SymPi[2];
SymPi[4];
SymPi[1];
SymPi[3];

$$pf_1 = 0.2061449733$$


$$pf_2 = 0.4645658561$$


$$pf_3 = 0.1674036453$$


$$pf_4 = 0.1618855253$$


> -add(Lij[1,j],
j=1..n)*pf1+add(Lij[i,1]*pf[i],i=1..n);

$$-7.51\,pf_1 + 2.01\,pf_2 + 3.67\,pf_3$$


> -add(Lij[2,j],
j=1..n)*pf2+add(Lij[i,2]*pf[i],i=1..n);

$$-4.85\,pf_2 + 3.34\,pf_1 + 4.84\,pf_3 + 4.66\,pf_4$$


> -add(Lij[3,j],
j=1..n)*pf3+add(Lij[i,3]*pf[i],i=1..n);

$$-8.51\,pf_3 + 4.17\,pf_1 + 3.49\,pf_4$$


> -add(Lij[4,j],
j=1..n)*pf4+add(Lij[i,4]*pf[i],i=1..n);

$$-8.15\,pf_4 + 2.84\,pf_2$$


>
> Pfi:=solve({-7.51*pf1+2.01*pf2+3.67*pf3=0,

$$-$$

4.85*pf2+3.34*pf1+4.84*pf3+4.66*pf4=0,

$$-$$

8.51*pf3+4.17*pf1+3.49*pf4=0,

$$pf1+pf2+pf3+pf4=1
},  

{pf1, pf2, pf3, pf4}
);

Pfi := {pf1 = 0.2061449733, pf2 = 0.4645658561, pf4 = 0.1618855253, pf3 = 0.1674036453}$$

```

3. Решение уравнений Колмогорова А.Н. для

вероятностей состояний $p_i(t)$ методом Рунге-Кутта

```
> Runge_Kutt:=dsolve(ODESystemInit, numeric,  
method=rkf45, {p[1](t), p[2](t), p[3](t),  
p[4](t)});  
Runge_Kutt:=prod(x_rkf45) ... end proc;  
  
> Lpi[0]:=Runge_Kutt(0.0);  
Lpi0 := [t = 0., p1(t) = 0.200000000000000, p2(t) = 0.250000000000000, p3(t) = 0.300000000000000,  
p4(t) = 0.250000000000000]  
  
> Lpi[1]:=Runge_Kutt(0.5);  
Lpi1 := [t = 0.5, p1(t) = 0.208159368177884356, p2(t) = 0.462453057932644296,  
p3(t) = 0.169798252349092820, p4(t) = 0.159589321540378582]  
  
> Lpi[2]:=Runge_Kutt(1.0);  
Lpi2 := [t = 1.0, p1(t) = 0.206237520248503698, p2(t) = 0.464519383234870854,  
p3(t) = 0.167451502727404416, p4(t) = 0.161791593789221144]  
  
> Lpi[3]:=Runge_Kutt(1.5);  
Lpi3 := [t = 1.5, p1(t) = 0.206148128226249062, p2(t) = 0.464564402243090758,  
p3(t) = 0.167405049239433030, p4(t) = 0.161882420291227264]  
  
> Lpi[4]:=Runge_Kutt(2.0);  
Lpi4 := [t = 2.0, p1(t) = 0.206145055803345940, p2(t) = 0.464565817650475944,  
p3(t) = 0.167403682259746888, p4(t) = 0.161885444286431201]  
  
> Lpi[5]:=Runge_Kutt(5.0);  
Lpi5 := [t = 5.0, p1(t) = 0.206144858033232458, p2(t) = 0.464565825973056846,  
p3(t) = 0.167403802375170968, p4(t) = 0.161885513618540089]  
  
> Lpi[6]:=Runge_Kutt(10.0);  
Lpi6 := [t = 10.0, p1(t) = 0.206144943215032516, p2(t) = 0.464565837564750728,  
p3(t) = 0.167403683788543978, p4(t) = 0.161885535431672806]  
  
> Lpi[7]:=Runge_Kutt(20.0);  
Lpi7 := [t = 20.0, p1(t) = 0.206145057963146860, p2(t) = 0.464565857509935398,  
p3(t) = 0.167403525050387720, p4(t) = 0.161885559476530882]  
  
> Lp1:=[seq(rhs(Lpi[t][2]), t=0..7)];  
Lp1 := [0.200000000000000, 0.208159368177884356, 0.206237520248503698, 0.206148128226249062,
```

```
0.206145055803345940, 0.206144858033232458, 0.206144943215032516, 0.206145057963146860]
```

```
> Lp2 := [seq(rhs(Lpi[t][3]), t=0..7)];
```

```
Lp2 := [0.250000000000000, 0.462453057932644296, 0.464519383234870854, 0.464564402243090758,
```

```
0.464565817650475944, 0.464565825973056846, 0.464565837564750728, 0.464565857509935398]
```

```
> Lp3 := [seq(rhs(Lpi[t][4]), t=0..7)];
```

```
Lp3 := [0.300000000000000, 0.169798252349092820, 0.167451502727404416, 0.167405049239433030,
```

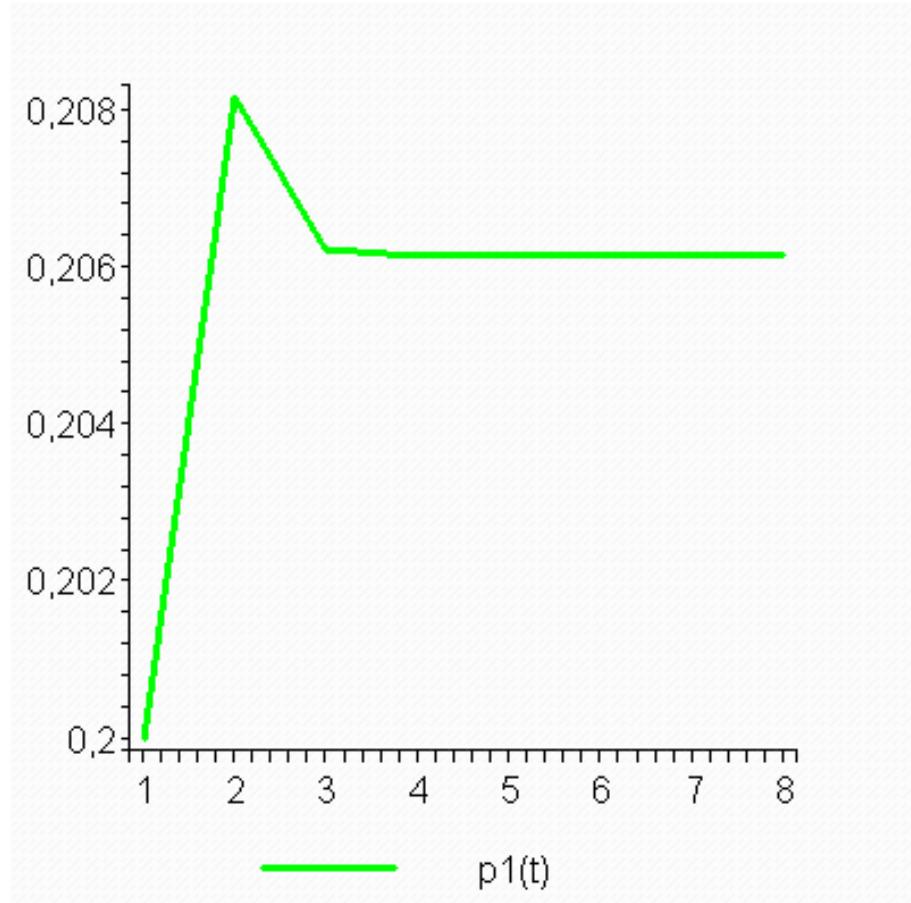
```
0.167403682259746888, 0.167403802375170968, 0.167403683788543978, 0.167403525050387720]
```

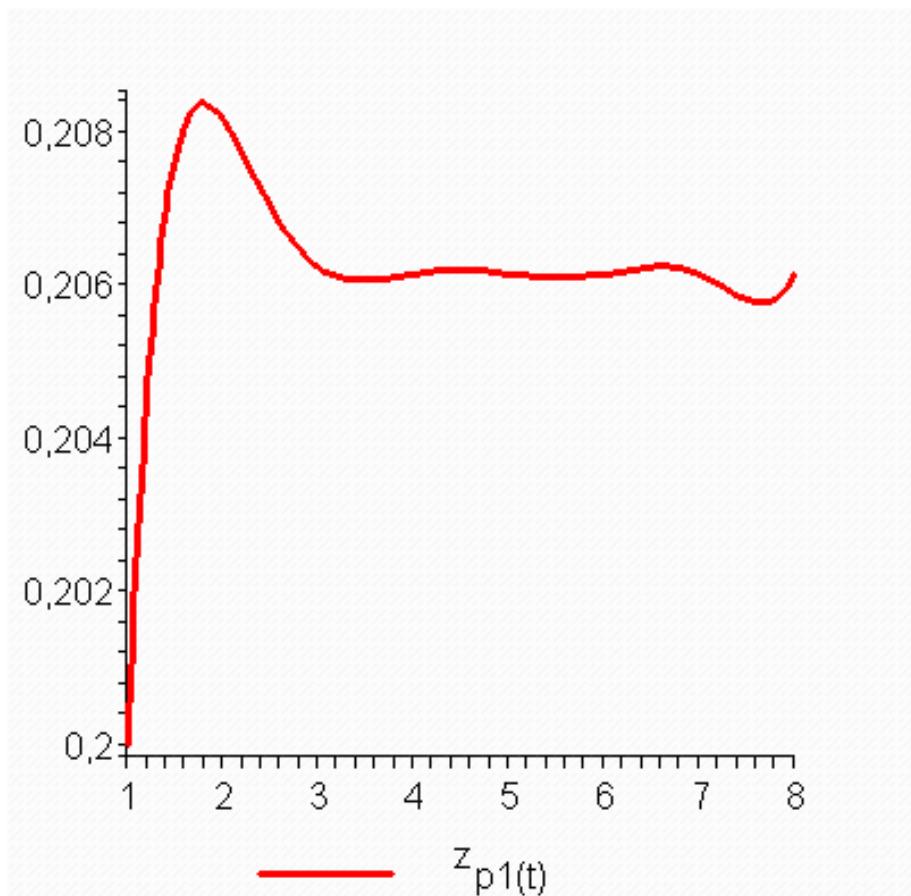
```
> Lp4 := [seq(rhs(Lpi[t][5]), t=0..7)];
```

```
Lp4 := [0.250000000000000, 0.159589321540378582, 0.161791593789221144, 0.161882420291227264,
```

```
0.161885444286431201, 0.161885513618540089, 0.161885535431672806, 0.161885559476530882]
```

```
> listplot([seq(Lp1[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend= `p1(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp1[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend= `p1(t)`);
```

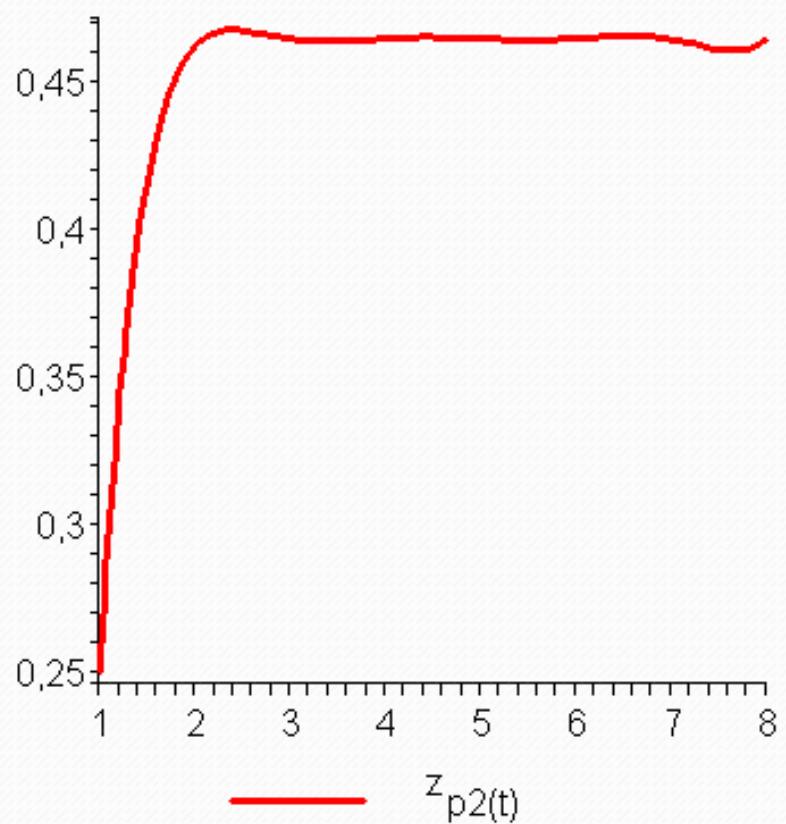
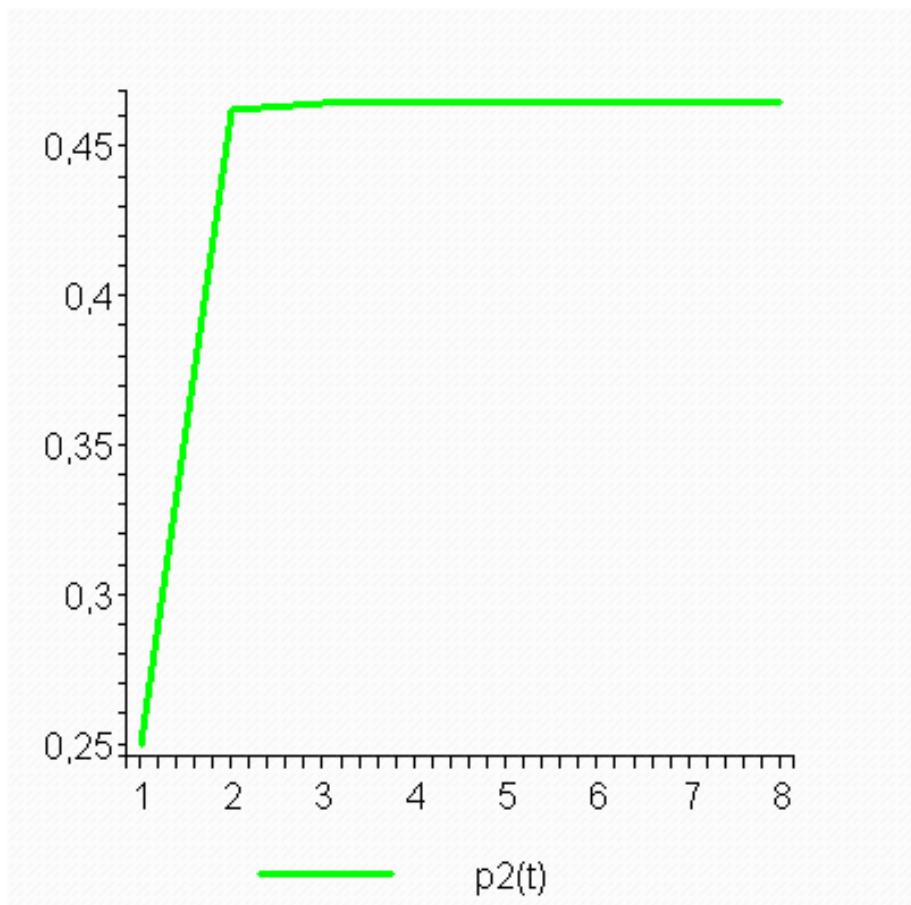




```

> listplot([seq(Lp2[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p2(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp2[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p2(t)`);

```

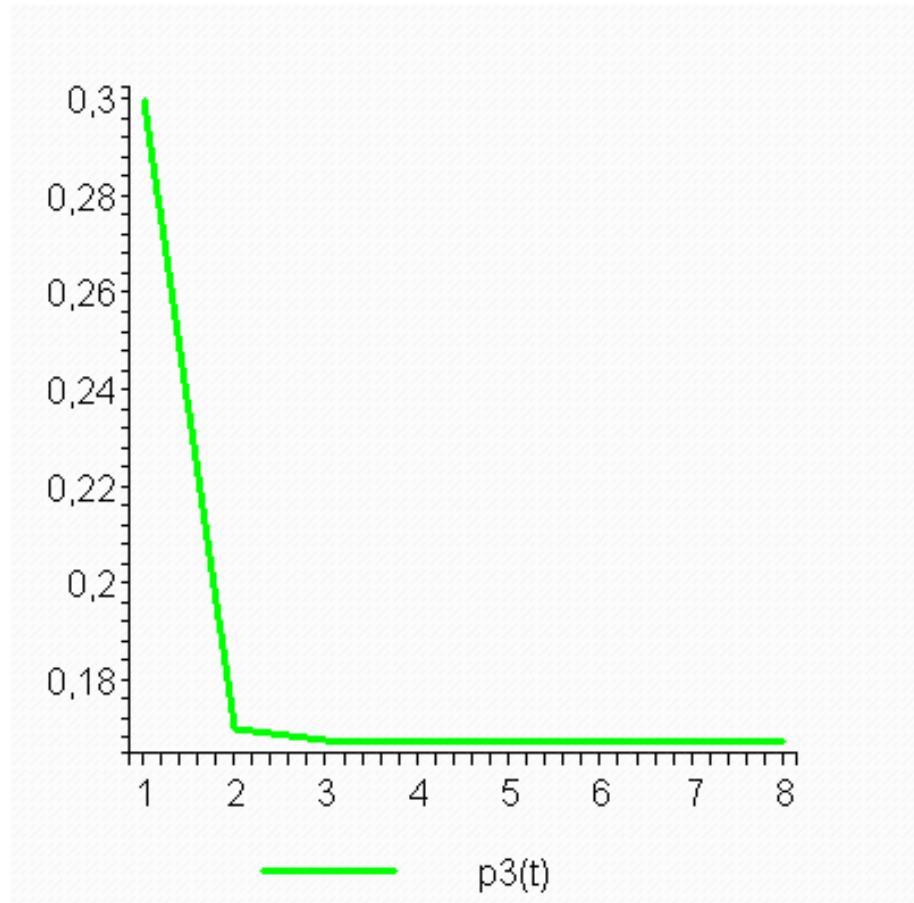


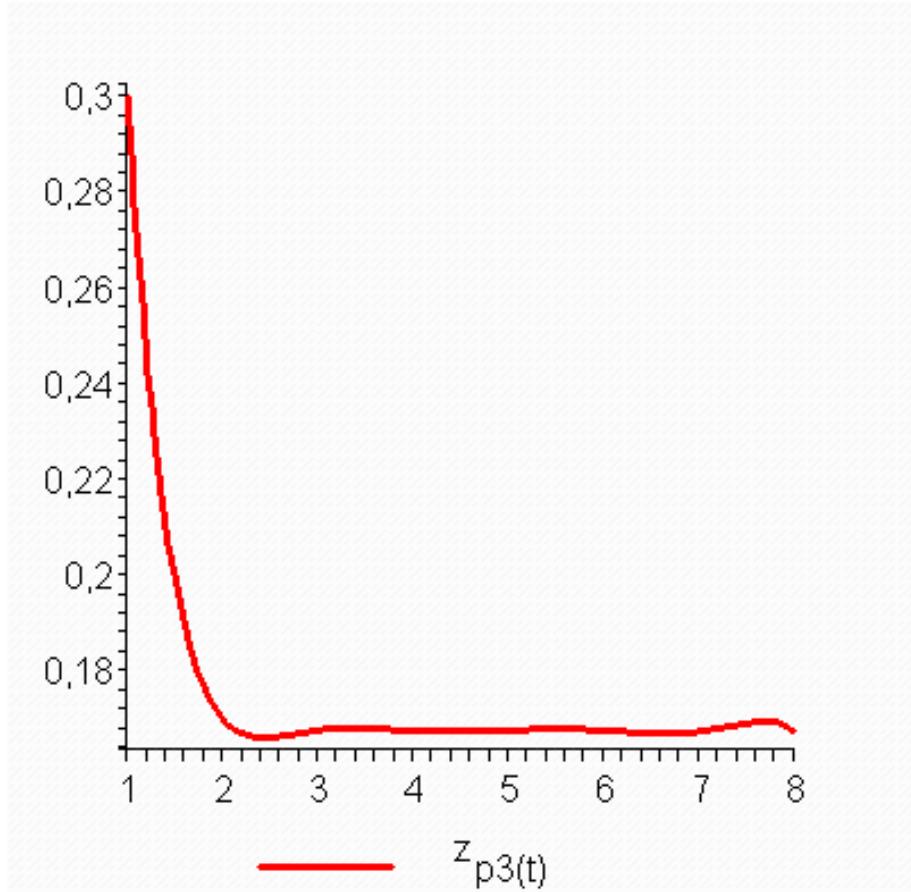
```
> listplot([seq(Lp3[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p3(t)');
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp3[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p3(t)`);

```

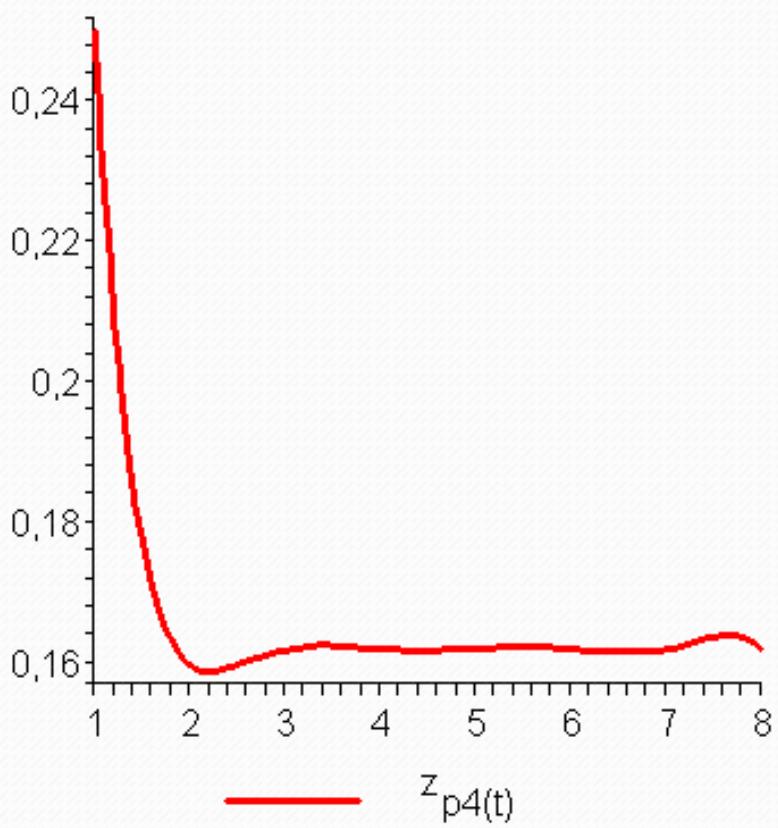
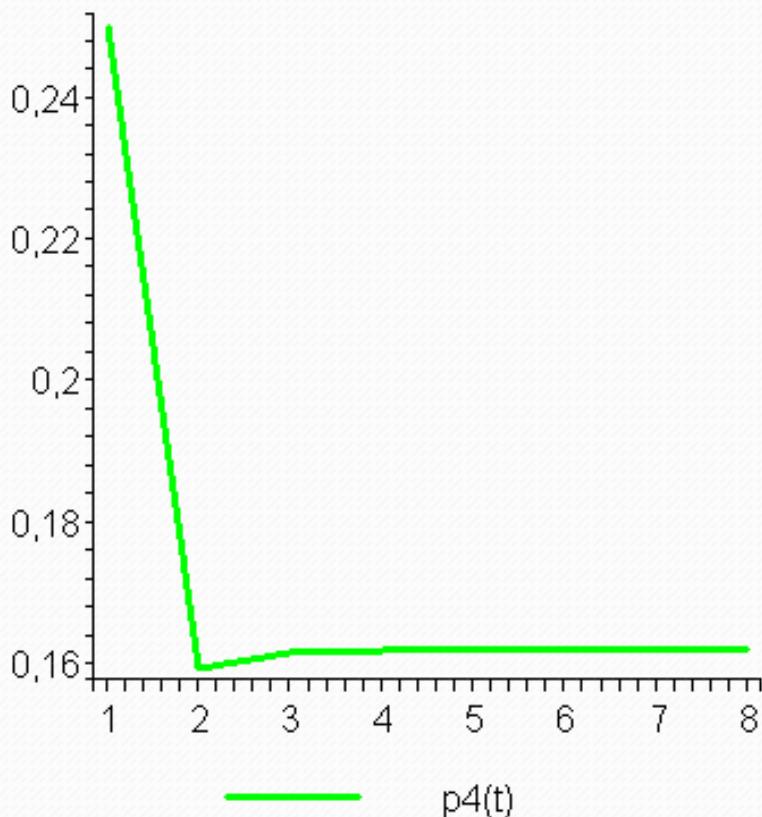




```

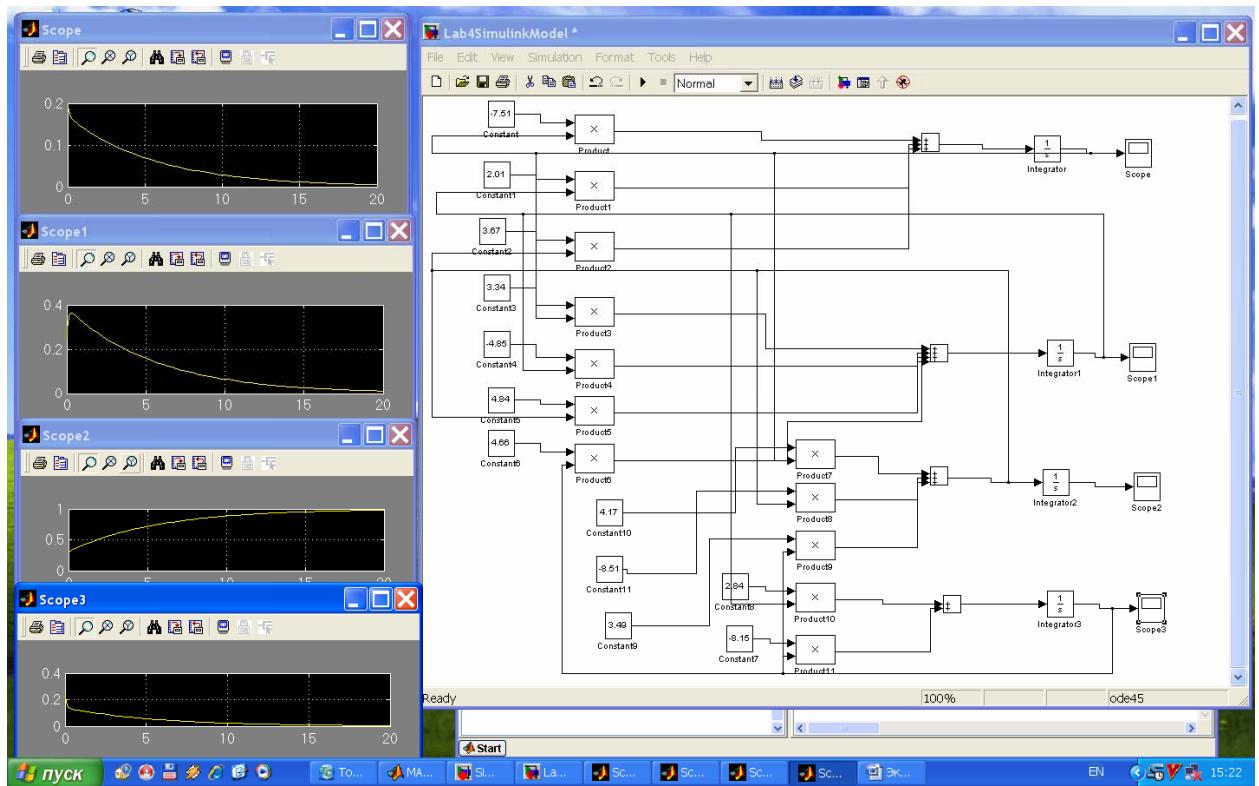
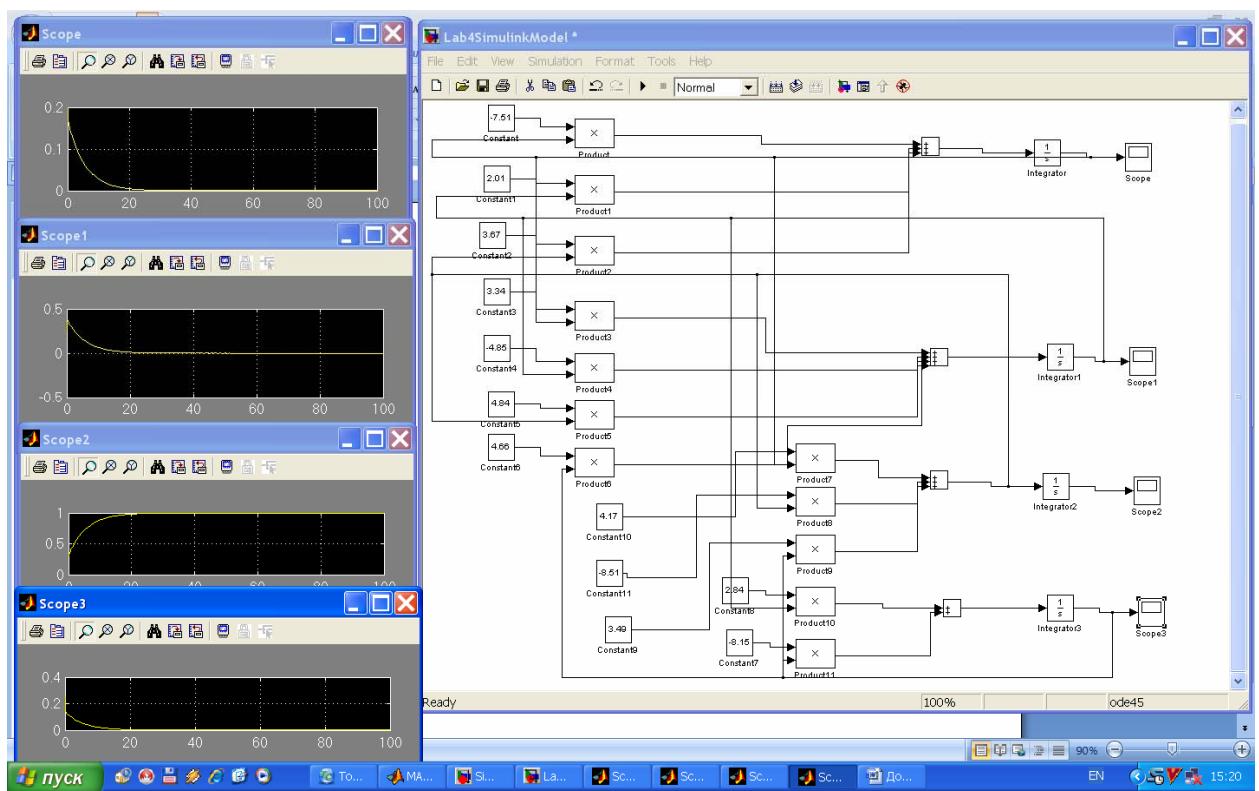
> listplot([seq(Lp4[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p4(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp4[t], t=1..8)] , z, form=Lagrange ),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p4(t)`);

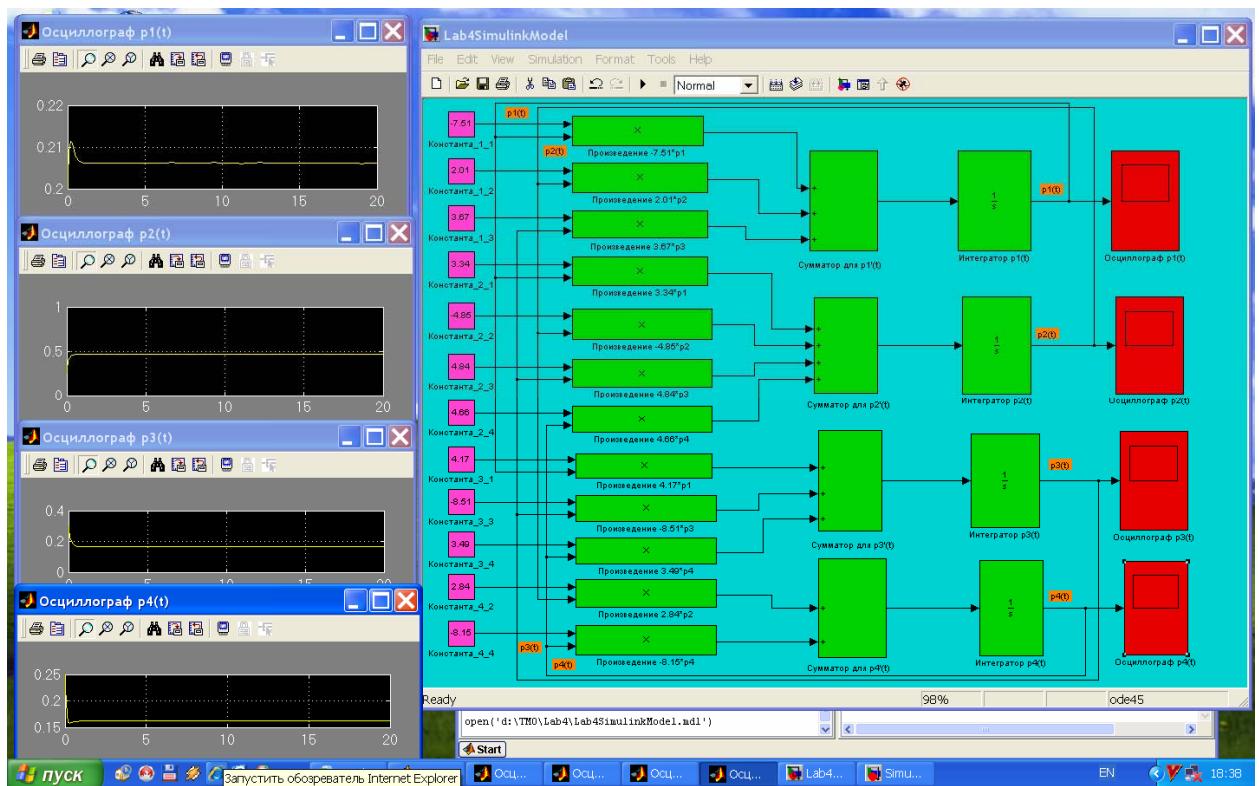
```

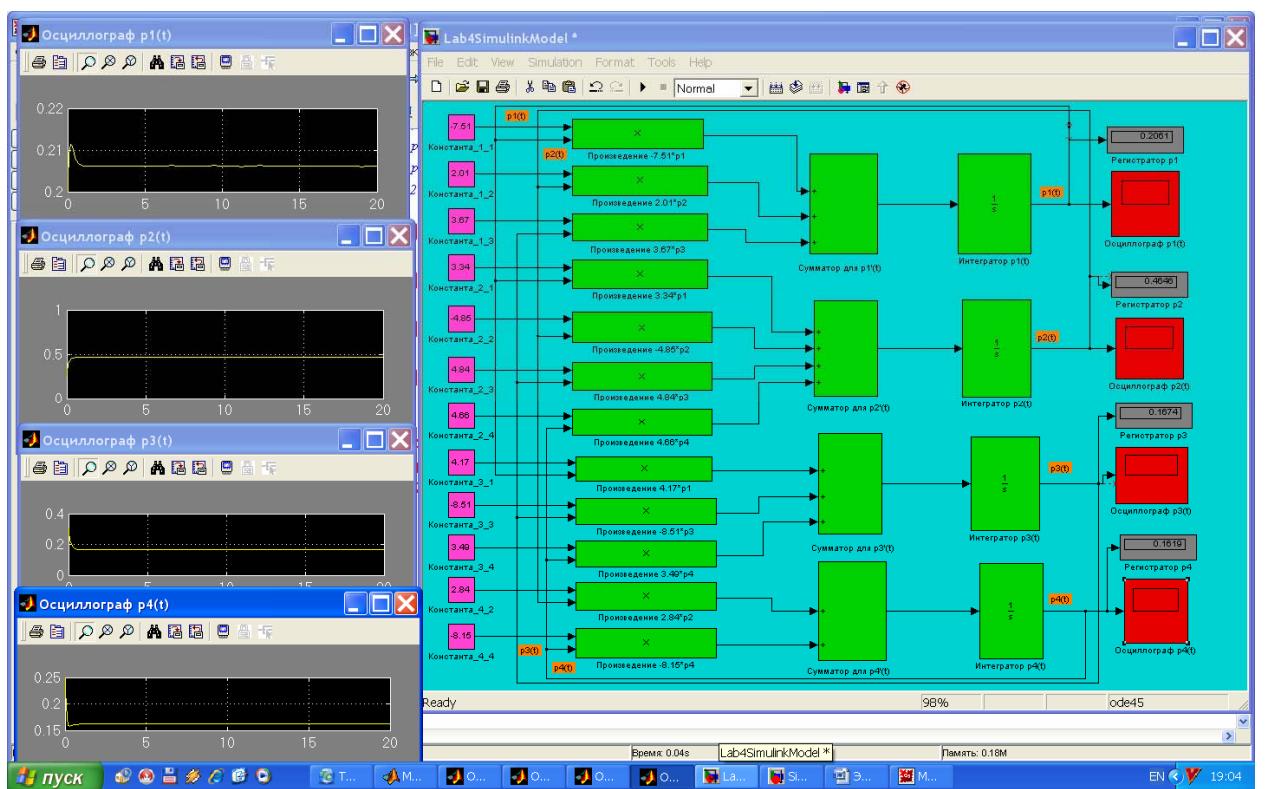
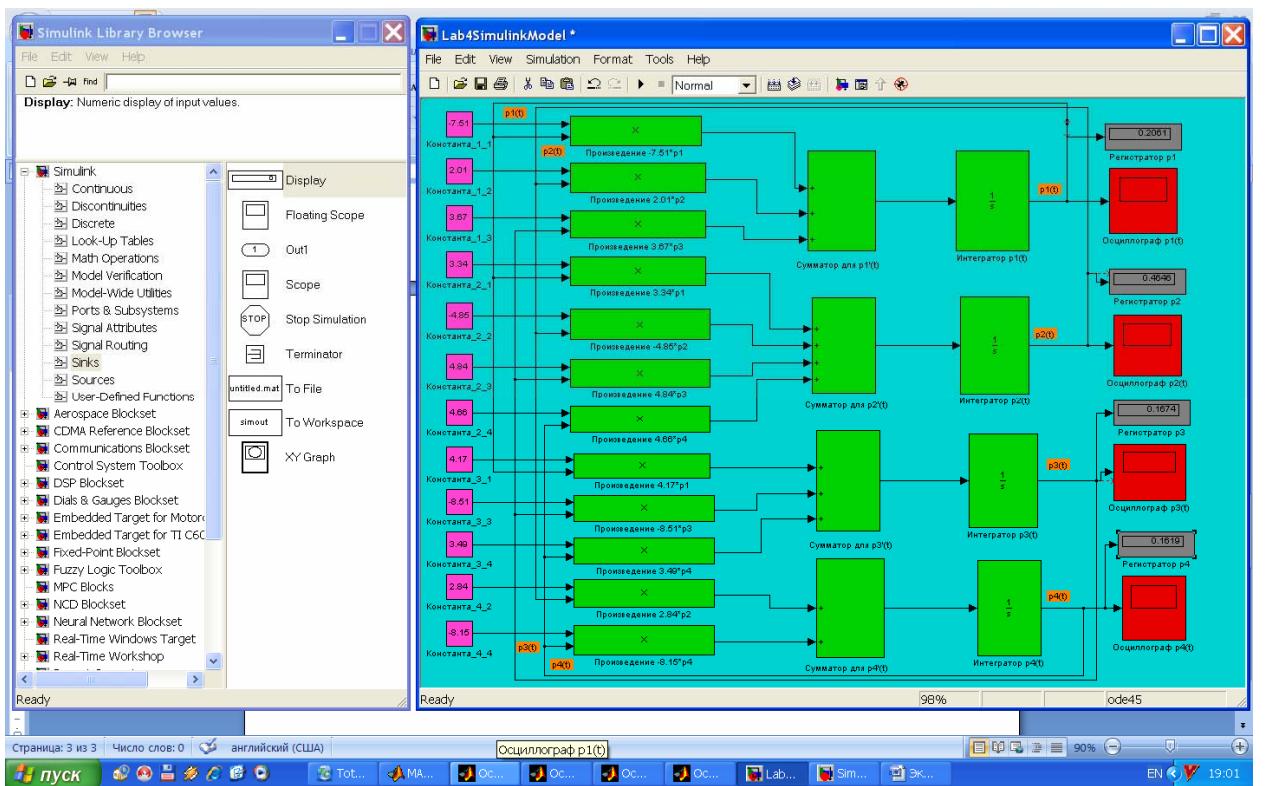


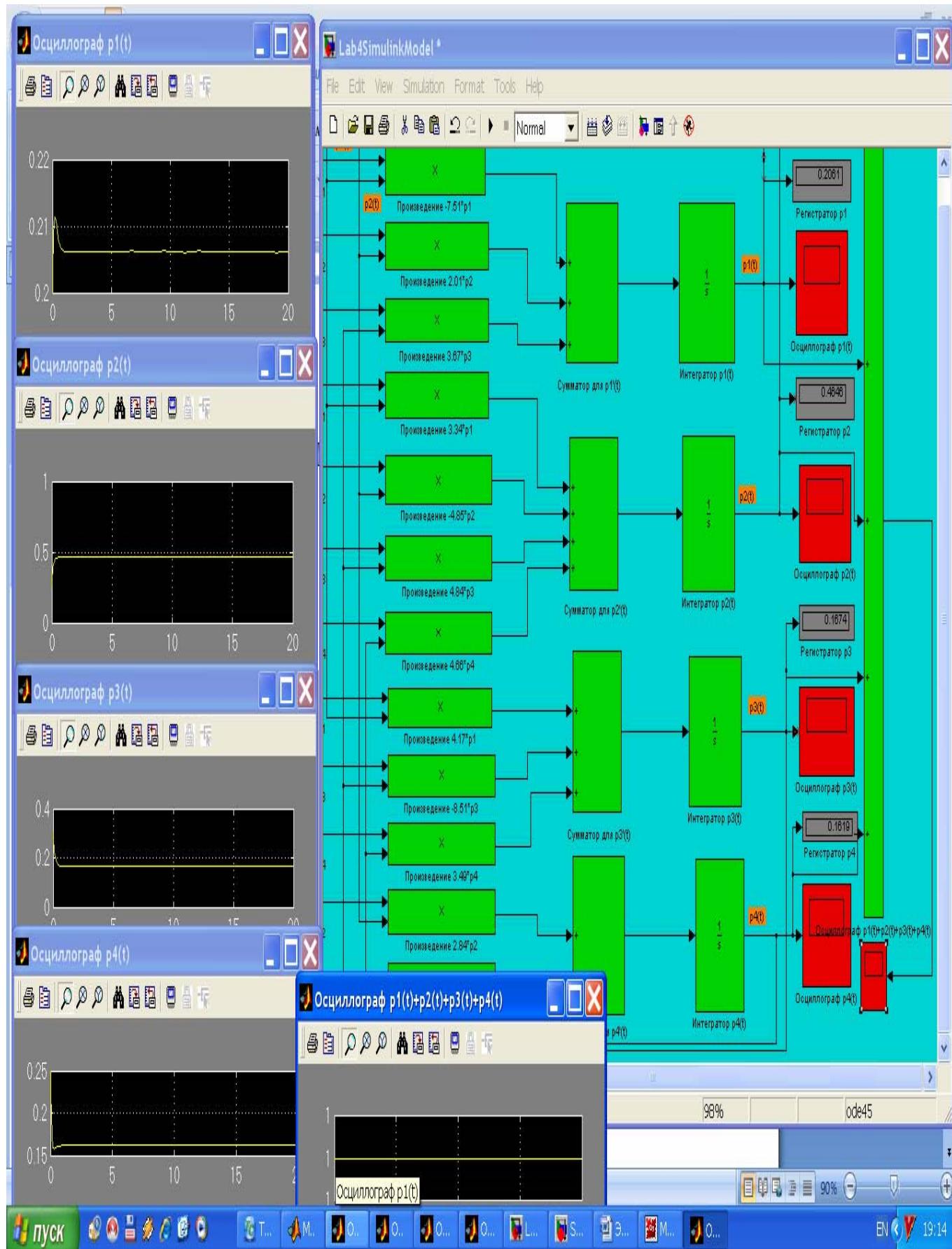
> stop!!!! КОНЕЦ ПРОГРАММЫ ДЛЯ
ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ № 4 ПО ТСМО

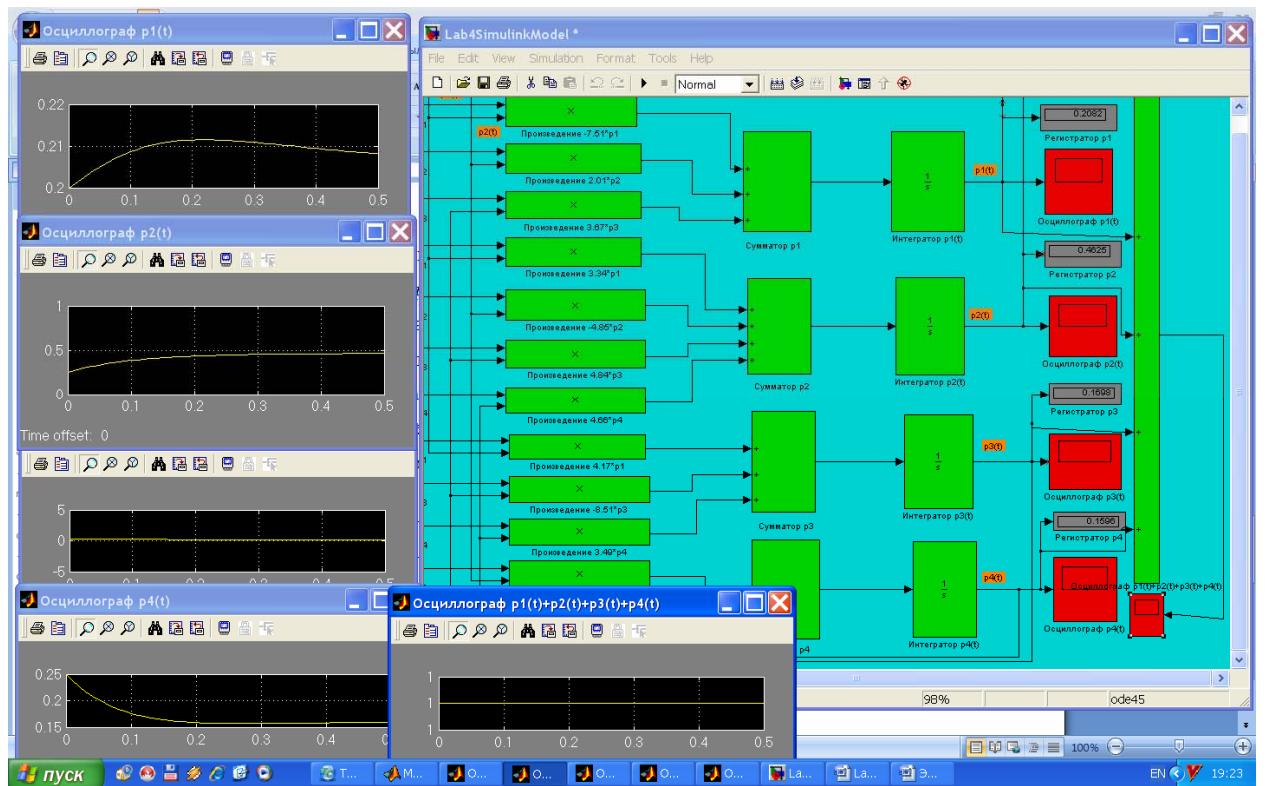
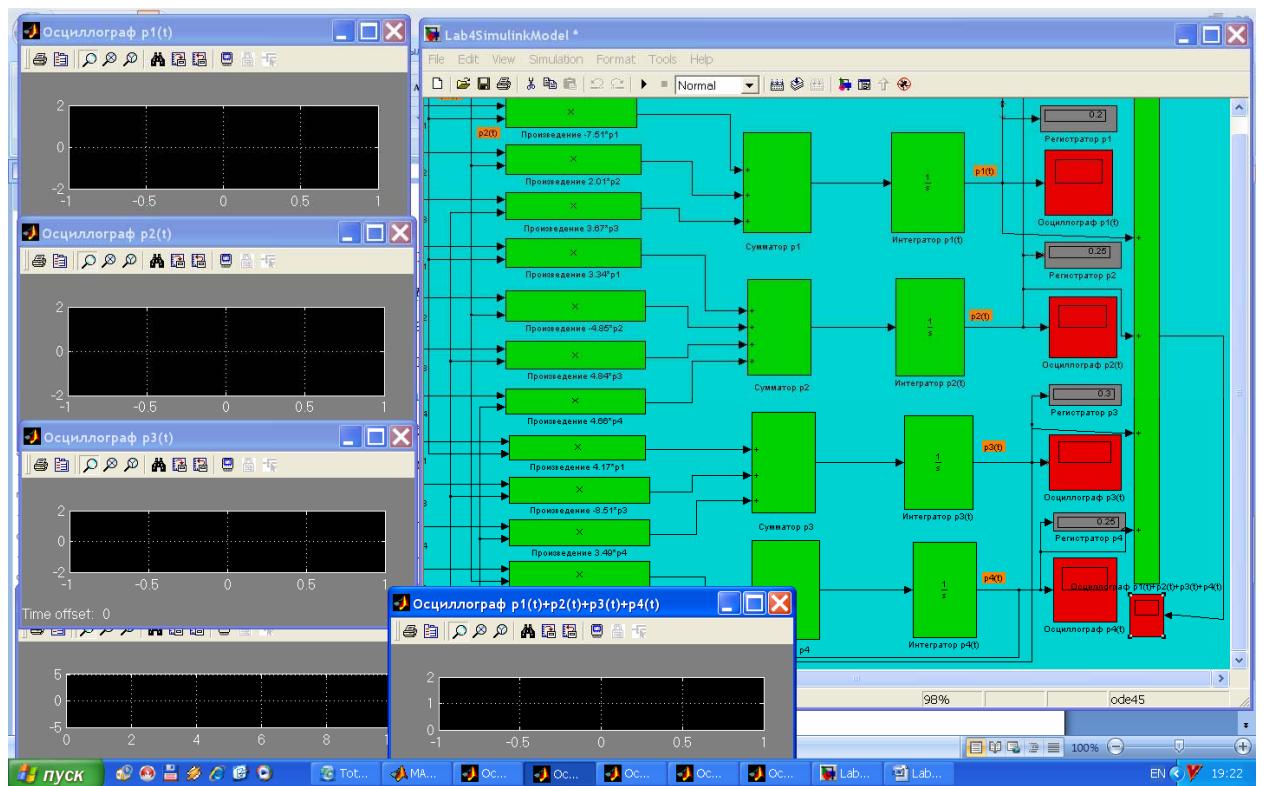
ЭКРАННЫЕ ФОРМЫ

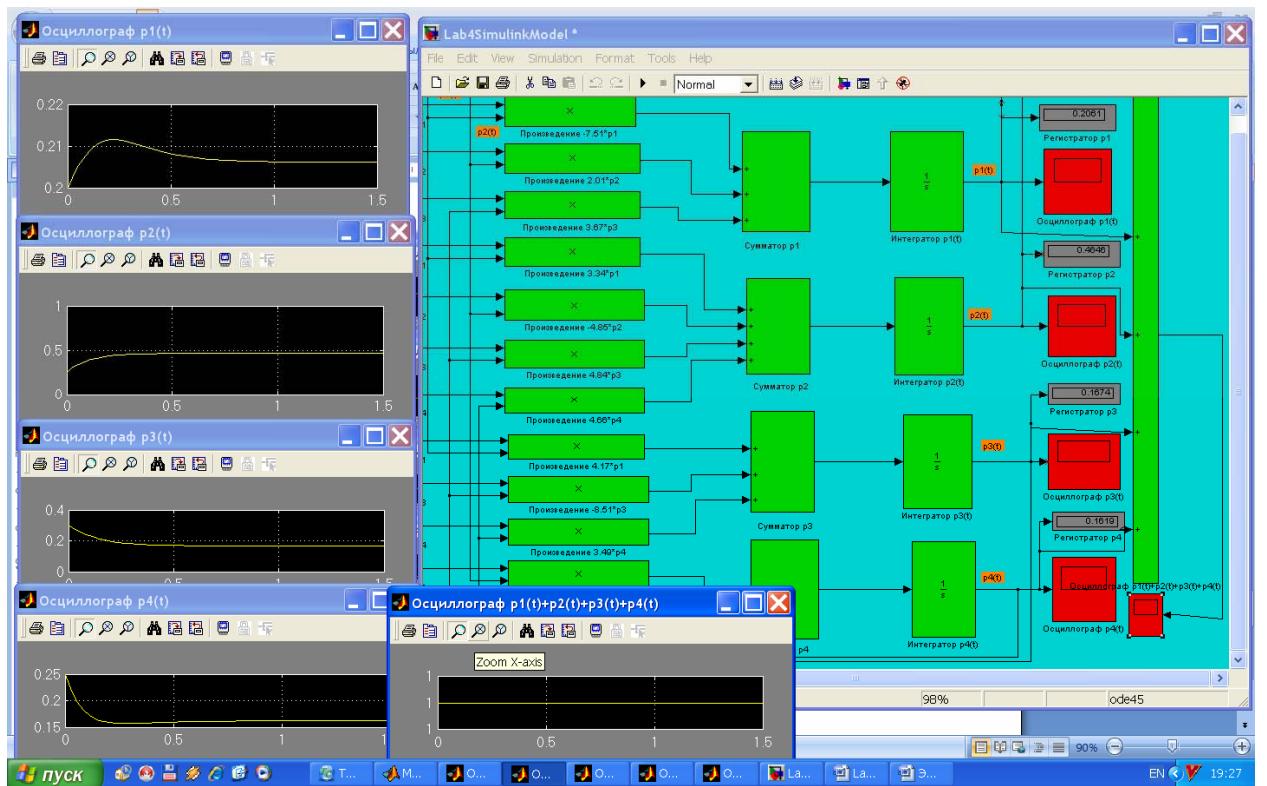
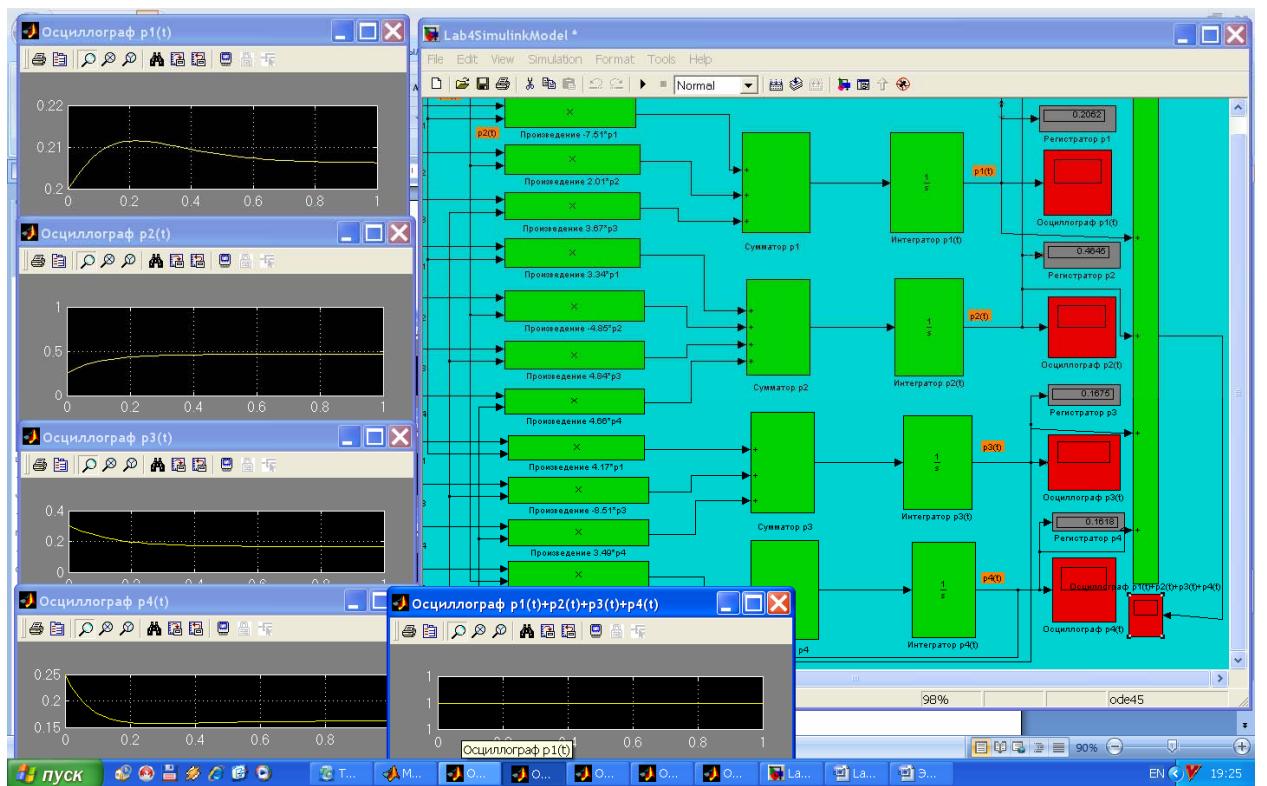


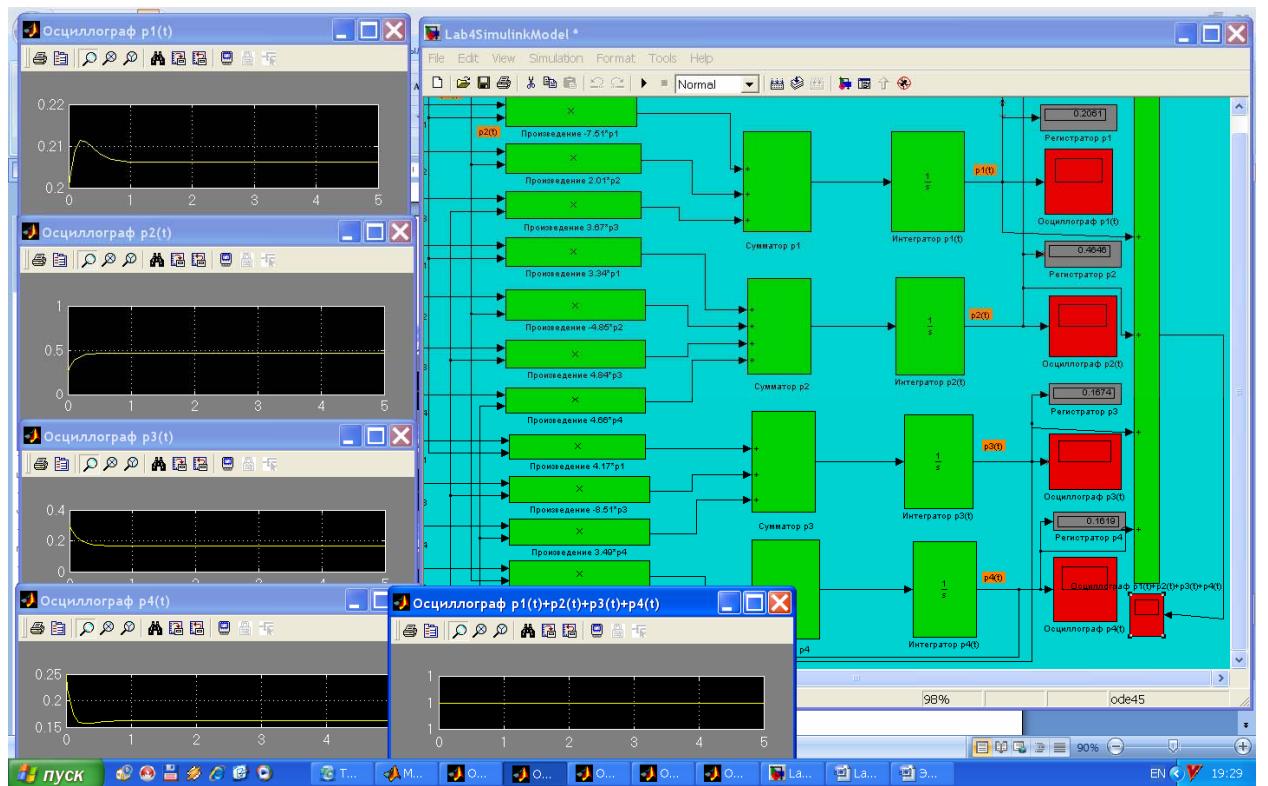
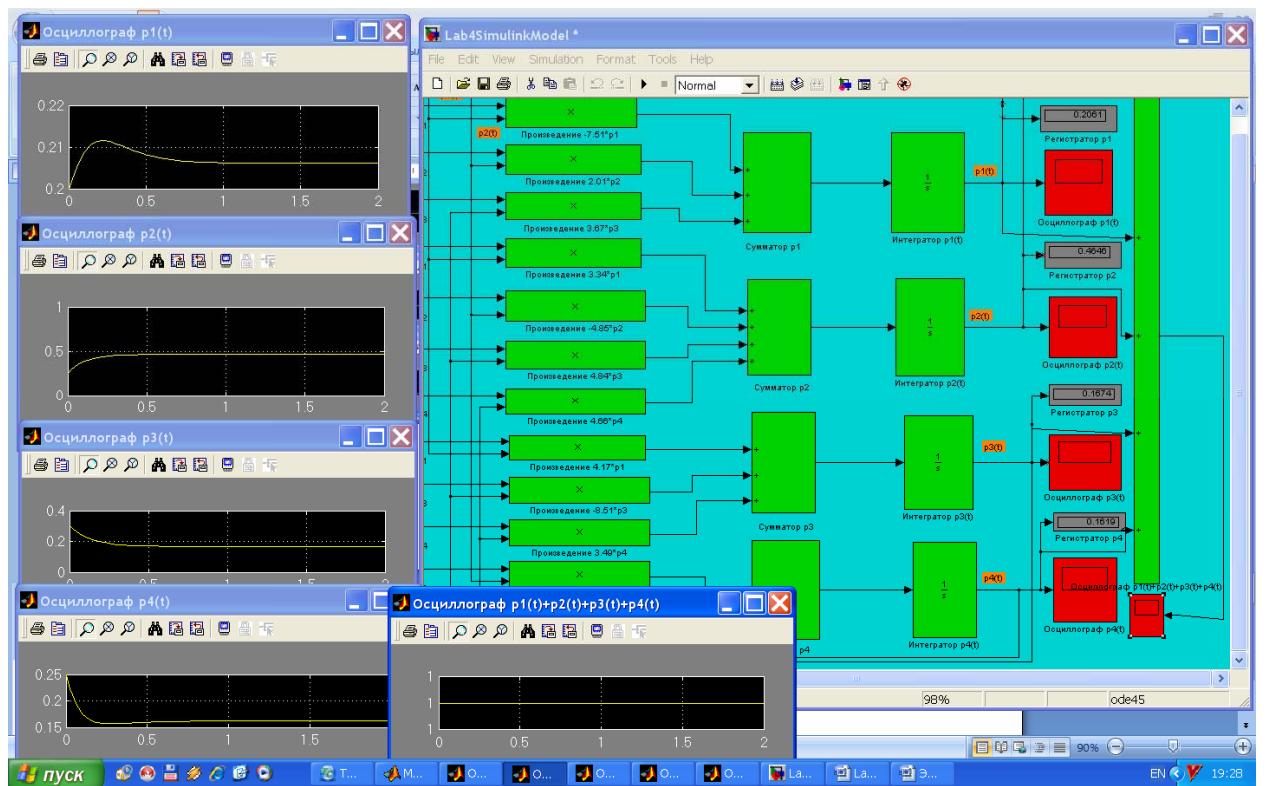


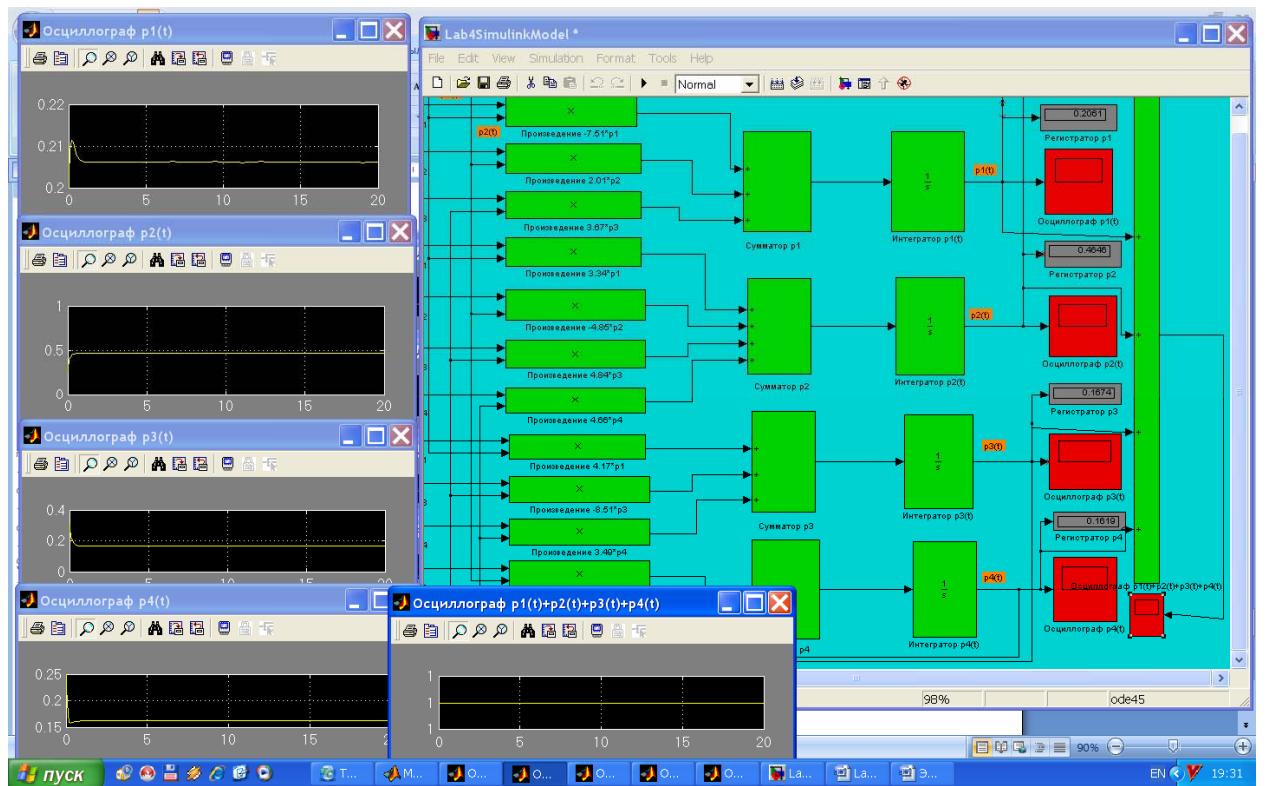
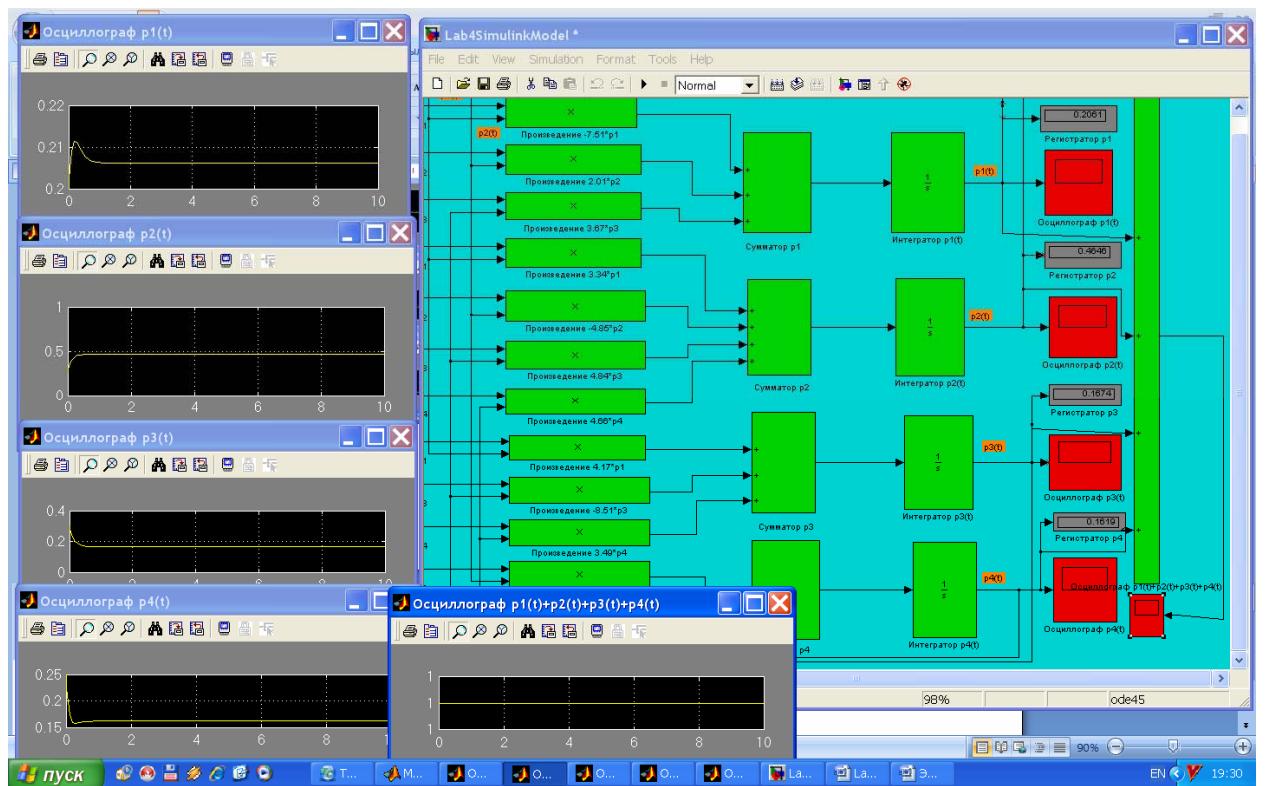


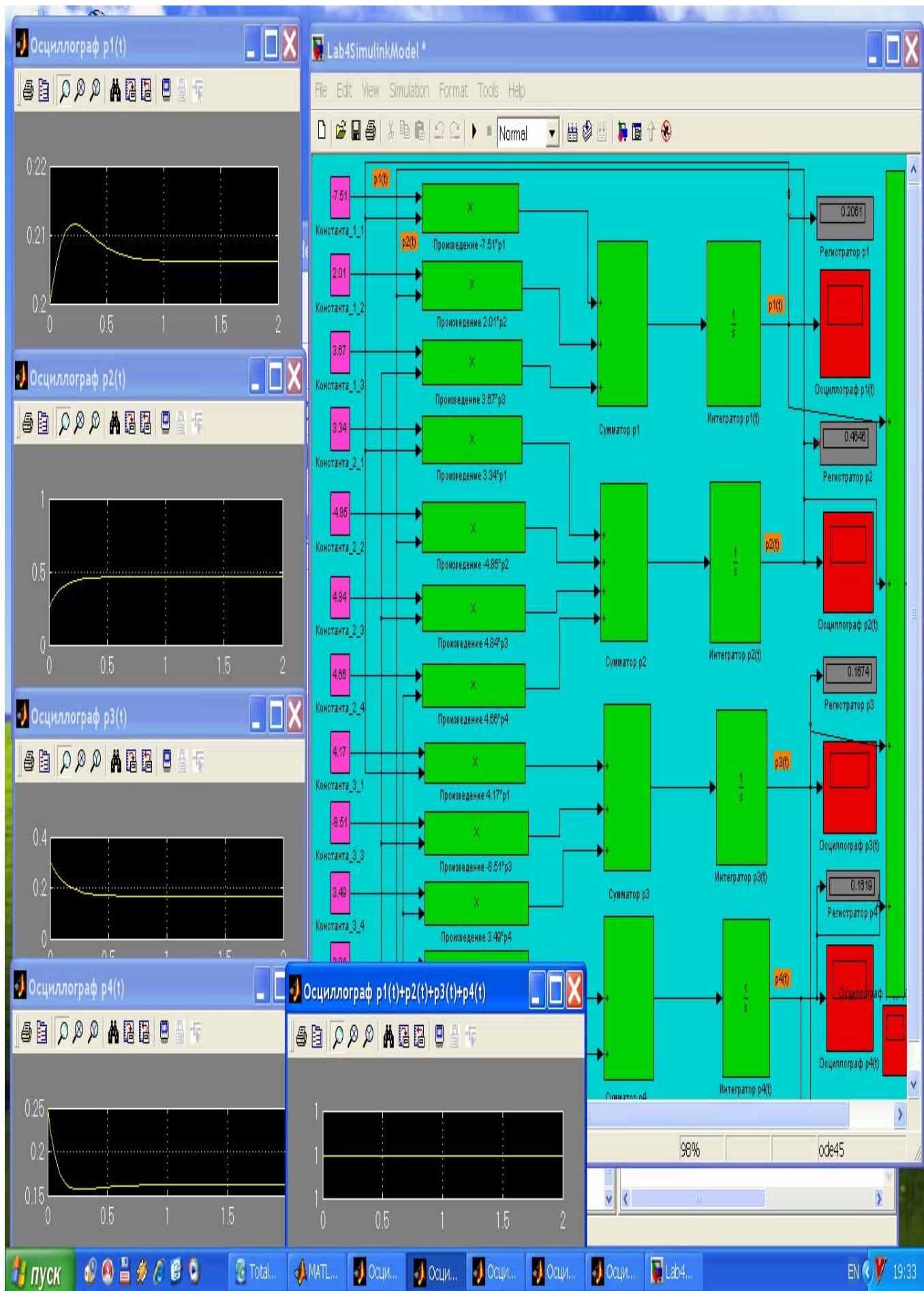












Maple-программа для исследования системы массового обслуживания с отказами

Лабораторная работа № 5
Система массового обслуживания с отказами

1. Задание параметров многоканальной системы массового обслуживания S с отказами

```

> restart:
# Сброс значений всех переменных при повторном запуске
with(LinearAlgebra):
with(CurveFitting):
with(plots):
n:=4;
# Число каналов многоканальной системы массового обслуживания S
m:=n+1; # Число состояний многоканальной системы массового обслуживания S
Lambda:=2.17; # Плотность потока заявок для многоканальной системы массового обслуживания S
Mu:=3.59; # Параметр времени обслуживания многоканальной системы S
Alf:=Lambda/Mu; # Расчетный параметр системы S вход/обслуживание
DeltaT:=2; # Шаг интегрирования уравнений Эрланга методом Рунге-Кутта
L:=15;
# Число шагов интегрирования методом Рунге-Кутта

```

```

T:=15;
# Число шагов визуализации и интегрирования
# методом Рунге-Кутта
StudentNumber:=17;           # Задание для студента
номера варианта при расчете вероятностей
переходов системы S
Warning, the name LeastSquares has been rebound
Warning, the name changecoords has been redefined
n := 4

m := 5

L := 2.17

M := 3.59

Alf:= 0.6044568245

DeltaT:=2

L := 15

T := 15

StudentNumber := 17

```

2. Характеристики потоков и времени обслуживания многоканальной системы S с отказами и их визуализация

2.1 Простейший поток заявок

```

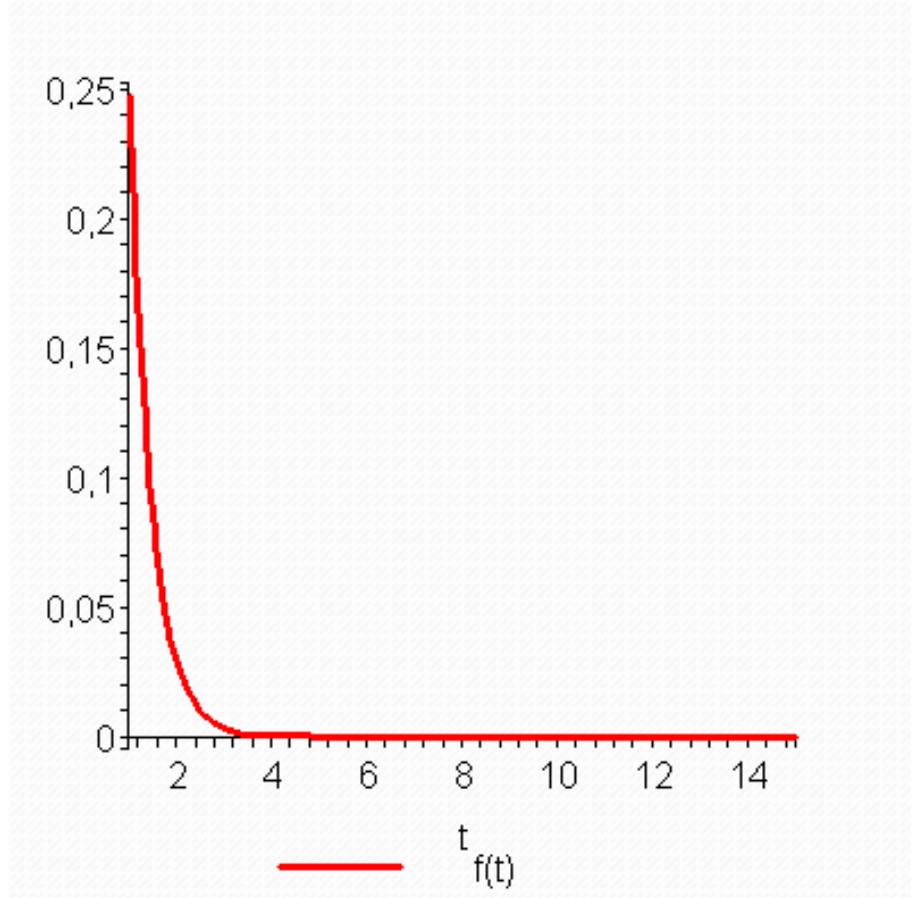
> f:=t->Lambda*exp(-Lambda*t);
f(0);
Int(f(t), t=0..infinity)=int(f(t),
t=0..infinity);
plot(f(t), t=1..T, thickness=2, color= red,
legend=`f(t)`);

```

$$f := t \otimes L e^{(-L t)}$$

2.17

$$\int_0^{\infty} 2.17 e^{(-2.17 t)} dt = 1.$$



2.2 Время обслуживания системы

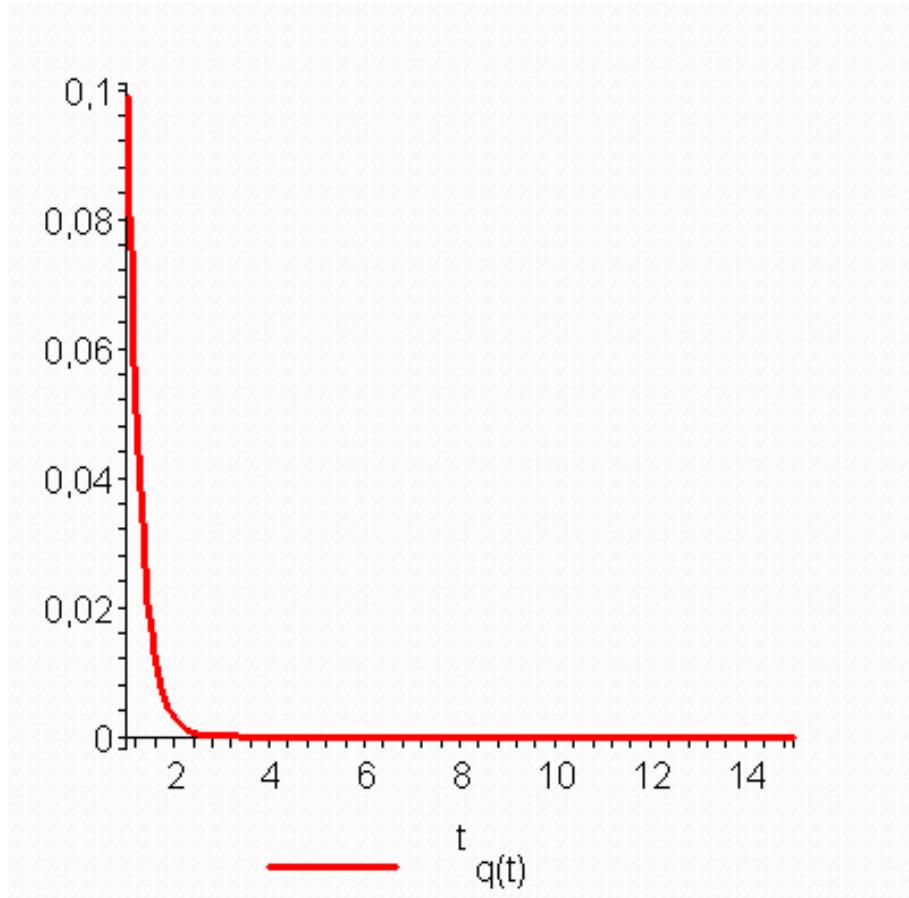
```
> q:=t->Mu*exp(-Mu*t);
q(0);
Int(q(t), t=0..infinity)=int(q(t),
t=0..infinity);
plot(q(t), t=1..T, thickness=2, color= red,
legend='q(t)');

$$q := t \otimes M e^{(-M t)}$$

```

3.59

$$\int_0^{\infty} 3.59 e^{(-3.59 t)} dt = 1.$$



3. Расчет теоретических характеристик системы массового обслуживания S с отказами

```

> pf[0]:=1/sum(Alf^k/k! , k=0..n);
# Вероятность того, что все каналы свободны
pf0 := 0.5465940564

> pf1_n:=[seq(pf[k]=Alf^k/k!*pf[0] , k=1..n)];
# Вероятность того, что несколько каналов заняты
pf1_n:=[pf1 = 0.3303925076, pf2 = 0.09985400303, pf3 = 0.02011914452, pf4 = 0.003040288552]

> Sumpfi:=pf[0]+add(rhs(pf1_n[i]) , i=1..n);
# Сумма вероятностей всех состояний системы S

Sumpfi := 1.000000000

> pf[n]:=Alf^n/n!*pf[0];
# Вероятность того, что все каналы заняты
pf4 := 0.003040288552

```

```

> Pleft:=pf[n];
# Вероятность того, что заявка покинет систему
необслуженной
Pleft:= 0.003040288552

> q:=1-pf[4];
# Относительная пропускная способность системы S
q := 0.9969597114

```

4. Составление уравнений Эрланга для вероятностей состояний $p_i(t)$

```

> diff(p[0](t), t)=-Lambda*p[0](t)+Mu*p[1](t);

$$\frac{d}{dt} p_0(t) = -2.17 p_0(t) + 3.59 p_1(t)$$


> seq(diff(p[k](t), t)=Lambda*p[k-1](t)*(Lambda+k*Mu)*p[k](t)+(k+1)*Mu*p[k+1](t),
k=1..n-1);

$$\frac{d}{dt} p_1(t) = 2.17 p_0(t)(5.76) p_1(t) + 7.18 p_2(t), \frac{d}{dt} p_2(t) = 2.17 p_1(t)(9.35) p_2(t) + 10.77 p_3(t),$$


$$\frac{d}{dt} p_3(t) = 2.17 p_2(t)(12.94) p_3(t) + 14.36 p_4(t)$$


> diff(p[4](t), t)=Lambda*p[3](t)-n*Mu*p[n](t);

$$\frac{d}{dt} p_4(t) = 2.17 p_3(t) - 14.36 p_4(t)$$


> ODESystem:={diff(p[0](t), t)=-Lambda*p[0](t)+Mu*p[1](t),
seq(diff(p[k](t),
t)=Lambda*p[k-1](t)-
(Lambda+k*Mu)*p[k](t)+(k+1)*Mu*p[k+1](t),
k=1..n-1),
diff(p[4](t),
t)=Lambda*p[3](t)-n*Mu*p[n](t)};;
ODESystem := ?  $\frac{d}{dt} p_0(t) = -2.17 p_0(t) + 3.59 p_1(t), \frac{d}{dt} p_1(t) = 2.17 p_0(t) - 5.76 p_1(t) + 7.18 p_2(t),$ 

$$\frac{d}{dt} p_2(t) = 2.17 p_1(t) - 9.35 p_2(t) + 10.77 p_3(t), \frac{d}{dt} p_3(t) = 2.17 p_2(t) - 12.94 p_3(t) + 14.36 p_4(t),$$


$$\frac{d}{dt} p_4(t) = 2.17 p_3(t) - 14.36 p_4(t) ?$$


```

>

5. Решение уравнений Эрланга для вероятностей состояний $p_i(t)$ в общем виде

```
PSi:=dsolve(ODESystem):
> PSi[1]:
> diff((PSi[1]), t):
> PSi[2]:
> diff((PSi[2]), t):
> PSi[3]:
> diff((PSi[3]), t):
> PSi[4]:
> diff((PSi[4]), t):
> PSi[5]:
> diff((PSi[5]), t):
```

6. Решение уравнений Эрланга для вероятностей состояний $p_i(t)$ при заданных начальных условиях

```
> ODESystemInit:={diff(p0(t), t)=-
Lambda*p0(t)+Mu*p1(t),
                           diff(p1(t),
t)=Lambda*p0(t)-(Lambda+1*Mu)*p1(t)+2*Mu*p2(t),
                           diff(p2(t),
t)=Lambda*p1(t)-(Lambda+2*Mu)*p2(t)+3*Mu*p3(t),
                           diff(p3(t),
#                           t)=Lambda*p2(t)-(Lambda+3*Mu)*p3(t)+4*Mu*p4(t),
                           diff(p3(t),
t)=Lambda*p2(t)-3*Mu*p3(t),
                           p0(0)=1.0,
                           p1(0)=0.0, p2(0)=0.0, p3(0)=0.0
                           #, p4(0)=0.0
                           };
```

$$ODESystemInit := \begin{cases} \frac{d}{dt} p_3(t) = 2.17 p_2(t) - 10.77 p_3(t), \\ \frac{d}{dt} p_0(t) = -2.17 p_0(t) + 3.59 p_1(t), \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} p_1(t) = 2.17 p_0(t) - 5.76 p_1(t) + 7.18 p_2(t), \quad \frac{d}{dt} p_2(t) = 2.17 p_1(t) - 9.35 p_2(t) + 10.77 p_3(t), \quad p_1(0) = 0.,$$

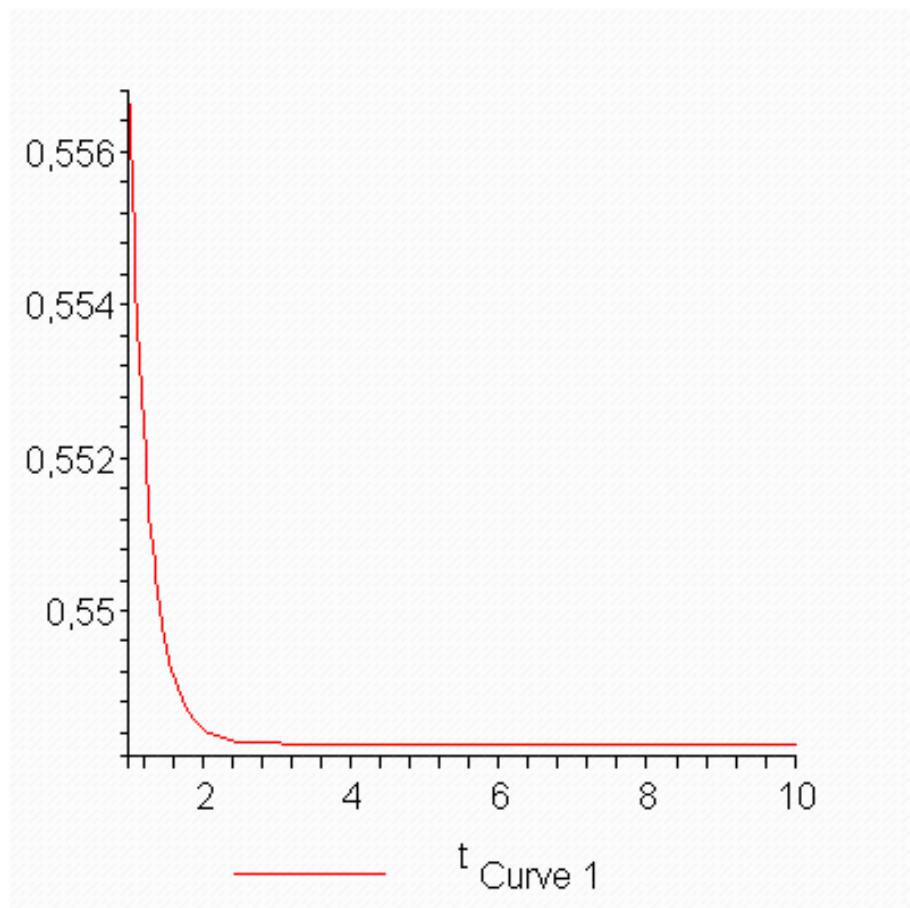
$p2(0) = 0., p3(0) = 0., p0(0) = 1.0?$
?

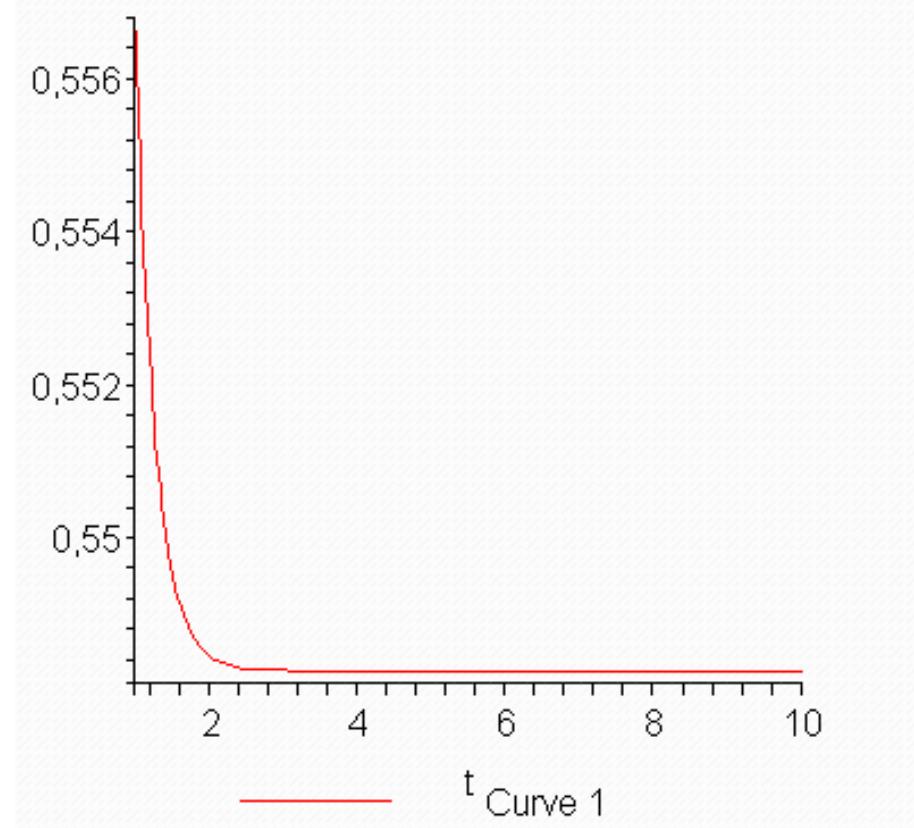
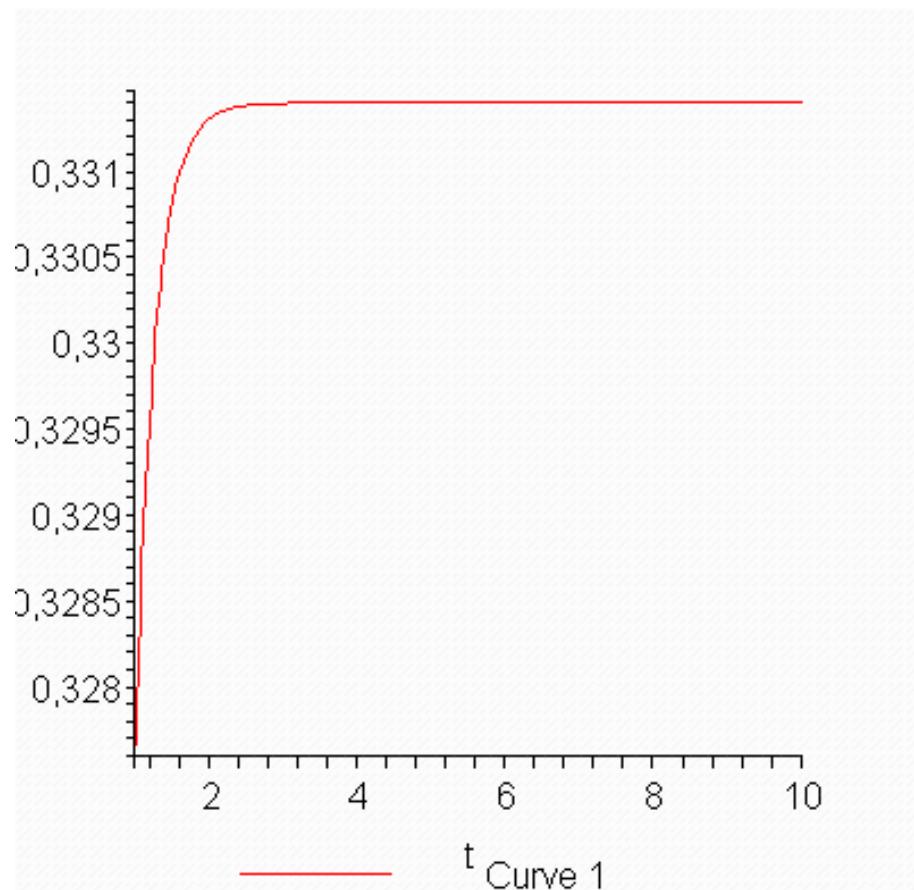
> **PSiInit:=dsolve(ODESystemInit):**

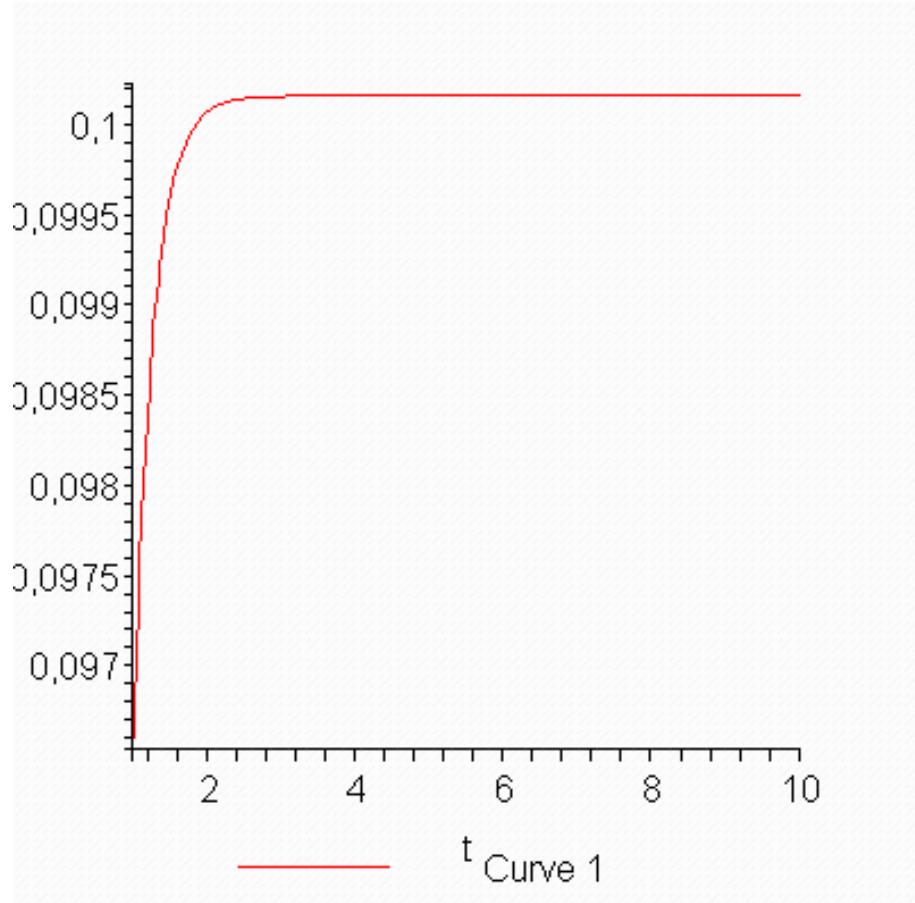
7. Визуализация решений уравнений Эрланга для вероятностей состояний $ri(t)$

при заданных начальных условиях

```
> p1(t) :=rhs(PSiInit[2]):  
p2(t) :=rhs(PSiInit[4]):  
p3(t) :=rhs(PSiInit[1]):  
p4(t) :=rhs(PSiInit[3]):  
plot(p1(t), t=1..10);  
plot(p2(t), t=1..10);  
plot(p3(t), t=1..10);  
plot(p4(t), t=1..10);
```







>

8. Решение системы уравнений Эрланга для финальных вероятностей переходов $pff0, pff1, pff2, pff3$ и $pff4$

```
> SymPi:=solve({-Lambda*pff0+Mu*pff1=0,
                  Lambda*pff0-
(Lambda+1*Mu)*pff1+2*Mu*pff2=0,
                  Lambda*pff1-
(Lambda+2*Mu)*pff2+3*Mu*pff3=0,
                  Lambda*pff2-
(Lambda+3*Mu)*pff3+4*Mu*pff4=0,
pff0+pff1+pff2+pff3+pff4=1
}, {pff0, pff1, pff2,
pff3, pff4});
```

$$SymPi := \{pff1 = 0.3303925076, pff0 = 0.5465940563, pff4 = 0.003040288552, pff2 = 0.09985400299,$$

```

pff3 = 0.02011914452}

>
SumPi:=rhs(SymPi[1])+rhs(SymPi[2])+rhs(SymPi[3])
+rhs(SymPi[4])+rhs(SymPi[5]);

SumPi := 1.000000000

> SymPi[5];
SymPi[2];
SymPi[3];
SymPi[4];
SymPi[1];
pff3 = 0.02011914452

pff0 = 0.5465940563

pff4 = 0.003040288552

pff2 = 0.09985400299

pff1 = 0.3303925076

>
> Pfi:=solve({-2.17*pf0+3.59*pf1=0,
              2.17*pf0-
5.76*pf1+7.18*pf2=0,
              2.17*pf1-
9.35*pf2+10.77*pf3=0,
              2.17*pf2-
12.94*pf3+14.36*pf4=0,
              pf0+pf1+pf2+pf3+pf4=1
              },
              {pf0, pf1, pf2, pf3, pf4}
              );
# {p[4](t) = 0.304028620131242475e-2, p[3](t) =
0.201191510889340460e-1, p[2](t) =
0.998539959020817298e-1,
# p[1](t) = .330392511169330827, p[1](t) =
.330392511169330827, p[0](t) =
.546594055638341070}

Pfi := {pf3 = 0.02011914452, pf2 = 0.09985400299, pf1 = 0.3303925076, pf0 = 0.5465940563,
pf4 = 0.003040288552}

```

9. Решение уравнений Эрланга для вероятностей состояний $p_i(t)$ методом Рунге-Кутта

```

> restart:
with(LinearAlgebra):
with(CurveFitting):
with(plots):
Lambda:=2.17;                                     #
Плотность потока заявок для многоканальной
системы массового обслуживания S
Mu:=3.59;                                         #
Параметр времени обслуживания многоканальной
системы S
ODESystemInit:={diff(p0(t), t)=-
Lambda*p0(t)+Mu*p1(t),
                           diff(p1(t),
t)=Lambda*p0(t)-(Lambda+1*Mu)*p1(t)+2*Mu*p2(t),
                           diff(p2(t),
t)=Lambda*p1(t)-(Lambda+2*Mu)*p2(t)+3*Mu*p3(t),
                           diff(p3(t),
t)=Lambda*p2(t)-(Lambda+3*Mu)*p3(t)+4*Mu*p4(t),
                           diff(p4(t),
t)=Lambda*p3(t)-4*Mu*p4(t),
                           p0(0)=1.0,
p1(0)=0.0, p2(0)=0.0, p3(0)=0.0, p4(0)=0.0
                           };
Warning, the name LeastSquares has been rebound
Warning, the name changecoords has been redefined
L := 2.17

M := 3.59

ODESystemInit:=?  $\frac{d}{dt} p_3(t) = 2.17 p_2(t) - 12.94 p_3(t) + 14.36 p_4(t)$ ,  $\frac{d}{dt} p_4(t) = 2.17 p_3(t) - 14.36 p_4(t)$ ,
 $p_0(0) = 1.0$ ,  $p_1(0) = 0.$ ,  $p_2(0) = 0.$ ,  $p_3(0) = 0.$ ,  $p_4(0) = 0.$ ,
 $\frac{d}{dt} p_1(t) = 2.17 p_0(t) - 5.76 p_1(t) + 7.18 p_2(t)$ ,  $\frac{d}{dt} p_2(t) = 2.17 p_1(t) - 9.35 p_2(t) + 10.77 p_3(t)$ ?
```

> Runge_Kutt:=dsolve(ODESystemInit, numeric,
method=rkf45, {p0(t), p1(t), p2(t), p3(t),
p4(t)});

```

Runge_Kutt:=prod(x_rkf45) ... end proc;

> Lpi[0]:=Runge_Kutt(0.0);
Lpi0 := [t = 0., p0(t) = 1., p1(t) = 0., p2(t) = 0., p3(t) = 0., p4(t) = 0.];

> Lpi[1]:=Runge_Kutt(0.5);
Lpi1 := [t = 0.5, p0(t) = 0.604093554513178476, p1(t) = 0.304510299575287080,
p2(t) = 0.0767805796419036014, p3(t) = 0.0129438608656616324, p4(t) = 0.00167170540396938390];

> Lpi[2]:=Runge_Kutt(1.0);
Lpi2 := [t = 1.0, p0(t) = 0.555658125930388880, p1(t) = 0.326663585088933228,
p2(t) = 0.0960480760949048301, p3(t) = 0.0188454668683919364, p4(t) = 0.00278474601738116884];

> Lpi[3]:=Runge_Kutt(1.5);
Lpi3 := [t = 1.5, p0(t) = 0.548066674560359844, p1(t) = 0.329794482872266870,
p2(t) = 0.0992320253266893438, p3(t) = 0.0199089714127403186, p4(t) = 0.00299784582794319172];

> Lpi[4]:=Runge_Kutt(2.0);
Lpi4 := [t = 2.0, p0(t) = 0.546834235542790648, p1(t) = 0.330295142835436706,
p2(t) = 0.0997524809033172588, p3(t) = 0.0200847947882790631, p4(t) = 0.00303334593017586972];

> Lpi[5]:=Runge_Kutt(5.0);
Lpi5 := [t = 5.0, p0(t) = 0.546594054352584346, p1(t) = 0.330392499854962551,
p2(t) = 0.0998540230091448656, p3(t) = 0.0201191280174715312, p4(t) = 0.00304029476583665042];

> Lpi[6]:=Runge_Kutt(10.0);
Lpi6 := [t = 10.0, p0(t) = 0.546594052466686798, p1(t) = 0.330392527294737781,
p2(t) = 0.0998539639307437638, p3(t) = 0.0201191807088391406, p4(t) = 0.00304027559899271117];

> Lpi[7]:=Runge_Kutt(20.0);
Lpi7 := [t = 20.0, p0(t) = 0.546594055638341070, p1(t) = 0.330392511169330827,
p2(t) = 0.0998539959020817298, p3(t) = 0.0201191510889340460, p4(t) = 0.00304028620131242475];

> Lp1:=[seq(rhs(Lpi[t][2]), t=0..7)];
Lp1 := [1., 0.604093554513178476, 0.555658125930388880, 0.548066674560359844,
0.546834235542790648, 0.546594054352584346, 0.546594052466686798, 0.546594055638341070];

> Lp2:=[seq(rhs(Lpi[t][3]), t=0..7)];
Lp2 := [0., 0.304510299575287080, 0.326663585088933228, 0.329794482872266870,
0.330295142835436706, 0.330392499854962551, 0.330392527294737781, 0.330392511169330827];

> Lp3:=[seq(rhs(Lpi[t][4]), t=0..7)];
Lp3 := [0., 0.0767805796419036014, 0.0960480760949048301, 0.0992320253266893438,
0.0997524809033172588, 0.0998540230091448656, 0.0998539639307437638, 0.0998539959020817298];

```

```

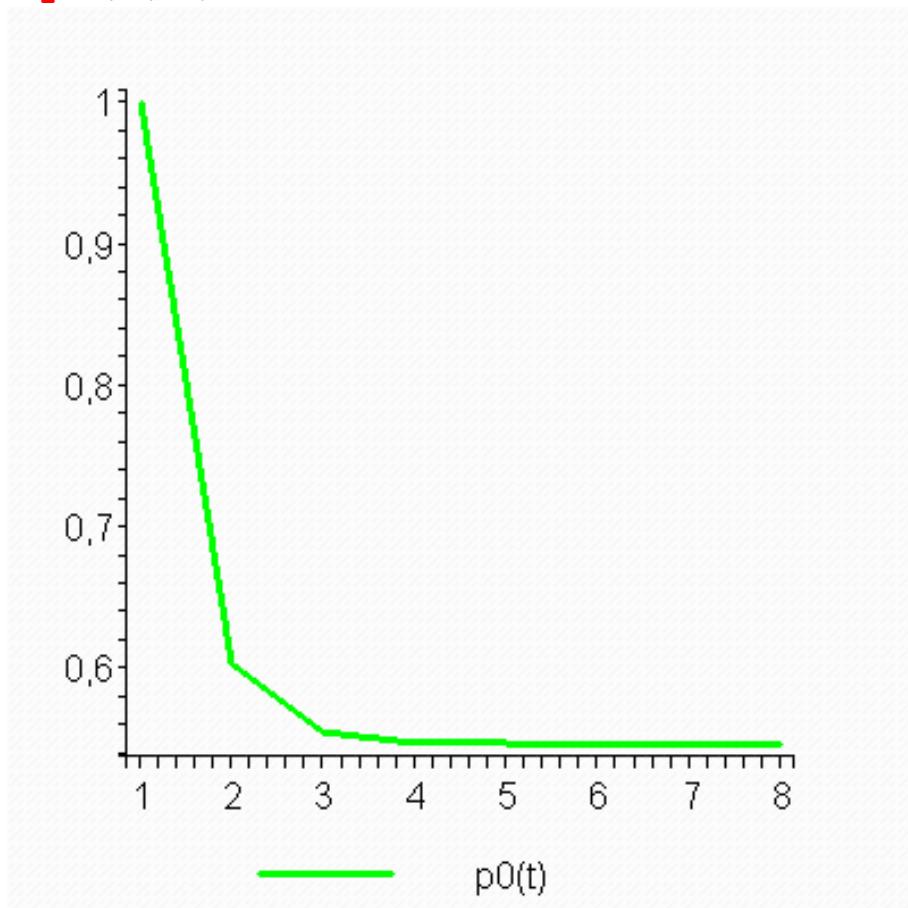
]

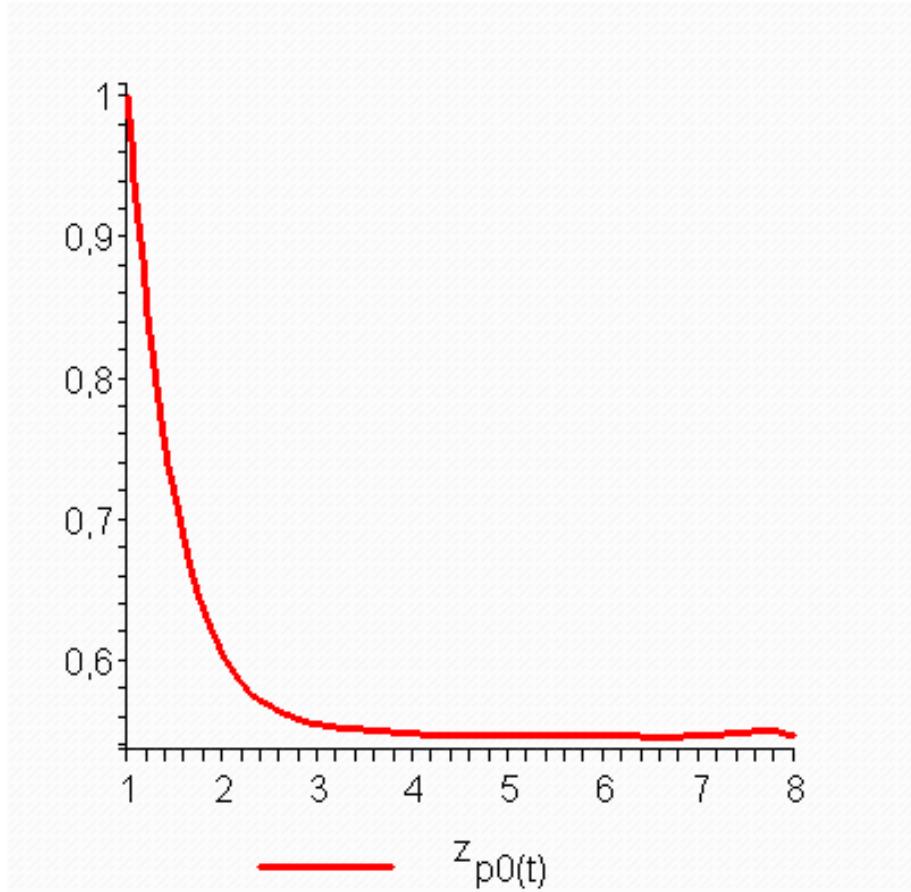
> Lp4:=[seq(rhs(Lpi[t][5]), t=0..7)];
Lp4 := [0., 0.0129438608656616324, 0.0188454668683919364, 0.0199089714127403186,
0.0200847947882790631, 0.0201191280174715312, 0.0201191807088391406, 0.0201191510889340460
]

> Lp5:=[seq(rhs(Lpi[t][6]), t=0..7)];
Lp5 := [0., 0.00167170540396938390, 0.00278474601738116884, 0.00299784582794319172,
0.00303334593017586972, 0.00304029476583665042, 0.00304027559899271117,
0.00304028620131242475]

> listplot([seq(Lp1[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p0(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp1[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p0(t)`);

```

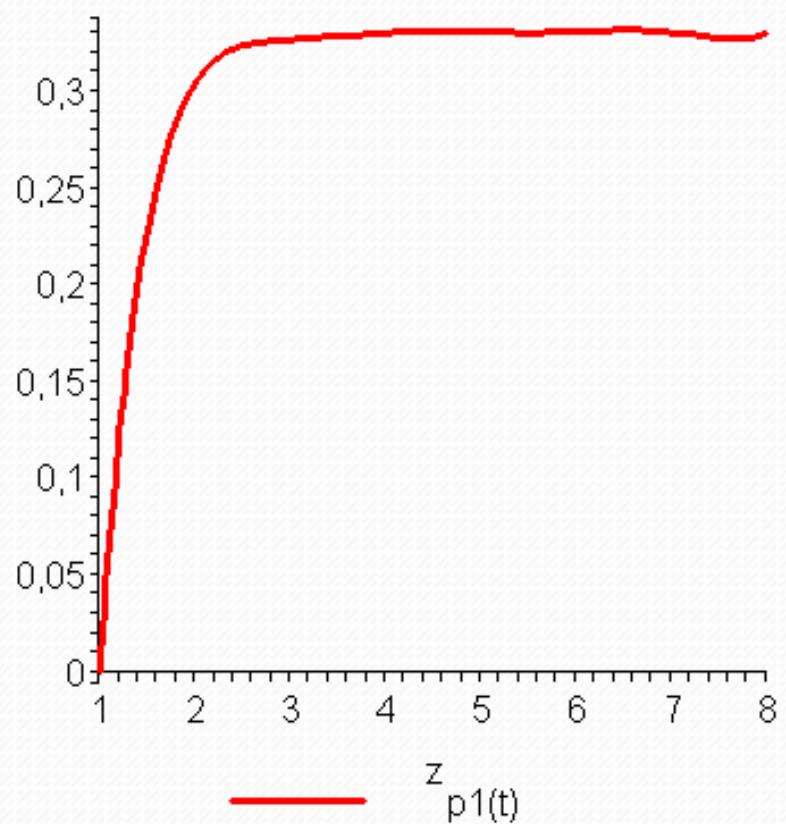
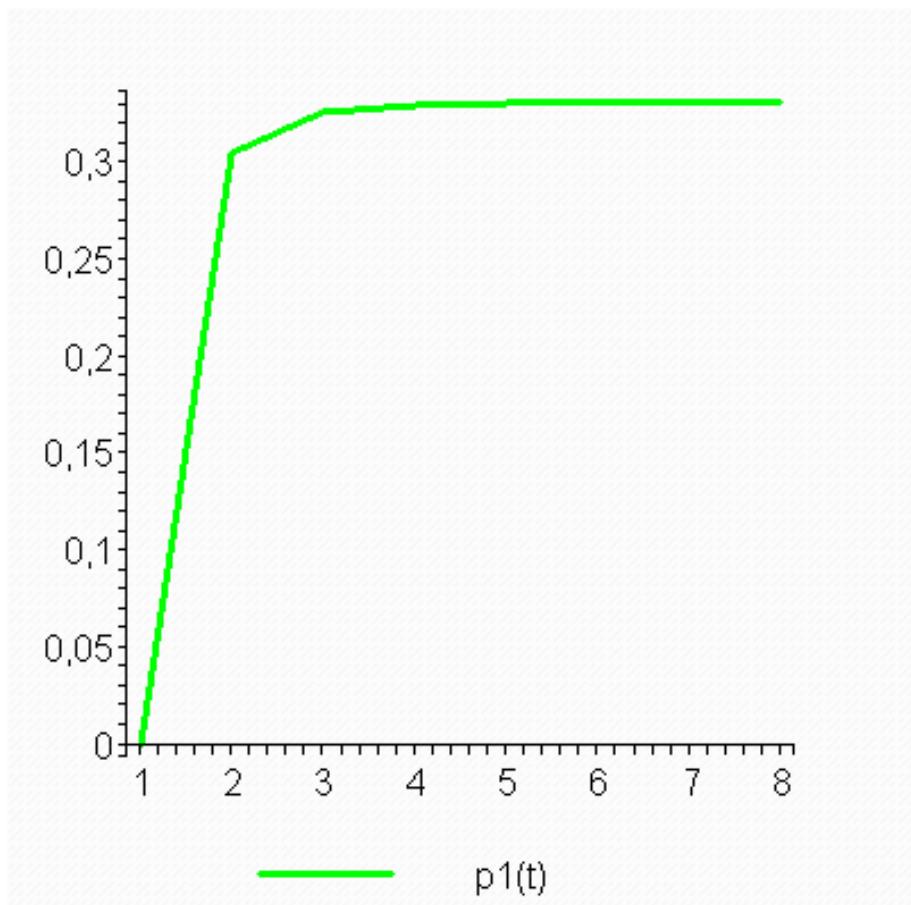




```

> listplot([seq(Lp2[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p1(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp2[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p1(t)`);

```

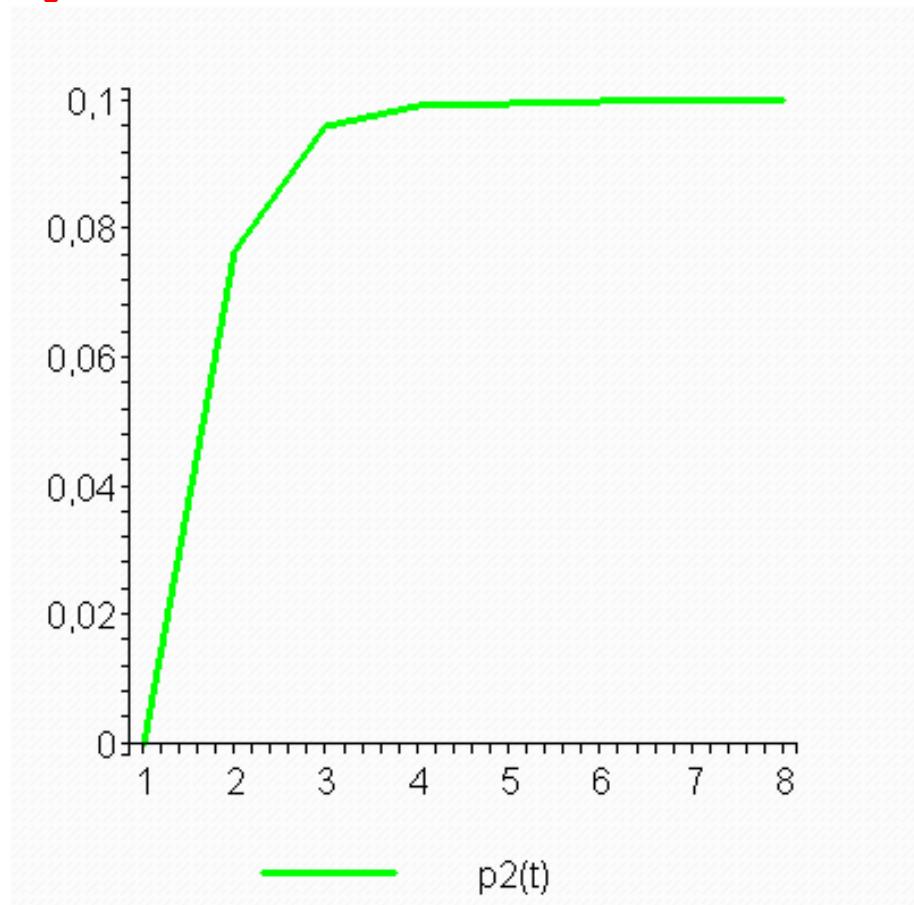


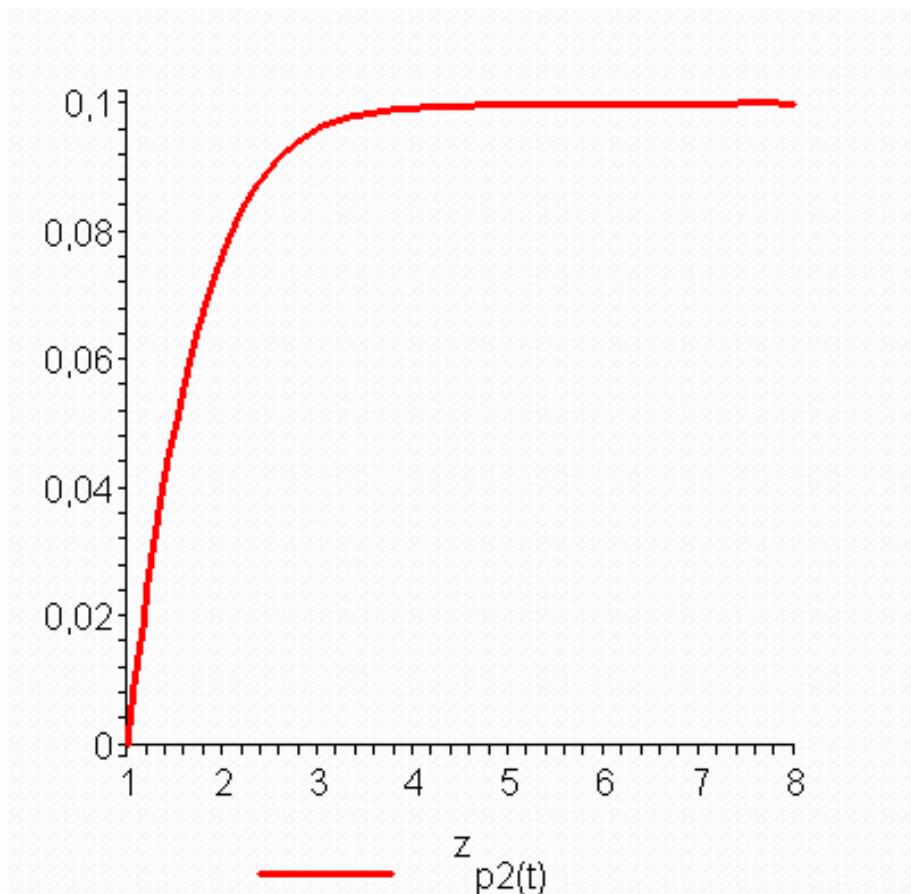
```
> listplot([seq(Lp3[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p2(t)');
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp3[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p2(t)`);

```

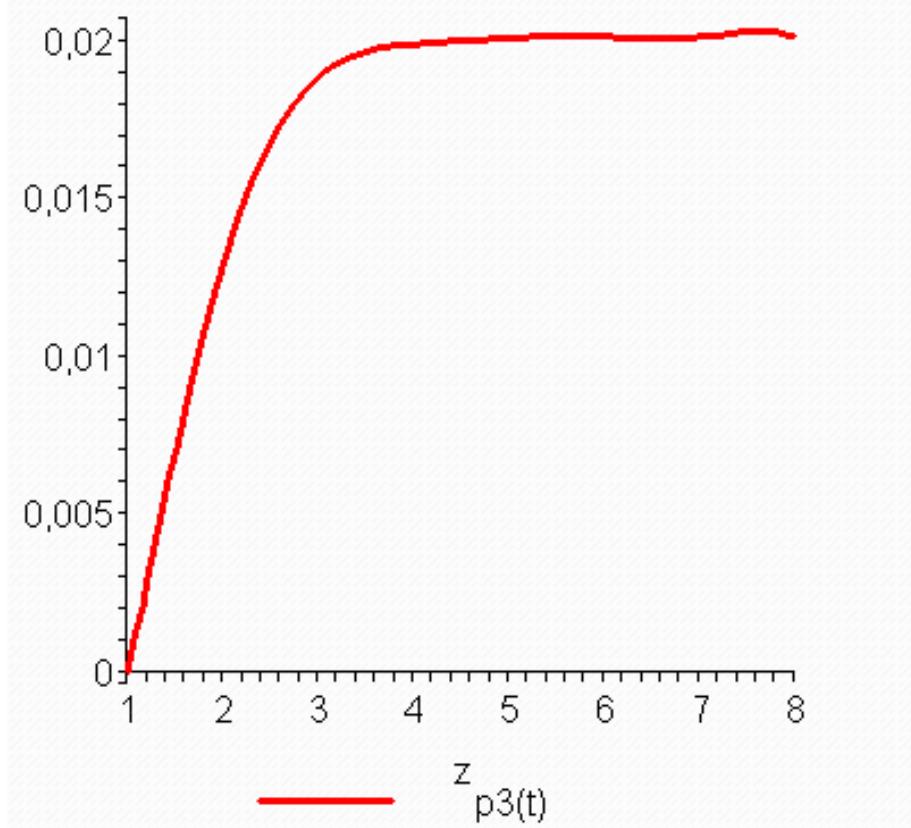
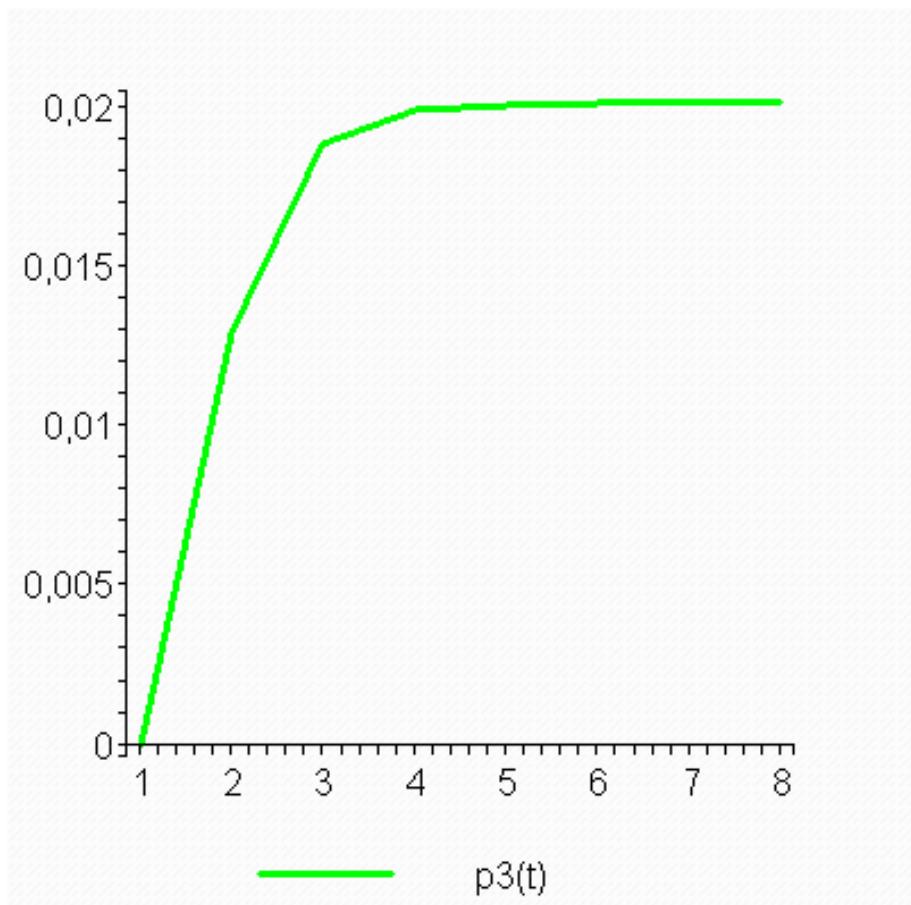




```

> listplot([seq(Lp4[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p3(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp4[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p3(t)`);

```

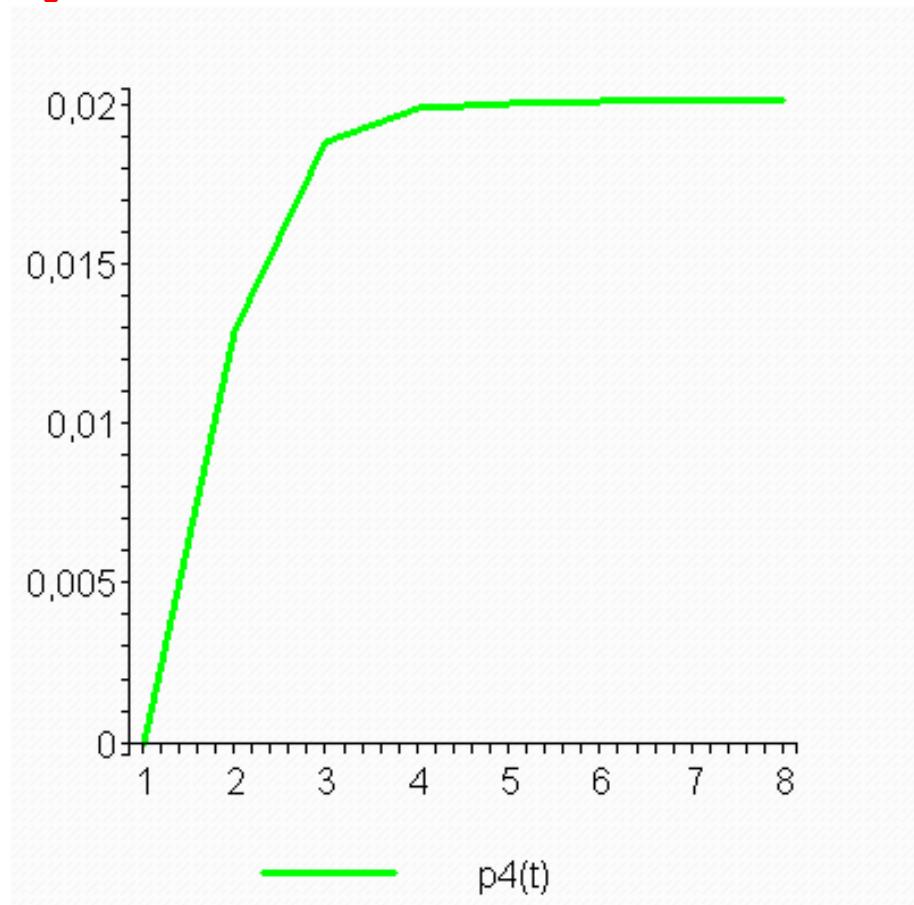


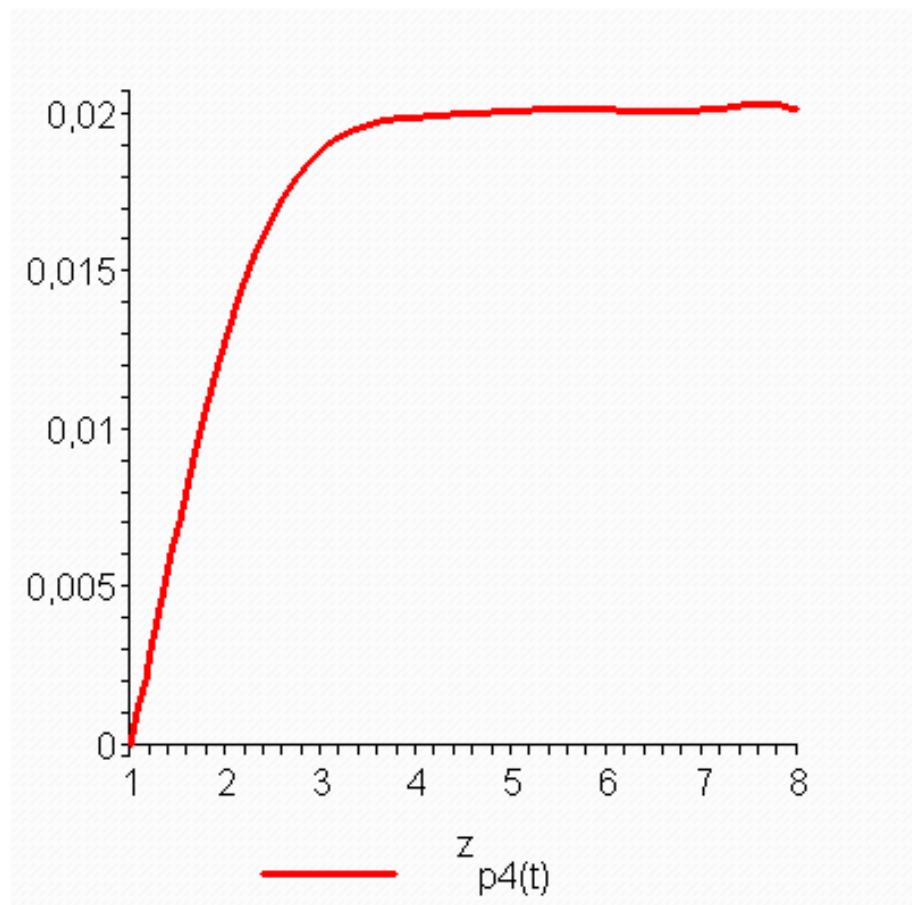
```
> listplot([seq(Lp4[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p4(t)');
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp4[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p4(t)`);

```

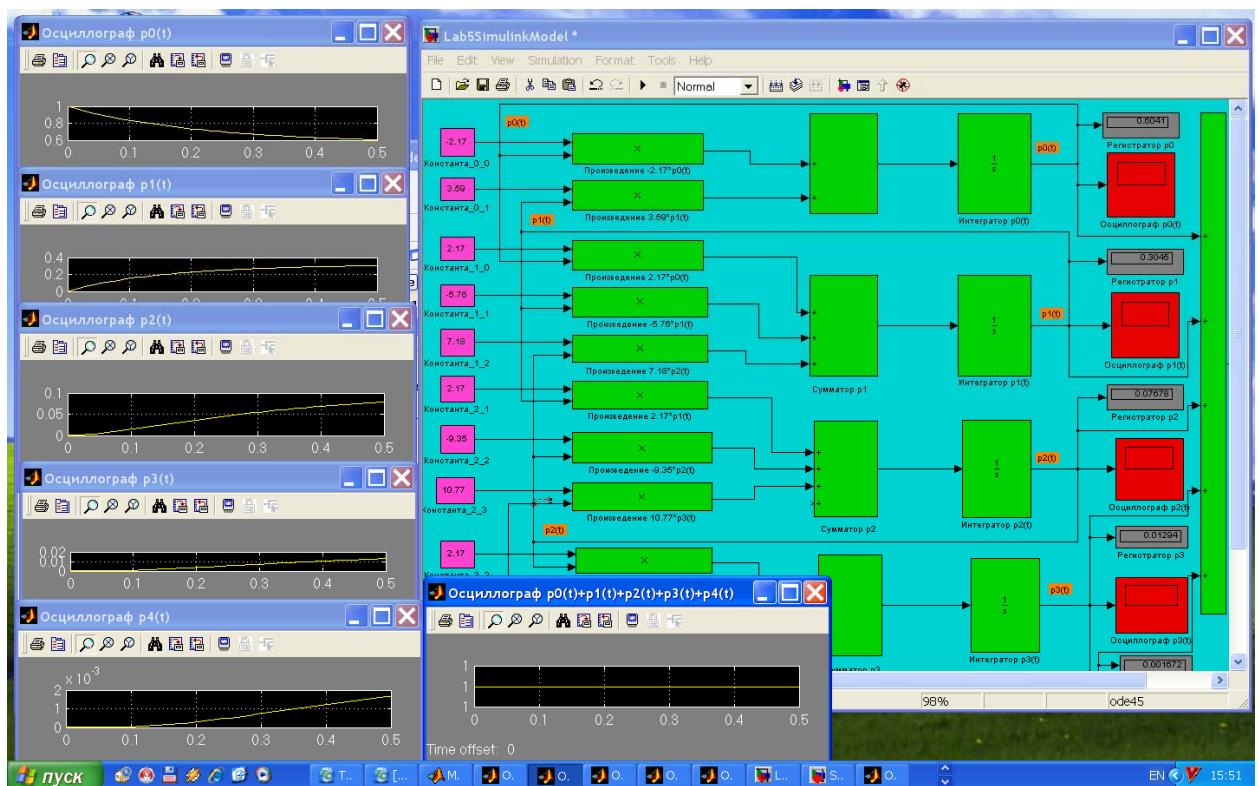
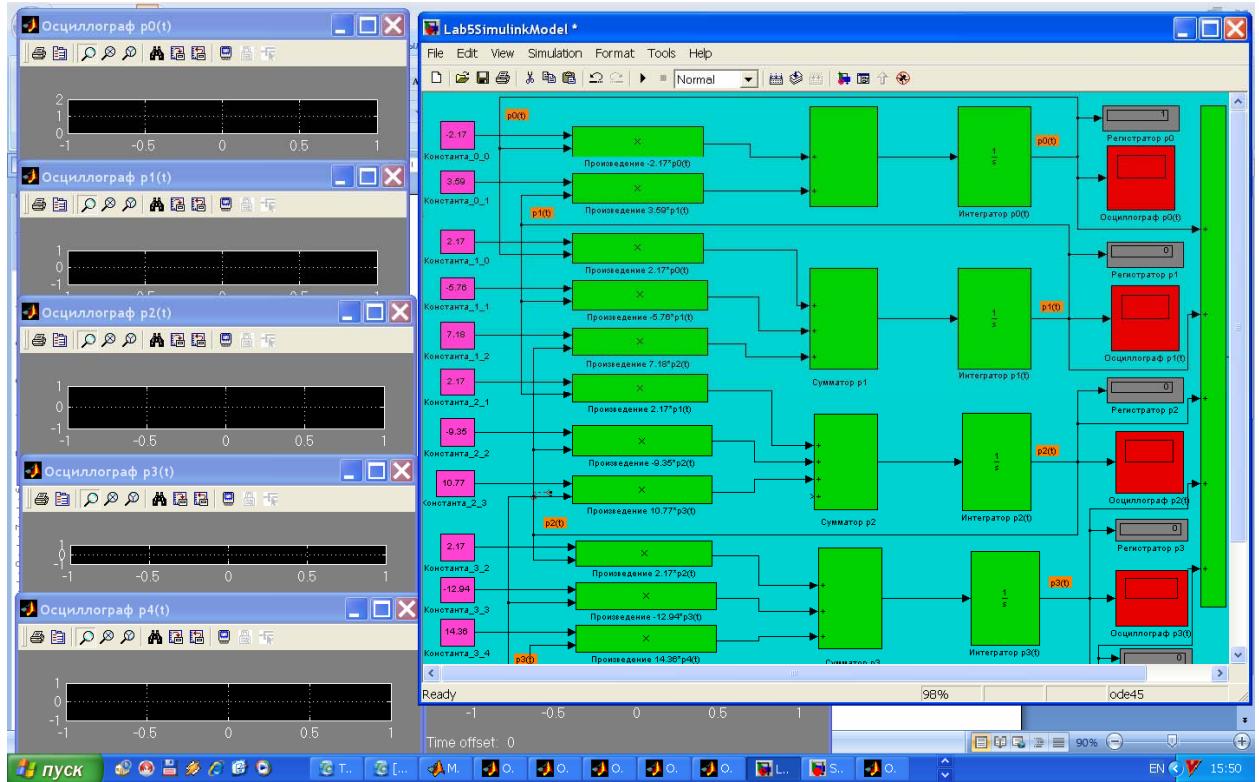


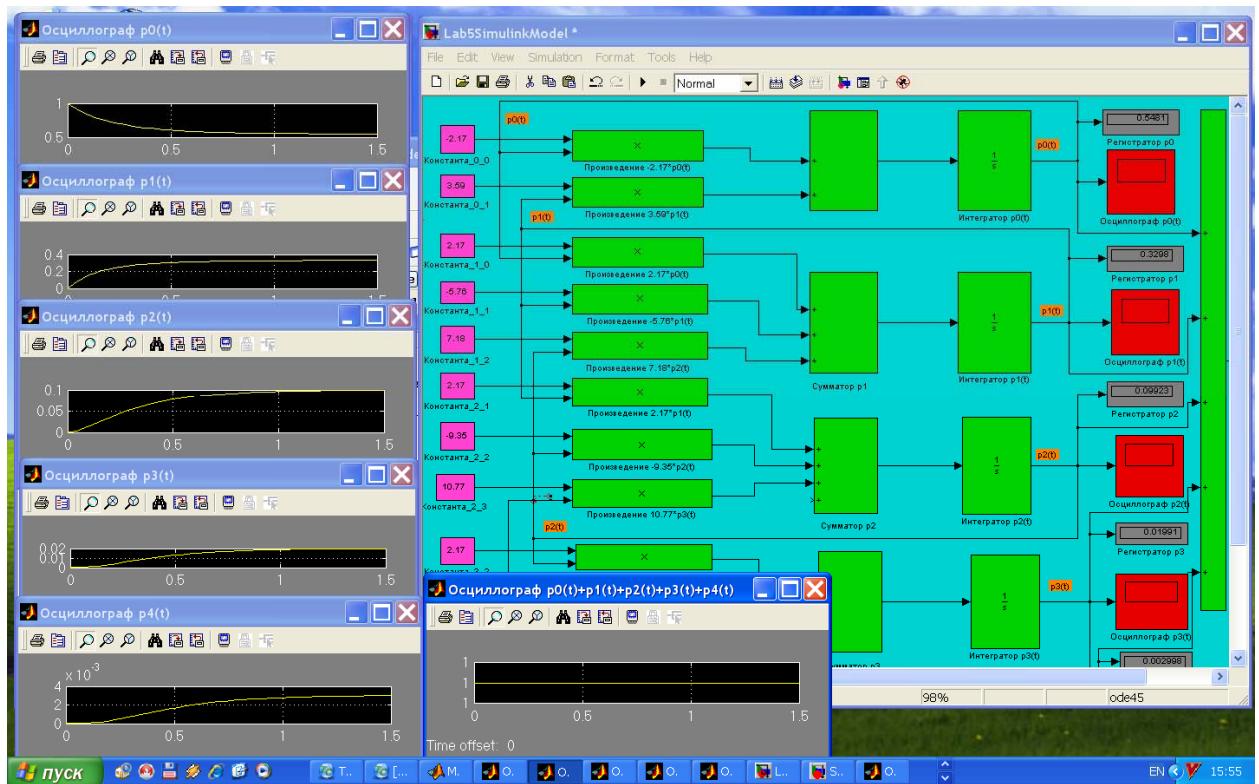
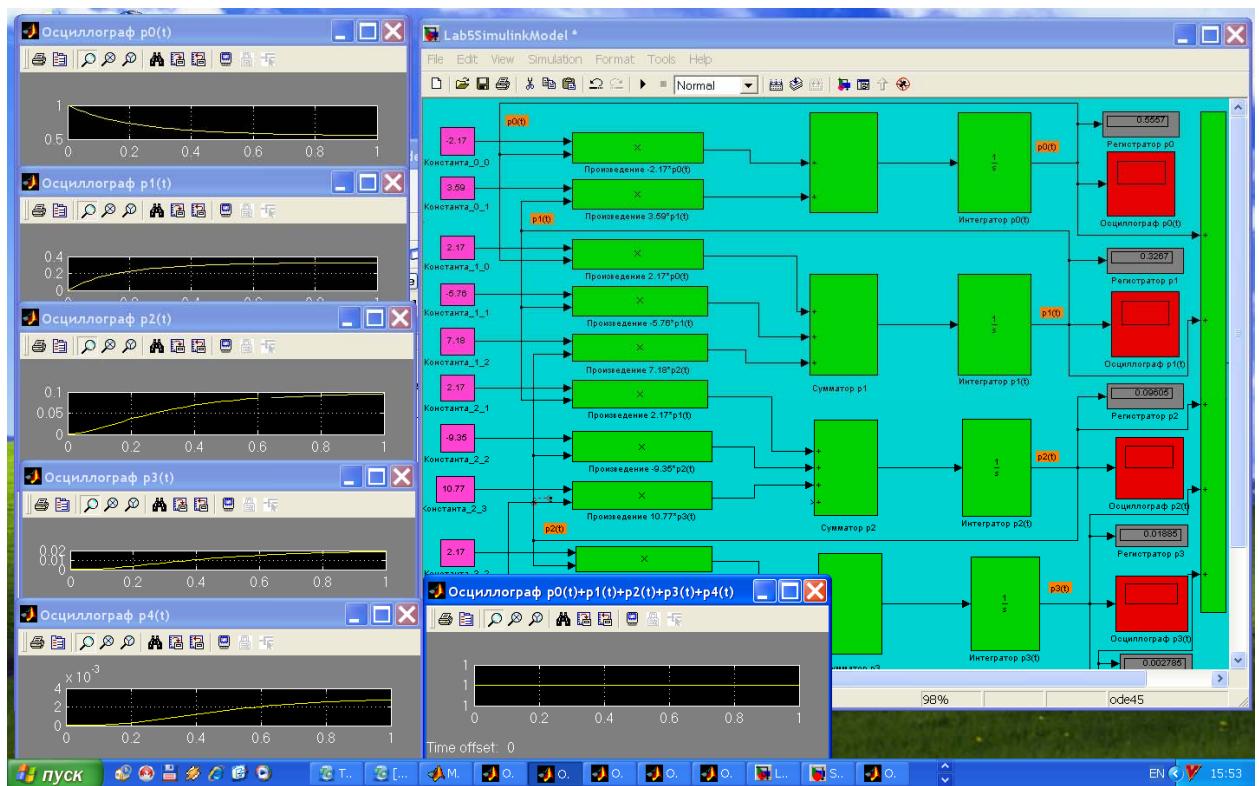


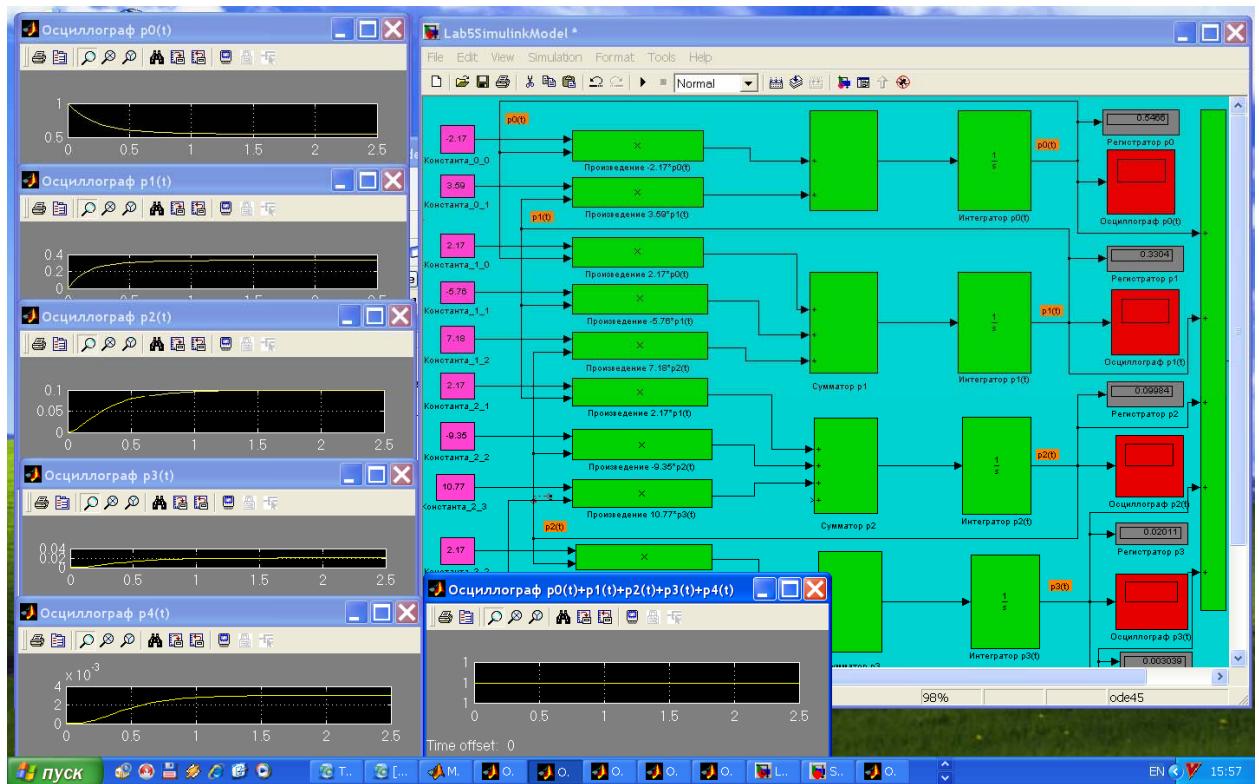
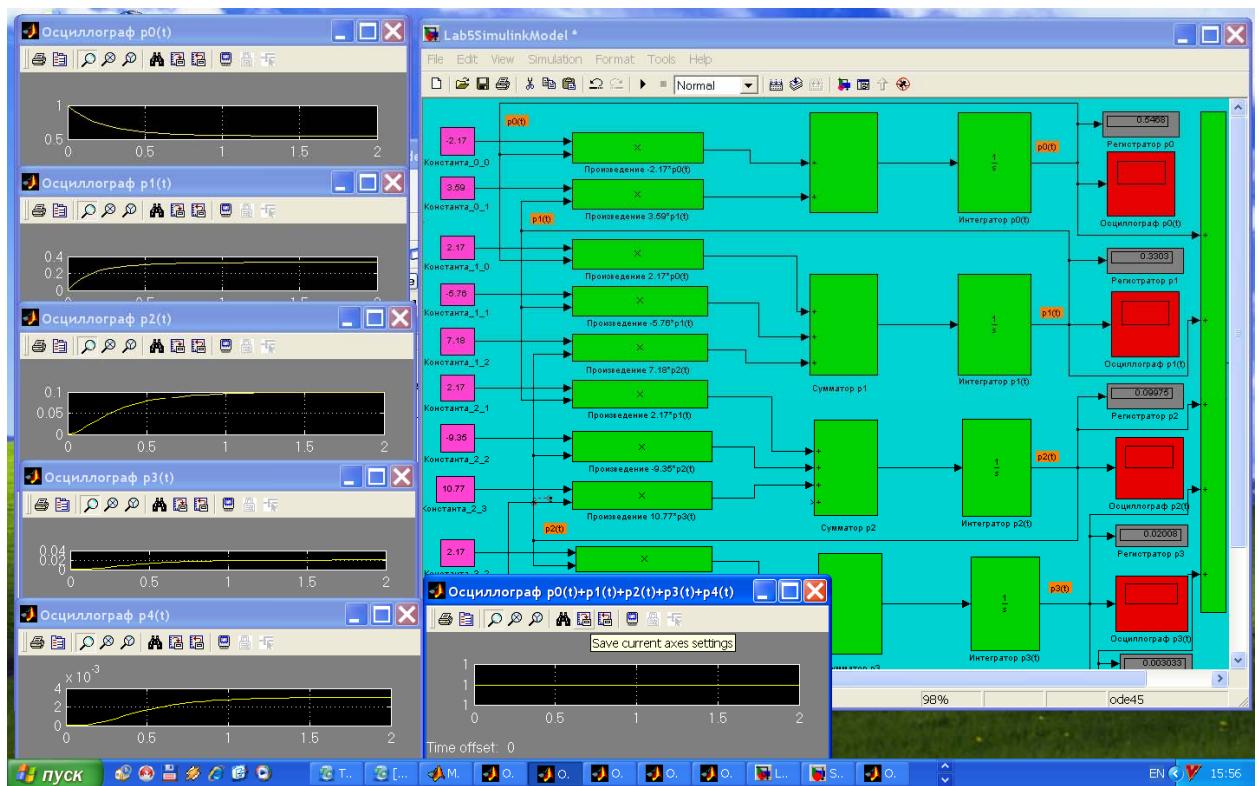
10. Конец программы для лабораторной работы № 5

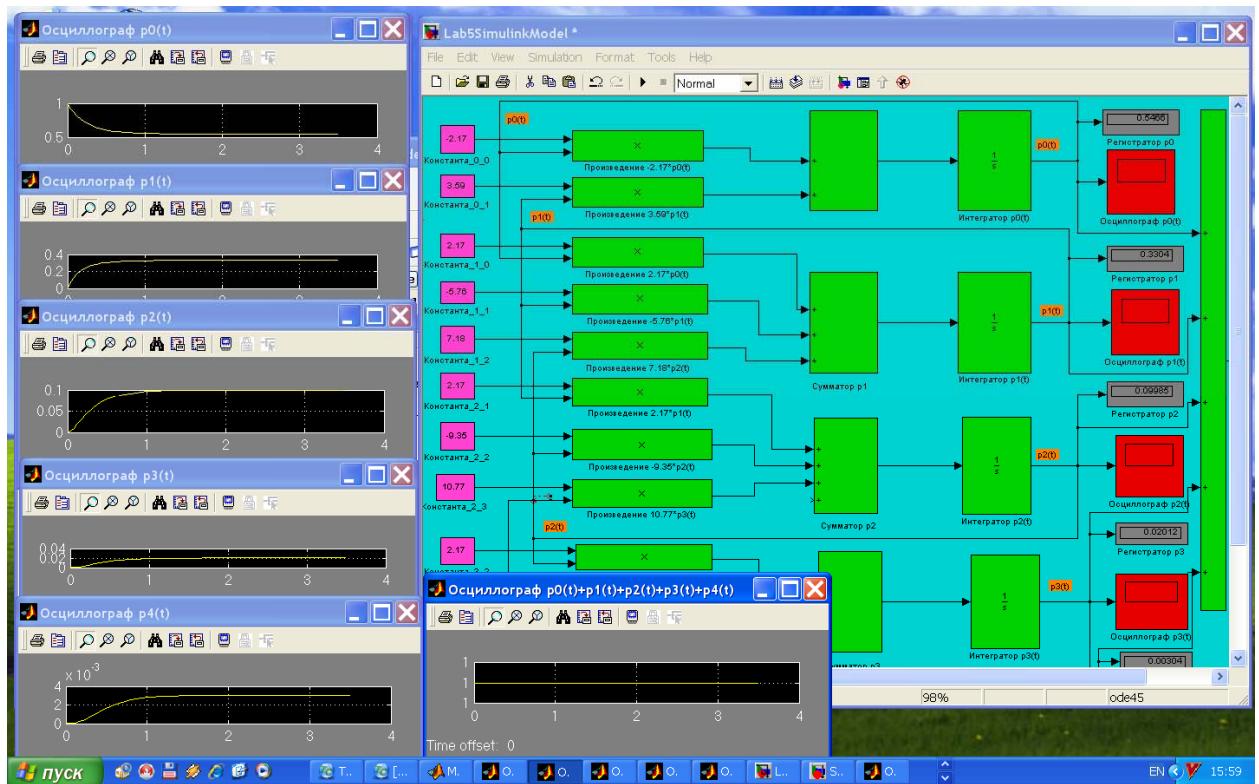
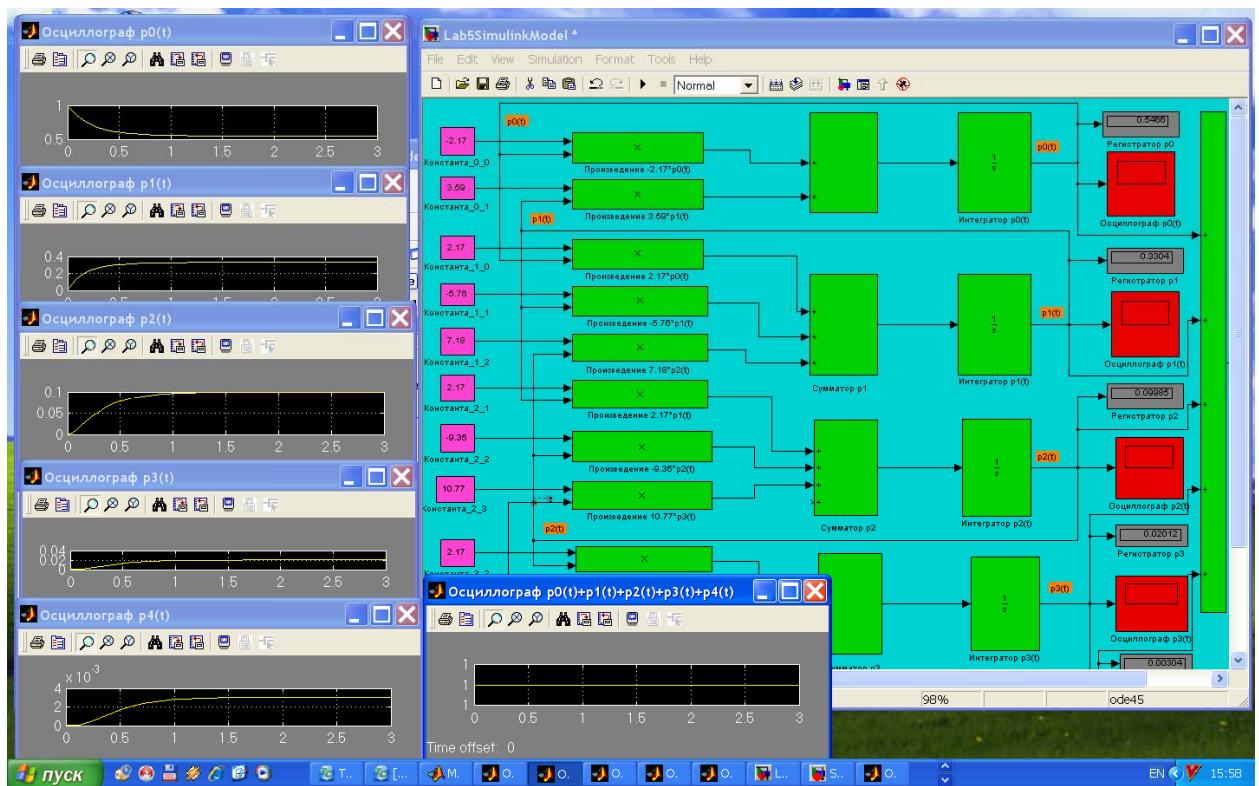
> stop!!!! КОНЕЦ ПРОГРАММЫ ДЛЯ
ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ № 5 ПО ТСМО

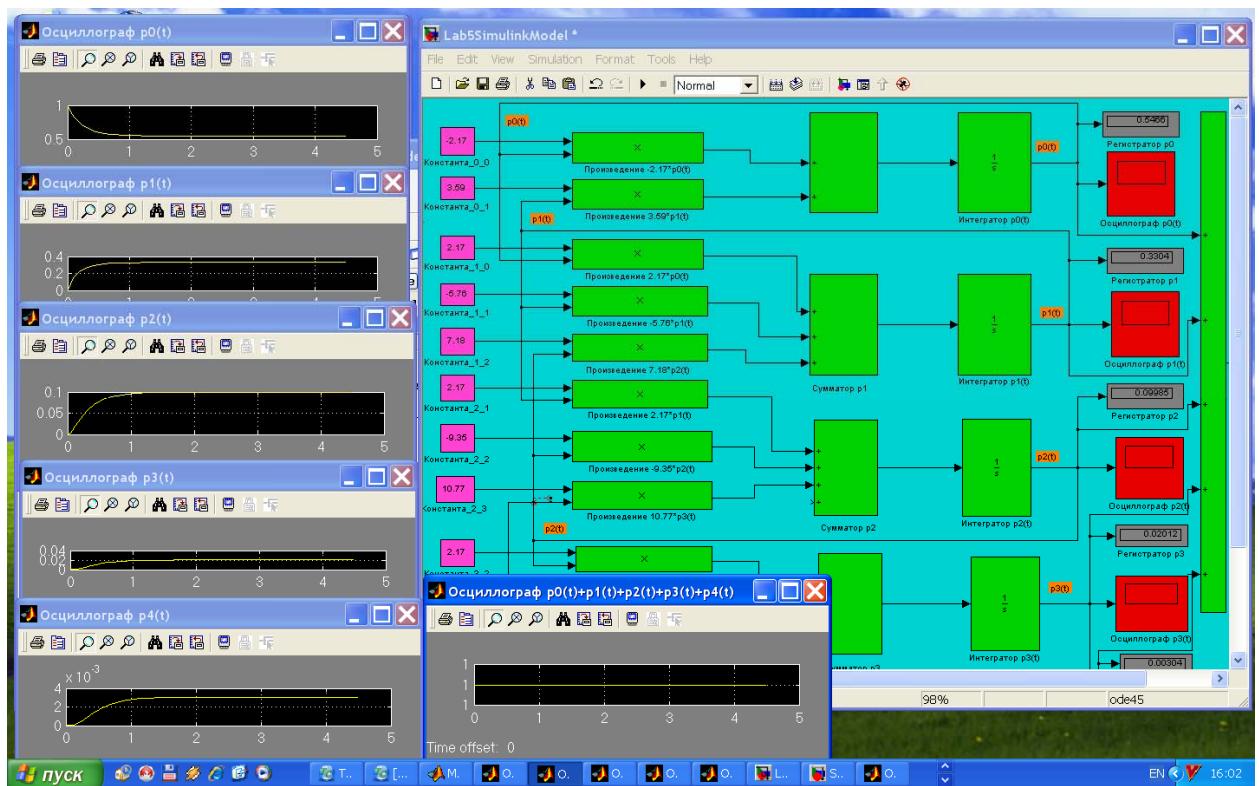
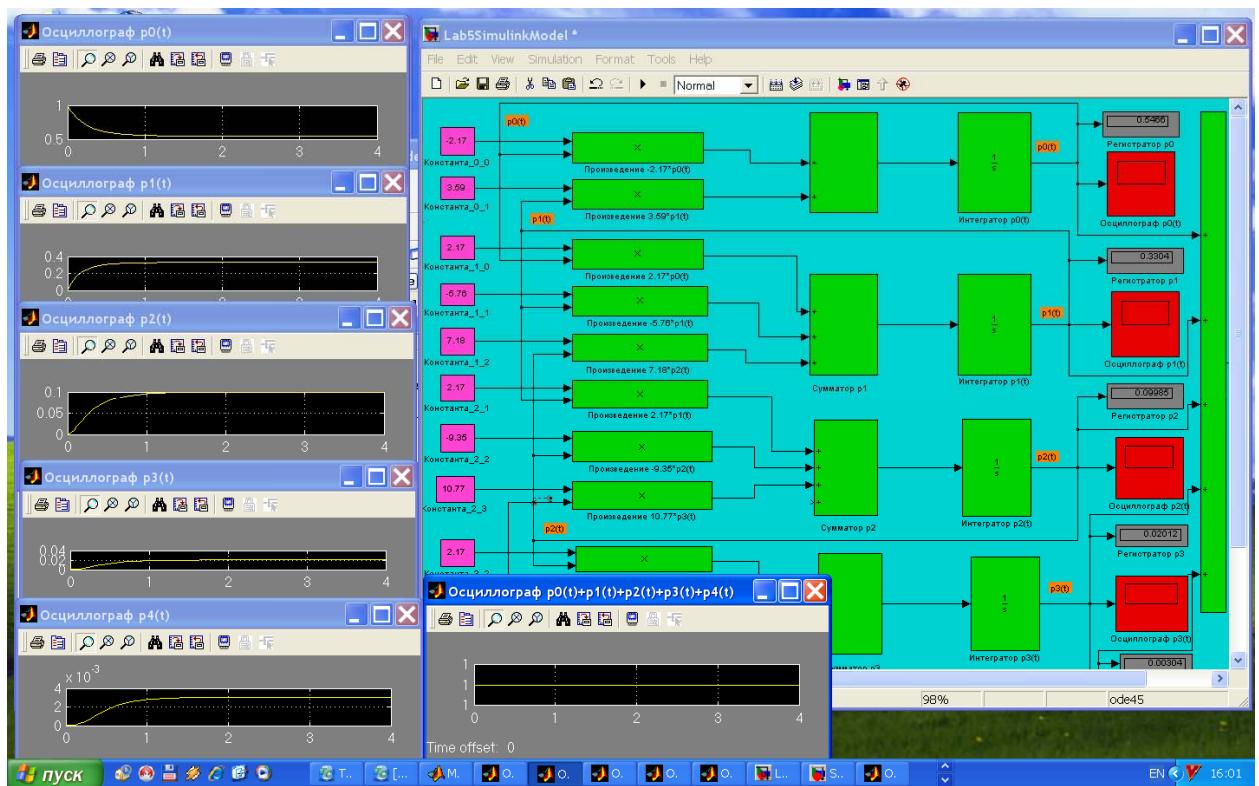
ЭКРАННЫЕ ФОРМЫ

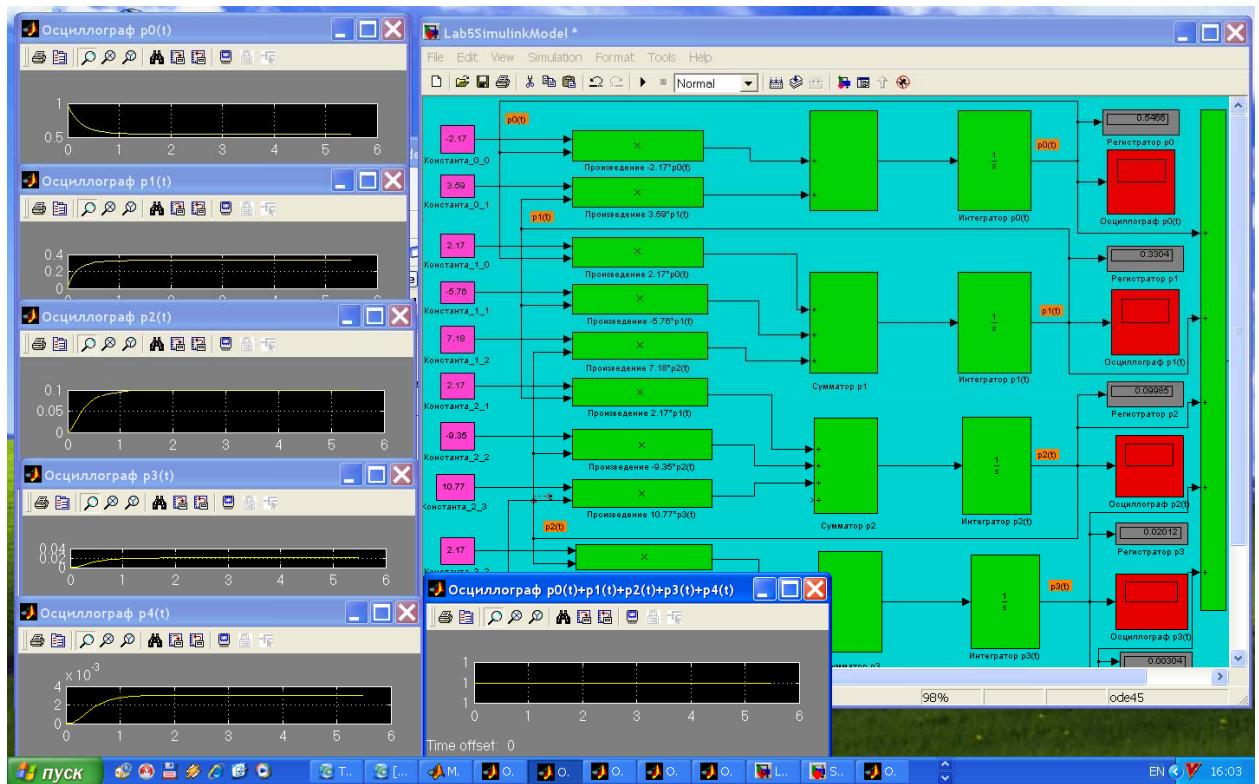
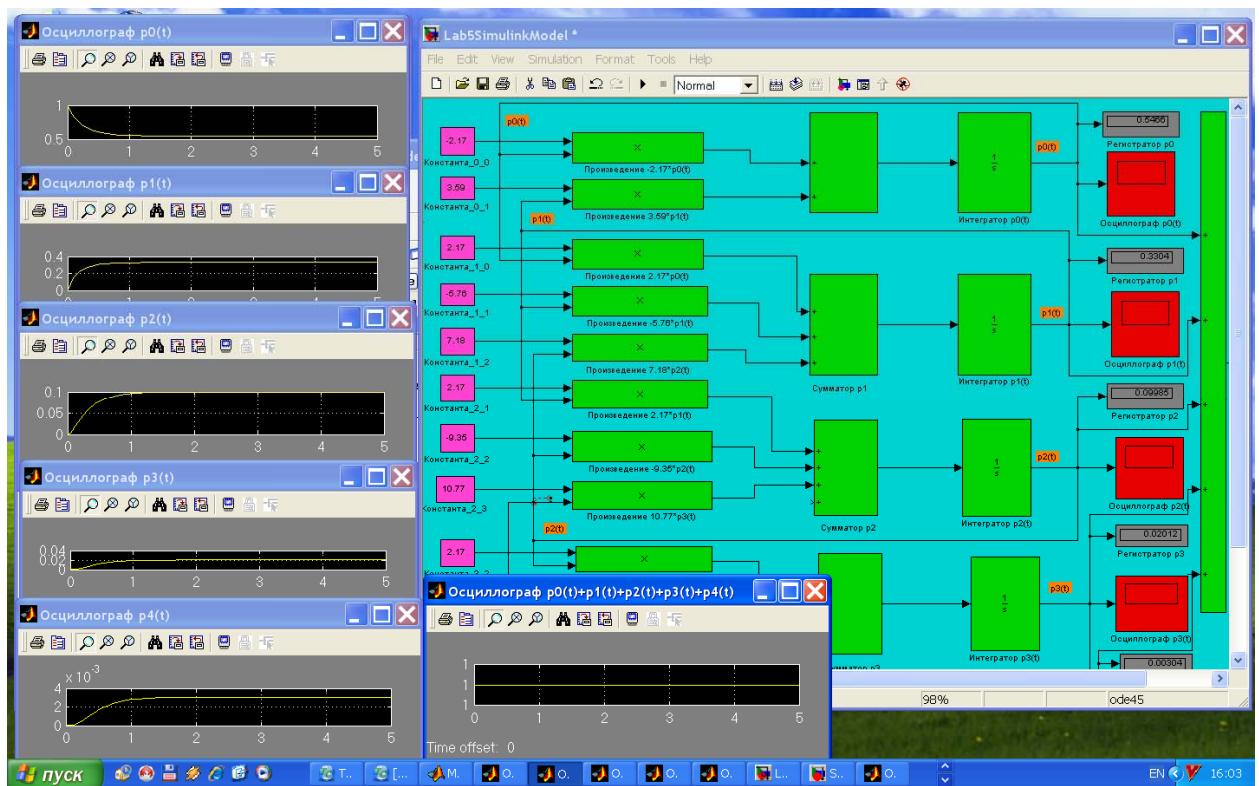


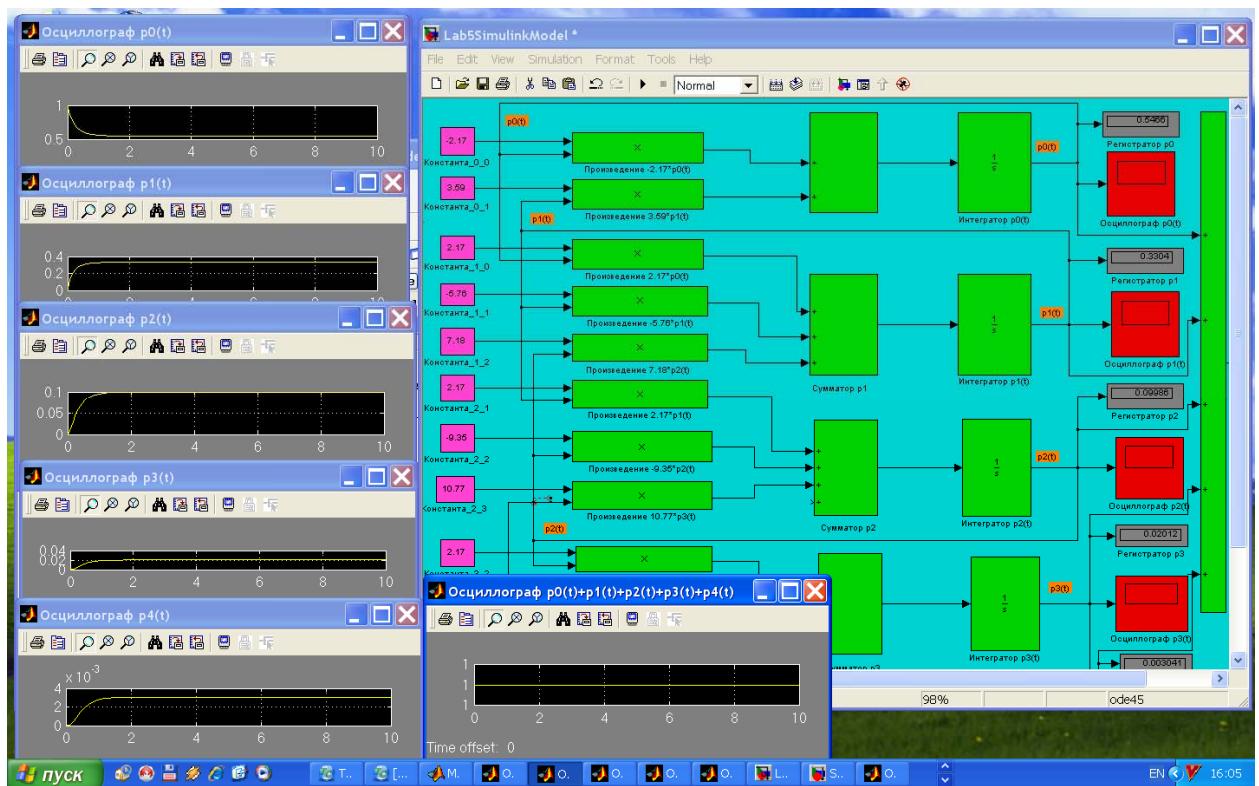
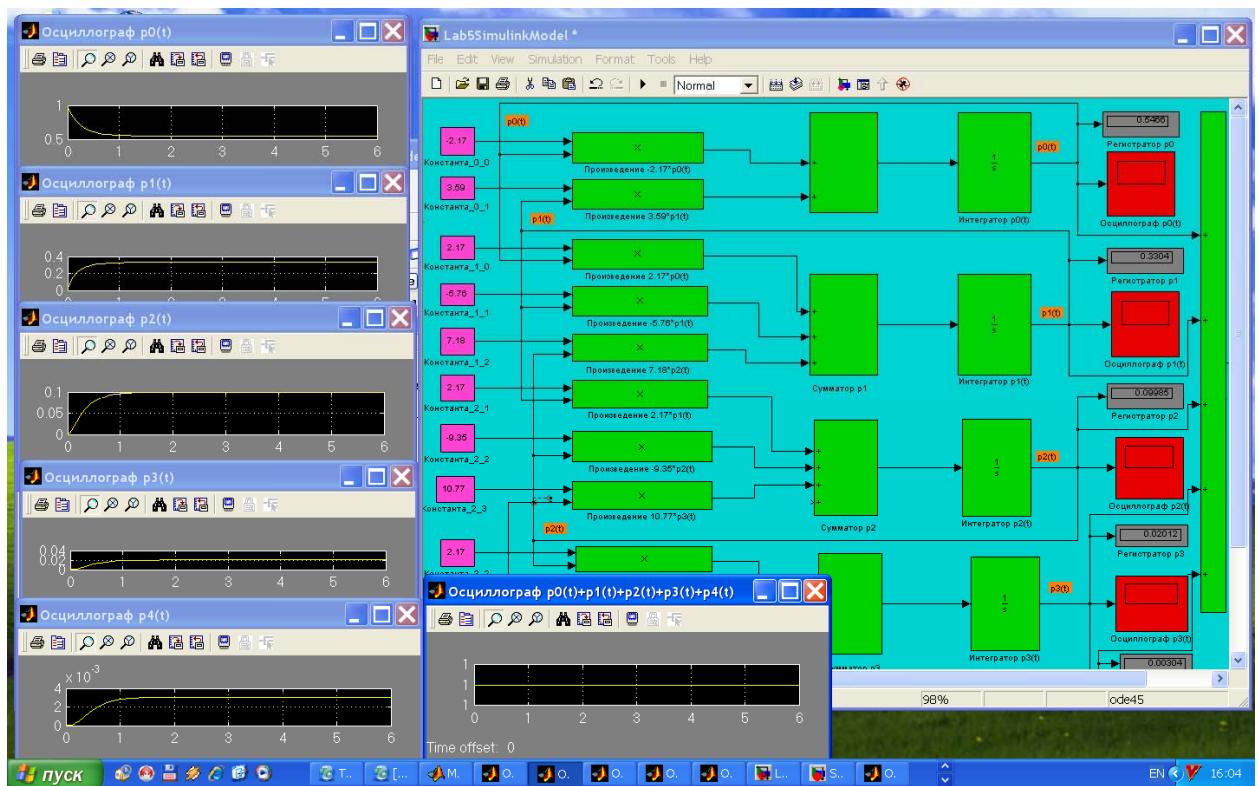


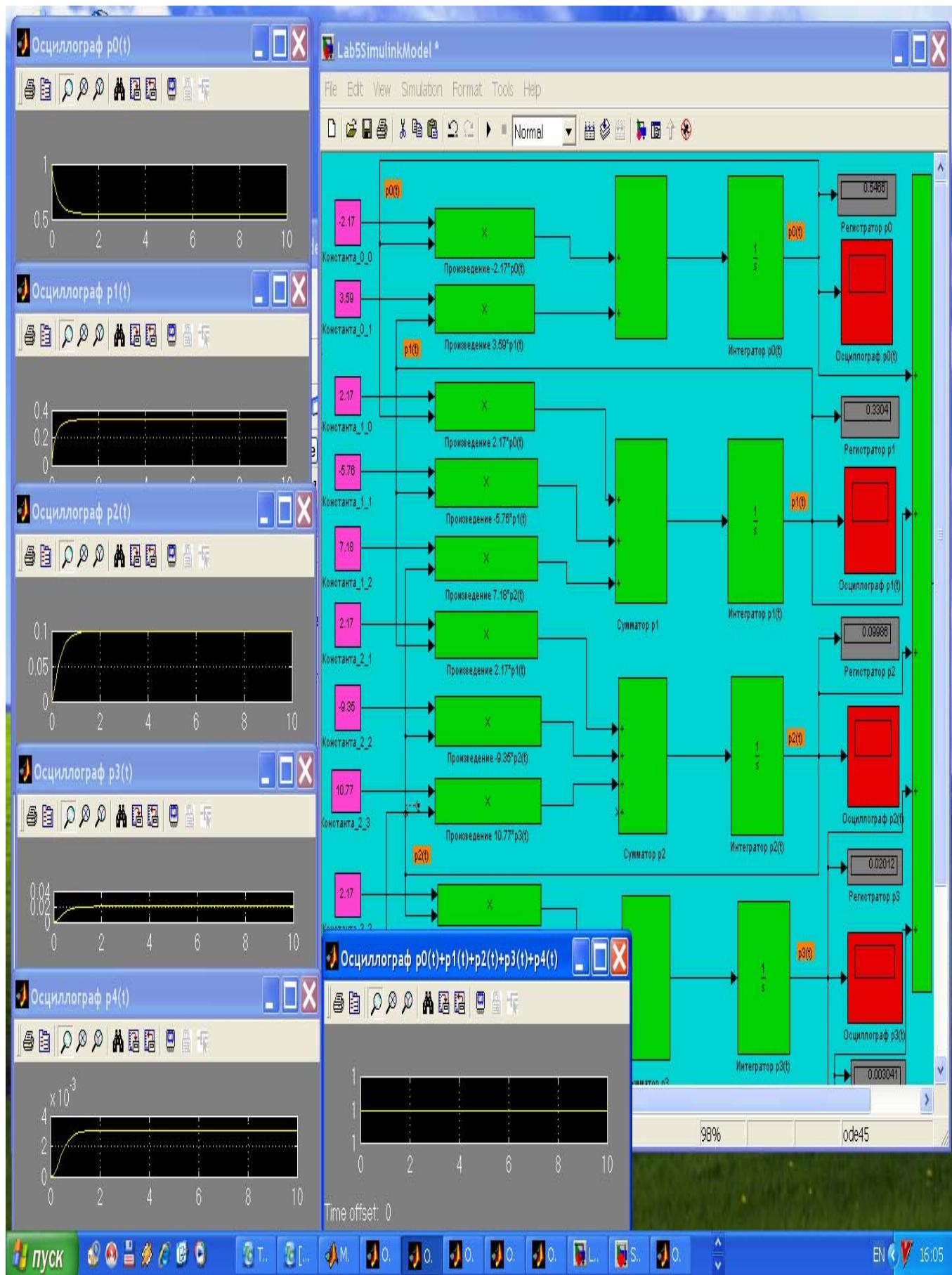












Maple-программа для исследования системы массового обслуживания с ожиданием

Лабораторная работа № 6
Система массового обслуживания с ожиданием

1. Задание параметров многоканальной системы массового обслуживания S с ожиданием

```

> restart:
# Сброс значений всех переменных при повторном запуске
with(LinearAlgebra):
with(CurveFitting):
with(plots):
n:=5;
# Число каналов многоканальной системы массового обслуживания S с ожиданием
s:=10;
# Число заявок в очереди на обслуживание многоканальной системы S
m:=n+s;                                #
Число состояний многоканальной системы массового обслуживания S с ожиданием
Lambda:=5.08;                            #
Плотность потока заявок для многоканальной системы массового обслуживания S
Mu:=4.12;                                #
Параметр времени обслуживания многоканальной системы S
Nu:=6.13;                                #
Плотность потока ухода необслуженных заявок из системы S
Alf:=Lambda/Mu;                          # Расчетный параметр системы S вход/обслуживание

```

```

Bet:=Nu/Mu;                                #
Расчетный параметр системы S уход/обслуживание
DeltaT:=1;                                 #
Шаг интегрирования уравнений Эрланга методом
Рунге-Кутта
T:=15;
# Число шагов визуализации и интегрирования
# методом Рунге-Кутта
StudentNumber:=17;      # Задание для студента
номера варианта при расчете вероятностей
переходов системы S
Warning, the name LeastSquares has been rebound
Warning, the name changecoords has been redefined
n := 5

s := 10

m := 15

L := 5.08

M := 4.12

N := 6.13

Alf:= 1.233009709

Bet:= 1.487864078

DeltaT:= 1

T := 15

StudentNumber := 17

```

2. Характеристики потоков и времени обслуживания многоканальной системы S с ожиданием и их визуализация

2.1 Простейший поток заявок

```

> f:=t->Lambda*exp(-Lambda*t);
f(0);
Int(f(t), t=0..infinity)=int(f(t),
t=0..infinity);

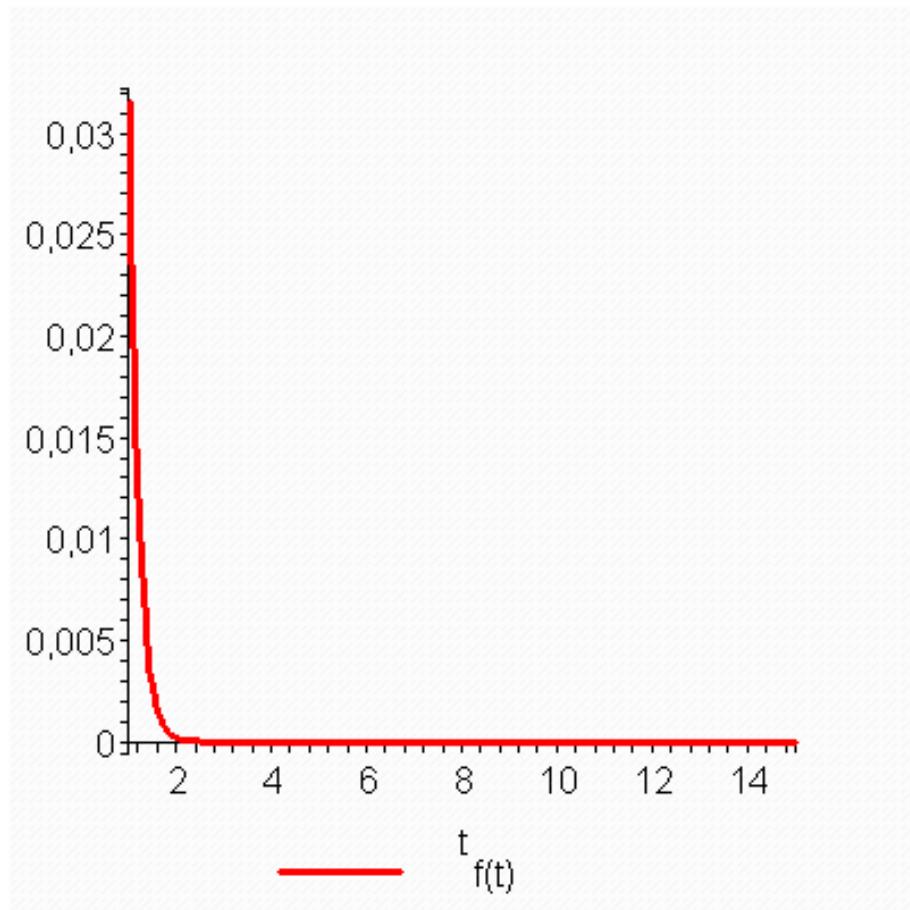
```

```
plot(f(t), t=1..T, thickness=2, color= red,
legend='f(t)');
```

$$f := t \circledR L e^{(-L t)}$$

5.08

$$\begin{aligned} & ? ? \\ & ? ? 5.08 e^{(-5.08 t)} dt = 1. \\ & ? ?_0 \end{aligned}$$



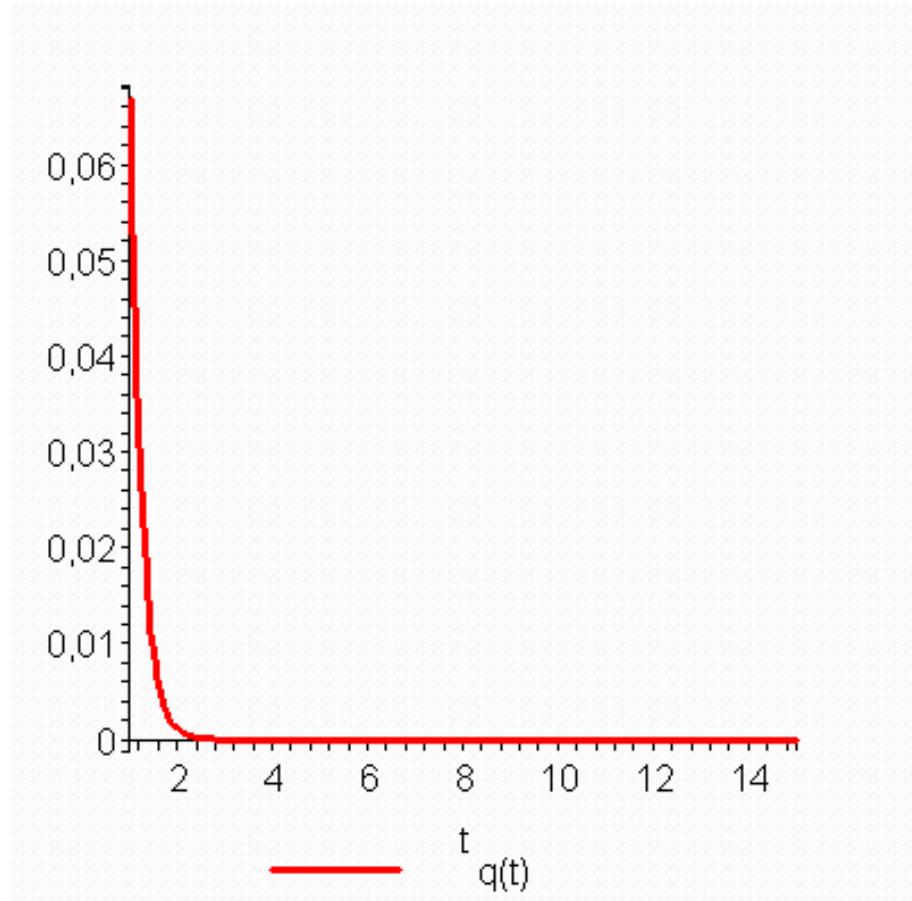
2.2 Время обслуживания системы

```
> q:=t->Mu*exp(-Mu*t);
q(0);
Int(q(t), t=0..infinity)=int(q(t),
t=0..infinity);
plot(q(t), t=1..T, thickness=2, color= red,
legend='q(t)');
```

$$q := t \circledR M e^{(-M t)}$$

4.12

$$\int_0^t 4.12 e^{(-4.12 t)} dt = 1.$$

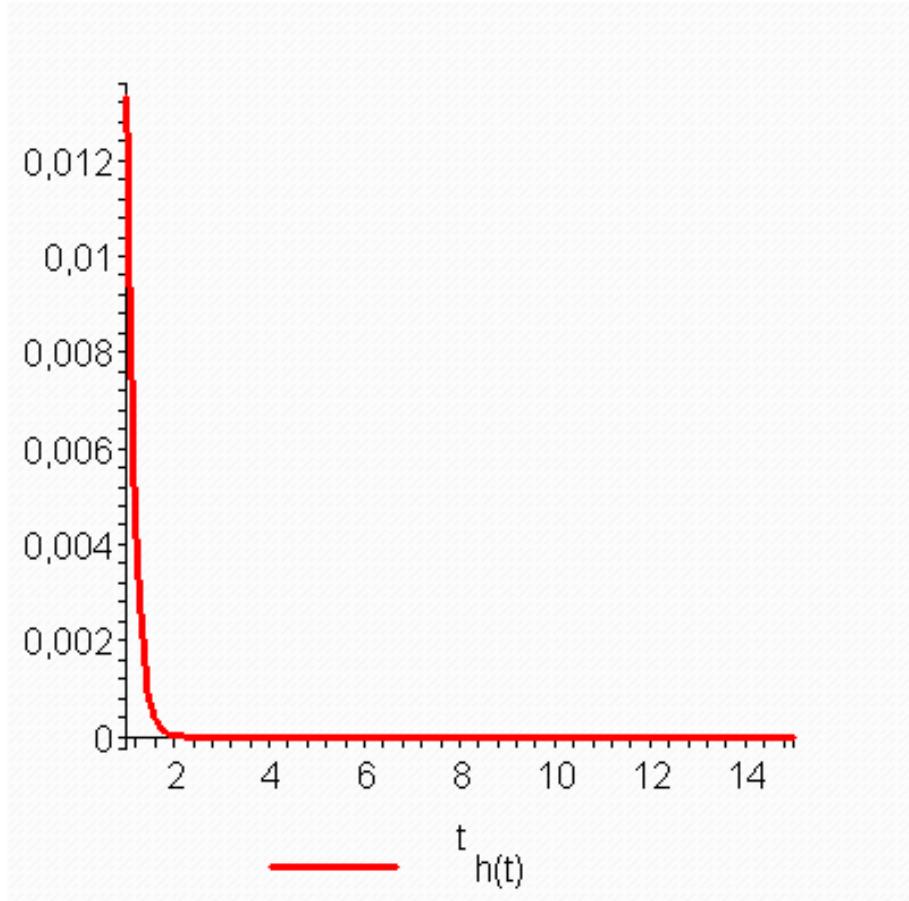


2.3 Поток ухода необслуженных заявок из системы

```
> h:=t->Nu*exp(-Nu*t);
h(0);
Int(h(t), t=0..infinity)=int(h(t),
t=0..infinity);
plot(h(t), t=1..T, thickness=2, color= red,
legend='h(t)');
h := t @ N e(-N t)
```

6.13

$$\int_0^t 6.13 e^{(-6.13 t)} dt = 1.$$



3. Расчет теоретических характеристик системы массового обслуживания S с ожиданием

```

> pf[0]:=1/(sum(Alf^k/k!,
k=0..n)+Alf^n/n!*sum(Alf^si/product((n+mi*Bet),
mi=1..si), si=1..infinity));
# Вероятность того, что все каналы свободны:
pf0:=0.2914634320

> pf1_n:=[seq(pf[k]=Alf^k/k!*pf[0], k=1..n)];
# Вероятность того, что несколько каналов
заняты:
pf1_n:=[pf1 = 0.3593772415, pf2 = 0.2215578139, pf3 = 0.09106097857, pf4 = 0.02806976767,
pf5 = 0.006922059213]

>
pfn_s:=[seq(pf[n+si]=Alf^(n+si)/n!*pf[0]/product
((n+mi*Bet), mi=1..si), si=1..s)];
# Вероятность того, что все каналы заняты и
несколько заявок находятся в очереди:

```

```
pfn_s := [pf6 = 0.001315527902, pf7 = 0.0002033743682, pf8 = 0.00002649760940, pf9 = 0.000002983330138,
```

```
pf10 = 2.957135045 10-7, pf11 = 2.618028237 10-8, pf12 = 2.094092812 10-9, pf13 = 1.527569140 10-10,
```

```
pf14 = 1.024158801 10-11, pf15 = 6.352535664 10-13]
```

```
> Sumpfi:=pf[0]+add(rhs(pf1_n[i]),  
i=1..n)+add(rhs(pfn_s[i]), i=1..s);# Сумма  
вероятностей всех состояний системы S  
Sumpfi := 1.0000000000
```

```
> Pleft1:=Bet/Alf*Alf^n/n!;  
Pleft1 := 0.02865813985
```

```
> Pleft2:=sum(si*Alf^si/product((n+mi*Bet),  
mi=1..si), si=1..10);  
Pleft2 := 0.2622564123
```

```
> Pleft3:=sum(Alf^k/k!,  
k=0..n)+Alf^n/n!*sum(Alf^si/product((n+mi*Bet),  
mi=1..si), si=1..10);  
Pleft3 := 3.430962139
```

```
> Pleft:=Pleft1*Pleft2/Pleft3; #  
Вероятность того, что заявка покинет систему  
необслуженной
```

```
Pleft := 0.002190575307
```

```
> q:=1-Pleft;  
# Относительная пропускная способность системы S  
q := 0.9978094247
```

```
> Twait:=1/Nu; #  
Среднее время ожидания в очереди на обслуживание  
системы S
```

```
Twait := 0.1631321370
```

```
> Ms:=Alf/Bet*pf[0]; #  
Математическое ожидание числа заявок,  
находящихся в очереди
```

```
Ms := 0.2415390268
```

```
> pfw[0]:=1/(sum(Alf^k/k!,  
k=0..n)+Alf^(n+1)/(n!* (n-Alf)));  
# Вероятность того, что все каналы свободны для  
чистой системы с ожиданием:
```

```

 $pfw_0 := 0.2912545971$ 

> pfw1_n:=[seq(pfw[k]=Alf^k/k!*pfw[0], k=1..n)];
# Вероятность того, что несколько каналов
заняты:


>
pfn_s:=[seq(pfw[n+si]=Alf^(n+si)/(n!*n^si)*pfw[0], si=1..s)];
# Вероятность того, что все каналы заняты и
несколько заявок находятся в очереди:


> Sumpfw := pfw[0] + add(rhs(pfw1_n[i]),
i=1..n) + add(rhs(pfn_s[i]), i=1..s); # Сумма
вероятностей всех состояний системы S
Sumpfw := 0.9999999981

> Mwait := (((Alf^(n+1))/(n*n!)) / (1-
Alf/n)^2) * pfw[0]; # Среднее число заявок в
очереди
Mwait := 0.003005187153

```

4. Составление дифференциальных уравнений для вероятностей состояний системы массового обслуживания S

**C
ожиданием $ri(t)$**

```

> diff(p[0](t), t) = -Lambda*p[0](t) + Mu*p[1](t);
 $\frac{d}{dt} p_0(t) = -5.08 p_0(t) + 4.12 p_1(t)$ 

```

```

> seq(diff(p[k](t), t)=Lambda*p[k-1](t)-
(Lambda+k*Mu)*p[k](t)+(k+1)*Mu*p[k+1](t) ,
k=1..n-1) ;

$$\frac{d}{dt} p_1(t) = 5.08 p_0(t) - 9.20 p_1(t) + 8.24 p_2(t), \frac{d}{dt} p_2(t) = 5.08 p_1(t) - 13.32 p_2(t) + 12.36 p_3(t),$$


$$\frac{d}{dt} p_3(t) = 5.08 p_2(t) - 17.44 p_3(t) + 16.48 p_4(t), \frac{d}{dt} p_4(t) = 5.08 p_3(t) - 21.56 p_4(t) + 20.60 p_5(t)$$


> seq(diff(p[n+si](t), t)=-Lambda*p[n+si-1](t)-
(Lambda+n*Mu+si*Nu)*p[n+si](t)+(n*Mu+(si+1)*Nu)*
p[n+si+1](t) , si=1..s) ;

$$\frac{d}{dt} p_6(t) = -5.08 p_5(t) - 31.81 p_6(t) + 32.86 p_7(t), \frac{d}{dt} p_7(t) = -5.08 p_6(t) - 37.94 p_7(t) + 38.99 p_8(t),$$


$$\frac{d}{dt} p_8(t) = -5.08 p_7(t) - 44.07 p_8(t) + 45.12 p_9(t), \frac{d}{dt} p_9(t) = -5.08 p_8(t) - 50.20 p_9(t) + 51.25 p_{10}(t),$$


$$\frac{d}{dt} p_{10}(t) = -5.08 p_9(t) - 56.33 p_{10}(t) + 57.38 p_{11}(t), \frac{d}{dt} p_{11}(t) = -5.08 p_{10}(t) - 62.46 p_{11}(t) + 63.51 p_{12}(t),$$


$$\frac{d}{dt} p_{12}(t) = -5.08 p_{11}(t) - 68.59 p_{12}(t) + 69.64 p_{13}(t), \frac{d}{dt} p_{13}(t) = -5.08 p_{12}(t) - 74.72 p_{13}(t) + 75.77 p_{14}(t),$$


$$\frac{d}{dt} p_{14}(t) = -5.08 p_{13}(t) - 80.85 p_{14}(t) + 81.90 p_{15}(t), \frac{d}{dt} p_{15}(t) = -5.08 p_{14}(t) - 86.98 p_{15}(t) + 88.03 p_{16}(t)$$


> diff(p[n+s+1](t), t)=diff(1-(sum(p[i](t),
i=0..n+s)), t) ;

$$\frac{d}{dt} p_{16}(t) = -\frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_0(t) - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_1(t) - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_2(t) - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_3(t) - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_4(t) - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_5(t) - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_6(t) -$$


$$-\frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_7(t) - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_8(t) - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_9(t) - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_{10}(t) - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_{11}(t) - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_{12}(t) - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_{13}(t) -$$


$$-\frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_{14}(t) - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_{15}(t)$$


> ODESystem:=
      {diff(p[0](t), t)=-
Lambda*p[0](t)+Mu*p[1](t) ,
      seq(diff(p[k](t), t)=Lambda*p[k-
1](t)-(Lambda+k*Mu)*p[k](t)+(k+1)*Mu*p[k+1](t) ,
k=1..n-1) ,
      seq(diff(p[n+si](t), t)=-
Lambda*p[n+si-1](t)-
(Lambda+n*Mu+si*Nu)*p[n+si](t)+(n*Mu+(si+1)*Nu)*
p[n+si+1](t) , si=1..s) ,

```

```

diff(p[n+s+1](t), t)=diff(1-
(sum(p[i](t), i=0..n+s)), t)
} ;

ODESystem := ?  $\frac{d}{dt} p_0(t) = -5.08 p_0(t) + 4.12 p_1(t)$ ,  $\frac{d}{dt} p_{10}(t) = -5.08 p_9(t) - 56.33 p_{10}(t) + 57.38 p_{11}(t)$ ,
 $\frac{d}{dt} p_{14}(t) = -5.08 p_{13}(t) - 80.85 p_{14}(t) + 81.90 p_{15}(t)$ ,  $\frac{d}{dt} p_3(t) = 5.08 p_2(t) - 17.44 p_3(t) + 16.48 p_4(t)$ ,
 $\frac{d}{dt} p_1(t) = 5.08 p_0(t) - 9.20 p_1(t) + 8.24 p_2(t)$ ,  $\frac{d}{dt} p_2(t) = 5.08 p_1(t) - 13.32 p_2(t) + 12.36 p_3(t)$ ,
 $\frac{d}{dt} p_4(t) = 5.08 p_3(t) - 21.56 p_4(t) + 20.60 p_5(t)$ ,  $\frac{d}{dt} p_6(t) = -5.08 p_5(t) - 31.81 p_6(t) + 32.86 p_7(t)$ ,
 $\frac{d}{dt} p_7(t) = -5.08 p_6(t) - 37.94 p_7(t) + 38.99 p_8(t)$ ,  $\frac{d}{dt} p_8(t) = -5.08 p_7(t) - 44.07 p_8(t) + 45.12 p_9(t)$ ,
 $\frac{d}{dt} p_9(t) = -5.08 p_8(t) - 50.20 p_9(t) + 51.25 p_{10}(t)$ ,  $\frac{d}{dt} p_{11}(t) = -5.08 p_{10}(t) - 62.46 p_{11}(t) + 63.51 p_{12}(t)$ ,
 $\frac{d}{dt} p_{12}(t) = -5.08 p_{11}(t) - 68.59 p_{12}(t) + 69.64 p_{13}(t)$ ,  $\frac{d}{dt} p_{13}(t) = -5.08 p_{12}(t) - 74.72 p_{13}(t) + 75.77 p_{14}(t)$ ,
 $\frac{d}{dt} p_{15}(t) = -5.08 p_{14}(t) - 86.98 p_{15}(t) + 88.03 p_{16}(t)$ ,  $\frac{d}{dt} p_{16}(t) = -\frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_0(t) \frac{?}{?} - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_1(t) \frac{?}{?}$ 
 $- \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_2(t) \frac{?}{?} - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_3(t) \frac{?}{?} - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_4(t) \frac{?}{?} - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_5(t) \frac{?}{?} - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_6(t) \frac{?}{?} - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_7(t) \frac{?}{?} - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_8(t) \frac{?}{?}$ 
 $- \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_9(t) \frac{?}{?} - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_{10}(t) \frac{?}{?} - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_{11}(t) \frac{?}{?} - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_{12}(t) \frac{?}{?} - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_{13}(t) \frac{?}{?} - \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_{14}(t) \frac{?}{?}$ 
 $- \frac{?}{?} \frac{d}{dt} p_{15}(t) \frac{?}{?} \frac{?}{?}$ 

```

5. Решение дифференциальных уравнений для вероятностей состояний $p_i(t)$ в общем виде

```

# PSi:=dsolve(ODESystem);
> PSi[1]:
> diff((PSi[1]), t):
> PSi[2]:
> diff((PSi[2]), t):
> PSi[3]:
> diff((PSi[3]), t):
> PSi[4]:
> diff((PSi[4]), t):
> PSi[5]:

```

> **diff**(**(PSi[5])**, t) :

6. Решение дифференциальных уравнений для вероятностей состояний $p_i(t)$ при заданных начальных условиях

```
> ODESystemInit:=
      {diff(p[0](t), t)=-  

Lambda*p[0](t)+Mu*p[1](t),  

       seq(diff(p[k](t), t)=Lambda*p[k-1](t)-(Lambda+k*Mu)*p[k](t)+(k+1)*Mu*p[k+1](t),  

k=1..n-1),  

       seq(diff(p[n+si](t), t)=-  

Lambda*p[n+si-1](t)-  

(Lambda+n*Mu+si*Nu)*p[n+si](t)+(n*Mu+(si+1)*Nu)*  

p[n+si+1](t), si=1..s),  

       diff(p[16](t), t)=diff(1-(sum(p[i](t),  

i=0..n+s)), t),  

       p[0](0)=1.0, seq(p[i](0)=0.0,  

i=1..n+s+1)  

      } ;
```

$$ODESystemInit := \begin{cases} \frac{d}{dt} p_0(t) = -5.08 p_0(t) + 4.12 p_1(t), \\ \frac{d}{dt} p_{10}(t) = -5.08 p_9(t) - 56.33 p_{10}(t) + 57.38 p_{11}(t), \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} p_{14}(t) = -5.08 p_{13}(t) - 80.85 p_{14}(t) + 81.90 p_{15}(t), \quad \frac{d}{dt} p_3(t) = 5.08 p_2(t) - 17.44 p_3(t) + 16.48 p_4(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_1(t) = 5.08 p_0(t) - 9.20 p_1(t) + 8.24 p_2(t), \quad \frac{d}{dt} p_2(t) = 5.08 p_1(t) - 13.32 p_2(t) + 12.36 p_3(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_4(t) = 5.08 p_3(t) - 21.56 p_4(t) + 20.60 p_5(t), \quad \frac{d}{dt} p_6(t) = -5.08 p_5(t) - 31.81 p_6(t) + 32.86 p_7(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_7(t) = -5.08 p_6(t) - 37.94 p_7(t) + 38.99 p_8(t), \quad \frac{d}{dt} p_8(t) = -5.08 p_7(t) - 44.07 p_8(t) + 45.12 p_9(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_9(t) = -5.08 p_8(t) - 50.20 p_9(t) + 51.25 p_{10}(t), \quad \frac{d}{dt} p_{11}(t) = -5.08 p_{10}(t) - 62.46 p_{11}(t) + 63.51 p_{12}(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_{12}(t) = -5.08 p_{11}(t) - 68.59 p_{12}(t) + 69.64 p_{13}(t), \quad \frac{d}{dt} p_{13}(t) = -5.08 p_{12}(t) - 74.72 p_{13}(t) + 75.77 p_{14}(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_{15}(t) = -5.08 p_{14}(t) - 86.98 p_{15}(t) + 88.03 p_{16}(t), \quad \frac{d}{dt} p_{16}(t) = -\frac{d}{dt} p_0(t) - \frac{d}{dt} p_1(t).$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{d}{dt} p_2(t) = 0, \quad \frac{d}{dt} p_3(t) = 0, \quad \frac{d}{dt} p_4(t) = 0, \quad \frac{d}{dt} p_5(t) = 0, \quad \frac{d}{dt} p_6(t) = 0, \quad \frac{d}{dt} p_7(t) = 0, \quad \frac{d}{dt} p_8(t) = 0, \\
 & -\frac{d}{dt} p_9(t) = 0, \quad \frac{d}{dt} p_{10}(t) = 0, \quad \frac{d}{dt} p_{11}(t) = 0, \quad \frac{d}{dt} p_{12}(t) = 0, \quad \frac{d}{dt} p_{13}(t) = 0, \quad \frac{d}{dt} p_{14}(t) = 0, \\
 & -\frac{d}{dt} p_{15}(t) = 0, \quad p_0(0) = 1.0, \quad p_1(0) = 0., \quad p_2(0) = 0., \quad p_3(0) = 0., \quad p_4(0) = 0., \quad p_5(0) = 0., \quad p_6(0) = 0., \quad p_7(0) = 0., \\
 & p_8(0) = 0., \quad p_9(0) = 0., \quad p_{10}(0) = 0., \quad p_{11}(0) = 0., \quad p_{12}(0) = 0., \quad p_{13}(0) = 0., \quad p_{14}(0) = 0., \quad p_{15}(0) = 0., \quad p_{16}(0) = 0.
 \end{aligned}$$

```
> # PSiInit:=dsolve(ODESystemInit);
```

7. Визуализация решений дифференциальных уравнений для вероятностей состояний $pi(t)$

при заданных начальных
условиях

```
> # p[1](t) :=rhs(PSiInit[2]):  
# p[2](t) :=rhs(PSiInit[4]):  
# p[3](t) :=rhs(PSiInit[1]):  
# p[4](t) :=rhs(PSiInit[3]):  
# plot(p[1](t), t=1..10);  
# plot(p[2](t), t=1..10);  
# plot(p[3](t), t=1..10);  
# plot(p[4](t), t=1..10);
```

8. Решение системы уравнений для финальных вероятностей переходов pfi

```
> SymPi:=solve({-Lambda*pff[0]+Mu*pff[1]=0,  
seq(Lambda*pff[k-1]-  
(Lambda+k*Mu)*pff[k]+(k+1)*Mu*pff[k+1]=0,  
k=1..n-1),  
seq(-Lambda*pff[n+si-  
1]-  
(Lambda+n*Mu+si*Nu)*pff[n+si]+(n*Mu+(si+1)*Nu)*p  
ff[n+si+1]=0, si=0..s),
```

```

add(pff[i],
i=0..n+s+1)=1
},
{seq(pff[i],
i=0..n+s+1) }
);

SymPi := {pff15 = 0.01767801128, pff11 = 0.01442745968, pff6 = 0.01011227225, pff3 = 0.07683363235,
pff9 = 0.01265268652, pff2 = 0.1869416724, pff16 = 0.01844219651, pff13 = 0.01609534069,
pff14 = 0.01689628687, pff5 = 0.005840558281, pff7 = 0.01069206988, pff4 = 0.02368415366,
pff0 = 0.2459252530, pff8 = 0.01172165874, pff12 = 0.01527318895, pff1 = 0.3032282245,
pff10 = 0.01355533443}

> SumPi:=add(rhs(SymPi[i]), i=1..n+s+2);

SumPi := 1.000000000

```

9. Решение дифференциальных уравнений для вероятностей состояний $p_i(t)$ методом Рунге-Кутта

```

> restart:
with(LinearAlgebra):
with(CurveFitting):
with(plots):
n:=5;
# Число каналов многоканальной системы массового обслуживания S с ожиданием
s:=10;
# Число заявок в очереди на обслуживание многоканальной системы S
m:=n+s; #
Число состояний многоканальной системы массового обслуживания S с ожиданием
Lambda:=5.08; #
Плотность потока заявок для многоканальной системы массового обслуживания S
Mu:=4.12; #
Параметр времени обслуживания многоканальной системы S

```

```

Nu:=6.13; # Плотность потока ухода необслуженных заявок из
системы S
DeltaT:=1; # Шаг интегрирования уравнений Эрланга методом
Рунге-Кутта
T:=15; # Число шагов визуализации и интегрирования
методом Рунге
ODESystemInit:=
    {diff(p[0](t), t)=-Lambda*p[0](t)+Mu*p[1](t),
     seq(diff(p[k](t), t)=Lambda*p[k-1](t)-(Lambda+k*Mu)*p[k](t)+(k+1)*Mu*p[k+1](t),
     k=1..n-1),
     seq(diff(p[n+si](t), t)=-Lambda*p[n+si-1](t)-
     (Lambda+n*Mu+si*Nu)*p[n+si](t)+(n*Mu+(si+1)*Nu)*p[n+si+1](t),
     si=0..s),
     diff(p[16](t), t)=diff(1-
     (sum(p[i](t), i=0..n+s)), t),
     p[0](0)=1.0, seq(p[i](0)=0.0,
     i=1..n+s+1)
    };

```

Warning, the name LeastSquares has been rebound
 Warning, the name changecoords has been redefined

n := 5

s := 10

m := 15

L := 5.08

M := 4.12

N := 6.13

DeltaT := 1

T := 15

$$ODESystemInit := \frac{d}{dt} p_7(t) = -5.08 p_6(t) - 37.94 p_7(t) + 38.99 p_8(t), \frac{d}{dt} p_{16}(t) = -\frac{d}{dt} p_0(t) - \frac{d}{dt} p_1(t)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{d}{dt} p_2(t) = - \frac{d}{dt} p_3(t) = - \frac{d}{dt} p_4(t) = - \frac{d}{dt} p_5(t) = - \frac{d}{dt} p_6(t) = - \frac{d}{dt} p_7(t) = - \frac{d}{dt} p_8(t) \\
& - \frac{d}{dt} p_9(t) = - \frac{d}{dt} p_{10}(t) = - \frac{d}{dt} p_{11}(t) = - \frac{d}{dt} p_{12}(t) = - \frac{d}{dt} p_{13}(t) = - \frac{d}{dt} p_{14}(t) \\
& - \frac{d}{dt} p_{15}(t), p_1(0) = 0., p_2(0) = 0., p_3(0) = 0., p_4(0) = 0., \\
& \frac{d}{dt} p_8(t) = -5.08 p_7(t) - 44.07 p_8(t) + 45.12 p_9(t), \frac{d}{dt} p_9(t) = -5.08 p_8(t) - 50.20 p_9(t) + 51.25 p_{10}(t), \\
& p_5(0) = 0., p_6(0) = 0., p_7(0) = 0., p_8(0) = 0., p_9(0) = 0., \\
& \frac{d}{dt} p_{10}(t) = -5.08 p_9(t) - 56.33 p_{10}(t) + 57.38 p_{11}(t), p_{10}(0) = 0., p_{11}(0) = 0., p_{12}(0) = 0., p_{13}(0) = 0., \\
& p_{14}(0) = 0., p_{15}(0) = 0., p_{16}(0) = 0., \frac{d}{dt} p_{11}(t) = -5.08 p_{10}(t) - 62.46 p_{11}(t) + 63.51 p_{12}(t), \\
& \frac{d}{dt} p_{12}(t) = -5.08 p_{11}(t) - 68.59 p_{12}(t) + 69.64 p_{13}(t), \frac{d}{dt} p_{13}(t) = -5.08 p_{12}(t) - 74.72 p_{13}(t) + 75.77 p_{14}(t), \\
& p_0(0) = 1.0, \frac{d}{dt} p_0(t) = -5.08 p_0(t) + 4.12 p_1(t), \frac{d}{dt} p_1(t) = 5.08 p_0(t) - 9.20 p_1(t) + 8.24 p_2(t), \\
& \frac{d}{dt} p_2(t) = 5.08 p_1(t) - 13.32 p_2(t) + 12.36 p_3(t), \frac{d}{dt} p_3(t) = 5.08 p_2(t) - 17.44 p_3(t) + 16.48 p_4(t), \\
& \frac{d}{dt} p_{14}(t) = -5.08 p_{13}(t) - 80.85 p_{14}(t) + 81.90 p_{15}(t), \frac{d}{dt} p_{15}(t) = -5.08 p_{14}(t) - 86.98 p_{15}(t) + 88.03 p_{16}(t), \\
& \frac{d}{dt} p_4(t) = 5.08 p_3(t) - 21.56 p_4(t) + 20.60 p_5(t), \frac{d}{dt} p_5(t) = -5.08 p_4(t) - 25.68 p_5(t) + 26.73 p_6(t), \\
& \frac{d}{dt} p_6(t) = -5.08 p_5(t) - 31.81 p_6(t) + 32.86 p_7(t)
\end{aligned}$$

```

> Runge_Kutt:=dsolve(ODESystemInit, numeric,
method=rkf45, {seq(p[i](t), i=0..n+s+1)}) ;
Runge_Kutt:=proc(x_rkf45) ... end proc;

```

```
> Lpi[0]:=Runge_Kutt(0.0) ;
```

```

Lpi[0]:=[t=0.,p0(t)=1.,p1(t)=0.,p2(t)=0.,p3(t)=0.,p4(t)=0.,p5(t)=0.,p6(t)=0.,p7(t)=0.,p8(t)=0.,
p9(t)=0.,p10(t)=0.,p11(t)=0.,p12(t)=0.,p13(t)=0.,p14(t)=0.,p15(t)=0.,p16(t)=0.]

```

```
> add(rhs(Lpi[0][i]), i=2..18) ;
```

```
1.
```

```
> Lpi[1]:=Runge_Kutt(0.5) ;
```

```

Lpi[1]:=[t=0.5,p0(t)=0.340401647897382365,p1(t)=0.364677900173566716,
p2(t)=0.193221444902965223,p3(t)=0.0653159171913234166,p4(t)=0.0132105931838467413,
p5(t)=-0.00138277388120118528,p6(t)=0.00123882561463393450,

```

$p_7(t) = 0.00116232570181960186, p_8(t) = 0.00144698988446064956, p_9(t) = 0.00169491776256979052,$
 $p_{10}(t) = 0.00194901946091610430, p_{11}(t) = 0.00220410309440581716,$
 $p_{12}(t) = 0.00245993292638180566, p_{13}(t) = 0.00271603671613231037,$
 $p_{14}(t) = 0.00297209283658197380, p_{15}(t) = 0.00322786169336203430,$
 $p_{16}(t) = 0.00348316484085314534]$

> **add(rhs(Lpi[1][i]), i=2..18);**
1.000000000

> **add(rhs(Lpi[1][i]), i=2..18);**
1.000000000

> **Lpi[2]:=Runge_Kutt(1.0);**
 $Lpi_2 := [t = 1.0, p_0(t) = 0.288927690208365172, p_1(t) = 0.344856033454938760,$
 $p_2(t) = 0.202560506285300812, p_3(t) = 0.0759234728002084608, p_4(t) = 0.0181620901029168579,$
 $p_5(t) = 0.000553221513733471137, p_6(t) = 0.00414496691862422957,$
 $p_7(t) = 0.00425406834969008826, p_8(t) = 0.00482117688249002197, p_9(t) = 0.00531937699949204014,$
 $p_{10}(t) = 0.00581166570526139501, p_{11}(t) = 0.00629280659115959932,$
 $p_{12}(t) = 0.00676432447753258244, p_{13}(t) = 0.00722721738198564470,$
 $p_{14}(t) = 0.00768201055098183262, p_{15}(t) = 0.00812941761086394266,$
 $p_{16}(t) = 0.00856995416645495342]$

> **add(rhs(Lpi[2][i]), i=2..18);**
1.000000000

> **Lpi[3]:=Runge_Kutt(1.5);**
 $Lpi_3 := [t = 1.5, p_0(t) = 0.272458679941338600, p_1(t) = 0.330123243933219956,$
 $p_2(t) = 0.197740429982329214, p_3(t) = 0.0766777689375476024, p_4(t) = 0.0202121937320502605,$
 $p_5(t) = 0.00239588880515325146, p_6(t) = 0.00625592512568351988, p_7(t) = 0.00652960666868769840,$
 $p_8(t) = 0.00726280480204648250, p_9(t) = 0.00791582409614227482,$
 $p_{10}(t) = 0.00855489086353479478, p_{11}(t) = 0.00917588806063169596,$
 $p_{12}(t) = 0.00978119310943780484, p_{13}(t) = 0.0103725260858375142,$
 $p_{14}(t) = 0.0109510523681965716, p_{15}(t) = 0.0115179437559921970, p_{16}(t) = 0.0120741397321708736]$

> **add(rhs(Lpi[3][i]), i=2..18);**
1.000000000

> **Lpi[4]:=Runge_Kutt(2.0);**
 $Lpi_4 := [t = 2.0, p_0(t) = 0.262924110297428237, p_1(t) = 0.320540131922112781,$

$p_2(t) = 0.193938197756060971, p_3(t) = 0.0767611166376077070, p_4(t) = 0.0214554636189992730,$
 $p_5(t) = 0.00362142992589572100, p_6(t) = 0.00762992763168156545, p_7(t) = 0.00801257114931022349,$
 $p_8(t) = 0.00885149465672318594, p_9(t) = 0.00960372737250885650, p_{10}(t) = 0.0103367721155086037,$
 $p_{11}(t) = 0.0110473551204034737, p_{12}(t) = 0.0117384265968923340, p_{13}(t) = 0.0124120695863810267,$
 $p_{14}(t) = 0.0130699345858812256, p_{15}(t) = 0.0137134470997712174, p_{16}(t) = 0.0143438239268334523]$

> **add(rhs(Lpi[4][i]), i=2..18);**
0.9999999999

> **Lpi[5]:=Runge_Kutt(5.0);**

$Lpi_5 := [t = 5.0, p_0(t) = 0.247130783680776068, p_1(t) = 0.304456603249013136,$
 $p_2(t) = 0.187438476122380154, p_3(t) = 0.0768287070080579810, p_4(t) = 0.0235260635149955808,$
 $p_5(t) = 0.00568308730621739680, p_6(t) = 0.00993612383644102565, p_7(t) = 0.0105019650926381770,$
 $p_8(t) = 0.0115179769516059044, p_9(t) = 0.0124363602063076451, p_{10}(t) = 0.0133269693967702757,$
 $p_{11}(t) = 0.0141876006701798126, p_{12}(t) = 0.0150223990472524299, p_{13}(t) = 0.0158339879740472568,$
 $p_{14}(t) = 0.0166247892366217474, p_{15}(t) = 0.0173967082637673937, p_{16}(t) = 0.0181513984429293902]$

> **add(rhs(Lpi[5][i]), i=2..18);**
0.9999999999

> **Lpi[6]:=Runge_Kutt(10.0);**

$Lpi_6 := [t = 10.0, p_0(t) = 0.245939912633192926, p_1(t) = 0.303243162039364855,$
 $p_2(t) = 0.186947713718024322, p_3(t) = 0.0768335722755819074, p_4(t) = 0.0236822325232051364,$
 $p_5(t) = 0.00583863794303997840, p_6(t) = 0.0101101442850368099, p_7(t) = 0.0106897362516730054,$
 $p_8(t) = 0.0117191984043930070, p_9(t) = 0.0126500628566685990, p_{10}(t) = 0.0135525254206395694,$
 $p_{11}(t) = 0.0144245794582611338, p_{12}(t) = 0.0152701186238160970, p_{13}(t) = 0.0160921663308310134,$
 $p_{14}(t) = 0.0168929875594847242, p_{15}(t) = 0.0176745891655096174, p_{16}(t) = 0.0184386605112796670]$

> **add(rhs(Lpi[6][i]), i=2..18);**
1.0000000000

> **Lpi[7]:=Runge_Kutt(200.0);**

$Lpi_7 := [t = 200.0, p_0(t) = 0.245925252968216268, p_1(t) = 0.303228224536199797,$
 $p_2(t) = 0.186941672382945928, p_3(t) = 0.0768336324737090848, p_4(t) = 0.0236841533088042074,$
 $p_5(t) = 0.00584055847701554516, p_6(t) = 0.0101122744680407165, p_7(t) = 0.0106920607136863372,$
 $p_8(t) = 0.0117216772751894944, p_9(t) = 0.0126526643349029102, p_{10}(t) = 0.0135553489784877250,$
 $p_{11}(t) = 0.0144274582009439895, p_{12}(t) = 0.0152731829452991304, p_{13}(t) = 0.0160953458287861132,$
 $p_{14}(t) = 0.0168962851885516990, p_{15}(t) = 0.0176780113010825864, p_{16}(t) = 0.0184421966181850632]$

```

> add(rhs(Lpi[7][i]), i=2..18);
1.000000000

> Lp1 := [seq(rhs(Lpi[t][2]), t=0..7)];
Lp1 := [1., 0.340401647897382365, 0.288927690208365172, 0.272458679941338600,
0.262924110297428237, 0.247130783680776068, 0.245939912633192926, 0.245925252968216268]

> Lp2 := [seq(rhs(Lpi[t][3]), t=0..7)];
Lp2 := [0., 0.364677900173566716, 0.344856033454938760, 0.330123243933219956,
0.320540131922112781, 0.304456603249013136, 0.303243162039364855, 0.303228224536199797]

> Lp3 := [seq(rhs(Lpi[t][4]), t=0..7)];
Lp3 := [0., 0.193221444902965223, 0.202560506285300812, 0.197740429982329214,
0.193938197756060971, 0.187438476122380154, 0.186947713718024322, 0.186941672382945928]

> Lp4 := [seq(rhs(Lpi[t][5]), t=0..7)];
Lp4 := [0., 0.0653159171913234166, 0.0759234728002084608, 0.0766777689375476024,
0.0767611166376077070, 0.0768287070080579810, 0.0768335722755819074, 0.0768336324737090848
]

> Lp5 := [seq(rhs(Lpi[t][6]), t=0..7)];
Lp5 := [0., 0.0132105931838467413, 0.0181620901029168579, 0.0202121937320502605,
0.0214554636189992730, 0.0235260635149955808, 0.0236822325232051364, 0.0236841533088042074
]

> Lp6 := [seq(rhs(Lpi[t][7]), t=0..7)];
Lp6 := [0., -0.00138277388120118528, 0.000553221513733471137, 0.00239588880515325146,
0.00362142992589572100, 0.00568308730621739680, 0.00583863794303997840,
0.00584055847701554516]

> Lp7 := [seq(rhs(Lpi[t][8]), t=0..7)];
Lp7 := [0., 0.00123882561463393450, 0.00414496691862422957, 0.00625592512568351988,
0.00762992763168156545, 0.00993612383644102565, 0.0101101442850368099,
0.0101122744680407165]

> Lp8 := [seq(rhs(Lpi[t][9]), t=0..7)];
Lp8 := [0., 0.00116232570181960186, 0.00425406834969008826, 0.00652960666868769840,
0.00801257114931022349, 0.0105019650926381770, 0.0106897362516730054,
0.0106920607136863372]

> Lp9 := [seq(rhs(Lpi[t][10]), t=0..7)];
Lp9 := [0., 0.00144698988446064956, 0.00482117688249002197, 0.00726280480204648250,
0.00885149465672318594, 0.0115179769516059044, 0.0117191984043930070,
0.0117216772751894944]

```

```

> Lp10:=[seq(rhs(Lpi[t][11]), t=0..7)];
Lp10:=[0., 0.00169491776256979052, 0.00531937699949204014, 0.00791582409614227482,
0.00960372737250885650, 0.0124363602063076451, 0.0126500628566685990,
0.0126526643349029102]

> Lp11:=[seq(rhs(Lpi[t][12]), t=0..7)];
Lp11:=[0., 0.00194901946091610430, 0.00581166570526139501, 0.00855489086353479478,
0.0103367721155086037, 0.0133269693967702757, 0.0135525254206395694, 0.0135553489784877250
]

> Lp12:=[seq(rhs(Lpi[t][13]), t=0..7)];
Lp12:=[0., 0.00220410309440581716, 0.00629280659115959932, 0.00917588806063169596,
0.0110473551204034737, 0.0141876006701798126, 0.0144245794582611338, 0.0144274582009439895
]

> Lp13:=[seq(rhs(Lpi[t][14]), t=0..7)];
Lp13:=[0., 0.00245993292638180566, 0.00676432447753258244, 0.00978119310943780484,
0.0117384265968923340, 0.0150223990472524299, 0.0152701186238160970, 0.0152731829452991304
]

> Lp14:=[seq(rhs(Lpi[t][15]), t=0..7)];
Lp14:=[0., 0.00271603671613231037, 0.00722721738198564470, 0.0103725260858375142,
0.0124120695863810267, 0.0158339879740472568, 0.0160921663308310134, 0.0160953458287861132
]

> Lp15:=[seq(rhs(Lpi[t][16]), t=0..7)];
Lp15:=[0., 0.00297209283658197380, 0.00768201055098183262, 0.0109510523681965716,
0.0130699345858812256, 0.0166247892366217474, 0.0168929875594847242, 0.0168962851885516990
]

> Lp16:=[seq(rhs(Lpi[t][17]), t=0..7)];
Lp16:=[0., 0.00322786169336203430, 0.00812941761086394266, 0.0115179437559921970,
0.0137134470997712174, 0.0173967082637673937, 0.0176745891655096174, 0.0176780113010825864
]

> Lp17:=[seq(rhs(Lpi[t][18]), t=0..7)];
Lp17:=[0., 0.00348316484085314534, 0.00856995416645495342, 0.0120741397321708736,
0.0143438239268334523, 0.0181513984429293902, 0.0184386605112796670, 0.0184421966181850632
]

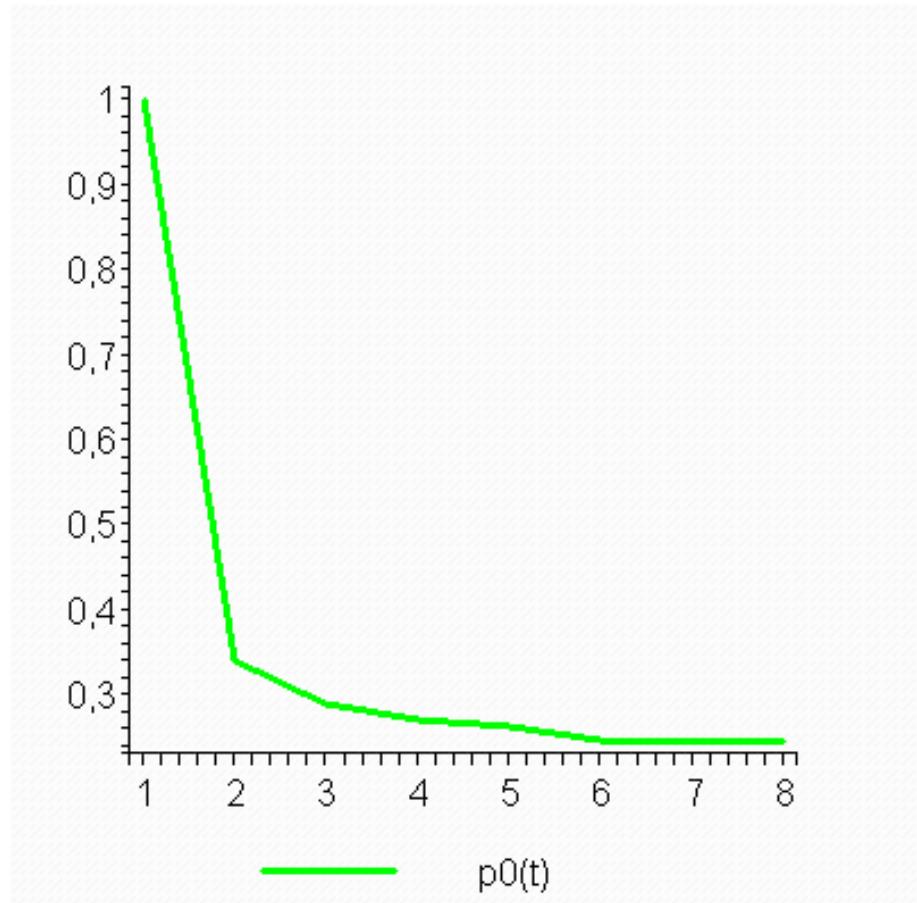
> listplot([seq(Lp1[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend='p0(t)');

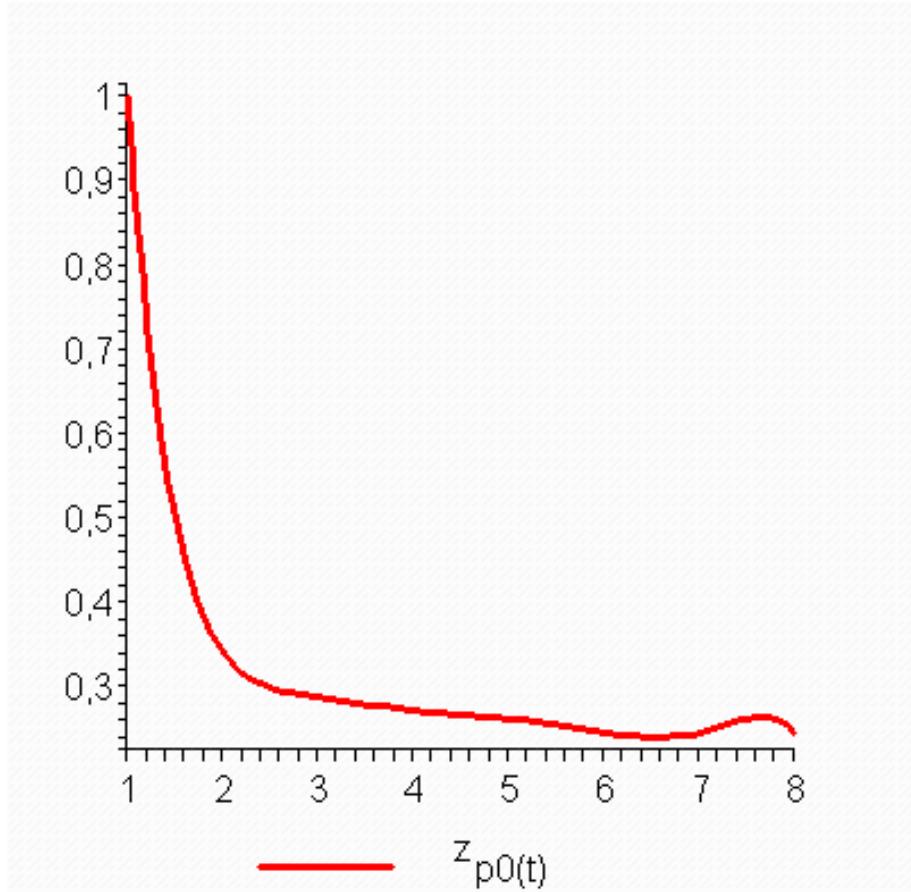
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp1[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p0(t)`);

```

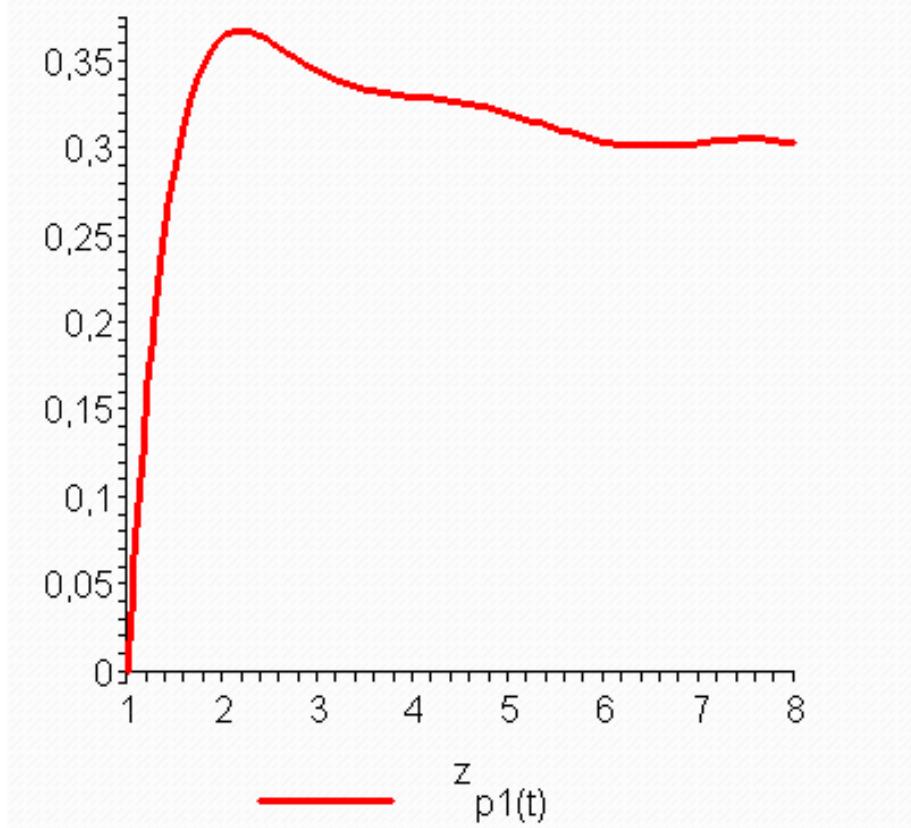
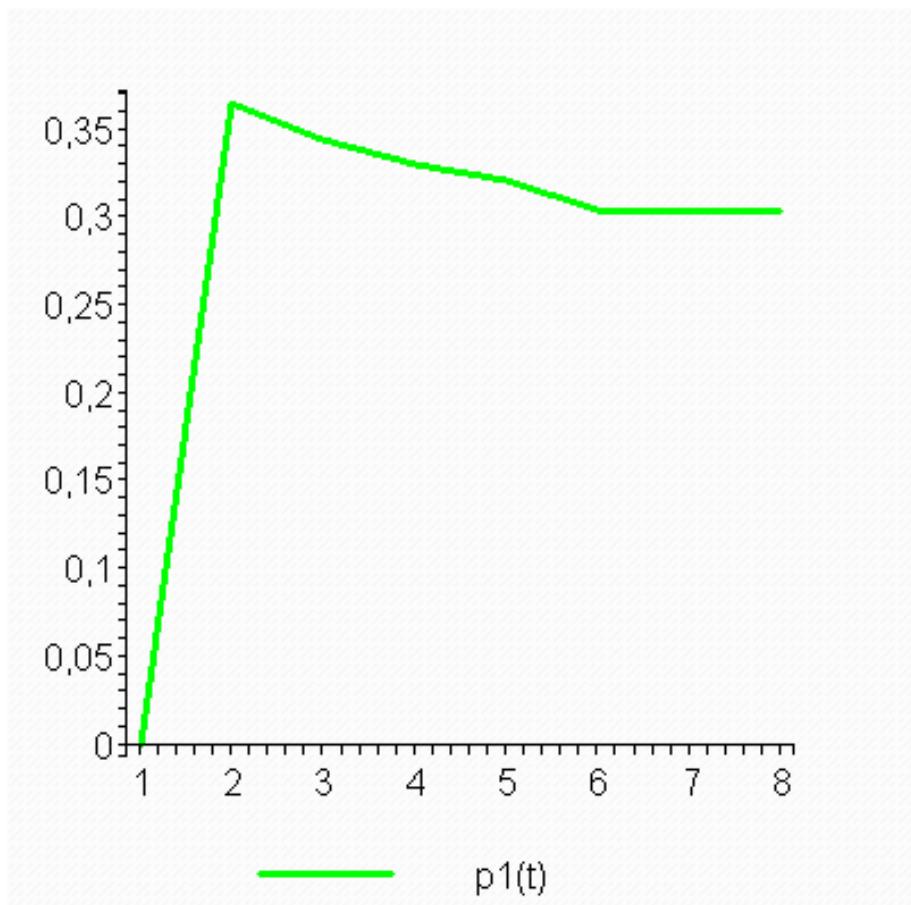




```

> listplot([seq(Lp2[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p1(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp2[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p1(t)`);

```

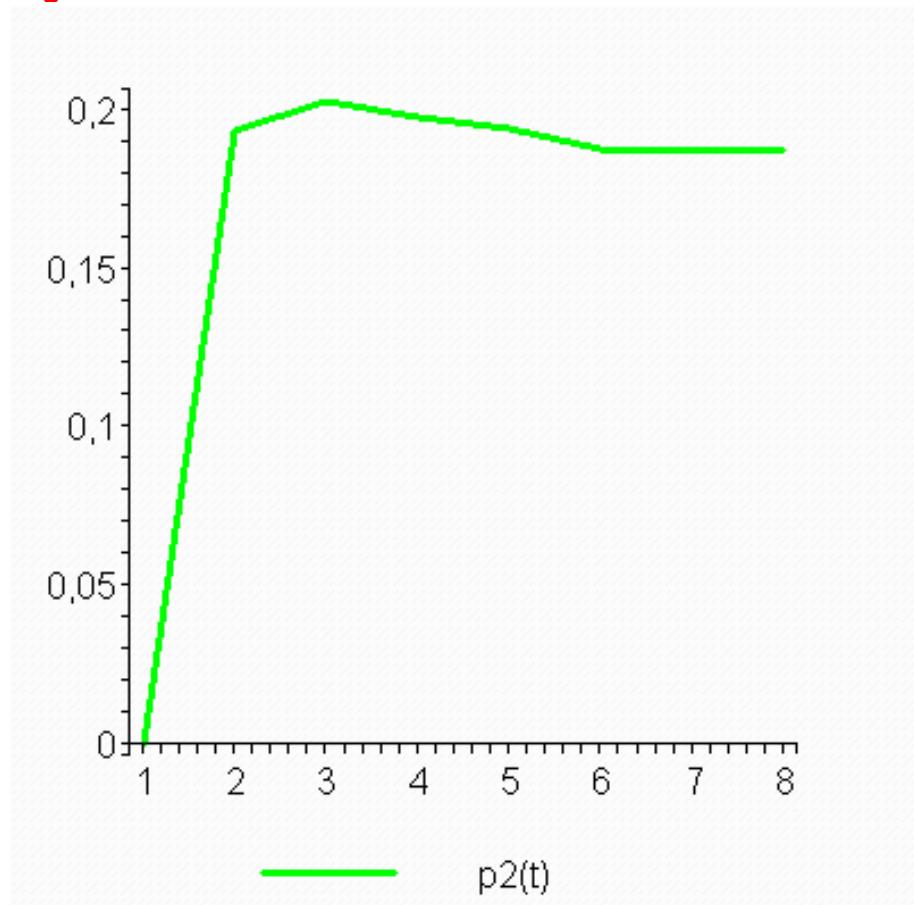


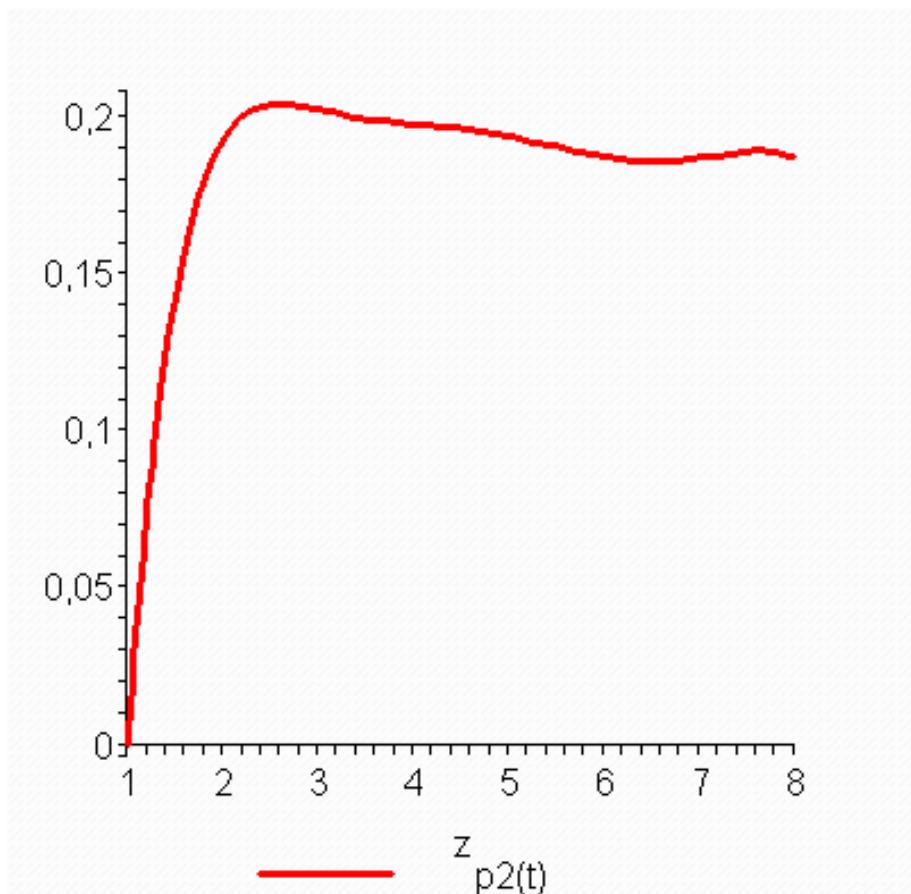
```
> listplot([seq(Lp3[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p2(t)');
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp3[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p2(t)`);

```

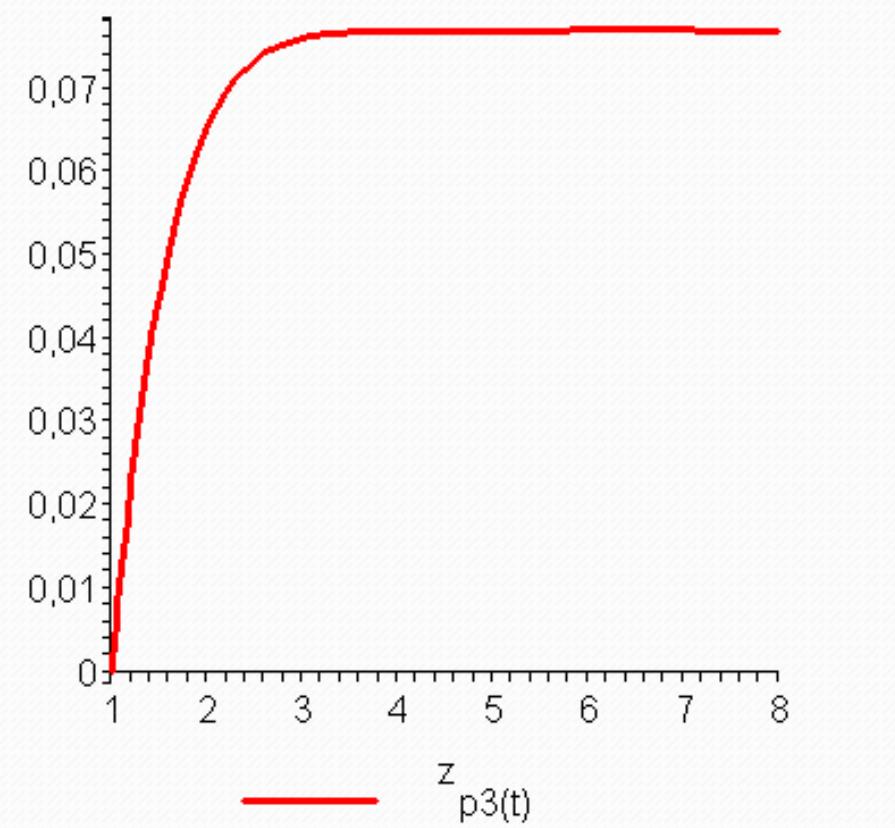
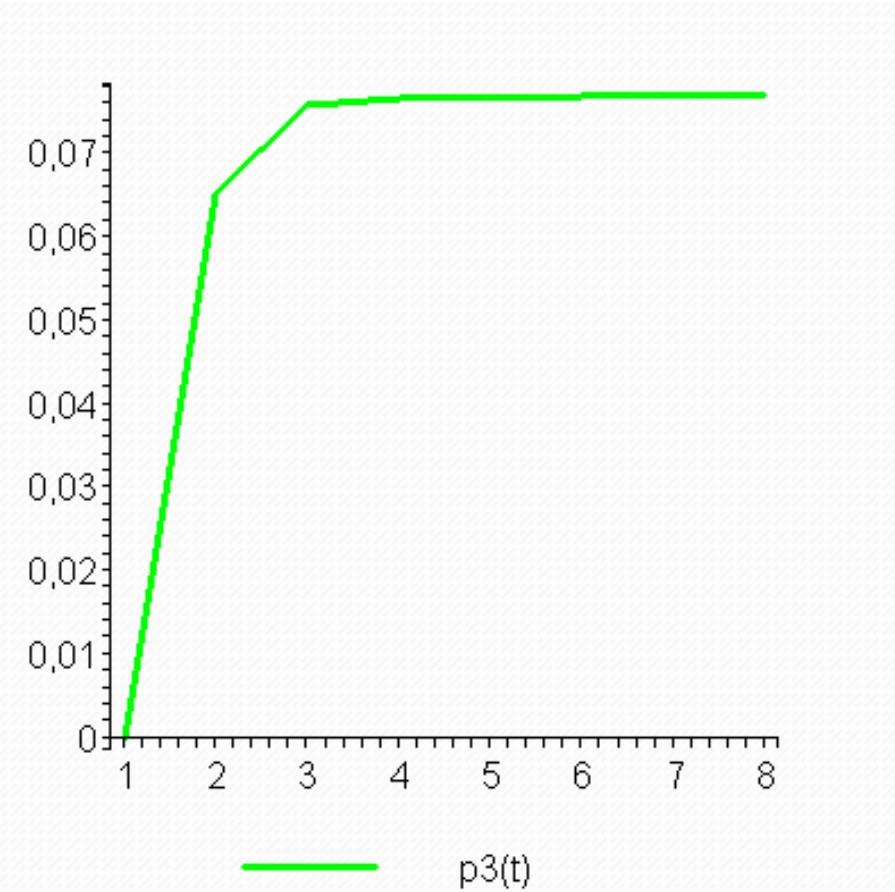




```

> listplot([seq(Lp4[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p3(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp4[t], t=1..8)], z, form=Lagrange ),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p3(t)`);

```

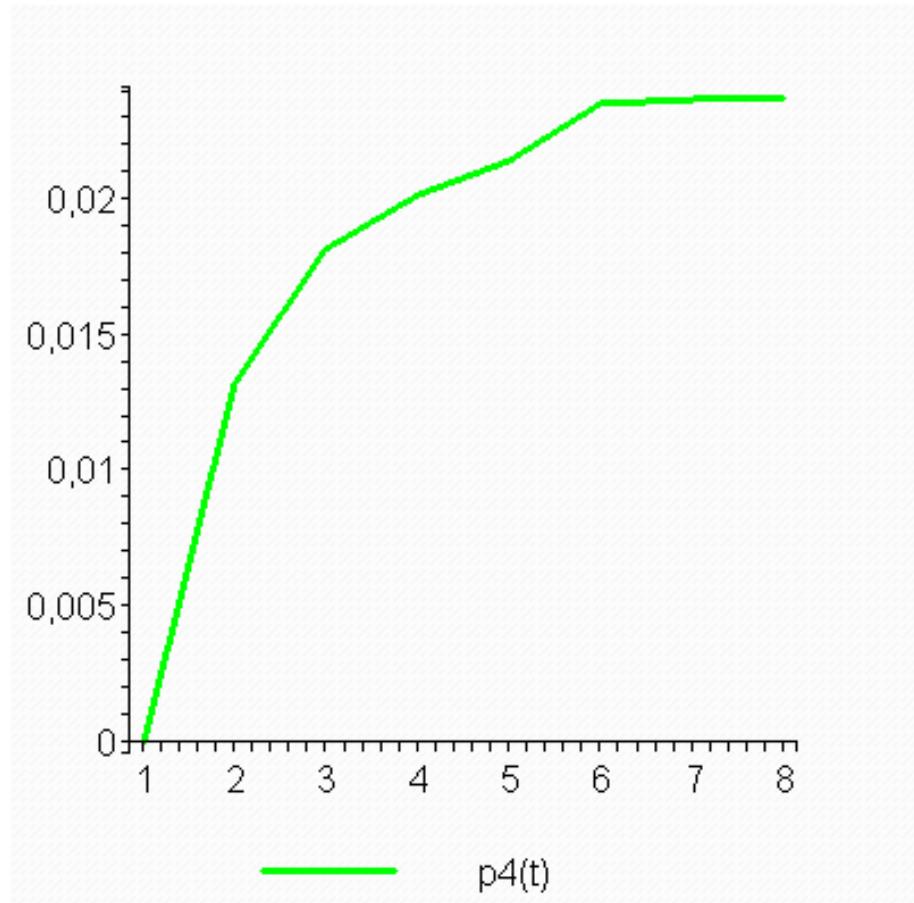


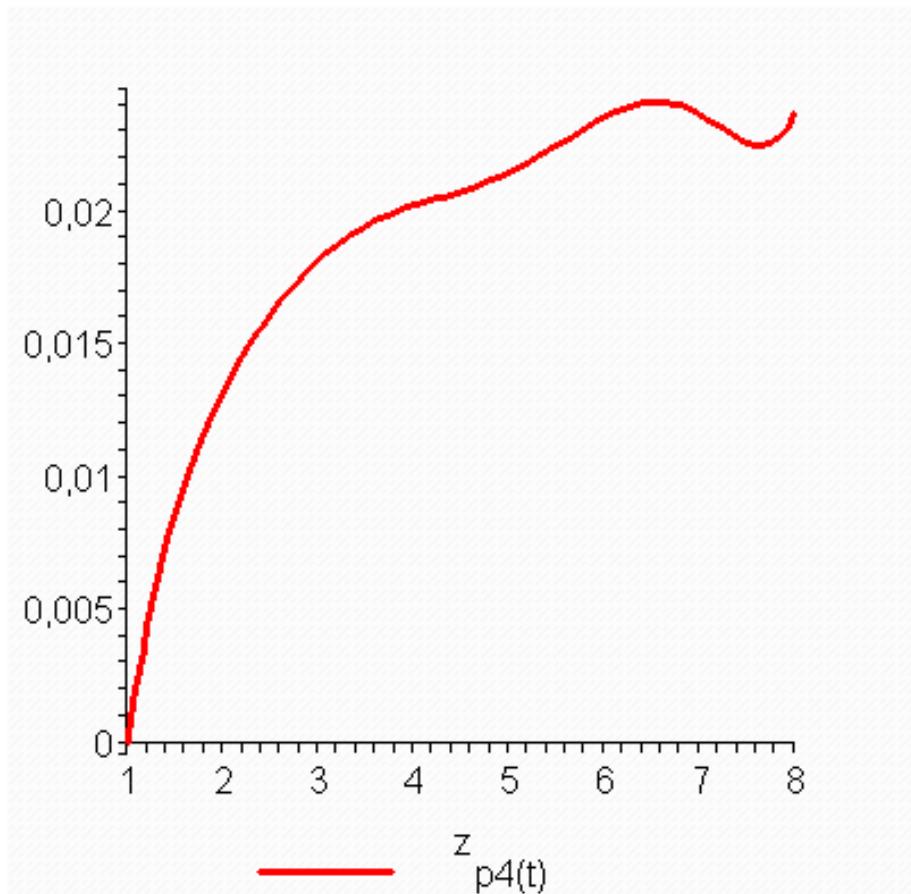
```
> listplot([seq(Lp5[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p4(t)');
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp5[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p4(t)`);

```

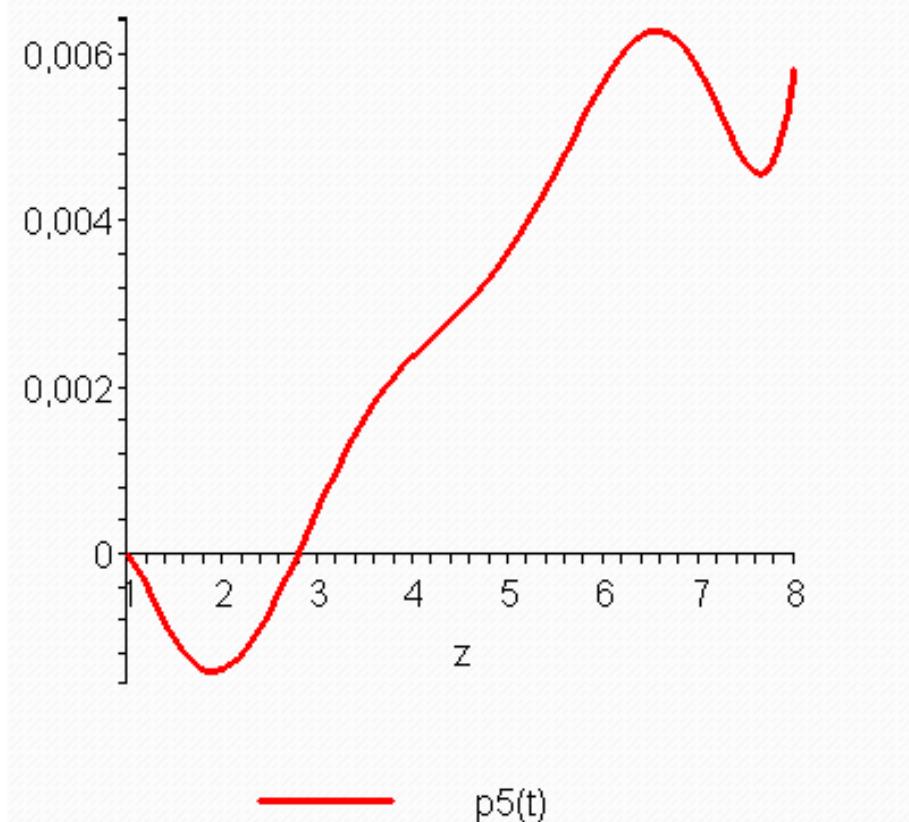
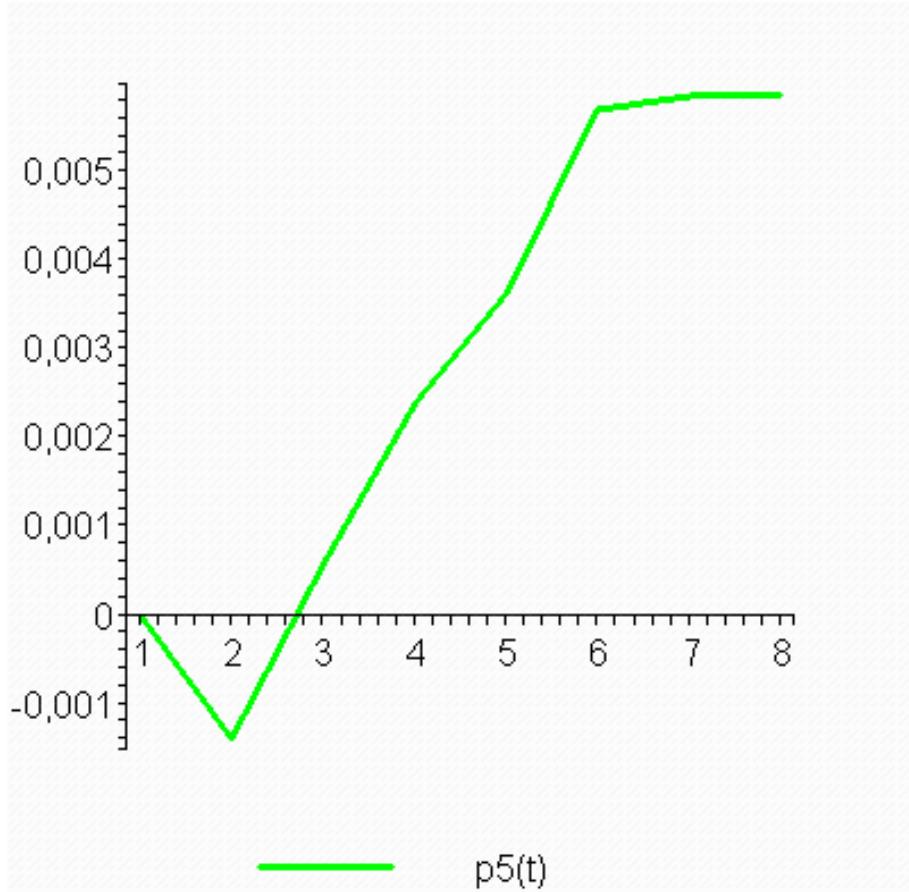




```

> listplot([seq(Lp6[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p5(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp6[t], t=1..8)], z, form=Lagrange ),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p5(t)`);

```

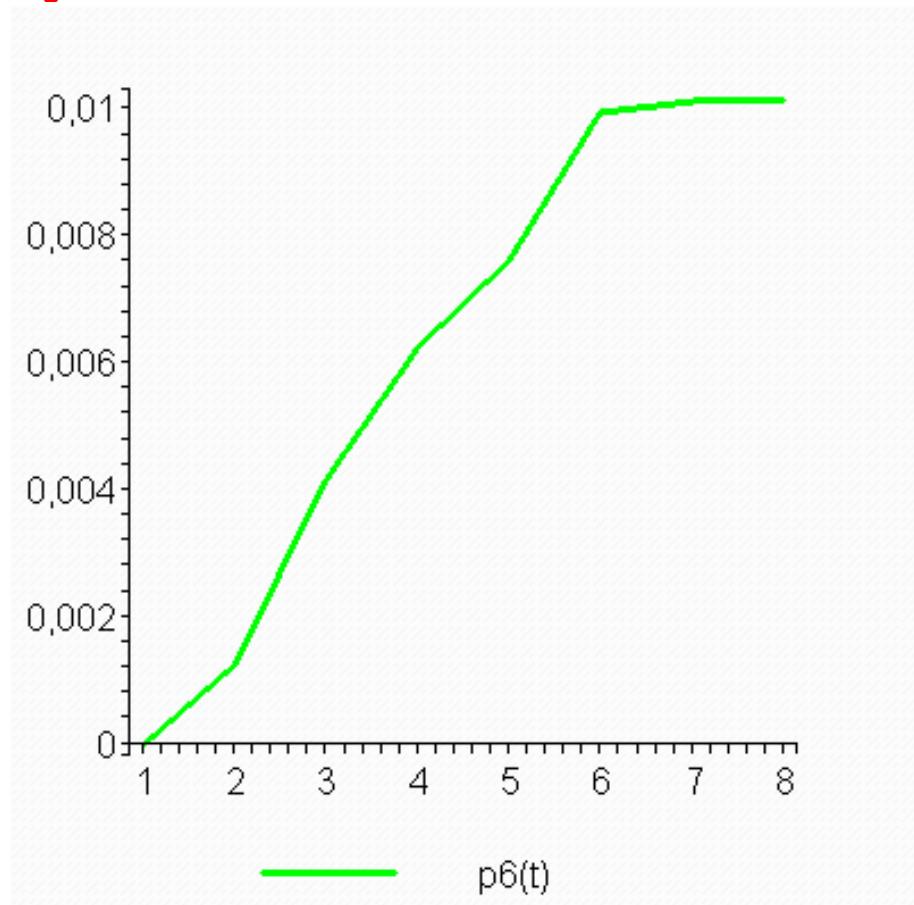


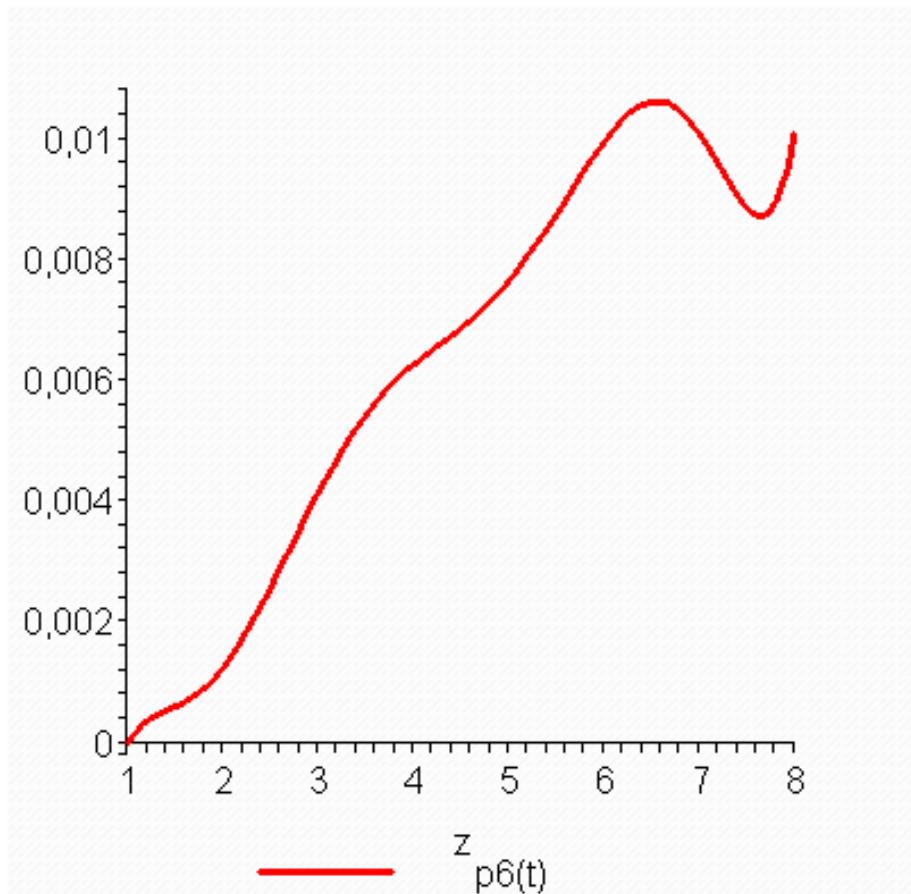
```
> listplot([seq(Lp7[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p6(t)');
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp7[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p6(t)`);

```

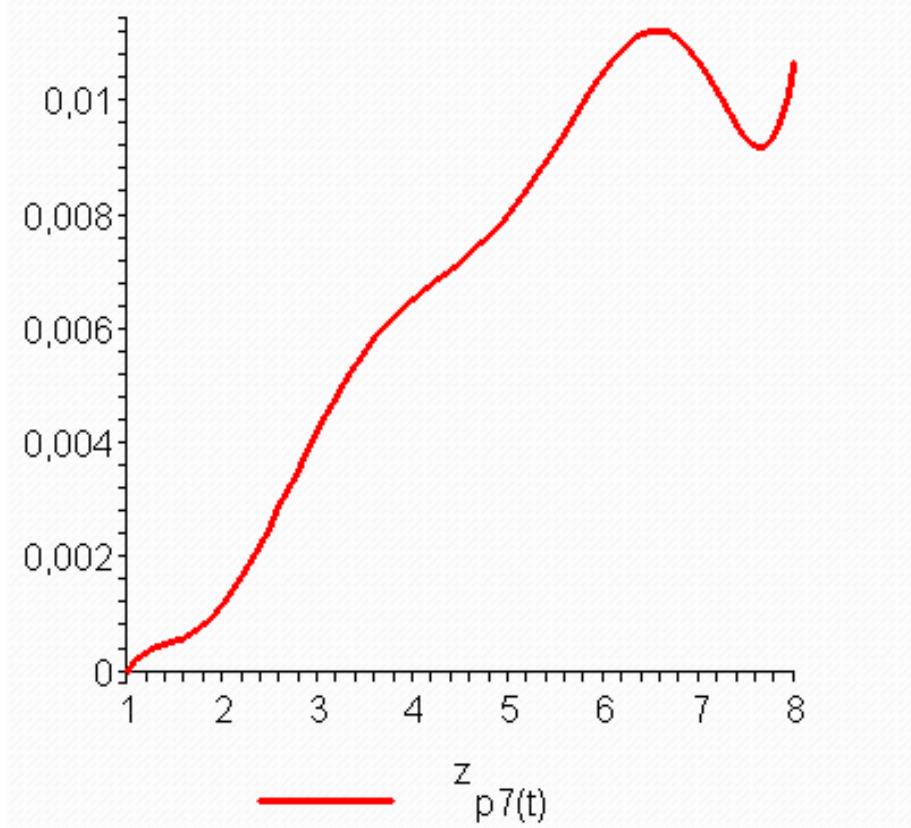
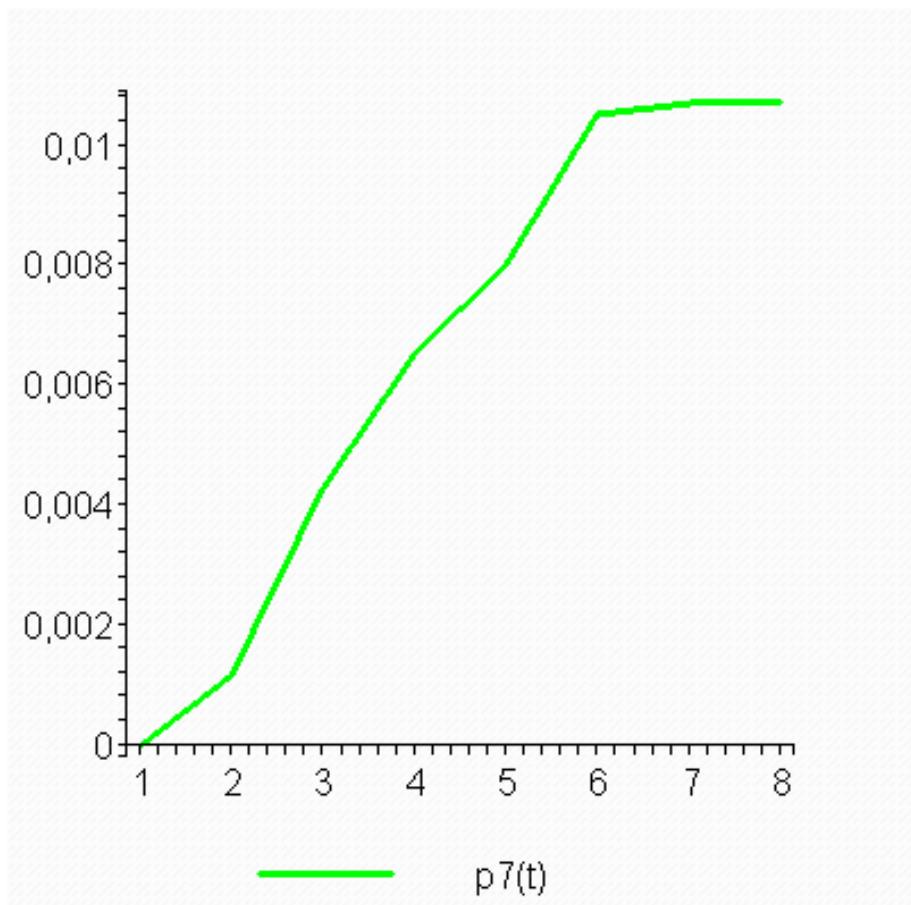




```

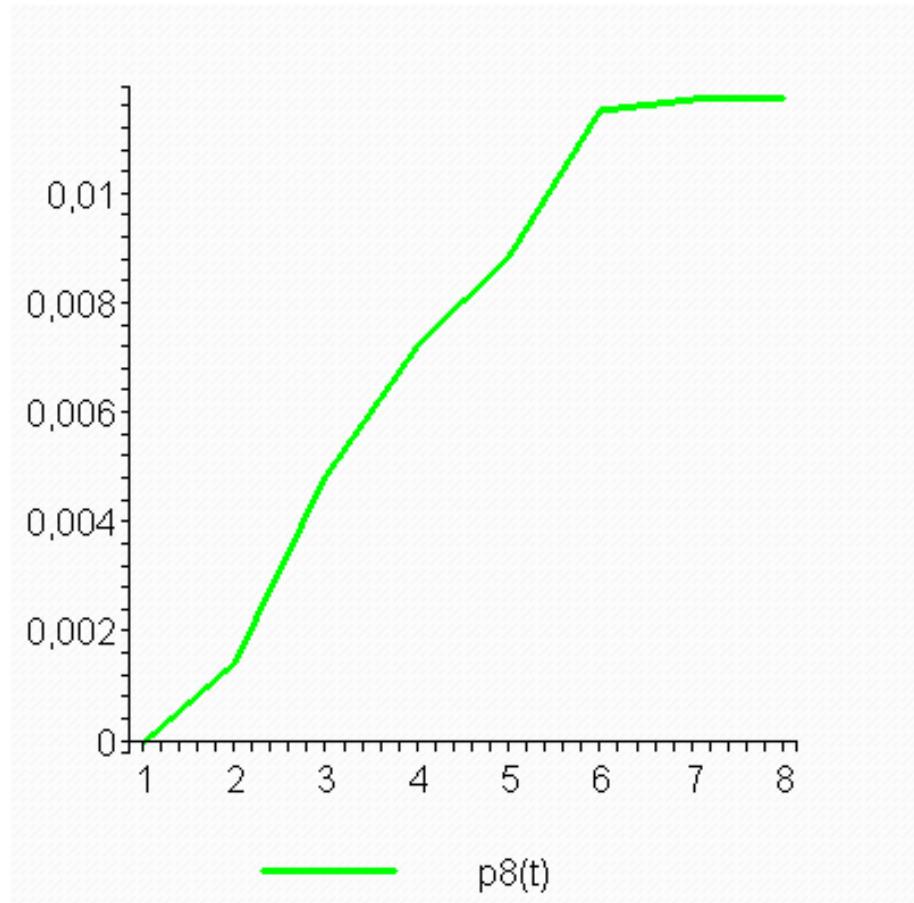
> listplot([seq(Lp8[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p7(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp8[t], t=1..8)], z, form=Lagrange ),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p7(t)`);

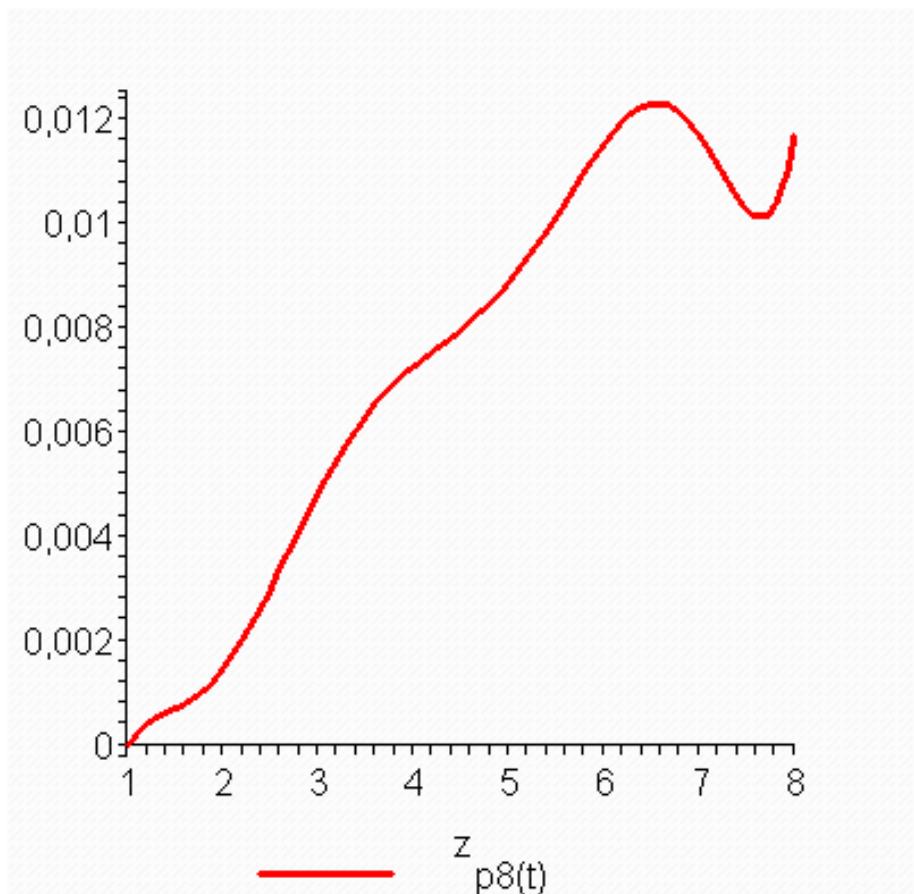
```



```
> listplot([seq(Lp9[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p8(t)');
```

```
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp9[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p8(t)`);
```

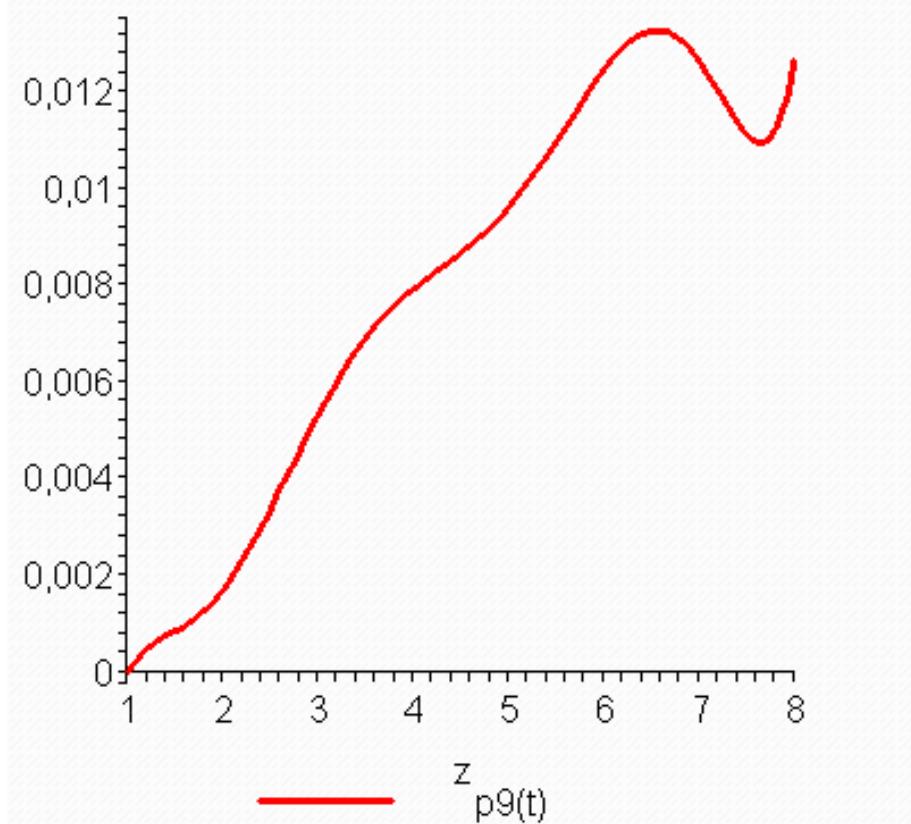
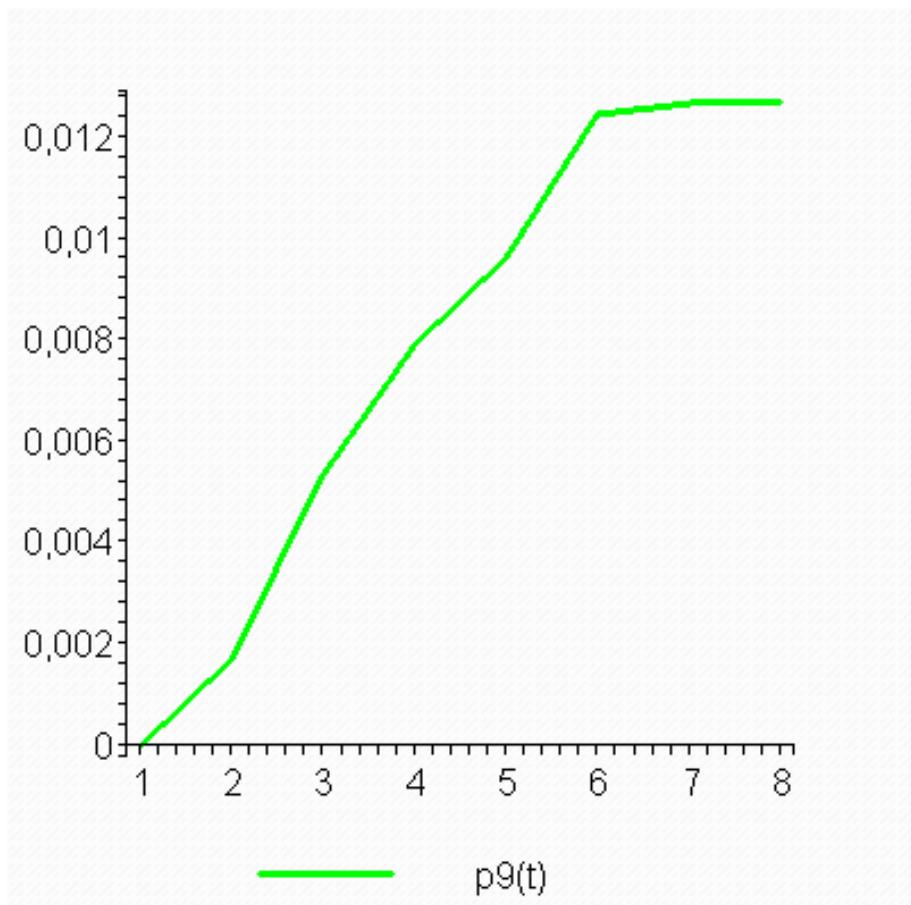




```

> listplot([seq(Lp10[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p9(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp10[t], t=1..8)], z, form=Lagrange ),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p9(t)`);

```

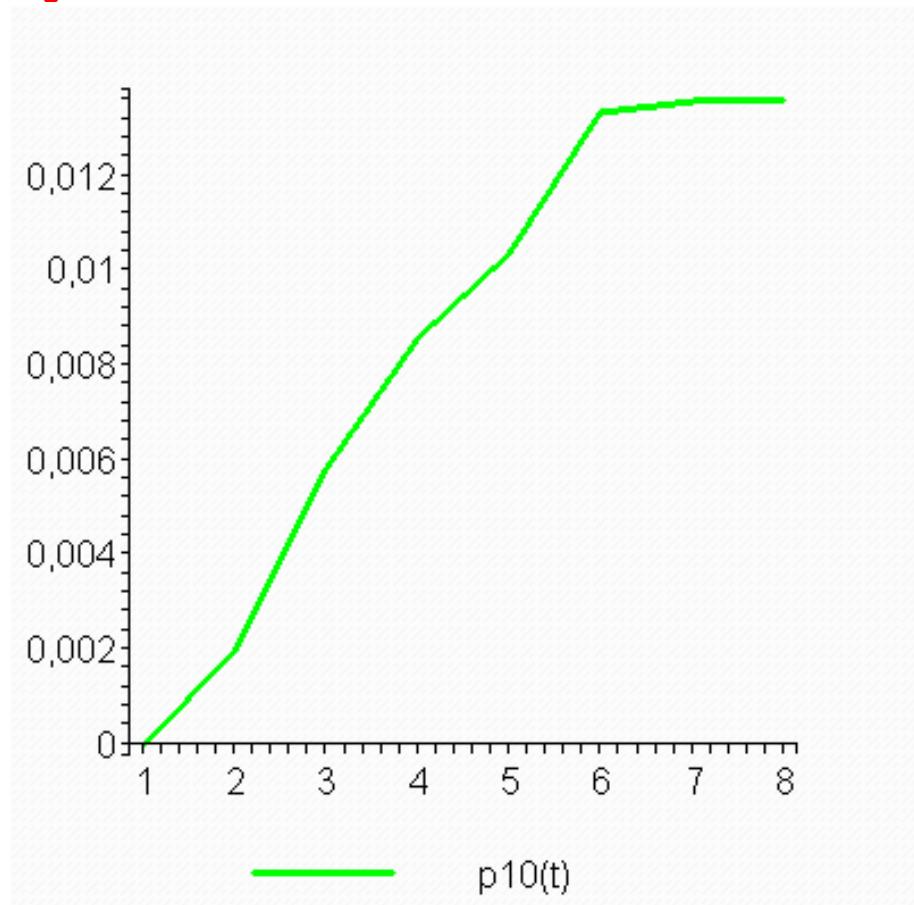


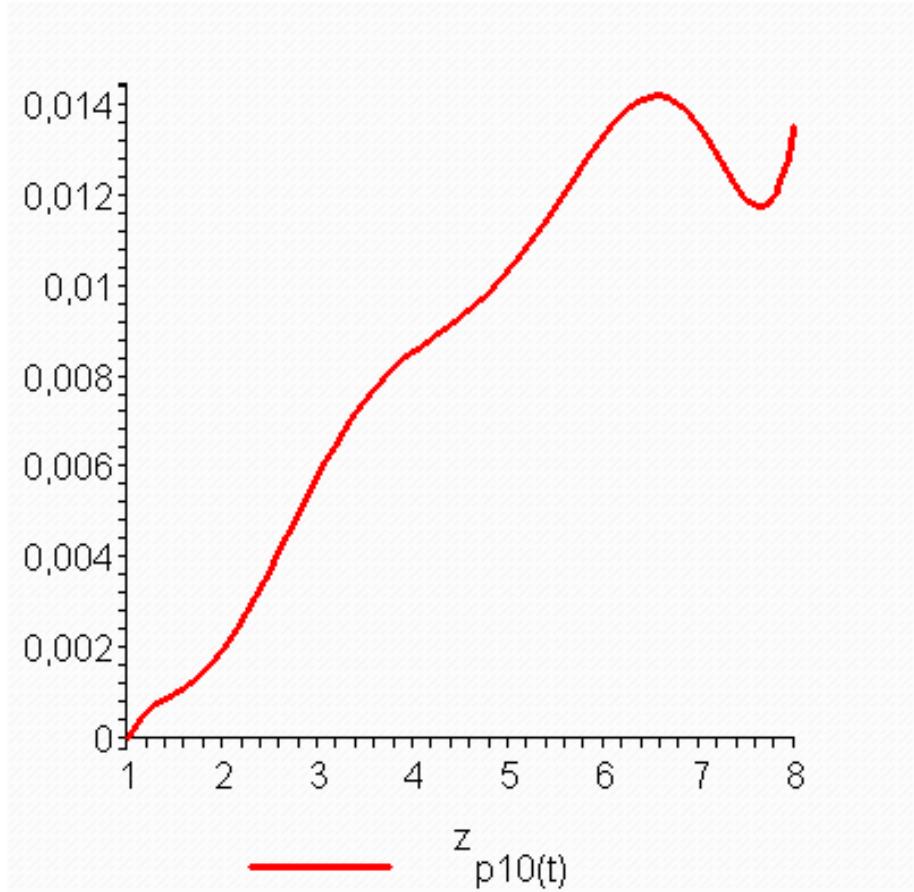
```
> listplot([seq(Lp11[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p10(t)');
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Ip11[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p10(t)`);

```

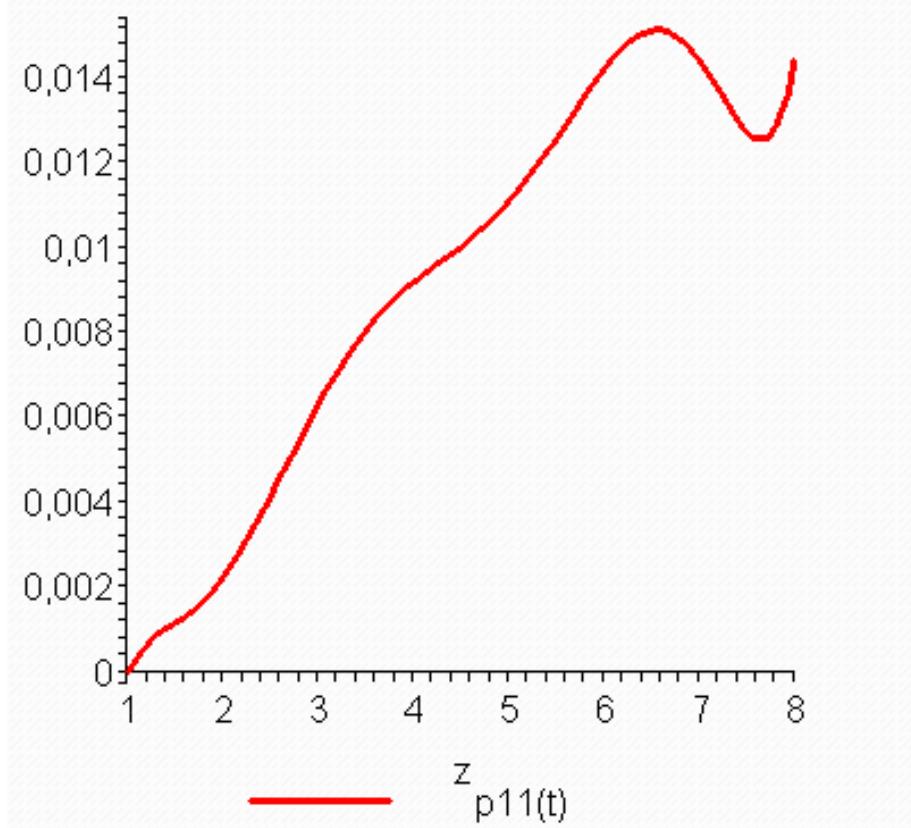
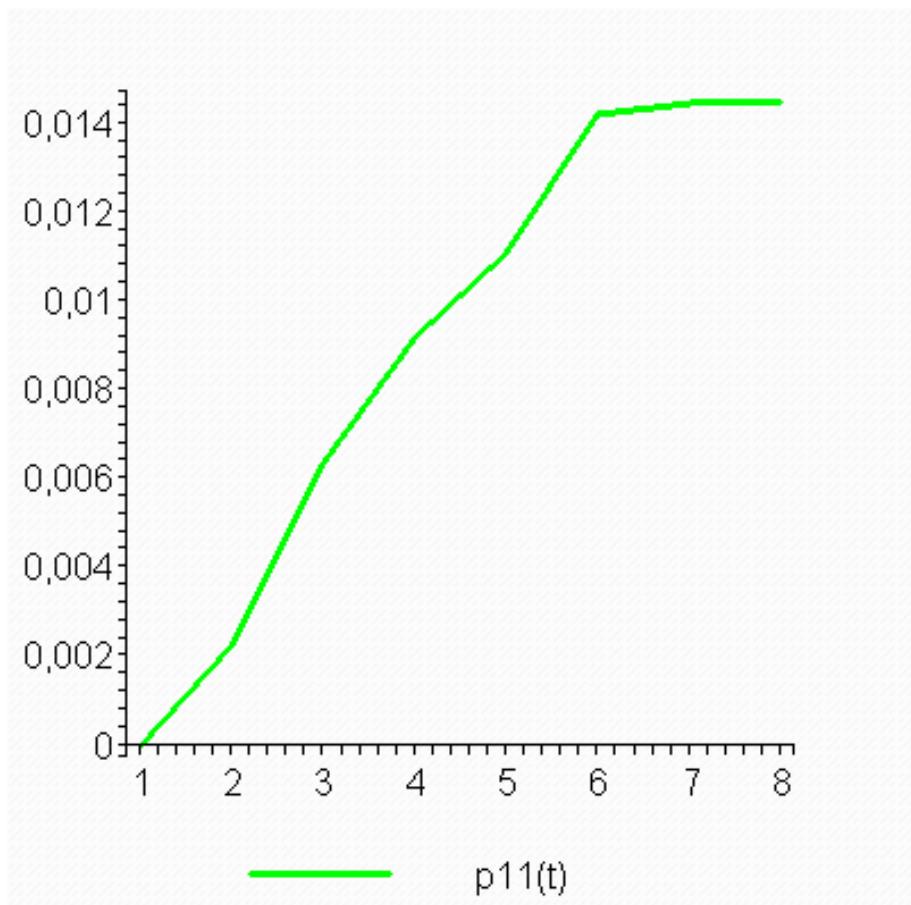




```

> listplot([seq(Lp12[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend= `p11(t)` );
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp12[t], t=1..8)], z, form=Lagrange ),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend= `p11(t)` );

```

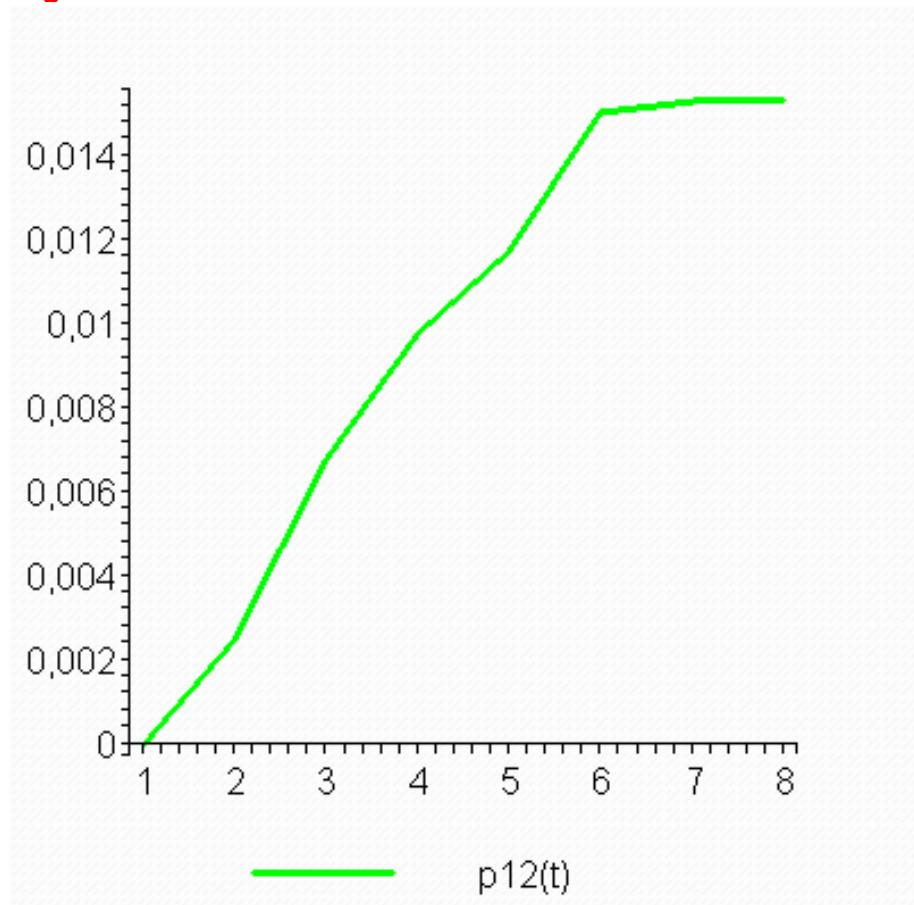


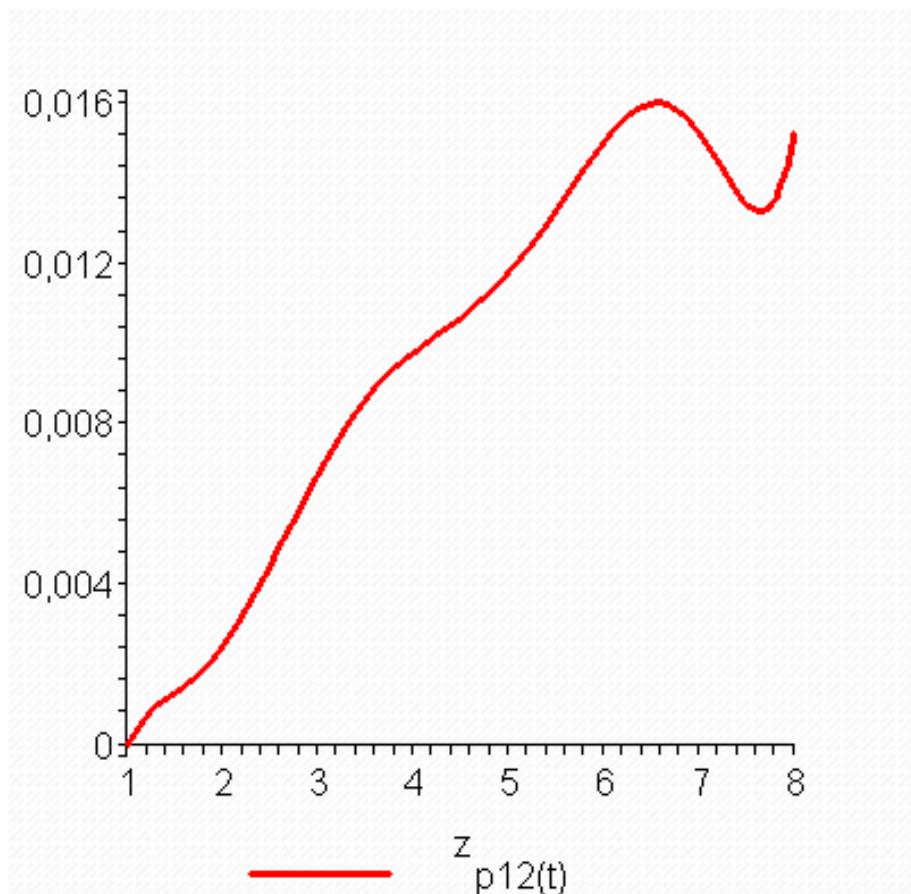
```
> listplot([seq(Lp13[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p12(t)');
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp13[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p12(t)` );

```

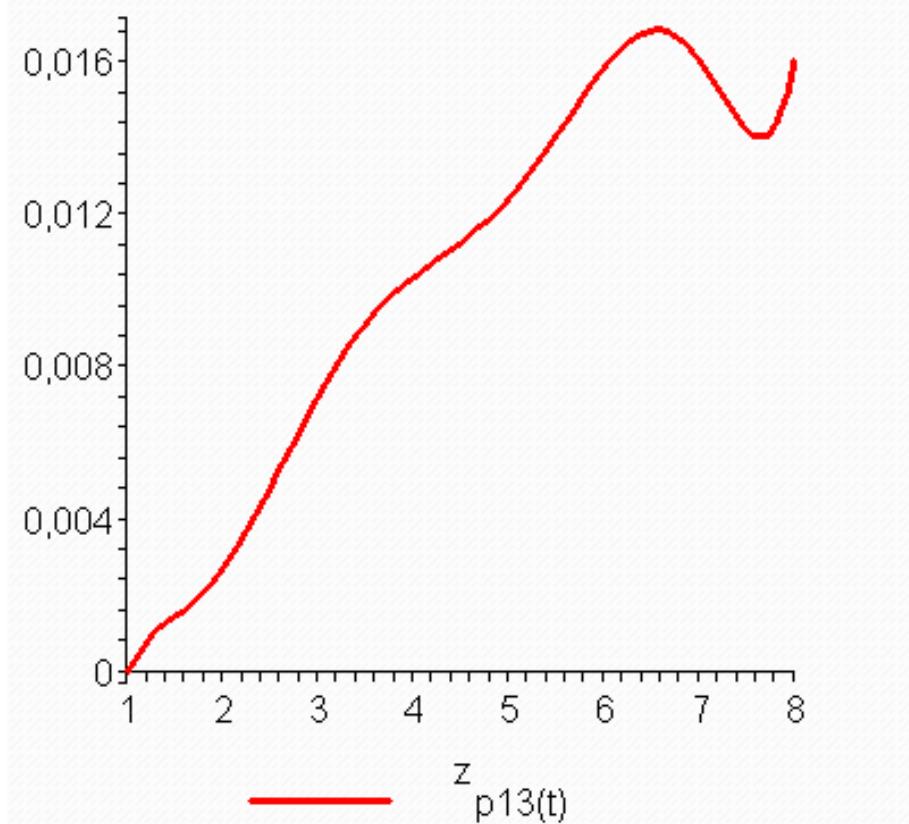
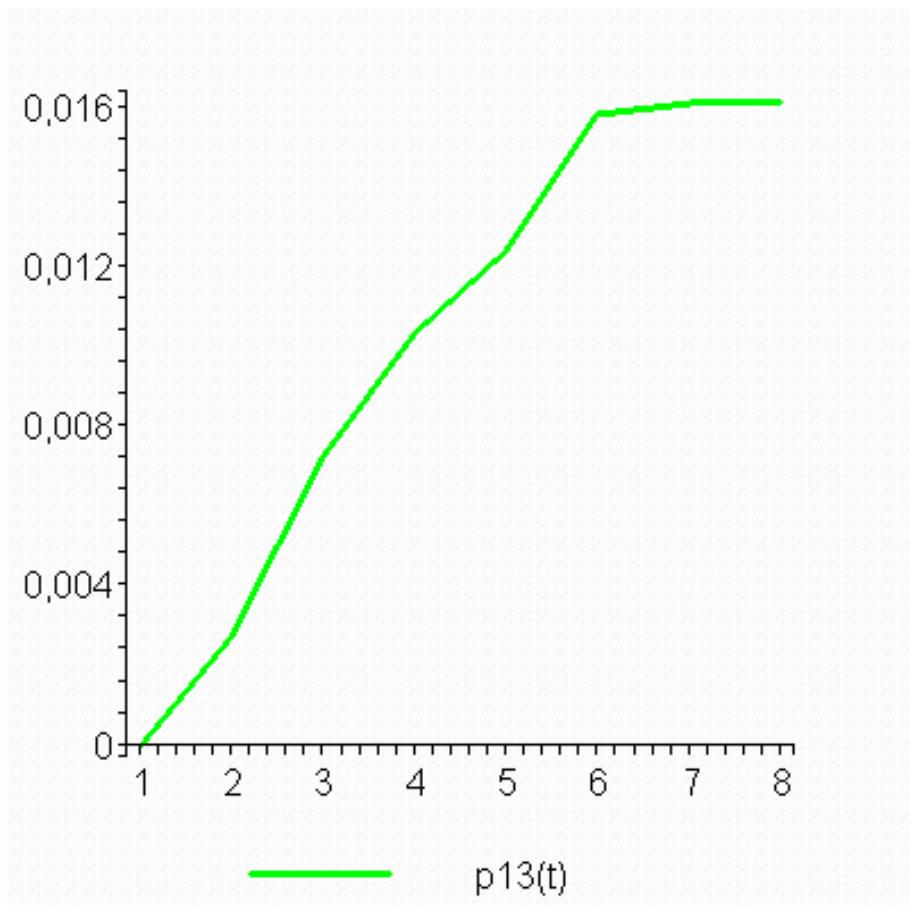




```

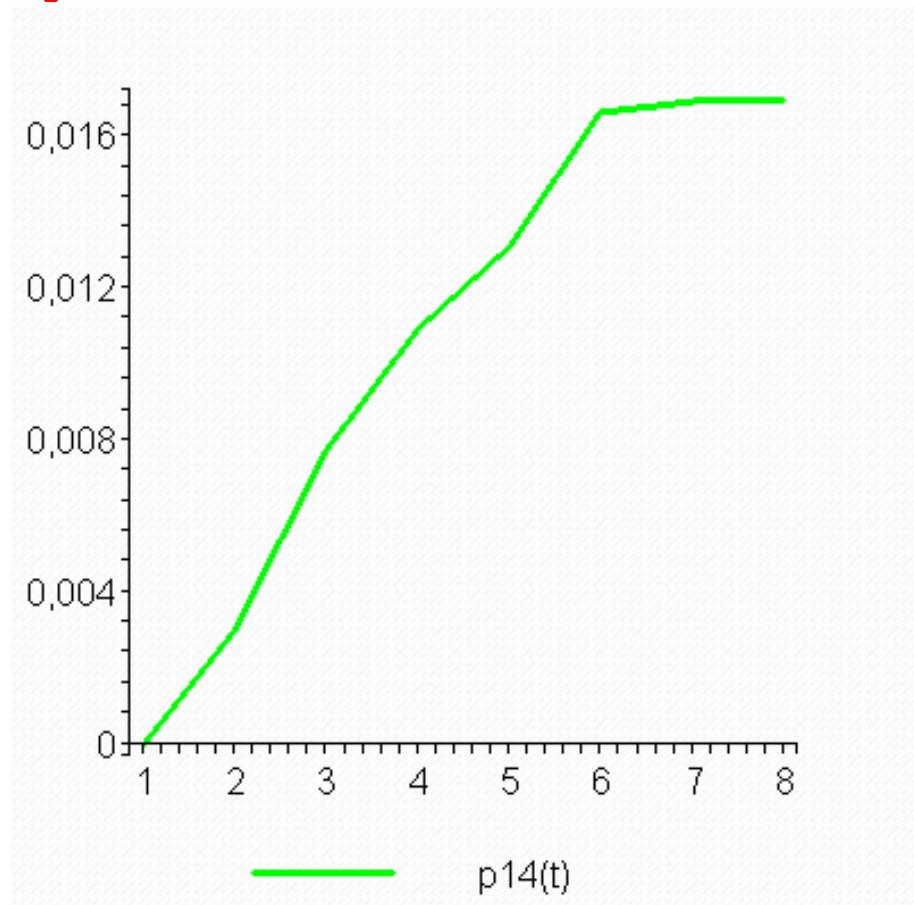
> listplot([seq(Lp14[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p13(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp14[t], t=1..8)], z, form=Lagrange ),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p13(t)`);

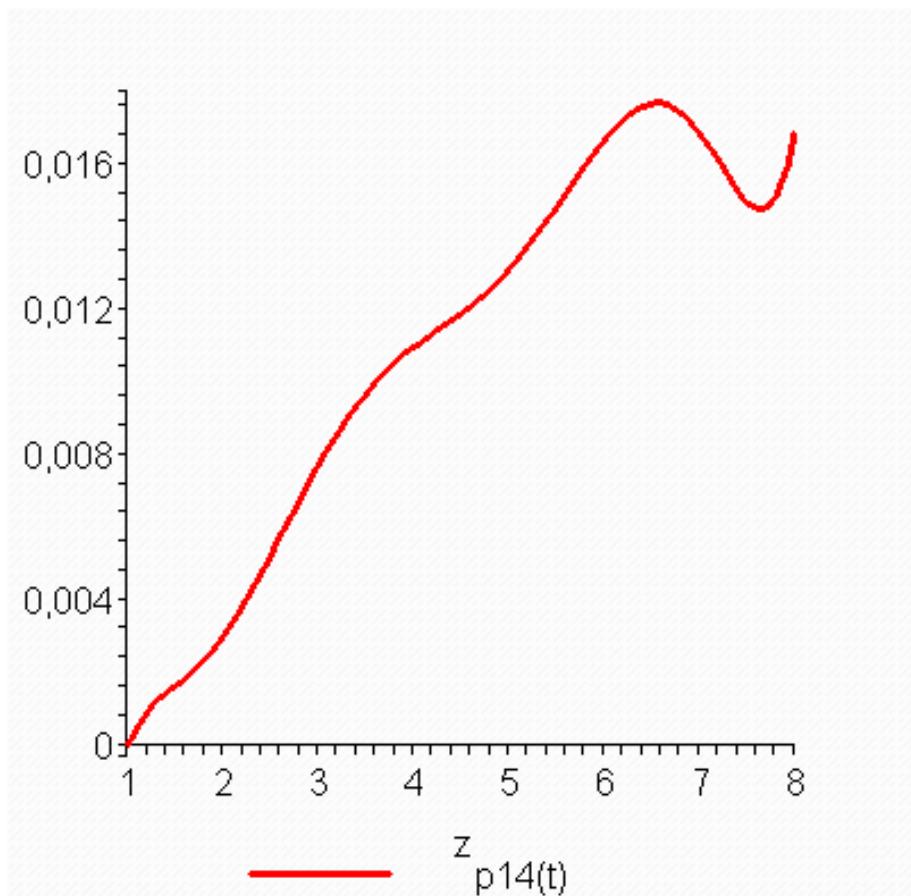
```



```
> listplot([seq(Lp15[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p14(t)');
```

```
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp15[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p14(t)`);
```

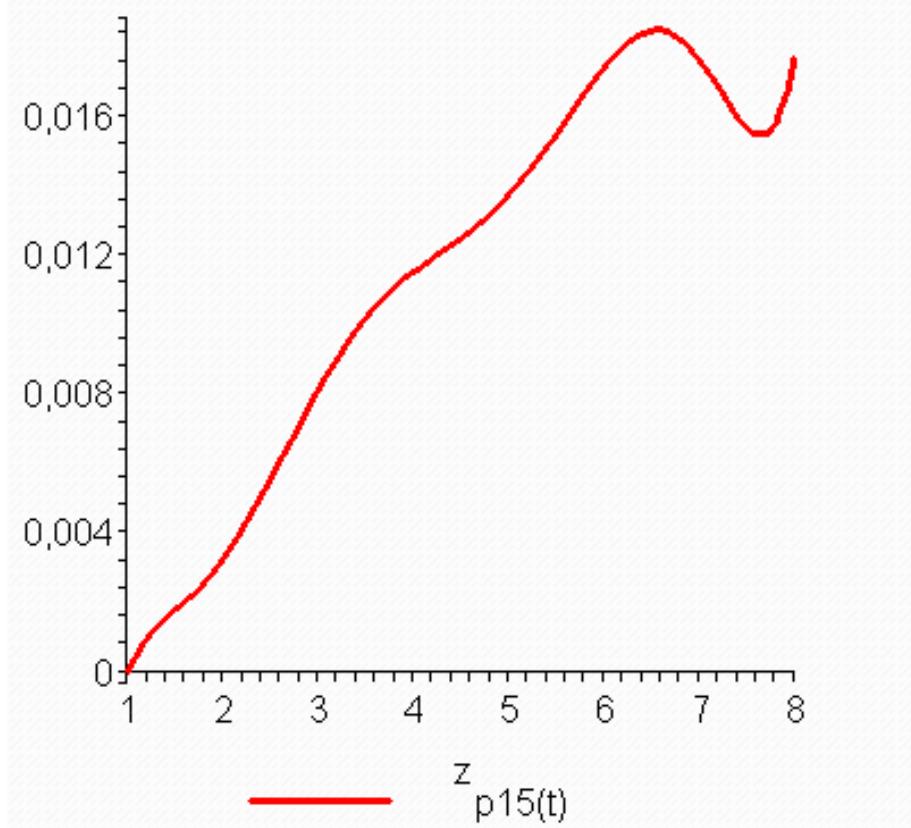
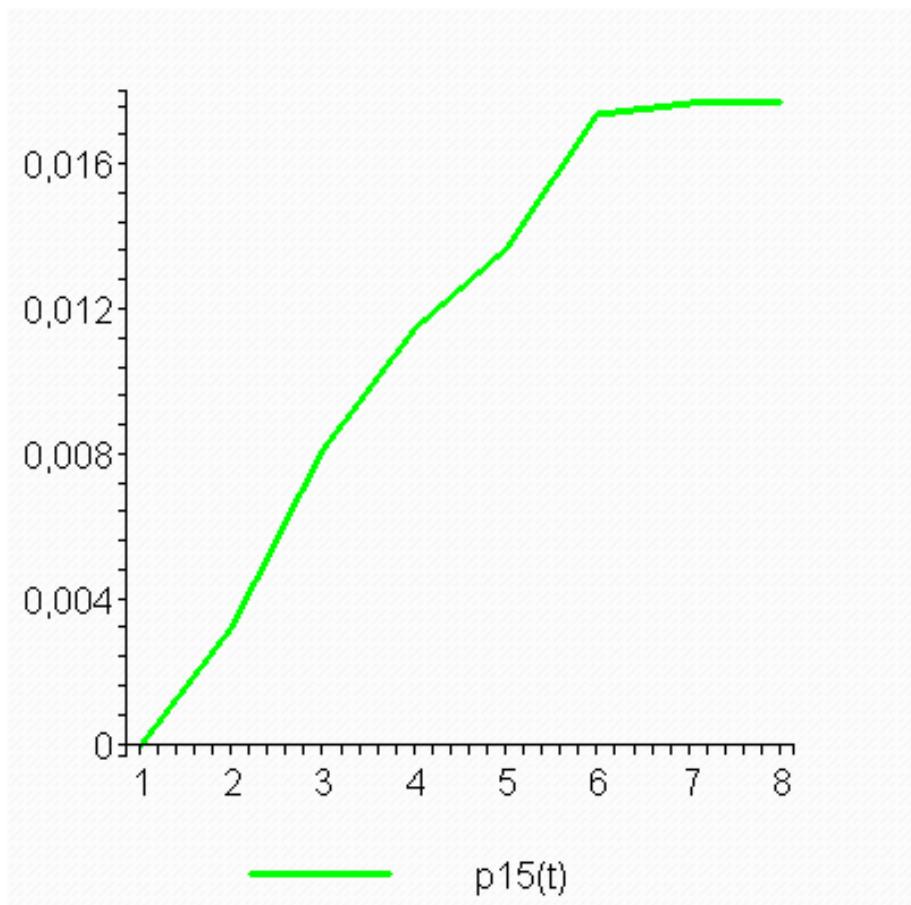




```

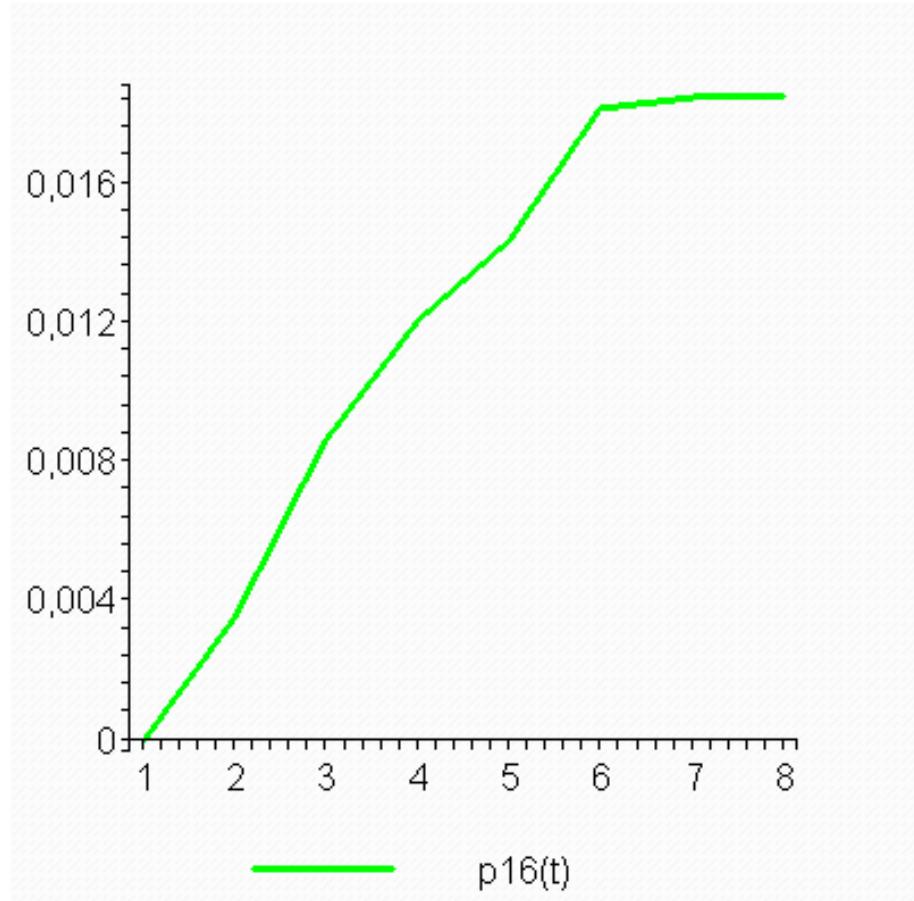
> listplot([seq(Lp16[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend= `p15(t)` );
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp16[t], t=1..8)], z, form=Lagrange ),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend= `p15(t)` );

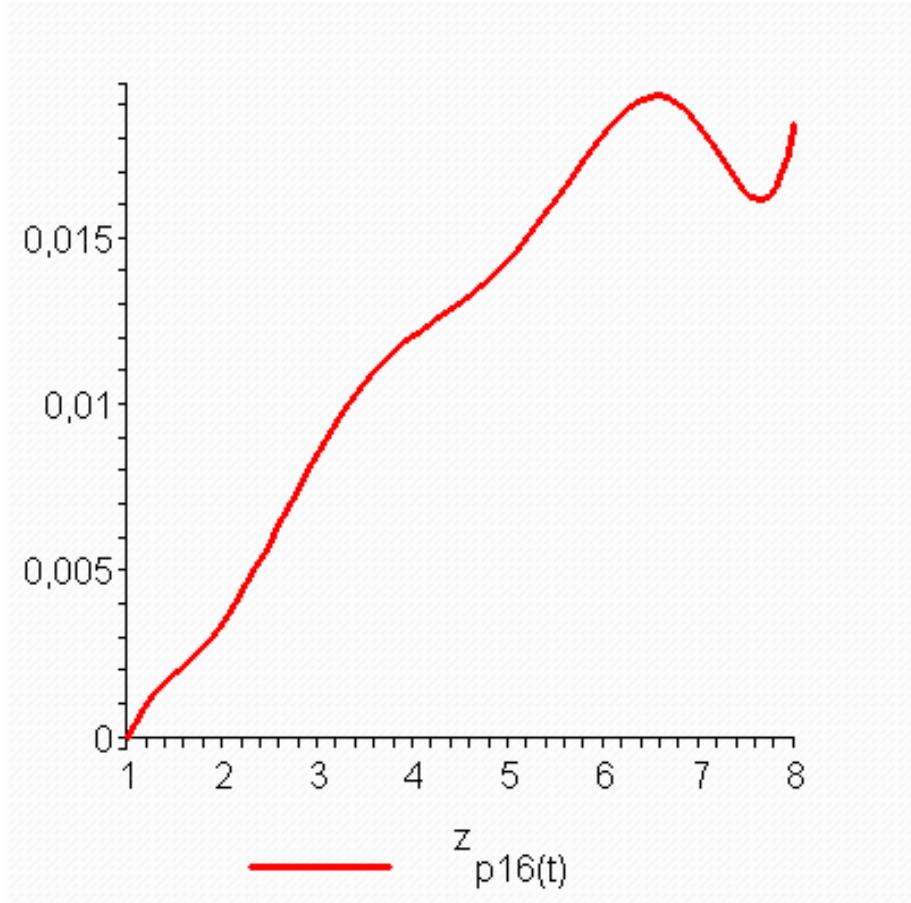
```



```
> listplot([seq(Lp17[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p16(t)');
```

```
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp17[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p16(t)`);
```





> stop!!!! КОНЕЦ ПРОГРАММЫ ДЛЯ
ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ № 6 ПО ТСМО

Maple-программа для исследования системы массового обслуживания смешанного типа с ограничением по длине очереди

Лабораторная работа № 7

Система массового обслуживания смешанного типа с ограничением по длине очереди

1. Задание параметров многоканальной системы массового обслуживания S с ограничением по длине очереди

```
> restart:  
# Сброс значений всех переменных при повторном запуске  
with(LinearAlgebra) :  
with(CurveFitting) :  
with(plots) :  
n:=5;  
# Число каналов многоканальной системы массового обслуживания S с ожиданием  
m:=10;  
# Максимальное число заявок в очереди на обслуживание многоканальной системы S  
Lambda:=5.08; #  
Плотность потока заявок для многоканальной системы массового обслуживания S  
Mu:=4.12; #  
Параметр времени обслуживания многоканальной системы S  
Alf:=Lambda/Mu; # Расчетный параметр системы S вход/обслуживание  
DeltaT:=1; #  
Шаг интегрирования уравнений Эрланга методом Рунге-Кутта
```

```

T:=15;
# Число шагов визуализации и интегрирования
# методом Рунге-Кутта
StudentNumber:=17;           # Задание для студента
номера варианта при расчете вероятностей
переходов системы S
Warning, the name LeastSquares has been rebound
Warning, the name changecoords has been redefined
n := 5

m := 10

L := 5.08

M := 4.12

Alf:= 1.233009709

DeltaT:= 1

T := 15

StudentNumber := 17

```

2. Характеристики потоков и времени обслуживания многоканальной системы S с ограничением по длине очереди и их визуализация

2.1 Простейший поток заявок

```

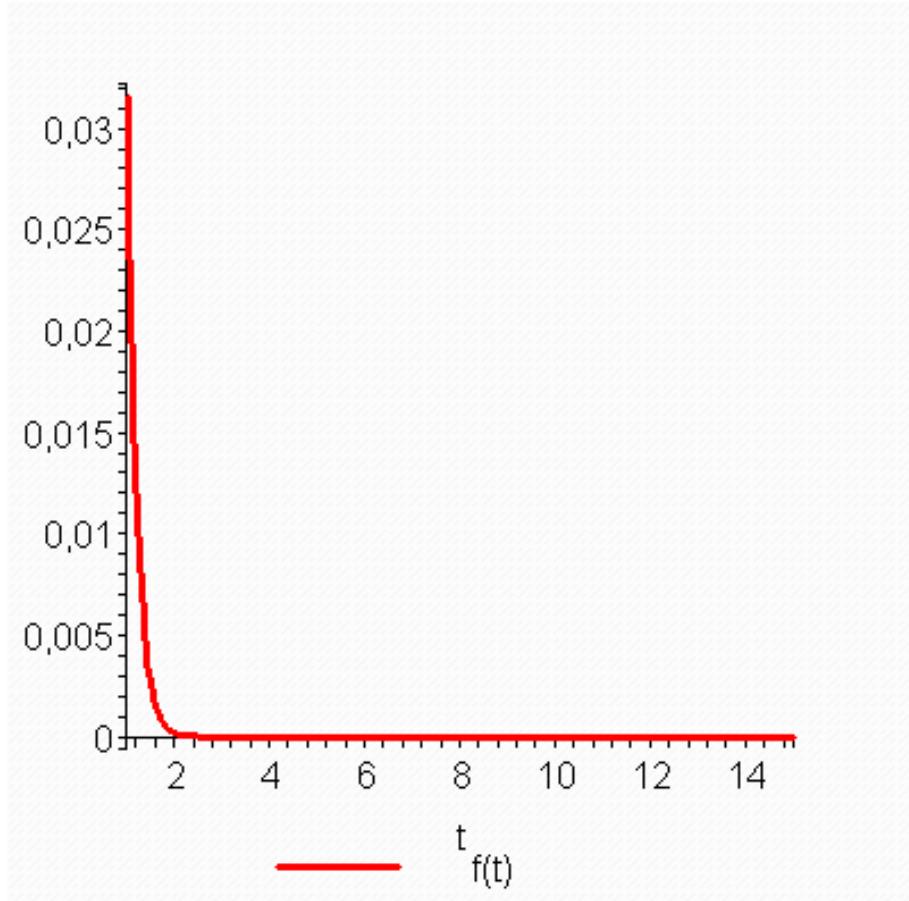
> f:=t->Lambda*exp(-Lambda*t);
f(0);
Int(f(t), t=0..infinity)=int(f(t),
t=0..infinity);
plot(f(t), t=1..T, thickness=2, color= red,
legend='f(t)');

```

$$f := t \circledR L e^{(-L t)}$$

5.08

$$\int_0^{\infty} 5.08 e^{(-5.08 t)} dt = 1.$$



2.2 Время обслуживания системы

```

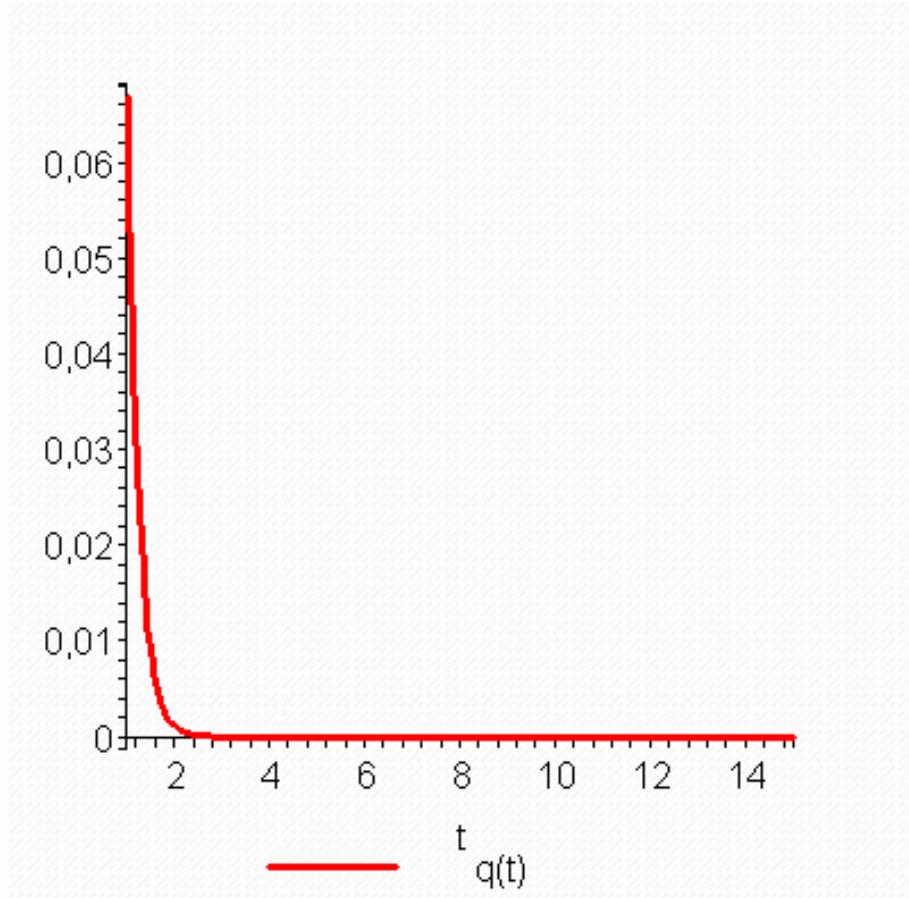
> q:=t->Mu*exp(-Mu*t);
q(0);
Int(q(t), t=0..infinity)=int(q(t),
t=0..infinity);
plot(q(t), t=1..T, thickness=2, color= red,
legend=`q(t)`);

$$q := t \otimes M e^{(-M t)}$$


```

4.12

$$\begin{aligned} & \stackrel{?}{=} \stackrel{?}{=} \\ & \stackrel{?}{=} \stackrel{?}{=} 4.12 e^{(-4.12 t)} dt = 1. \\ & \stackrel{?}{=} \stackrel{?}{=} \end{aligned}$$



3. Расчет теоретических характеристик системы массового обслуживания S с ограничением по длине очереди

```

> pf[0]:=1/(sum(Alf^k/k!, k=0..n)+Alf^n/n!*sum((Alf/n)^si, si=1..m));
# Вероятность того, что все каналы свободны:
pf0:=0.2912545977

> pf1_n:=[seq(pf[k]=Alf^k/k!*pf[0], k=1..n)];
# Вероятность того, что несколько каналов
заняты:
pf1_n:=[pf1 = 0.3591197468, pf2 = 0.2213990672, pf3 = 0.09099573315, pf4 = 0.02804965561,
         pf5 = 0.006917099539]

> pfn_s:=[seq(pf[n+s]=Alf^n/n!*(Alf/n)^s*pf[0], s=1..m)];
# Вероятность того, что все каналы заняты и
несколько заявок находятся в очереди:
pfn_s:=[pf6 = 0.001705770178, pf7 = 0.0004206462381, pf8 = 0.0001037321791, pf9 = 0.00002558055680,
         pf10 = 0.0000064451468]

```

```

 $pf_{10} = 0.000006308214980, pf_{11} = 0.000001555618064, pf_{12} = 3.836184350 \cdot 10^{-7},$ 
 $pf_{13} = 9.460105099 \cdot 10^{-8}, pf_{14} = 2.332880287 \cdot 10^{-8}, pf_{15} = 5.752928088 \cdot 10^{-9}]$ 

> Sumpfi:=pf[0]+add(rhs(pf1_n[i]), i=1..n)+add(rhs(pfn_s[i]), i=1..m); # Сумма
вероятностей всех состояний системы S
Sumpfi := 1.000000000

> Pleft:=Alf^n/n!* (Alf/n)^m*pf[0]; # Вероятность того, что заявка покинет систему
необслуженной
Pleft := 5.752928088 \cdot 10^{-9}

> q:=1-Pleft;
# Относительная пропускная способность системы S
q := 0.9999999942

```

4. Составление дифференциальных уравнений для вероятностей состояний системы массового обслуживания S с ограничением по длине очереди $pi(t)$

```

> diff(p[0](t), t)=-Lambda*p[0](t)+Mu*p[1](t);
 $\frac{d}{dt} p_0(t) = -5.08 p_0(t) + 4.12 p_1(t)$ 

> seq(diff(p[k](t), t)=Lambda*p[k-1](t)-
(Lambda+k*Mu)*p[k](t)+(k+1)*Mu*p[k+1](t),
k=1..n-1);
 $\frac{d}{dt} p_1(t) = 5.08 p_0(t) - 9.20 p_1(t) + 8.24 p_2(t), \frac{d}{dt} p_2(t) = 5.08 p_1(t) - 13.32 p_2(t) + 12.36 p_3(t),$ 
 $\frac{d}{dt} p_3(t) = 5.08 p_2(t) - 17.44 p_3(t) + 16.48 p_4(t), \frac{d}{dt} p_4(t) = 5.08 p_3(t) - 21.56 p_4(t) + 20.60 p_5(t)$ 

> diff(p[n](t), t)=Lambda*p[n-1](t)-
(Lambda+n*Mu)*p[n](t)+n*Mu*p[n+1](t);
 $\frac{d}{dt} p_5(t) = 5.08 p_4(t) - 25.68 p_5(t) + 20.60 p_6(t)$ 

> seq(diff(p[n+si](t), t)=-Lambda*p[n+si-1](t)-
(Lambda+n*Mu)*p[n+si](t)+n*Mu*p[n+si+1](t),
si=1..m-1);

```

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} p_6(t) &= -5.08 p_5(t) - 25.68 p_6(t) + 20.60 p_7(t), \quad \frac{d}{dt} p_7(t) = -5.08 p_6(t) - 25.68 p_7(t) + 20.60 p_8(t), \\ \frac{d}{dt} p_8(t) &= -5.08 p_7(t) - 25.68 p_8(t) + 20.60 p_9(t), \quad \frac{d}{dt} p_9(t) = -5.08 p_8(t) - 25.68 p_9(t) + 20.60 p_{10}(t), \\ \frac{d}{dt} p_{10}(t) &= -5.08 p_9(t) - 25.68 p_{10}(t) + 20.60 p_{11}(t), \quad \frac{d}{dt} p_{11}(t) = -5.08 p_{10}(t) - 25.68 p_{11}(t) + 20.60 p_{12}(t), \\ \frac{d}{dt} p_{12}(t) &= -5.08 p_{11}(t) - 25.68 p_{12}(t) + 20.60 p_{13}(t), \quad \frac{d}{dt} p_{13}(t) = -5.08 p_{12}(t) - 25.68 p_{13}(t) + 20.60 p_{14}(t), \\ \frac{d}{dt} p_{14}(t) &= -5.08 p_{13}(t) - 25.68 p_{14}(t) + 20.60 p_{15}(t)\end{aligned}$$

```
> diff(p[n+m](t), t)=Lambda*p[n+m-1](t)-
n*Mu*p[n+m](t);
```

$$\frac{d}{dt} p_{15}(t) = 5.08 p_{14}(t) - 20.60 p_{15}(t)$$

```
> ODESystem:=
```

```
{diff(p[0](t), t)=-Lambda*p[0](t)+Mu*p[1](t),
seq(diff(p[k](t), t)=Lambda*p[k-1](t)-
(Lambda+k*Mu)*p[k](t)+(k+1)*Mu*p[k+1](t),
k=1..n-1),
diff(p[n](t), t)=Lambda*p[n-1](t)-
(Lambda+n*Mu)*p[n](t)+n*Mu*p[n+1](t),
seq(diff(p[n+si](t), t)=-Lambda*p[n+si-1](t)-
(Lambda+n*Mu)*p[n+si](t)+n*Mu*p[n+si+1](t),
si=1..m-1),
diff(p[n+m](t), t)=Lambda*p[n+m-1](t)-
n*Mu*p[n+m](t)
};
```

$$ODESystem := \begin{cases} \frac{d}{dt} p_2(t) = 5.08 p_1(t) - 13.32 p_2(t) + 12.36 p_3(t), \\ \frac{d}{dt} p_5(t) = 5.08 p_4(t) - 25.68 p_5(t) + 20.60 p_6(t), \quad \frac{d}{dt} p_{14}(t) = -5.08 p_{13}(t) - 25.68 p_{14}(t) + 20.60 p_{15}(t), \\ \frac{d}{dt} p_0(t) = -5.08 p_0(t) + 4.12 p_1(t), \quad \frac{d}{dt} p_1(t) = 5.08 p_0(t) - 9.20 p_1(t) + 8.24 p_2(t), \\ \frac{d}{dt} p_3(t) = 5.08 p_2(t) - 17.44 p_3(t) + 16.48 p_4(t), \quad \frac{d}{dt} p_4(t) = 5.08 p_3(t) - 21.56 p_4(t) + 20.60 p_5(t), \\ \frac{d}{dt} p_6(t) = -5.08 p_5(t) - 25.68 p_6(t) + 20.60 p_7(t), \quad \frac{d}{dt} p_7(t) = -5.08 p_6(t) - 25.68 p_7(t) + 20.60 p_8(t), \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} p_8(t) = -5.08 p_7(t) - 25.68 p_8(t) + 20.60 p_9(t), \quad \frac{d}{dt} p_9(t) = -5.08 p_8(t) - 25.68 p_9(t) + 20.60 p_{10}(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_{10}(t) = -5.08 p_9(t) - 25.68 p_{10}(t) + 20.60 p_{11}(t), \quad \frac{d}{dt} p_{11}(t) = -5.08 p_{10}(t) - 25.68 p_{11}(t) + 20.60 p_{12}(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_{12}(t) = -5.08 p_{11}(t) - 25.68 p_{12}(t) + 20.60 p_{13}(t), \quad \frac{d}{dt} p_{13}(t) = -5.08 p_{12}(t) - 25.68 p_{13}(t) + 20.60 p_{14}(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_{15}(t) = 5.08 p_{14}(t) - 20.60 p_{15}(t) ?$$

5. Решение дифференциальных уравнений для вероятностей состояний $p_i(t)$ в общем виде

```
# PSi:=dsolve(ODESystem) ;
> PSi[1] :
> diff((PSi[1]), t) :
> PSi[2] :
> diff((PSi[2]), t) :
> PSi[3] :
> diff((PSi[3]), t) :
> PSi[4] :
> diff((PSi[4]), t) :
> PSi[5] :
> diff((PSi[5]), t) :
```

6. Решение дифференциальных уравнений для вероятностей состояний $p_i(t)$ при заданных начальных условиях

```
> ODESystemInit:=
      {diff(p[0](t), t)=-Lambda*p[0](t)+Mu*p[1](t),
       seq(diff(p[k](t), t)=Lambda*p[k-1](t)-(Lambda+k*Mu)*p[k](t)+(k+1)*Mu*p[k+1](t),
           k=1..n-1),
       diff(p[n](t), t)=Lambda*p[n-1](t)-(Lambda+n*Mu)*p[n](t)+n*Mu*p[n+1](t),
       seq(diff(p[n+si](t), t)=-Lambda*p[n+si-1](t)-
```

```

(Lambda+n*Mu)*p[n+si](t)+n*Mu*p[n+si+1](t),
si=1..m-1),
diff(p[n+m](t), t)=Lambda*p[n+m-
1](t)-n*Mu*p[n+m](t),
p[0](0)=1.0, seq(p[i](0)=0.0,
i=1..n+m)
} ;

```

$$ODESystemInit := \begin{cases} \frac{d}{dt} p_2(t) = 5.08 p_1(t) - 13.32 p_2(t) + 12.36 p_3(t), \\ \frac{d}{dt} p_5(t) = 5.08 p_4(t) - 25.68 p_5(t) + 20.60 p_6(t), \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} p_{14}(t) = -5.08 p_{13}(t) - 25.68 p_{14}(t) + 20.60 p_{15}(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_0(t) = -5.08 p_0(t) + 4.12 p_1(t), \quad \frac{d}{dt} p_1(t) = 5.08 p_0(t) - 9.20 p_1(t) + 8.24 p_2(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_3(t) = 5.08 p_2(t) - 17.44 p_3(t) + 16.48 p_4(t), \quad \frac{d}{dt} p_4(t) = 5.08 p_3(t) - 21.56 p_4(t) + 20.60 p_5(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_6(t) = -5.08 p_5(t) - 25.68 p_6(t) + 20.60 p_7(t), \quad \frac{d}{dt} p_7(t) = -5.08 p_6(t) - 25.68 p_7(t) + 20.60 p_8(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_8(t) = -5.08 p_7(t) - 25.68 p_8(t) + 20.60 p_9(t), \quad \frac{d}{dt} p_9(t) = -5.08 p_8(t) - 25.68 p_9(t) + 20.60 p_{10}(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_{10}(t) = -5.08 p_9(t) - 25.68 p_{10}(t) + 20.60 p_{11}(t), \quad \frac{d}{dt} p_{11}(t) = -5.08 p_{10}(t) - 25.68 p_{11}(t) + 20.60 p_{12}(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_{12}(t) = -5.08 p_{11}(t) - 25.68 p_{12}(t) + 20.60 p_{13}(t), \quad \frac{d}{dt} p_{13}(t) = -5.08 p_{12}(t) - 25.68 p_{13}(t) + 20.60 p_{14}(t),$$

$$\frac{d}{dt} p_{15}(t) = 5.08 p_{14}(t) - 20.60 p_{15}(t), \quad p_0(0) = 1.0, p_1(0) = 0., p_2(0) = 0., p_3(0) = 0., p_4(0) = 0., p_5(0) = 0.,$$

$$p_6(0) = 0., p_7(0) = 0., p_8(0) = 0., p_9(0) = 0., p_{10}(0) = 0., p_{11}(0) = 0., p_{12}(0) = 0., p_{13}(0) = 0., p_{14}(0) = 0.,$$

$$p_{15}(0) = 0. \quad ?$$

```
> # PSiInit:=dsolve(ODESystemInit);
```

7. Визуализация решений дифференциальных уравнений для вероятностей состояний $p_i(t)$

при заданных начальных условиях

```

> # p[1](t):=rhs(PSiInit[2]):#
# p[2](t):=rhs(PSiInit[4]):#
# p[3](t):=rhs(PSiInit[1]):
```

```

#   p[4](t) :=rhs(PSiInit[3]):  

#   plot(p[1](t), t=1..10);  

#   plot(p[2](t), t=1..10);  

#   plot(p[3](t), t=1..10);  

#   plot(p[4](t), t=1..10);

```

8. Решение системы уравнений для финальных вероятностей переходов p_{fi}

```

> SymPi:=solve({-Lambda*pff[0]+Mu*pff[1]=0,  

                  seq(Lambda*pff[k-1]-  

                      (Lambda+k*Mu)*pff[k]+(k+1)*Mu*pff[k+1]=0,  

                      k=1..n-1),  

                  Lambda*pff[n-1]-  

                  (Lambda+n*Mu)*pff[n]+n*Mu*pff[n+1]=0,  

                  seq(Lambda*pff[n+si-  

                      1]-(Lambda+n*Mu)*pff[n+si]+n*Mu*pff[n+si+1]=0,  

                      si=1..m-1),  

                  Lambda*pff[n+m-1]-  

                  n*Mu*pff[n+m]=0,  

                  add(pff[i],  

                      i=0..n+m)=1  

                  },  

                  {seq(pff[i],  

                      i=0..n+m)} );

```

SymPi := {pff₃ = 0.09099573309, pff₁₅ = 5.752928072 10⁻⁹, pff₀ = 0.2912545977, pff₆ = 0.001705770176, pff₇ = 0.0004206462376, pff₅ = 0.006917099534, pff₁₃ = 9.460105077 10⁻⁸, pff₁₂ = 3.836184342 10⁻⁷, pff₁₁ = 0.000001555618060, pff₁₀ = 0.000006308214968, pff₉ = 0.00002558055676, pff₈ = 0.0001037321790, pff₄ = 0.02804965559, pff₂ = 0.2213990671, pff₁₄ = 2.332880281 10⁻⁸, pff₁ = 0.3591197467}

```
> SumPi:=add(rhs(SymPi[i]), i=1..n+m+1);
```

SumPi := 0.999999999

9. Решение дифференциальных уравнений для

вероятностей состояний $p_i(t)$ методом Рунге-Кутта

```
> restart:  
# Сброс значений всех переменных при повторном  
запуске  
with(LinearAlgebra):  
with(CurveFitting):  
with(plots):  
n:=5;  
# Число каналов многоканальной системы массового  
обслуживания S с ожиданием  
m:=10;  
# Максимальное число заявок в очереди на  
обслуживание многоканальной системы S  
Lambda:=5.08; #  
Плотность потока заявок для многоканальной  
системы массового обслуживания S  
Mu:=4.12; #  
Параметр времени обслуживания многоканальной  
системы S  
Alf:=Lambda/Mu; # Расчетный  
параметр системы S вход/обслуживание  
DeltaT:=1; #  
Шаг интегрирования уравнений Эрланга методом  
Рунге-Кутта  
T:=15;  
# Число шагов визуализации и интегрирования  
методом Рунге-Кутта  
StudentNumber:=17; # Задание для студента  
номера варианта при расчете вероятностей  
переходов системы S  
ODESystemInit:=  
{diff(p[0](t), t)=-  
Lambda*p[0](t)+Mu*p[1](t),  
seq(diff(p[k](t), t)=Lambda*p[k-  
1](t)-(Lambda+k*Mu)*p[k](t)+(k+1)*Mu*p[k+1](t),  
k=1..n-1),  
diff(p[n](t), t)=Lambda*p[n-1](t)-  
(Lambda+n*Mu)*p[n](t)+n*Mu*p[n+1](t),
```

```

seq(diff(p[n+si] (t) , t)=-
Lambda*p[n+si-1] (t)-
(Lambda+n*Mu)*p[n+si] (t)+n*Mu*p[n+si+1] (t) ,
si=1..m-1) ,
diff(p[n+m] (t) , t)=Lambda*p[n+m-
1] (t)-n*Mu*p[n+m] (t) ,
p[0] (0)=1.0 , seq(p[i] (0)=0.0 ,
i=1..n+m)
} ;

```

Warning, the name LeastSquares has been rebound
 Warning, the name changecoords has been redefined
 $n := 5$

$m := 10$

$L := 5.08$

$M := 4.12$

$Alf := 1.233009709$

$DeltaT := 1$

$T := 15$

$StudentNumber := 17$

$ODESystemInit := \begin{cases} ? & \frac{d}{dt} p_1(t) = 5.08 p_0(t) - 9.20 p_1(t) + 8.24 p_2(t), \\ ? & \frac{d}{dt} p_2(t) = 5.08 p_1(t) - 13.32 p_2(t) + 12.36 p_3(t), \frac{d}{dt} p_3(t) = 5.08 p_2(t) - 17.44 p_3(t) + 16.48 p_4(t), \\ ? & \frac{d}{dt} p_4(t) = 5.08 p_3(t) - 21.56 p_4(t) + 20.60 p_5(t), \frac{d}{dt} p_5(t) = 5.08 p_4(t) - 25.68 p_5(t) + 20.60 p_6(t), \\ ? & \frac{d}{dt} p_6(t) = -5.08 p_5(t) - 25.68 p_6(t) + 20.60 p_7(t), \frac{d}{dt} p_7(t) = -5.08 p_6(t) - 25.68 p_7(t) + 20.60 p_8(t), \\ ? & \frac{d}{dt} p_9(t) = -5.08 p_8(t) - 25.68 p_9(t) + 20.60 p_{10}(t), \frac{d}{dt} p_{10}(t) = -5.08 p_9(t) - 25.68 p_{10}(t) + 20.60 p_{11}(t), \\ ? & \frac{d}{dt} p_{11}(t) = -5.08 p_{10}(t) - 25.68 p_{11}(t) + 20.60 p_{12}(t), \frac{d}{dt} p_{12}(t) = -5.08 p_{11}(t) - 25.68 p_{12}(t) + 20.60 p_{13}(t), \\ ? & \frac{d}{dt} p_{13}(t) = -5.08 p_{12}(t) - 25.68 p_{13}(t) + 20.60 p_{14}(t), \frac{d}{dt} p_{14}(t) = -5.08 p_{13}(t) - 25.68 p_{14}(t) + 20.60 p_{15}(t), \\ ? & \frac{d}{dt} p_{15}(t) = 5.08 p_{14}(t) - 20.60 p_{15}(t), p_1(0) = 0., p_2(0) = 0., p_3(0) = 0., p_4(0) = 0., p_5(0) = 0., p_6(0) = 0., \\ ? & p_7(0) = 0., p_8(0) = 0., p_9(0) = 0., p_{10}(0) = 0., p_{11}(0) = 0., p_{12}(0) = 0., p_{13}(0) = 0., p_{14}(0) = 0., p_{15}(0) = 0., \end{cases}$

$$\frac{d}{dt} p_0(t) = -5.08 p_0(t) + 4.12 p_1(t), p_0(0) = 1.0, \frac{d}{dt} p_8(t) = -5.08 p_7(t) - 25.68 p_8(t) + 20.60 p_9(t) ?$$

```

> Runge_Kutt:=dsolve(ODESystemInit, numeric,
method=rkf45, {seq(p[i](t), i=0..n+m)});
Runge_Kutt:=prod(x_rkf45) ... end proc;

> Lpi[0]:=Runge_Kutt(0.0);
Lpi0 := [t = 0., p0(t) = 1., p1(t) = 0., p2(t) = 0., p3(t) = 0., p4(t) = 0., p5(t) = 0., p6(t) = 0., p7(t) = 0., p8(t) = 0.,
p9(t) = 0., p10(t) = 0., p11(t) = 0., p12(t) = 0., p13(t) = 0., p14(t) = 0., p15(t) = 0.]

> add(rhs(Lpi[0][i]), i=2..n+m+2);
1.

> Lpi[1]:=Runge_Kutt(0.5);
Lpi1 := [t = 0.5, p0(t) = 0.340947384189586922, p1(t) = 0.366626886179718726,
p2(t) = 0.196807062042040294, p3(t) = 0.0699290478011730942, p4(t) = 0.0179834659722008032,
p5(t) = 0.00295588150009783082, p6(t) = -0.000480990873217040981,
p7(t) = 0.0000773441941606259012, p8(t) = -0.0000122644723314732769,
p9(t) = 0.00000191330319118644698, p10(t) = -2.92912808353403655 10-7,
p11(t) = 4.38881221022720962 10-8, p12(t) = -6.42573790315836824 10-9,
p13(t) = 9.03785932107027134 10-10, p14(t) = -1.48150907382263930 10-10,
p15(t) = -2.43300666822969274 10-11]

> add(rhs(Lpi[1][i]), i=2..n+m+2);
0.9948354752

> Lpi[2]:=Runge_Kutt(1.0);
Lpi2 := [t = 1.0, p0(t) = 0.295555169740299606, p1(t) = 0.356915981783103964,
p2(t) = 0.214376264893024276, p3(t) = 0.0845571460412643944, p4(t) = 0.0237296250396139066,
p5(t) = 0.00410461572663643401, p6(t) = -0.000709427321138331310,
p7(t) = 0.000122501200062002404, p8(t) = -0.0000211302213552323575,
p9(t) = 0.00000364013634128291335, p10(t) = -6.26218786206192592 10-7,
p11(t) = 1.07476895817019282 10-7, p12(t) = -1.85113579143996556 10-8,
p13(t) = 3.02999874618722191 10-9, p14(t) = -7.15369298826214752 10-10,
p15(t) = -1.68954304840626148 10-10]

> add(rhs(Lpi[2][i]), i=2..n+m+2);

```

0.9786338518

> **Lpi[3]:=Runge_Kutt(1.5);**

$Lpi_3 := [t = 1.5, p_0(t) = 0.286213544236109174, p_1(t) = 0.349803781980962346,$
 $p_2(t) = 0.212478425238188384, p_3(t) = 0.0846530453924127790, p_4(t) = 0.0239472623493153306,$
 $p_5(t) = 0.00416074768888044252, p_6(t) = -0.000722857123369889752,$
 $p_7(t) = 0.000125572225305657362, p_8(t) = -0.0000218116817224484696,$
 $p_9(t) = 0.00000378813963176650392, p_{10}(t) = -6.57875427459016678 \cdot 10^{-7},$
 $p_{11}(t) = 1.14139816984668836 \cdot 10^{-7}, p_{12}(t) = -1.99312175151031828 \cdot 10^{-8},$
 $p_{13}(t) = 3.29143191882903562 \cdot 10^{-9}, p_{14}(t) = -8.09757797243293456 \cdot 10^{-10},$
 $p_{15}(t) = -1.99149148638418078 \cdot 10^{-10}]$

> **add(rhs(Lpi[3][i]), i=2..n+m+2);**

0.9606409370

> **Lpi[4]:=Runge_Kutt(2.0);**

$Lpi_4 := [t = 2.0, p_0(t) = 0.280490572394702653, p_1(t) = 0.343236637358365182,$
 $p_2(t) = 0.208731223546831406, p_3(t) = 0.0832455820990807005, p_4(t) = 0.0235682782287928578,$
 $p_5(t) = 0.00409674657127121964, p_6(t) = -0.000712109545727838728,$
 $p_7(t) = 0.000123779958681629818, p_8(t) = -0.0000215154173442108834,$
 $p_9(t) = 0.00000373971331404797910, p_{10}(t) = -6.50076789964125307 \cdot 10^{-7},$
 $p_{11}(t) = 1.12907505839305068 \cdot 10^{-7}, p_{12}(t) = -1.97429590389136502 \cdot 10^{-8},$
 $p_{13}(t) = 3.26299874071853600 \cdot 10^{-9}, p_{14}(t) = -8.06113990264782594 \cdot 10^{-10},$
 $p_{15}(t) = -1.99060469424200050 \cdot 10^{-10}]$

> **add(rhs(Lpi[4][i]), i=2..n+m+2);**

0.9427623804

> **Lpi[5]:=Runge_Kutt(5.0);**

$Lpi_5 := [t = 5.0, p_0(t) = 0.250510816421309290, p_1(t) = 0.306594487803761472,$
 $p_2(t) = 0.186473053367351954, p_3(t) = 0.0743775114390351905, p_4(t) = 0.0210594814558259479,$
 $p_5(t) = 0.00366088858374711028, p_6(t) = -0.000636380889392754408,$
 $p_7(t) = 0.000110611335199102404, p_8(t) = -0.0000192264844653646133,$
 $p_9(t) = 0.00000334792335774215258, p_{10}(t) = -5.81930015469857459 \cdot 10^{-7},$
 $p_{11}(t) = 9.98718243511481420 \cdot 10^{-8}, p_{12}(t) = -1.74858921464577080 \cdot 10^{-8},$

$p_{13}(t) = 3.06333747514295616 \cdot 10^{-9}$, $p_{14}(t) = -7.32039341683141883 \cdot 10^{-10}$,
 $p_{15}(t) = -1.71023640935911516 \cdot 10^{-10}]$

> add(rhs(Lpi[5][i]), i=2..n+m+2);
 0.8421340936

> Lpi[6]:=Runge_Kutt(10.0);

$Lpi_6 := [t = 10.0, p_0(t) = 0.207549936565027016, p_1(t) = 0.254015629133477305,$
 $p_2(t) = 0.154494241991991299, p_3(t) = 0.0616222310055043744, p_4(t) = 0.0174479708411122426,$
 $p_5(t) = 0.00303304143426933381, p_6(t) = -0.000527245370352833116,$
 $p_7(t) = 0.0000916526933278326690, p_8(t) = -0.0000159324270092257176,$
 $p_9(t) = 0.00000276953284138237898, p_{10}(t) = -4.81491273482991492 \cdot 10^{-7},$
 $p_{11}(t) = 8.36344618647448142 \cdot 10^{-8}, p_{12}(t) = -1.46277343899484288 \cdot 10^{-8},$
 $p_{13}(t) = 2.41762204544735632 \cdot 10^{-9}, p_{14}(t) = -5.97759666906672786 \cdot 10^{-10},$
 $p_{15}(t) = -1.47557322166583962 \cdot 10^{-10}]$

> add(rhs(Lpi[6][i]), i=2..n+m+2);
 0.6977138845

> Lpi[7]:=Runge_Kutt(200.0);

$Lpi_7 := [t = 200.0, p_0(t) = 0.000163069438140189501, p_1(t) = 0.000199584909997749294,$
 $p_2(t) = 0.000121364781452930250, p_3(t) = 0.0000484477166035522940,$
 $p_4(t) = 0.0000136824135535196056, p_5(t) = 0.00000239166001333866370,$
 $p_6(t) = -4.11414174644895684 \cdot 10^{-7}, p_7(t) = 7.29347065951768224 \cdot 10^{-8},$
 $p_8(t) = -1.22094080566235500 \cdot 10^{-8}, p_9(t) = 2.27310908562936344 \cdot 10^{-9},$
 $p_{10}(t) = -3.43346721494645653 \cdot 10^{-10}, p_{11}(t) = 7.48489358400078100 \cdot 10^{-11},$
 $p_{12}(t) = -6.74356127923232769 \cdot 10^{-12}, p_{13}(t) = 2.14095880501125717 \cdot 10^{-12},$
 $p_{14}(t) = 5.99255337388246958 \cdot 10^{-13}, p_{15}(t) = -5.09220877531093638 \cdot 10^{-13}]$

> add(rhs(Lpi[7][i]), i=2..n+m+2);
 0.0005481922310

> Lp1:=[seq(rhs(Lpi[t][2]), t=0..7)];

$Lp1 := [1., 0.340947384189586922, 0.295555169740299606, 0.286213544236109174,$
 $0.280490572394702653, 0.250510816421309290, 0.207549936565027016, 0.000163069438140189501]$

> Lp2:=[seq(rhs(Lpi[t][3]), t=0..7)];

```

Lp2 := [0., 0.366626886179718726, 0.356915981783103964, 0.349803781980962346,
        0.343236637358365182, 0.306594487803761472, 0.254015629133477305, 0.000199584909997749294]

> Lp3 := [seq(rhs(Lpi[t][4]), t=0..7)];
Lp3 := [0., 0.196807062042040294, 0.214376264893024276, 0.212478425238188384,
        0.208731223546831406, 0.186473053367351954, 0.154494241991991299, 0.000121364781452930250]

> Lp4 := [seq(rhs(Lpi[t][5]), t=0..7)];
Lp4 := [0., 0.0699290478011730942, 0.0845571460412643944, 0.0846530453924127790,
        0.0832455820990807005, 0.0743775114390351905, 0.0616222310055043744,
        0.0000484477166035522940]

> Lp5 := [seq(rhs(Lpi[t][6]), t=0..7)];
Lp5 := [0., 0.0179834659722008032, 0.0237296250396139066, 0.0239472623493153306,
        0.0235682782287928578, 0.0210594814558259479, 0.0174479708411122426,
        0.0000136824135535196056]

> Lp6 := [seq(rhs(Lpi[t][7]), t=0..7)];
Lp6 := [0., 0.00295588150009783082, 0.00410461572663643401, 0.00416074768888044252,
        0.00409674657127121964, 0.00366088858374711028, 0.00303304143426933381,
        0.00000239166001333866370]

> Lp7 := [seq(rhs(Lpi[t][8]), t=0..7)];
Lp7 := [0., -0.000480990873217040981, -0.000709427321138331310, -0.000722857123369889752,
        -0.000712109545727838728, -0.000636380889392754408, -0.000527245370352833116,
        -4.11414174644895684 10-7]

> Lp8 := [seq(rhs(Lpi[t][9]), t=0..7)];
Lp8 := [0., 0.0000773441941606259012, 0.000122501200062002404, 0.000125572225305657362,
        0.000123779958681629818, 0.000110611335199102404, 0.0000916526933278326690,
        7.29347065951768224 10-8]

> Lp9 := [seq(rhs(Lpi[t][10]), t=0..7)];
Lp9 := [0., -0.0000122644723314732769, -0.0000211302213552323575, -0.0000218116817224484696,
        -0.0000215154173442108834, -0.0000192264844653646133, -0.0000159324270092257176,
        -1.22094080566235500 10-8]

> Lp10 := [seq(rhs(Lpi[t][11]), t=0..7)];
Lp10 := [0., 0.00000191330319118644698, 0.00000364013634128291335, 0.00000378813963176650392,
        0.00000373971331404797910, 0.00000334792335774215258, 0.00000276953284138237898,
        2.27310908562936344 10-9]

> Lp11 := [seq(rhs(Lpi[t][12]), t=0..7)];

```

$Lp11 := [0., -2.92912808353403655 \cdot 10^{-7}, -6.26218786206192592 \cdot 10^{-7}, -6.57875427459016678 \cdot 10^{-7},$
 $-6.50076789964125307 \cdot 10^{-7}, -5.81930015469857459 \cdot 10^{-7}, -4.81491273482991492 \cdot 10^{-7},$
 $-3.43346721494645653 \cdot 10^{-10}]$

> **Lp12 := [seq(rhs(Lpi[t][13]), t=0..7)];**

$Lp12 := [0., 4.38881221022720962 \cdot 10^{-8}, 1.07476895817019282 \cdot 10^{-7}, 1.14139816984668836 \cdot 10^{-7},$
 $1.12907505839305068 \cdot 10^{-7}, 9.98718243511481420 \cdot 10^{-8}, 8.36344618647448142 \cdot 10^{-8},$
 $7.48489358400078100 \cdot 10^{-11}]$

> **Lp13 := [seq(rhs(Lpi[t][14]), t=0..7)];**

$Lp13 := [0., -6.42573790315836824 \cdot 10^{-9}, -1.85113579143996556 \cdot 10^{-8}, -1.99312175151031828 \cdot 10^{-8},$
 $-1.97429590389136502 \cdot 10^{-8}, -1.74858921464577080 \cdot 10^{-8}, -1.46277343899484288 \cdot 10^{-8},$
 $-6.74356127923232769 \cdot 10^{-12}]$

> **Lp14 := [seq(rhs(Lpi[t][15]), t=0..7)];**

$Lp14 := [0., 9.03785932107027134 \cdot 10^{-10}, 3.02999874618722191 \cdot 10^{-9}, 3.29143191882903562 \cdot 10^{-9},$
 $3.26299874071853600 \cdot 10^{-9}, 3.06333747514295616 \cdot 10^{-9}, 2.41762204544735632 \cdot 10^{-9},$
 $2.14095880501125717 \cdot 10^{-12}]$

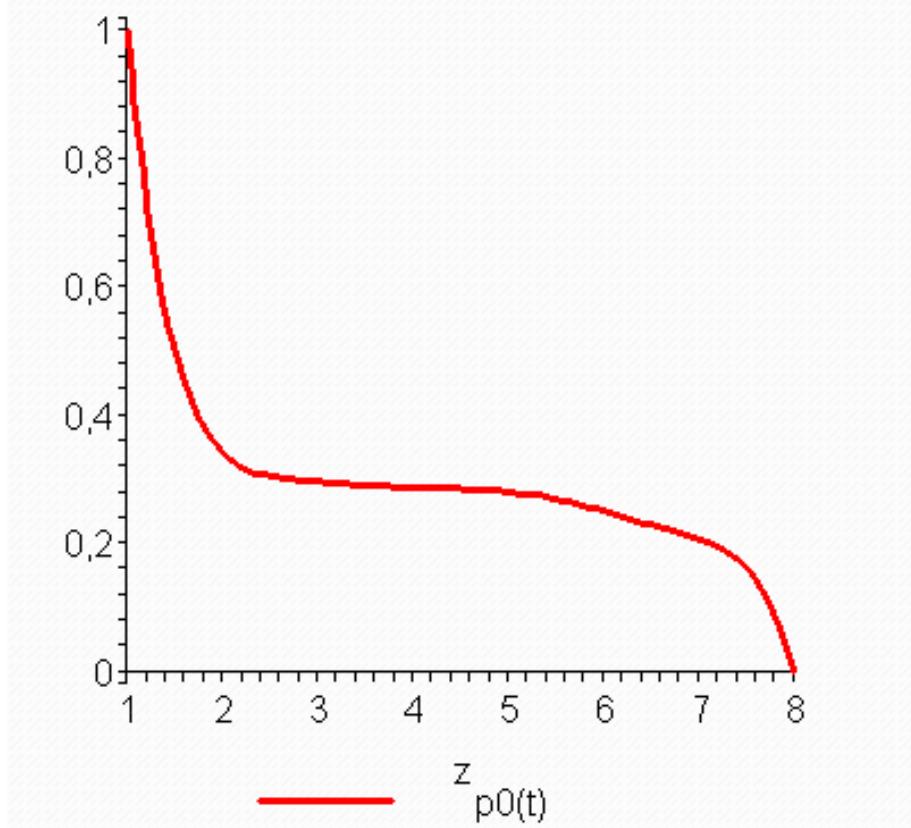
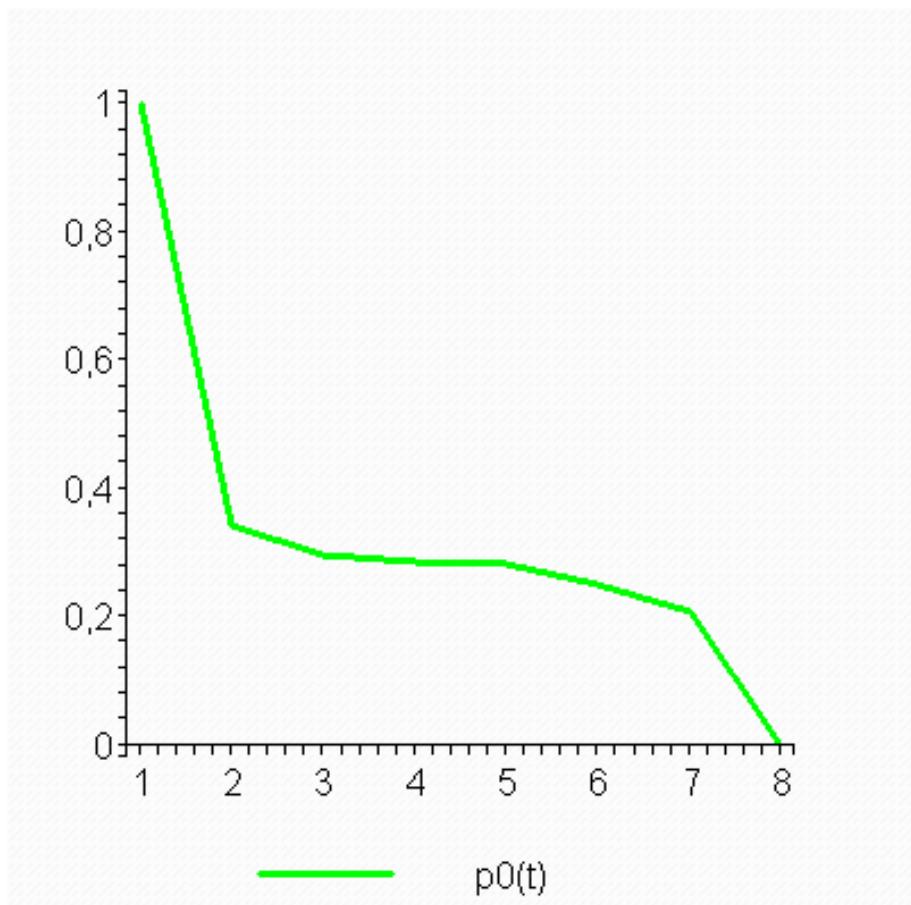
> **Lp15 := [seq(rhs(Lpi[t][16]), t=0..7)];**

$Lp15 := [0., -1.48150907382263930 \cdot 10^{-10}, -7.15369298826214752 \cdot 10^{-10}, -8.09757797243293456 \cdot 10^{-10},$
 $-8.06113990264782594 \cdot 10^{-10}, -7.32039341683141883 \cdot 10^{-10}, -5.97759666906672786 \cdot 10^{-10},$
 $5.99255337388246958 \cdot 10^{-13}]$

> **Lp16 := [seq(rhs(Lpi[t][17]), t=0..7)];**

$Lp16 := [0., -2.43300666822969274 \cdot 10^{-11}, -1.68954304840626148 \cdot 10^{-10}, -1.99149148638418078 \cdot 10^{-10},$
 $-1.99060469424200050 \cdot 10^{-10}, -1.71023640935911516 \cdot 10^{-10}, -1.47557322166583962 \cdot 10^{-10},$
 $-5.09220877531093638 \cdot 10^{-13}]$

> listplot([seq(Lp1[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend= `p0(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp1[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend= `p0(t)`);

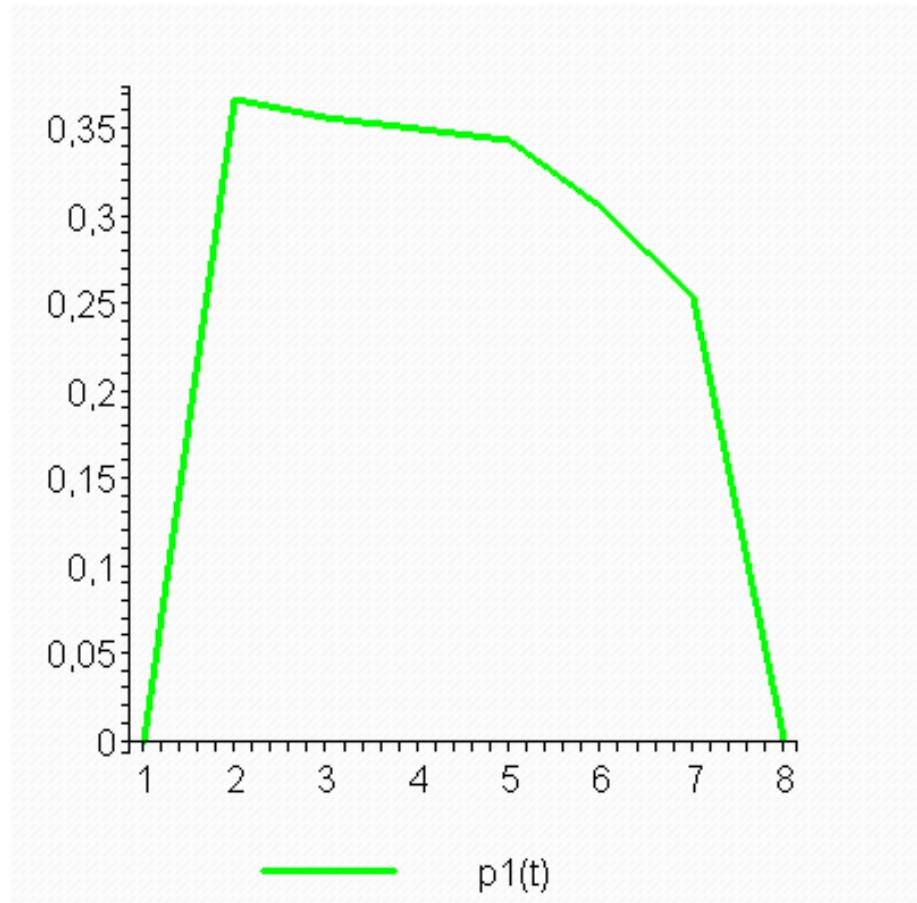


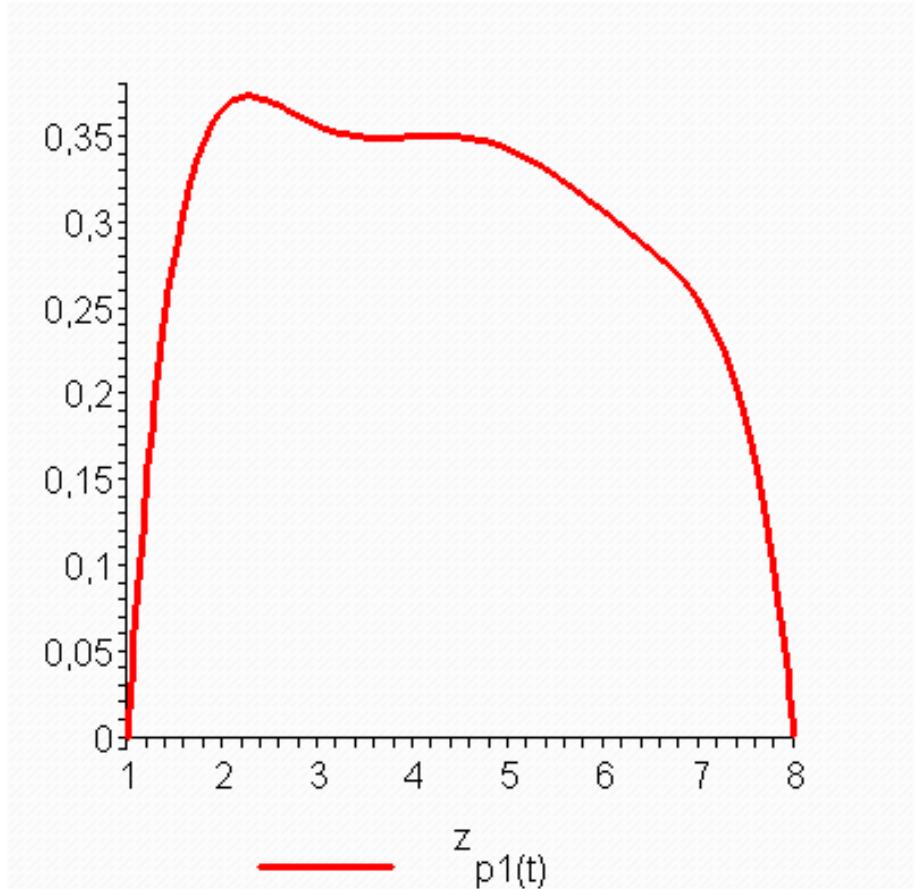
```
> listplot([seq(Lp2[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p1(t)');
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp2[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p1(t)`);

```

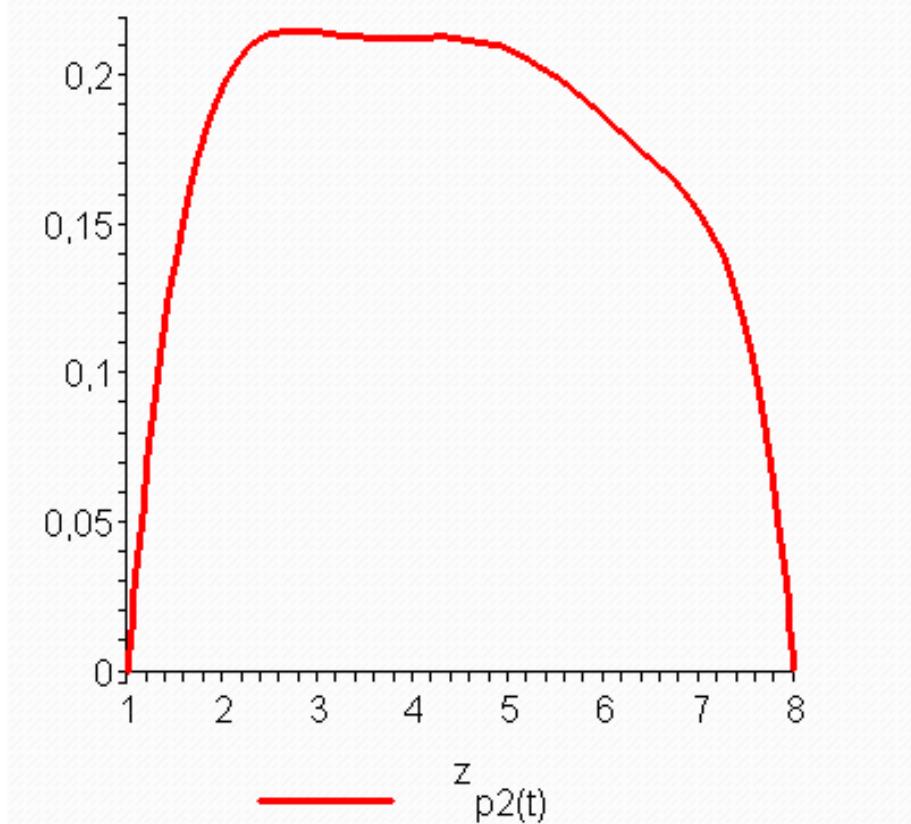
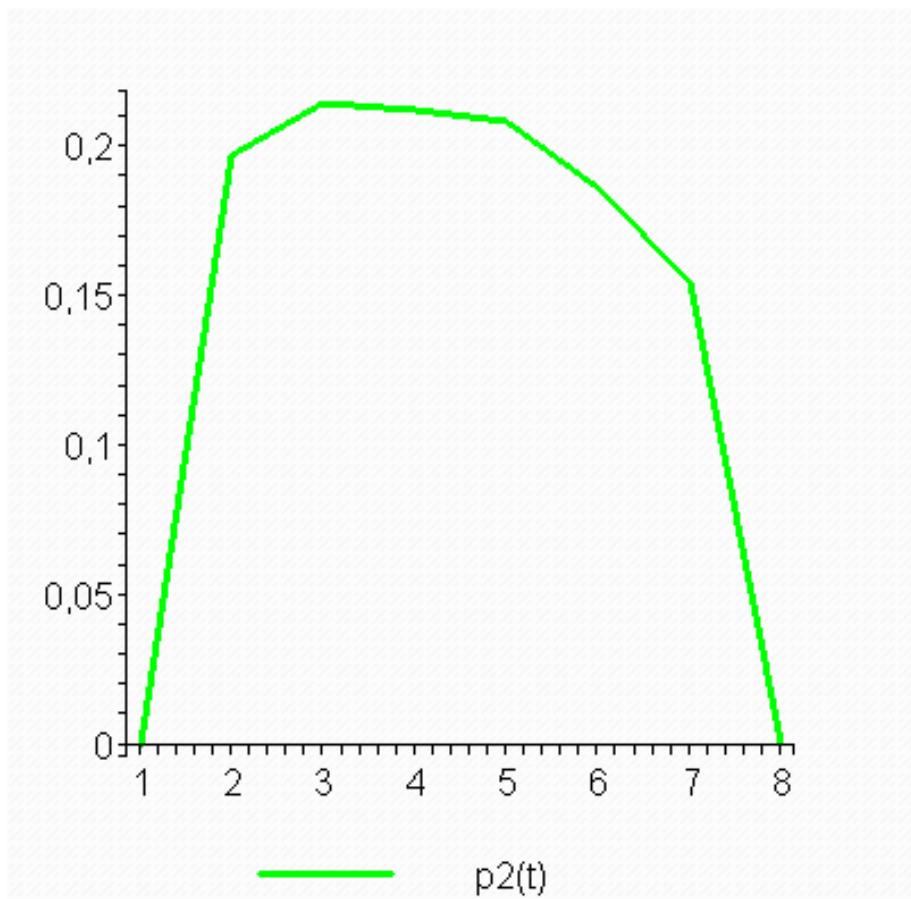




```

> listplot([seq(Lp3[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p2(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp3[t], t=1..8)], z, form=Lagrange ),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p2(t)`);

```

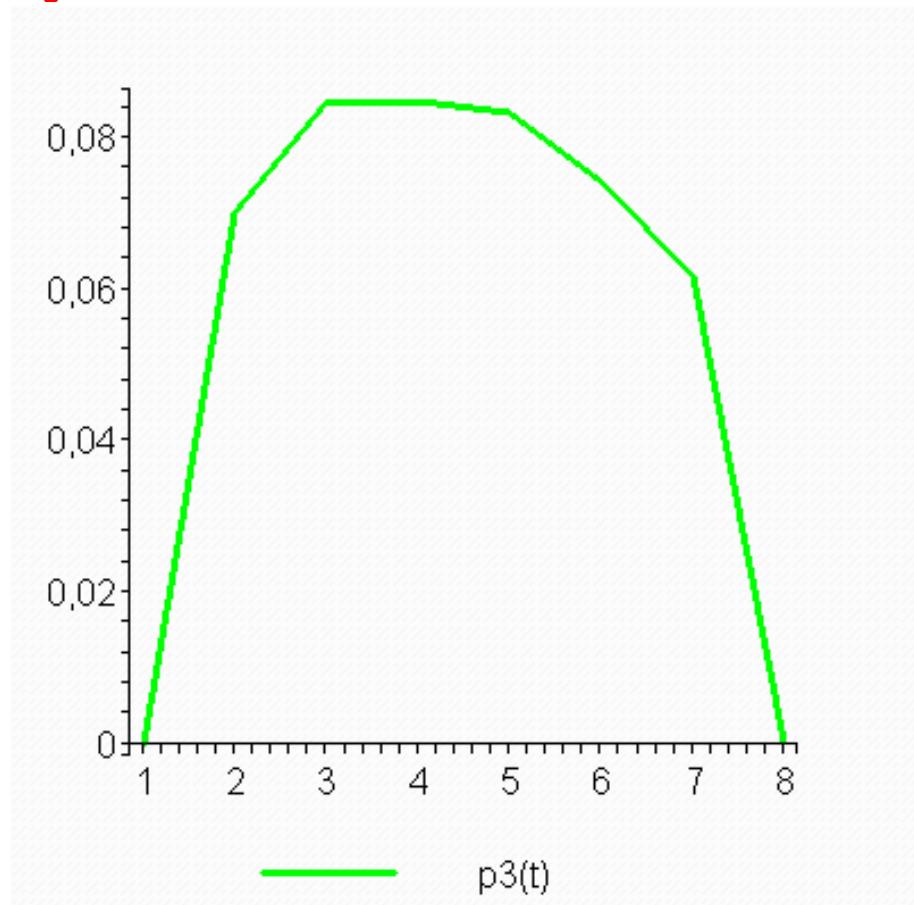


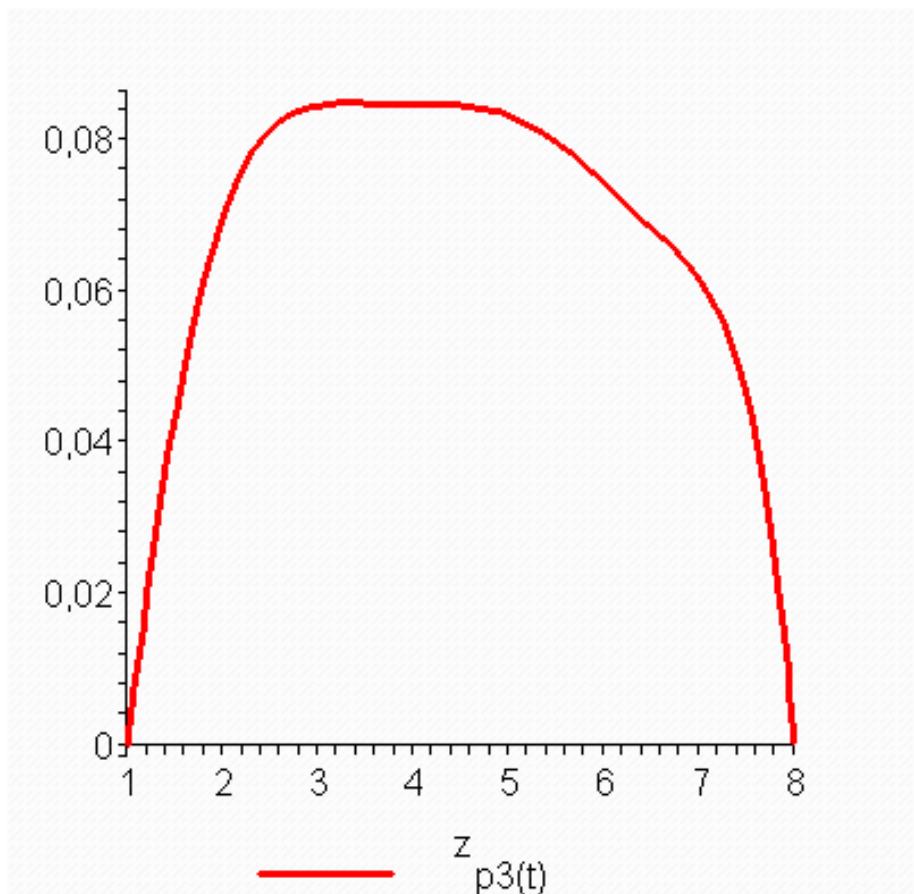
```
> listplot([seq(Lp4[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p3(t)');
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp4[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p3(t)`);

```

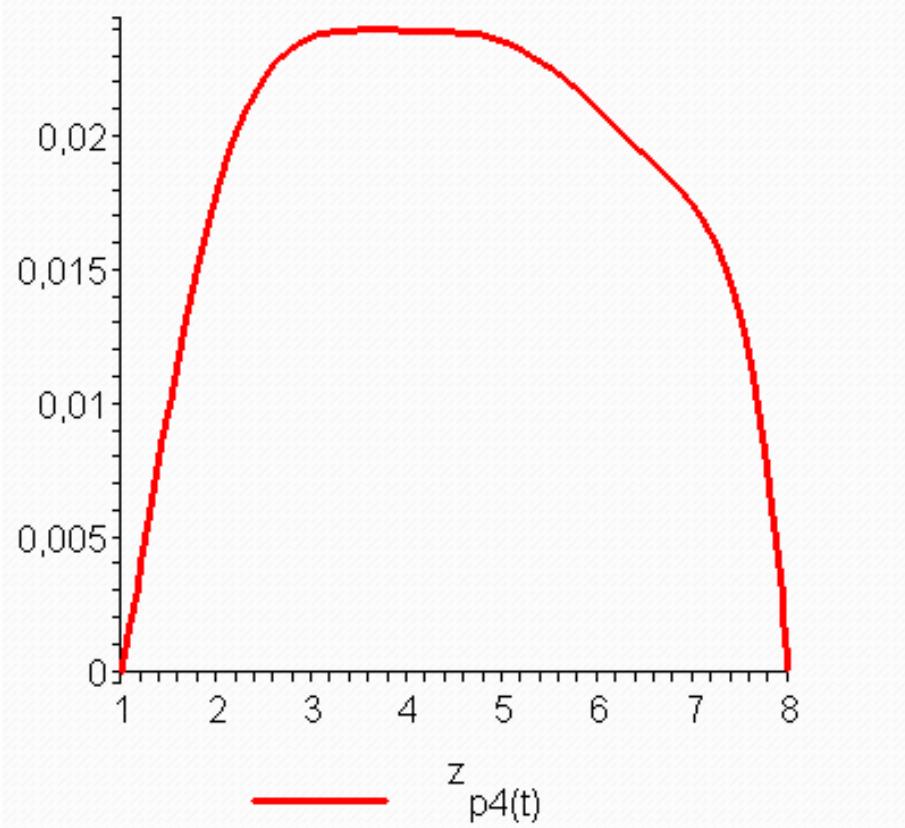
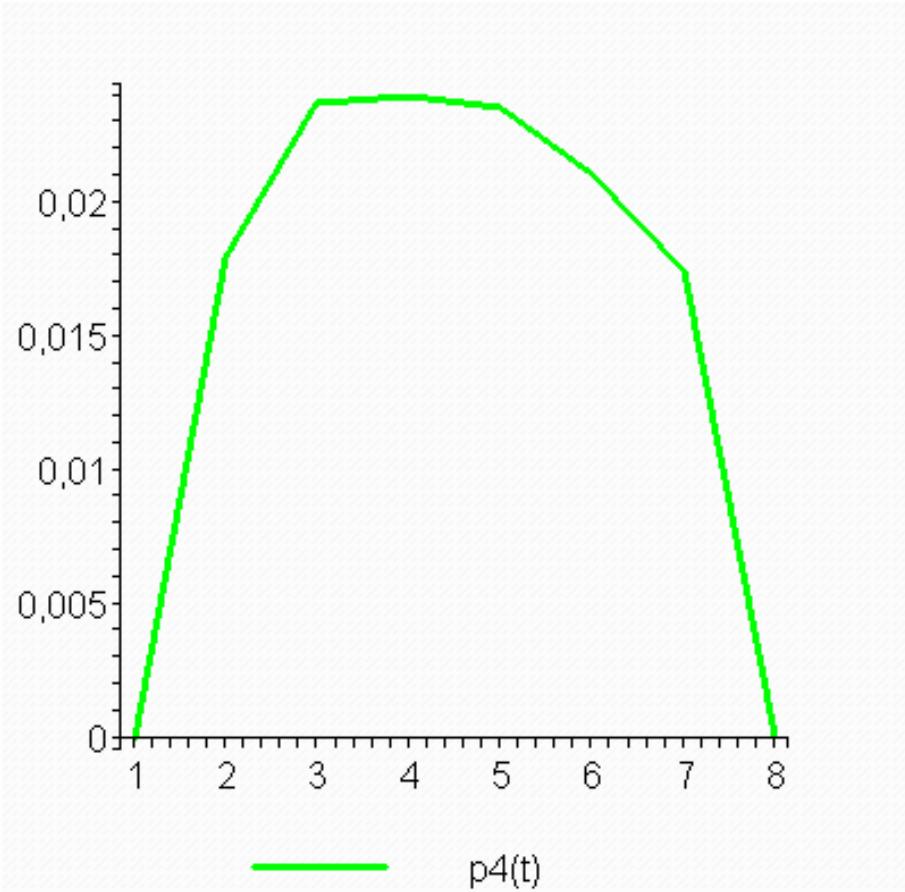




```

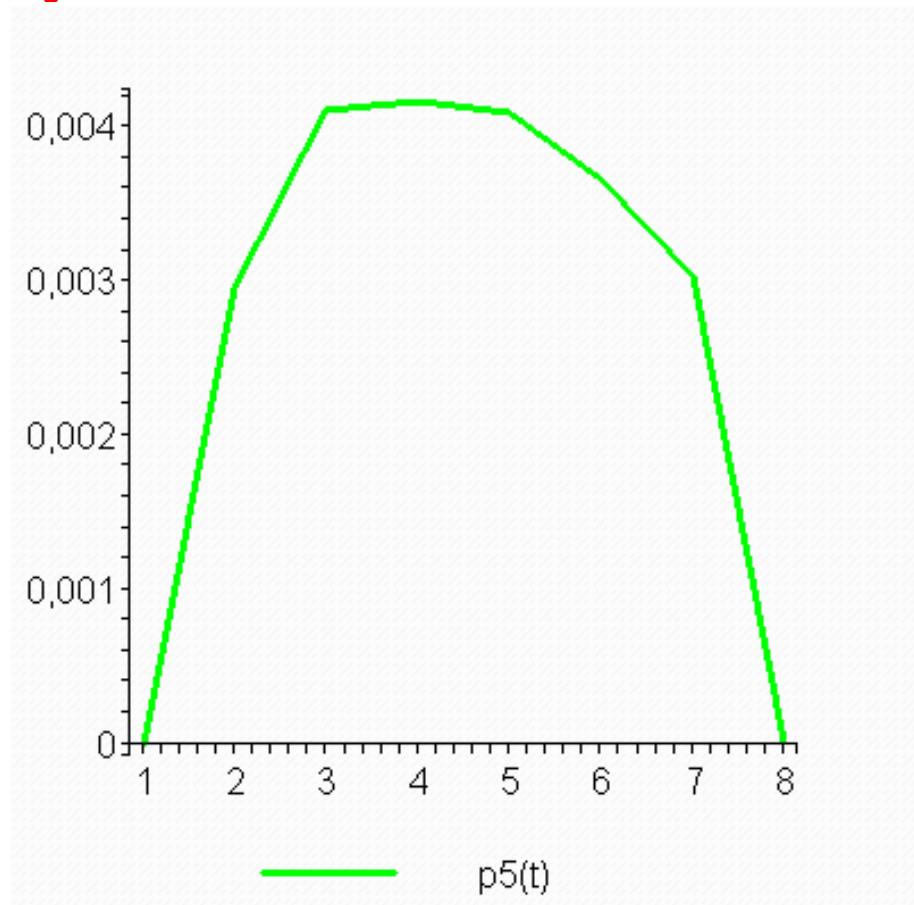
> listplot([seq(Lp5[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p4(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp5[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p4(t)`);

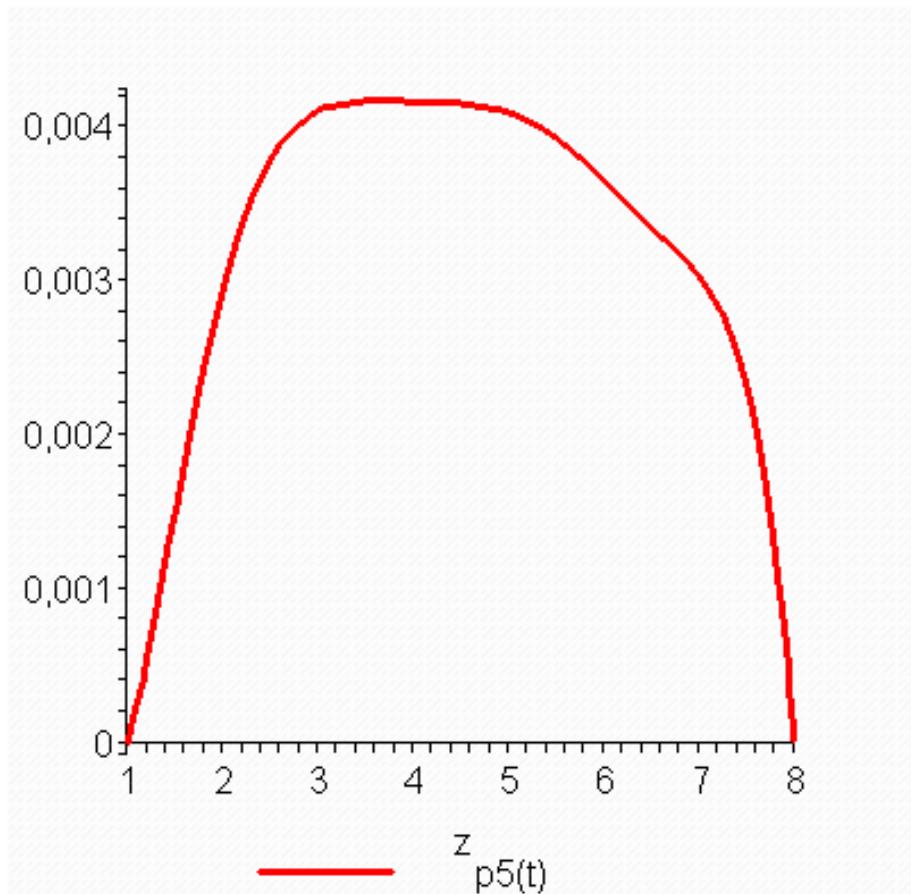
```



```
> listplot([seq(Lp6[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p5(t)');
```

```
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp6[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p5(t)`);
```

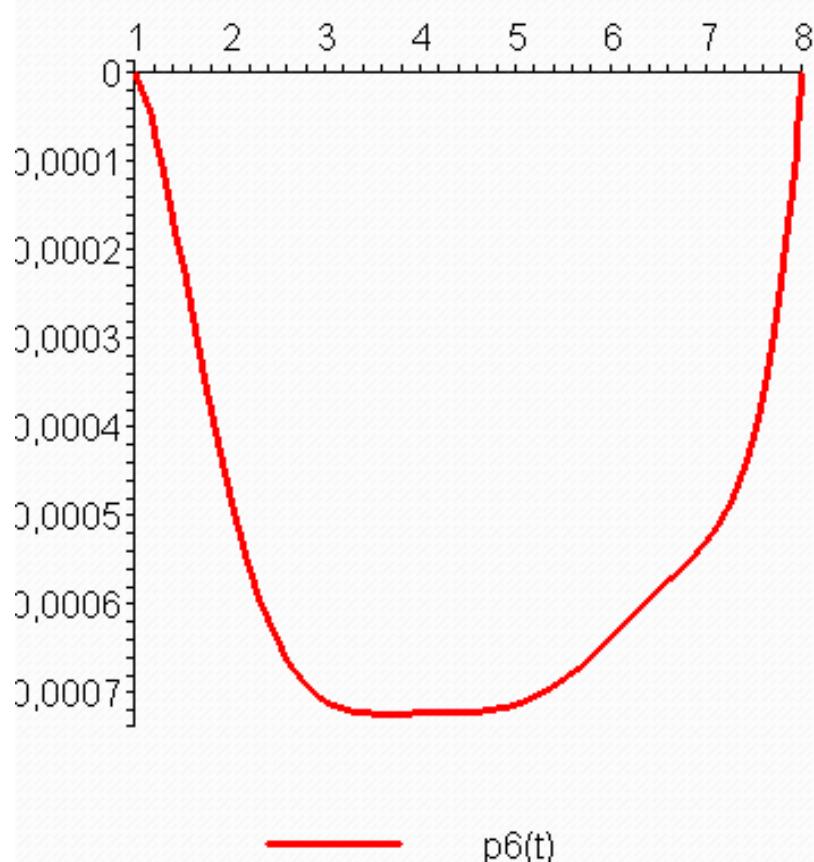
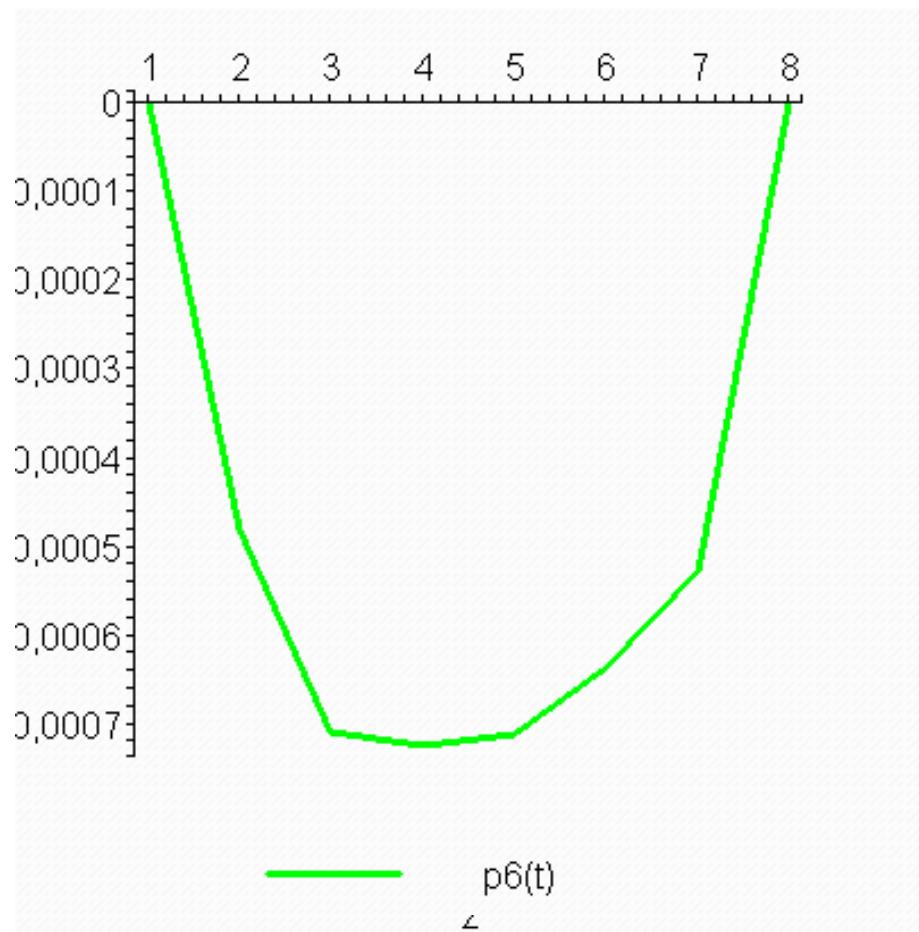




```

> listplot([seq(Lp7[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p6(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp7[t], t=1..8)], z, form=Lagrange ),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p6(t)`);

```

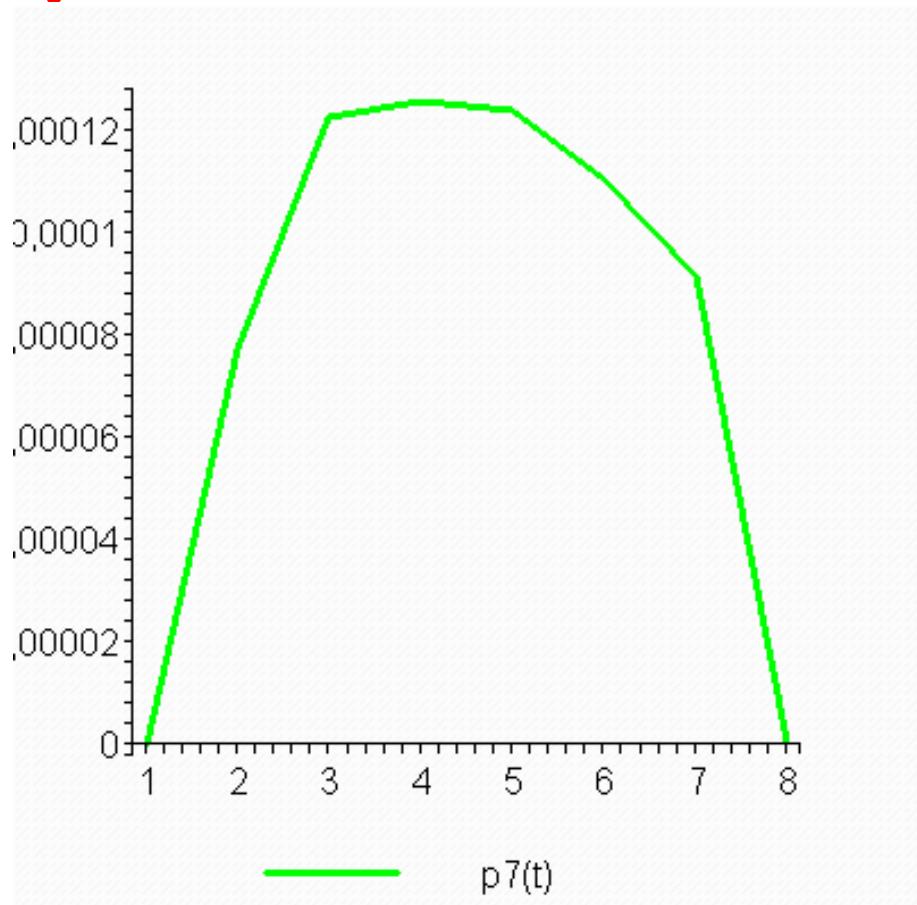


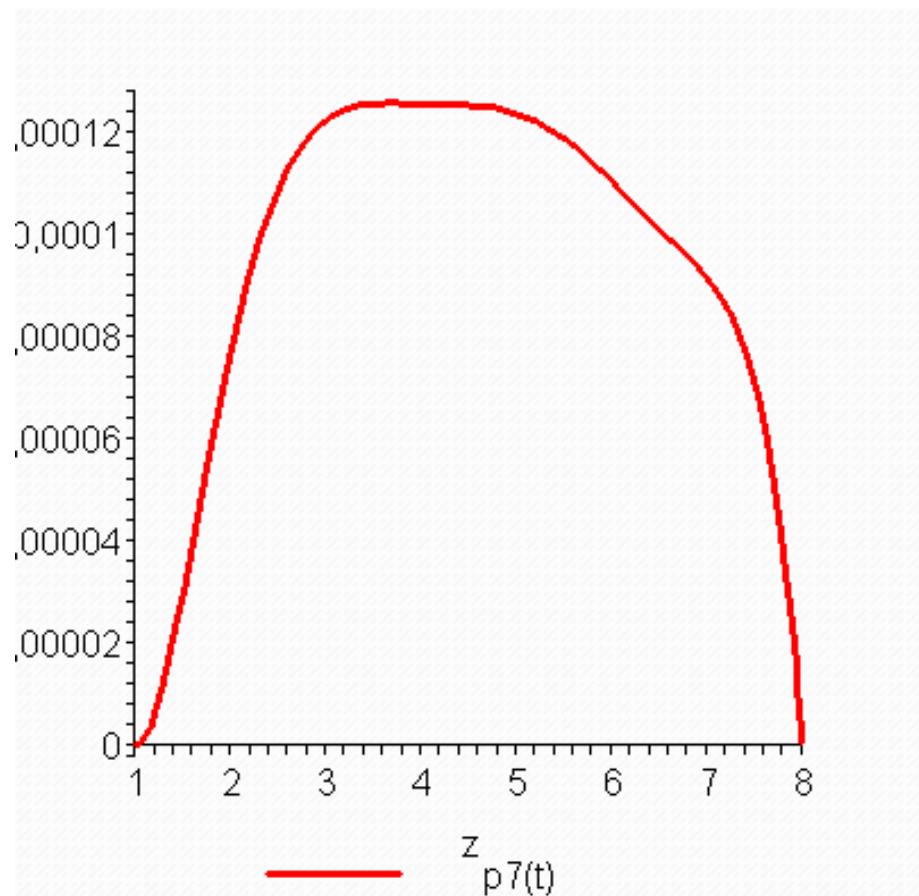
```
> listplot([seq(Lp8[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p7(t)');
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp8[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p7(t)`);

```

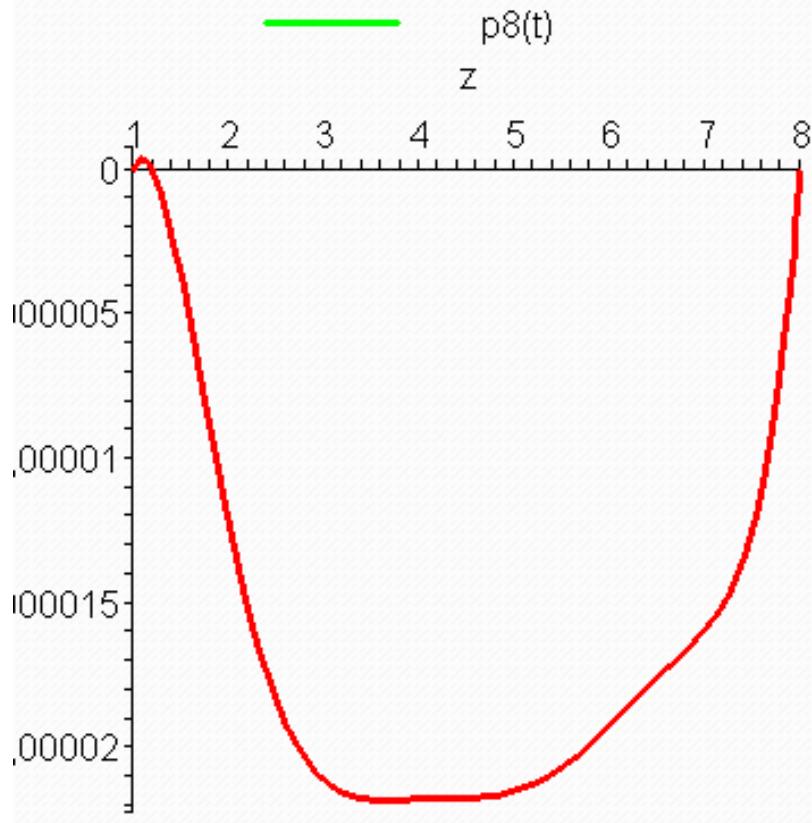
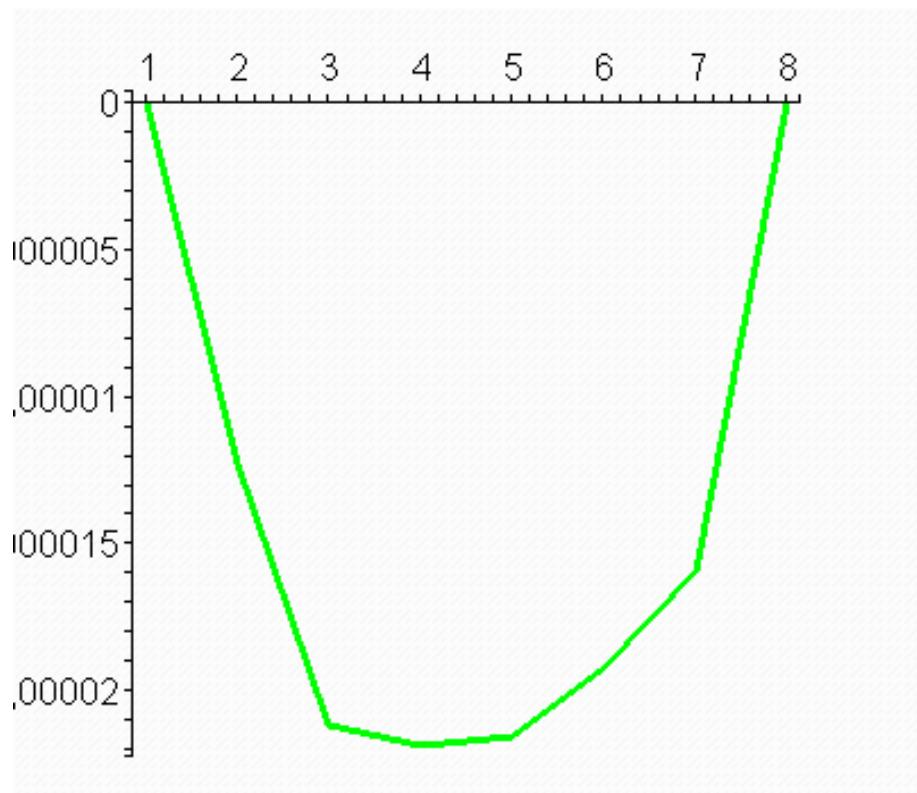




```

> listplot([seq(Lp9[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p8(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp9[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p8(t)`);

```

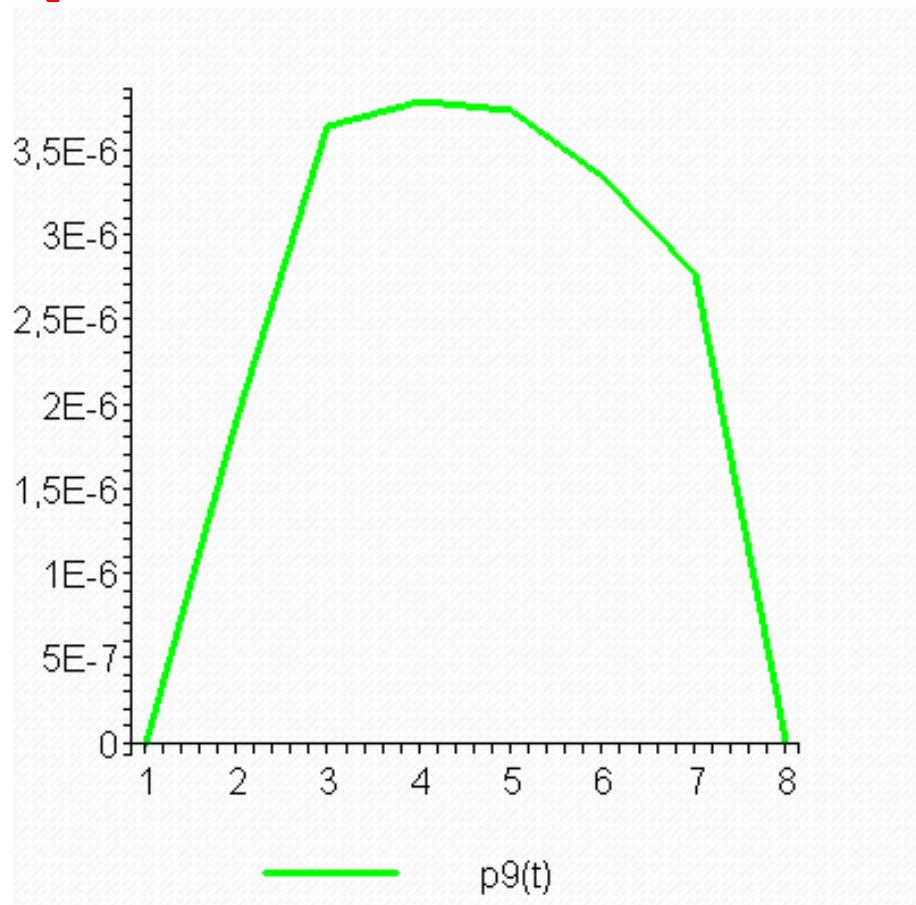


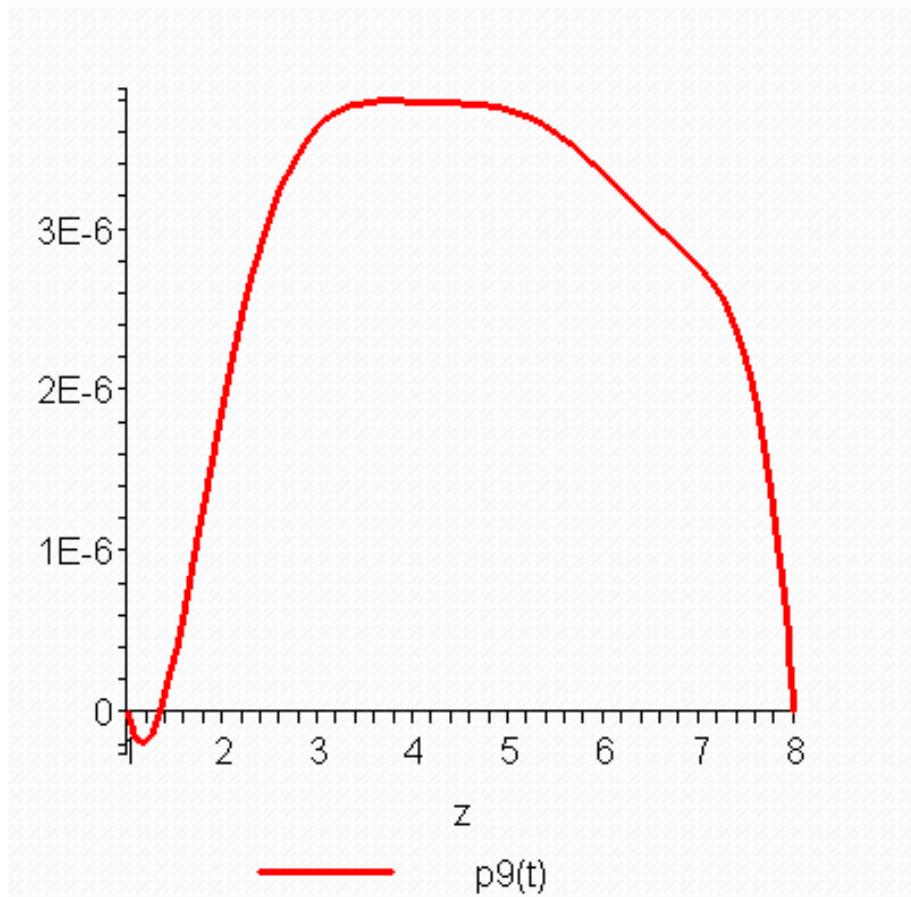
```
> listplot([seq(Lp10[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p9(t)');
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Ip10[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p9(t)` );

```

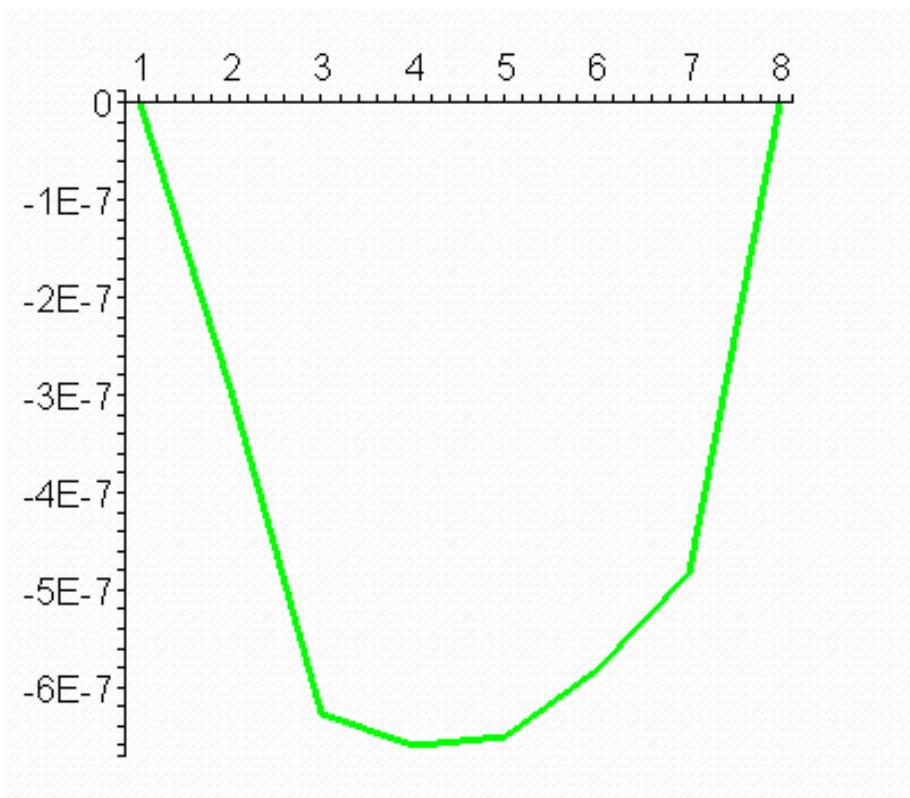




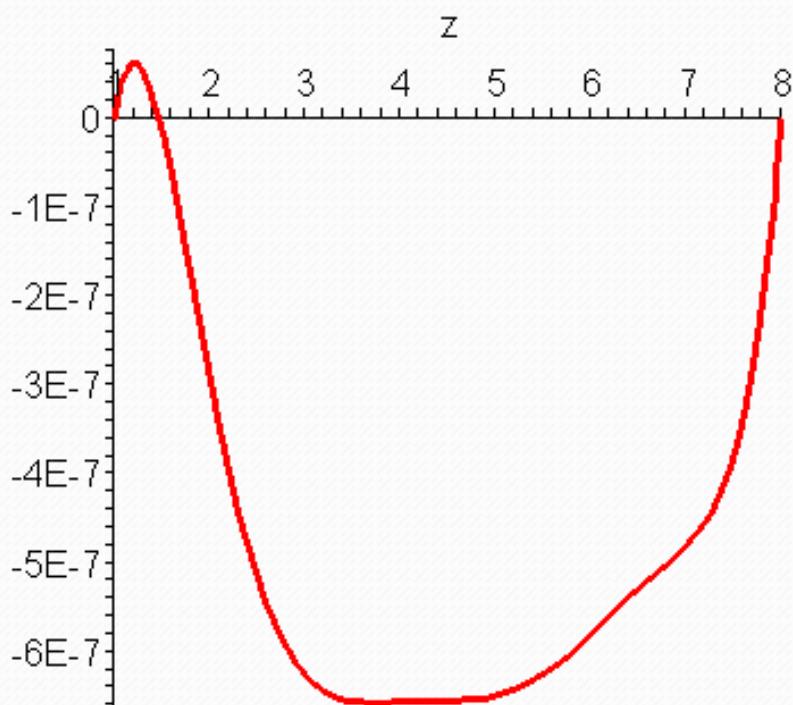
```

> listplot([seq(Lp11[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p10(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp11[t], t=1..8)], z, form=Lagrange ),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p10(t)`);

```



— $p_{10}(t)$



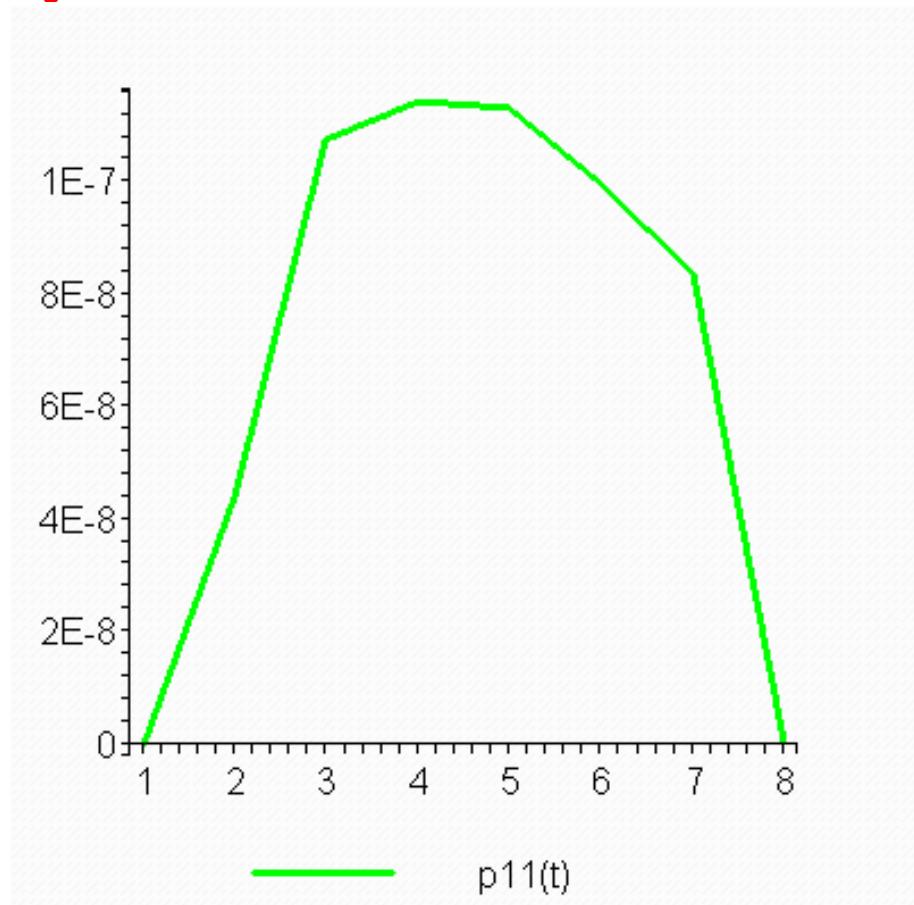
— $p_{10}(t)$

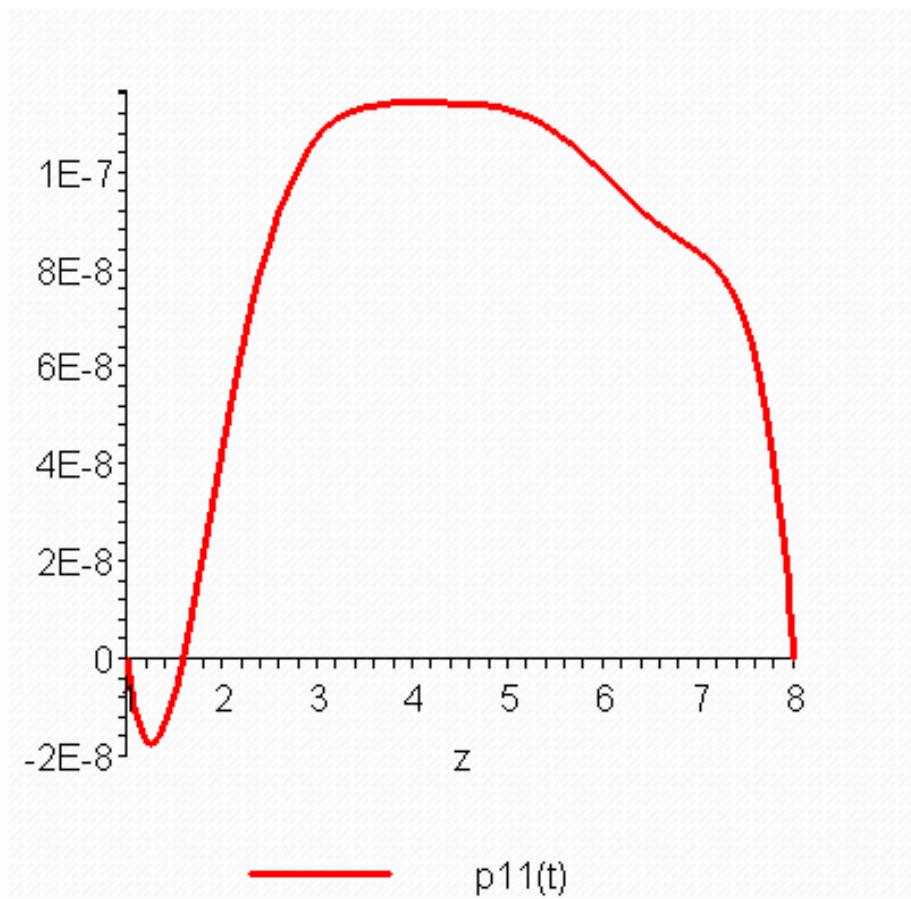
```
> listplot([seq(Lp12[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p11(t)');
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp12[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p11(t)` );

```

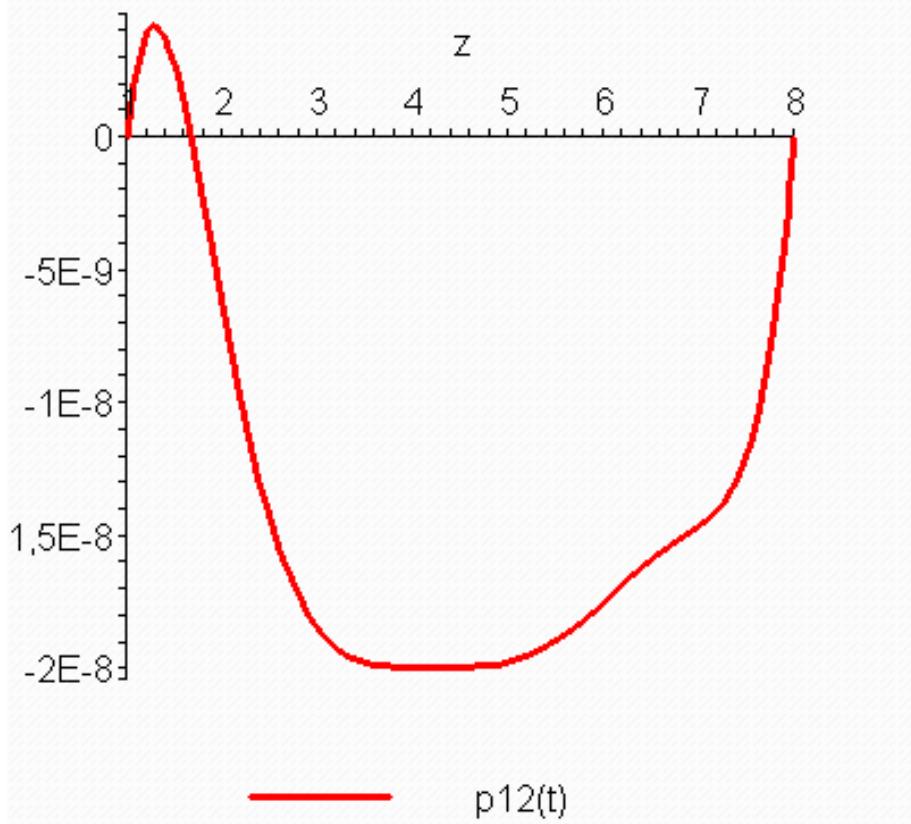
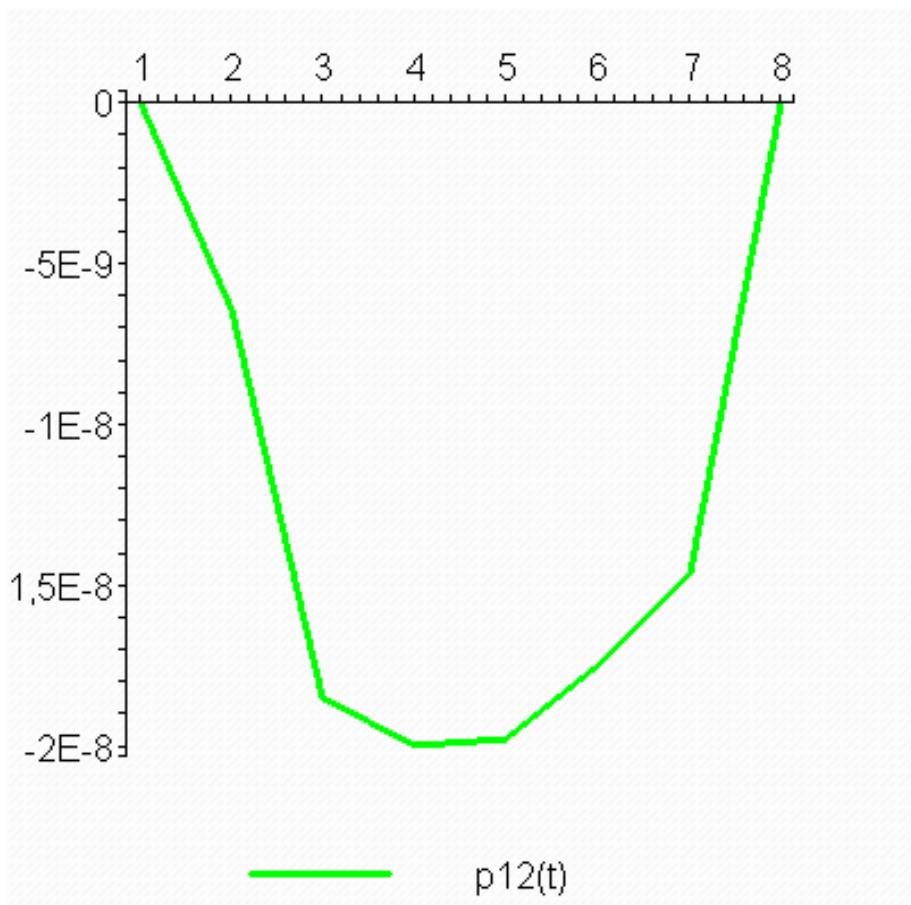




```

> listplot([seq(Lp13[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p12(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp13[t], t=1..8)], z, form=Lagrange ),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p12(t)`);

```

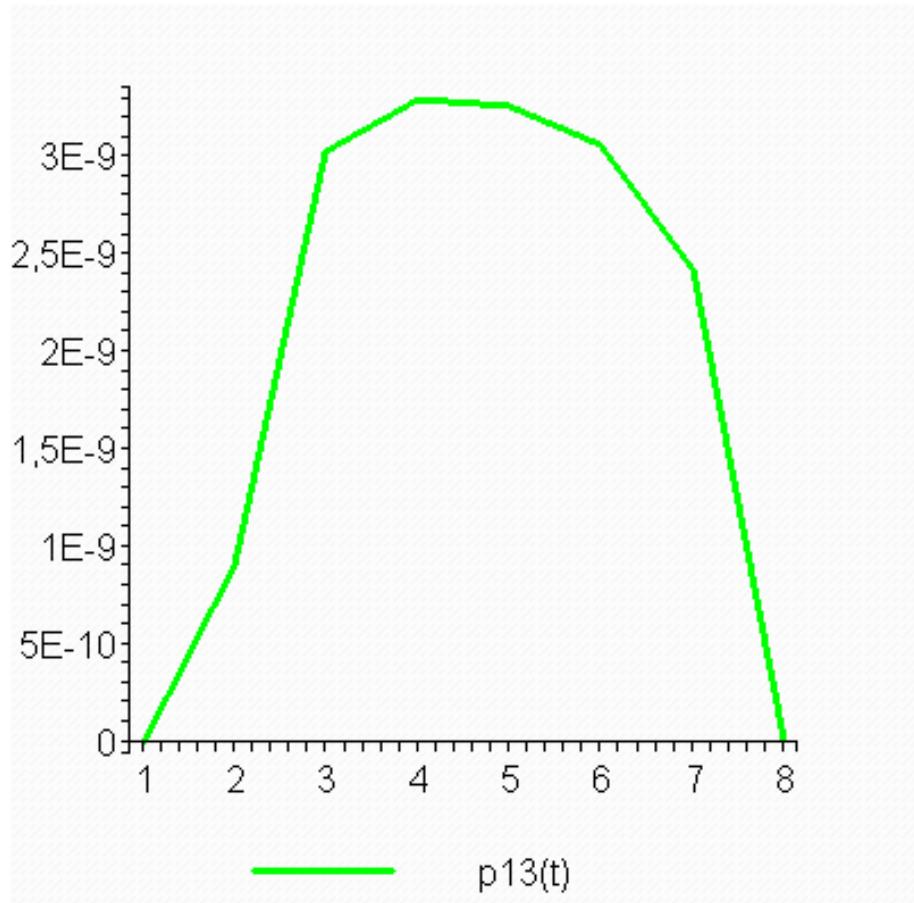


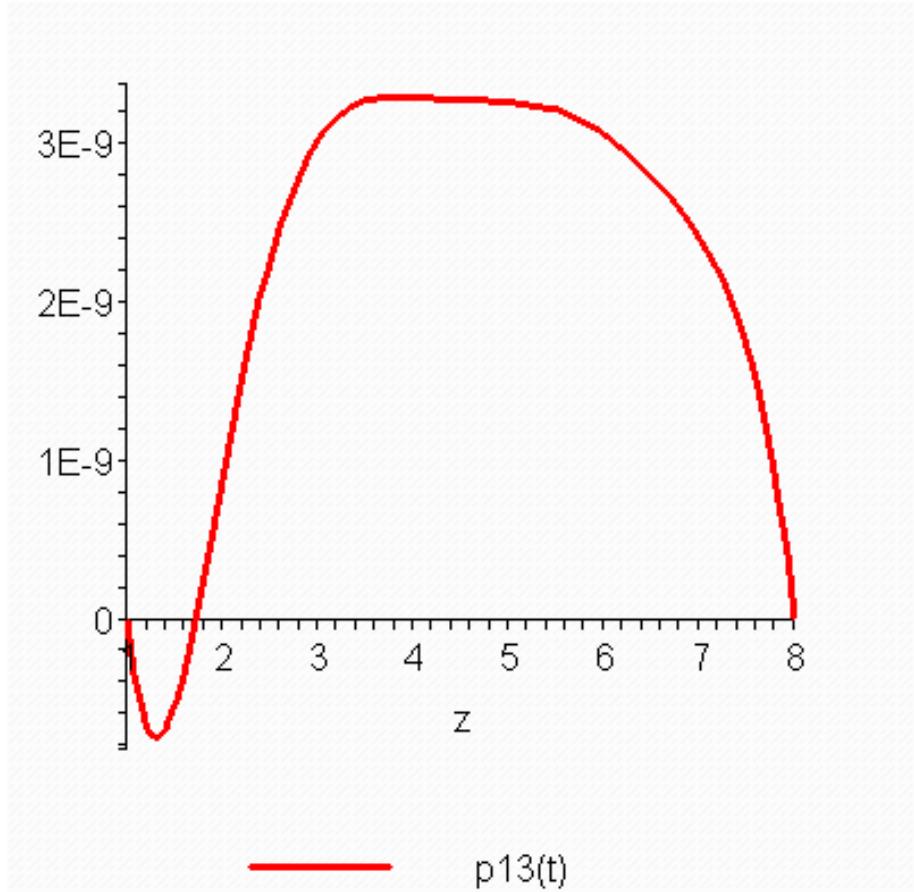
```
> listplot([seq(Lp14[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p13(t)');
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp14[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p13(t)` );

```

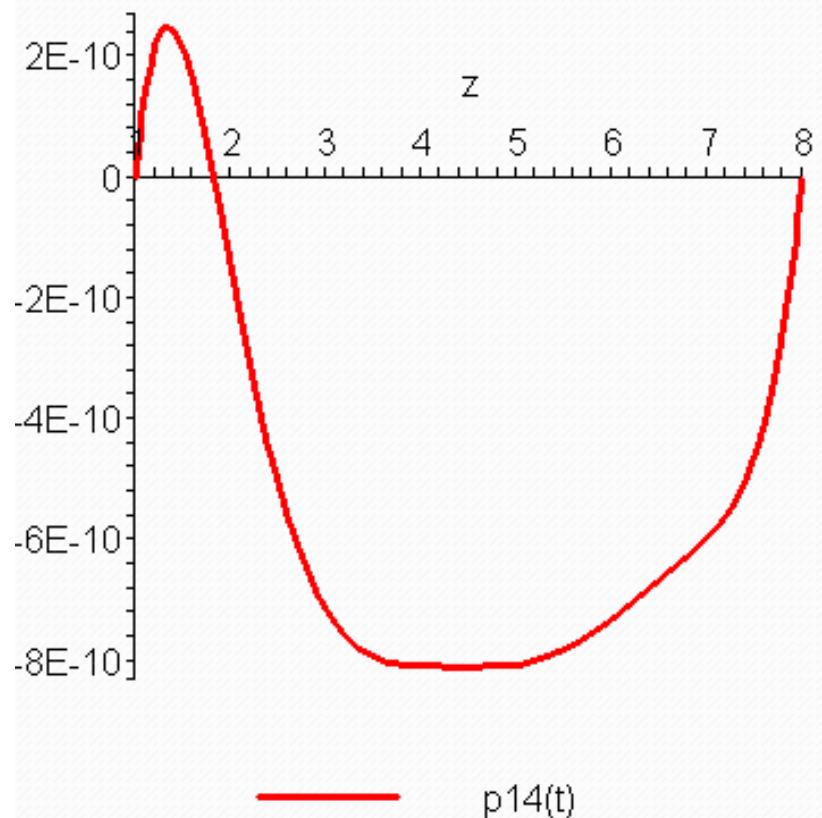
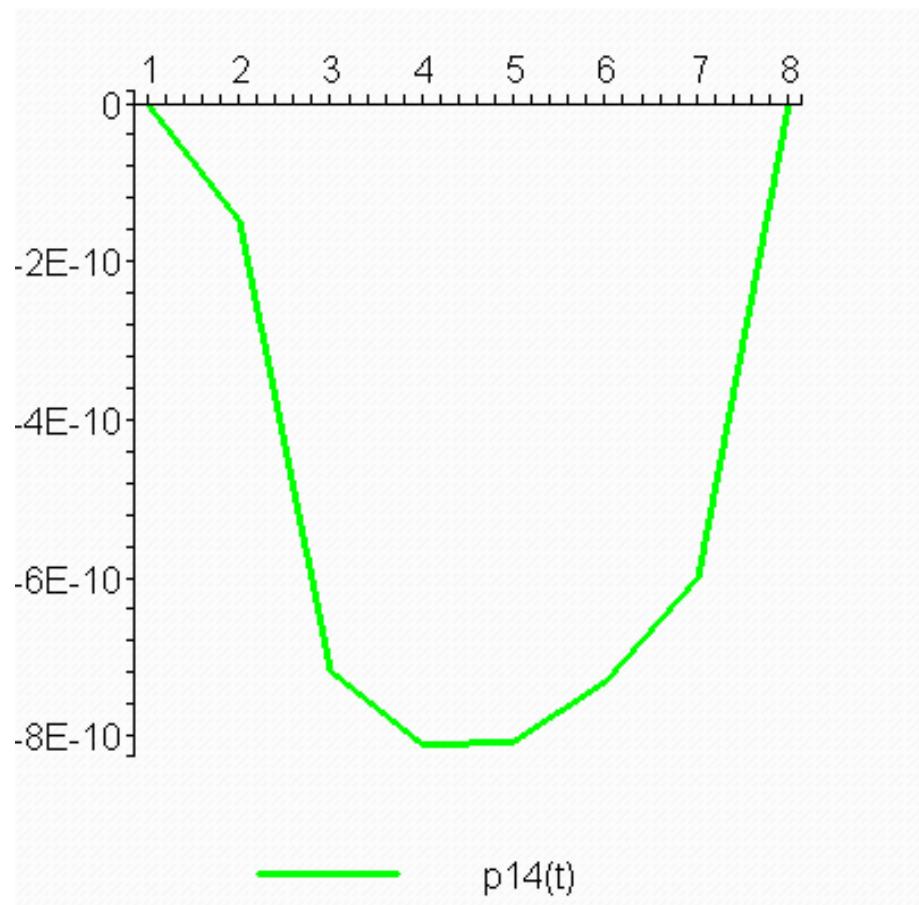




```

> listplot([seq(Lp15[t], t=1..8)], thickness=2,
color= green, legend=`p14(t)`);
plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp15[t], t=1..8)], z, form=Lagrange ),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p14(t)`);

```



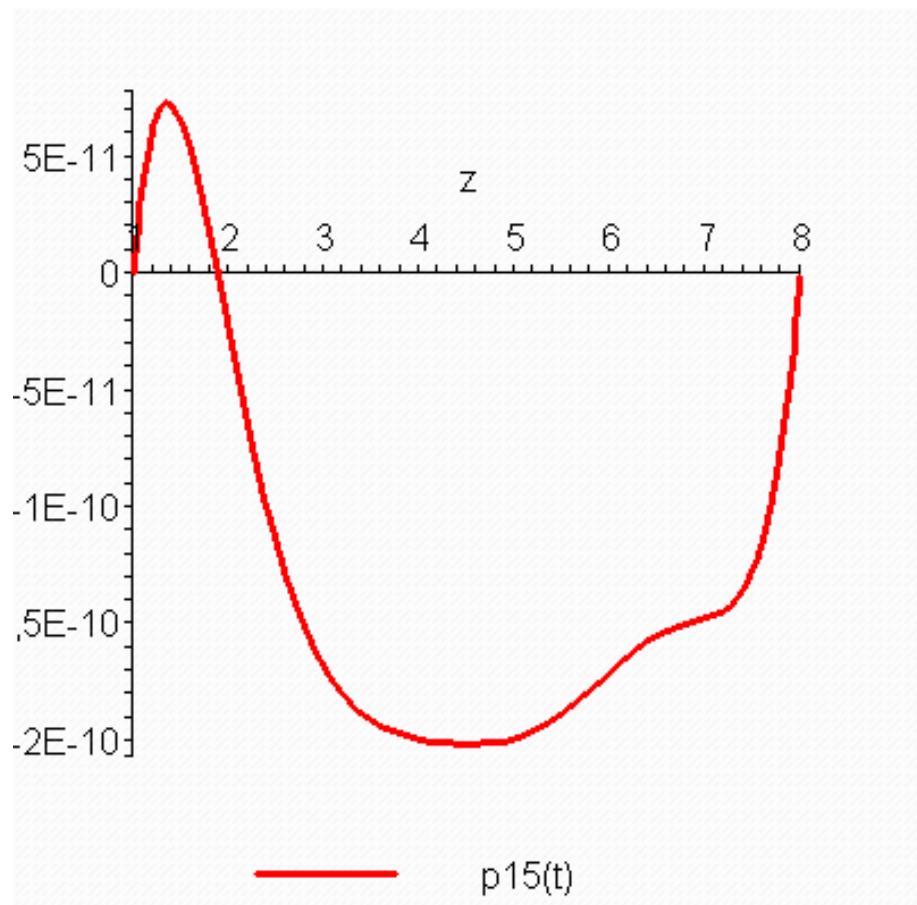
```
> listplot([seq(Lp16[t], t=1..8)], thickness=2,  
color= green, legend='p15(t)');
```

```

plot(PolynomialInterpolation([seq(t, t=1..8)],
[seq(Lp16[t], t=1..8)], z, form=Lagrange),
z=1..8,
thickness=2, color= red,
legend=`p15(t)` );

```





> Stop!!!! КОНЕЦ ПРОГРАММЫ ДЛЯ
ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ № 7 ПО ТСМО

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Лабораторная работа № 1 Определение характеристик случайной функции из опыта.....	5
Лабораторная работа № 2 Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной системой.....	9
Лабораторная работа № 3 Марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем.....	12
Лабораторная работа № 4 Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем.....	16
Лабораторная работа № 5 Система массового обслуживания с отказами..	19
Лабораторная работа № 6 Система массового обслуживания с ожиданием.....	24
Лабораторная работа № 7 Система массового обслуживания смешанного типа с ограничением по длине очереди	29
Заключение.....	33
Список литературы.....	34
Приложение А Maple-программа для исследования характеристик случайной функции.....	35
Приложение Б Maple-программа для исследования прохождения стационарной случайной функции через стационарную линейную систему...	35
Приложение В Maple-программа для исследования марковского процесса с дискретными состояниями и дискретным временем	35
Приложение Г Maple-программа для исследования марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем	35
Приложение Д Maple-программа для исследования системы массового обслуживания с отказами	35
Приложение Е Maple-программа для исследования системы массового обслуживания с ожиданием	35

Приложение Ж Maple-программа для исследования системы массового обслуживания смешанного типа с ограничением по длине очереди35