Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
Информационных технологий механики и оптики

Факультет информационных технологий и программирования
Кафедра информационных систем

# Билеты для подготовки к экзамену по математике зимней сессии 2012/2013 года

Выполнил: Трофимов Владислав
группа 1511
Преподаватель: Норин Александр Владимирович

Санкт-Петербург

2013

## Known bugs

- Отсутствует доказательство теоремы 8.
- Отсутствует доказательство первого свойства в билете 30.
- Отсутствуют доказательства свойств сходящихся последовательностей в билете 30.
- Безвременно отсутствует доказательство 18 теоремы.
- Безвременно отсутствует доказательство 19 теоремы.
- Безвременно отсутствует доказательство 20 теоремы.
- Безвременно отсутствует доказательство 21 теоремы.
- Безвременно отсутствует доказательство 23 теоремы.
- Безвременно отсутствует доказательство 24 теоремы.
- Безвременно отсутствует доказательство 26 теоремы.
- Безвременно отсутствует доказательство 27 теоремы.
- Безвременно отсутствует доказательство 31 теоремы.

Если у Вас есть материалы, указанные выше, или же вы заметили ошибки, отсутствие в материале какого-то важного пункта, особенно каких-то доказательств, пишите на электронную почту stranger.65536@gmail.com с темой «Билеты к экзамену по математике 2012/2013». Желательно с недостающими материалами (если таковые имеются).

# Оглавление

# 1. Подстановки. Свойства подстановок

§**Подстановкой** (или перестановкой, как наглядный способ записи подстановки) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ чисел называют ∀ расположение этих чисел в определенном порядке.

Всего существует $n!$ перестановок из $n$ чисел. Первое число можно выбрать $n$ способами, второе уже $n-1$ способом, третье $n-2$ способами, …, последнее единственным оставшимся способом. Получается $n!$ перестановок.

§**Главная перестановка** — перестановка, в которой числа находятся в их естественном порядке (по возрастанию).

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 1 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 1 |

Перестановки трех чисел

§**Инверсия** — такое расположение двух чисел в перестановке, при котором большее из них стоит левее меньшего (в таблице справа все перестановки кроме первой содержат не менее одной инверсии). Число инверсий в перестановке обозначается латинской буквой $I$. Например, $I\ (1\ 2\ 3\ 4) = 0; I\ (1\ 4\ 3\ 2) = 3$.

§**Четная перестановка** — перестановка с четным числом инверсий.

§**Нечетная перестановка** — перестановка с нечетным числом инверсий.

§**Транспозиция** — смена ∀ двух чисел в перестановке.

**Теорема 1™**. Всякая транспозиция переводит четную перестановку в нечетную, а нечетную в четную.

**Доказательство**: Пусть мы переставим два соседних элемента $\alpha_i$ и $\alpha_{i+1}$. После перестановки количество инверсий относительно элементов, стоящих левее $\alpha_{i+1}$ и правее $\alpha_i$ не изменится. Изменится лишь количество инверсий относительно переставленных элементов – увеличится на 1, если $\alpha_i < \alpha_{i+1}$, и уменьшится на 1, если наоборот.

Пусть мы переставим два несоседних элемента $\alpha_i$ и $\alpha_j$ (будем считать, что $\alpha_j$ стоит правее $\alpha_i$), между которыми находится $m$ чисел. Для того чтобы поменять их местами, придется совершить $2m+1$ транспозиций ($m$ транспозиций чтобы $\alpha_i$ и $\alpha_j$ оказались соседними, 1 транспозиция, чтобы $\alpha_i$ оказалась правее $\alpha_j$, еще $m$ транспозиций чтобы $\alpha_i$ поставить на прежнее место $\alpha_j$). $2m+1$ всегда нечетное число, а значит перестановка сменит четность.

**Следствие™**. Количество четных и нечетных перестановок равно $\frac{n!}{2}$

## 2. Определители n-го порядка и их свойства

Пусть есть матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Тогда ей сопоставляется число $|A| = \det A = \Delta A$. Пусть есть перестановка $j_1\, j_2 \dots j_n$. Таких перестановок может быть $n!$. Рассмотрим произведение $a_{1j_1} * a_{2j_2} * \dots * a_{nj_n}$. Всего таких произведений может быть $n!$.

§Определитель n-го порядка

$|A| = \det A = \Delta A = \sum_{\{j_1\, j_2 \dots j_n\}} (-1)^{I(j_1\, j_2 \dots j_n)} * a_{1j_1} * a_{2j_2} * \dots * a_{nj_n}$.

Пример: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Всего есть две перестановки – $(1\ 2)$ и $(2\ 1)$.

Тогда $|A| = (-1)^{I(1\ 2)} * a_{11} * a_{22} + (-1)^{I(2\ 1)} * a_{12} * a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель третьего порядка можно находить по **правилу треугольников (Саррюса)**.

Пример: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$.

### *Свойства определителей*

1) $|A^T| = |A|$.

**Доказательство.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**Замечание.** Следующие свойства определителей будут формулироваться только для строк. При этом из свойства 1 следует, что теми же свойствами будут обладать и столбцы.

2) При перестановке ∀ 2 строк (столбцов) знак определителя меняется на противоположный.

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{12}a_{33} + a_{23}a_{11}a_{32} + a_{22}a_{13}a_{31} - a_{23}a_{12}a_{31} - a_{22}a_{11}a_{33} - a_{21}a_{13}a_{32} =$$

$$= -(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3) Следствие: определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{12}a_{33} + a_{13}a_{11}a_{32} + a_{12}a_{13}a_{31} - a_{13}a_{12}a_{31} - a_{12}a_{11}a_{33} - a_{11}a_{13}a_{32} = 0.$$

4) Если строка (столбец) определителя является линейной комбинацией двух вектор-строк (столбцов), то определитель является линейной комбинацией соответствующих определителей.

Доказательство.

При раскрытии скобок в выражениях определителей получаются одинаковые выражения.

5) Следствие: общий множитель элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{13}a_{21}a_{32} + ka_{12}a_{23}a_{31} - ka_{13}a_{22}a_{31} - ka_{12}a_{21}a_{33} - ka_{11}a_{23}a_{32} =$$

$$= k(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6) Следствие: если ∀ из строк (столбцов) состоит из нулей, то определитель равен нулю.

**Доказательство.** Следует из свойства 5 при $k = 0$.

7) Следствие: если ∀ строка (столбец) является линейной комбинацией другой его строки (столбца), то определитель равен нулю.

**Доказательство.** Следует из свойств 3 и 5.

8) Следствие: определитель не изменится, если к ∀ строке (столбцу) прибавить линейную комбинацию других его строк (столбцов).

**Доказательство.** Следует из свойств 7 и 4.

9) $|A * B| = |A| * |B|$.

**Доказательство.**

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j} b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j} b_{j3} \end{pmatrix},$$

При раскрытии скобок в выражениях определителей получаются одинаковые выражения.

10) Разложение определителя по строке (столбцу). Определитель равен сумме произведений элементов -й строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

**Доказательство.** При раскрытии скобок в определителе разложением и в определителе по определению получаются одинаковые выражения.

# 3. Матрицы и их свойства

### *Виды матриц*

§ **Матрица $m * n$** — прямоугольная таблица чисел, содержащая $m$ строк и $n$ столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};\ A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};\ A^{T^T} = A$$

§**Равные матрицы** — матрицы с одинаковыми размерами и попарно равными элементами, стоящими на одинаковых местах.

§**Нулевая матрица** — матрица, все элементы которой равны нулю.

§**Квадратная матрица** — матрица размера $n * n$, где $n$ – порядок матрицы.

§**Главная диагональ** — совокупность элементов $a_{11}a_{22} \dots\ \ a_{nn}$ квадратной матрицы.

§**Побочная диагональ** — совокупность элементов $a_{1n} \dots a_{m1}$ квадратной матрицы.

§**Диагональная матрица** — квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю.

§**Скалярная матрица** — диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны и не равны нулю.

§**Единичная матрица** — диагональная матрица, все элементы главной диагонали которой равны единице.

§**Треугольная матрица** — квадратная матрица, у которой все элементы выше или ниже главной диагонали равны нулю.

§**Симметричная матрица** — квадратная матрица, у которой для $\forall\ a_{ij}$ справедливо равенство $a_{ij} = a_{ji}$ $(i \neq j)$.

§**Кососимметричная матрица** — квадратная матрица, у которой для $\forall\ a_{ij}$ справедливо равенство $a_{ij} = -a_{ji}$ $(i \neq j)$.

## *Действия над матрицами*

1) Умножение на вещественное число. Каждый элемент матрицы умножается на это число.

2) Сложение двух матриц одинакового размера. Каждый элемент результирующей матрицы будет равен сумме элементов складываемых матриц, стоящих на той же позиции. Свойства: $A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3) Умножение двух матриц. $A_{m*n} * B_{n*p} = C_{m*p}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}; C = A * B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$c_{11} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} + a_{13} * b_{31}$; $c_{12} = a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} + a_{13} * b_{32}$

$c_{21} = a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21} + a_{23} * b_{31}$; $c_{22} = a_{21} * b_{21} + a_{22} * b_{22} + a_{23} * b_{32}$

Если матрицу $A$ можно умножить на матрицу $B$, то не всегда можно матрицу $B$ умножить на матрицу $A$. Если можно, то такие матрицы называются **коммутирующими**.

## *Свойства матриц*

1) $A * (B * C) = (A * B) * C$.
2) $k * (A * B) = (k * A) * B = A * (k * B)$.
3) $(A + B) * C = A * C + B * C$.
4) $C * (A + B) = C * A + C * B$.
5) $(A * B)^T = A^T * B^T$.

# 4. Векторы. Длина вектора. Линейные операции над векторами

**§Вектор** — направленный отрезок.

**§Коллинеарные вектора** — вектора, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.

**§Сонаправленные вектора** — коллинеарные вектора, у которых отрезки, соединяющие их начала и концы, не пересекаются.

**§Противоположно направленные вектора** — коллинеарные вектора, у которых отрезки, соединяющие их начала и концы, пересекаются.

**§Длина вектора** — длина отрезка, соединяющего начала и конец вектора.

**§Равные векторы** — сонаправленные векторы с равными длинами.

## *Операции над векторами*

1) Сложение по правилу треугольников или параллелограмма.
2) Умножение вектора на число.
3) Разность векторов.

## *Координаты вектора*

Пусть есть система координат $XYZ$ и вектор $a$. Тогда $a_x$ = проекция $a$ на ось $Ox$, $a_y$ = проекция $a$ на ось $Oy$, $a_z$ = проекция $a$ на ось $Oz$. Эти величины называются **координатами вектора** а.

**Теорема 2™**. $\vec{a} = \vec{b} \leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x \\ a_y = b_y \\ a_z = b_z \end{cases}$. Доказательство не требуется, теорема очевидна. Следствие: вектор полностью определяется его координатами.

**Теорема 3™**. Пусть есть точки $A\ (x_1, x_2, x_3)$, $B\ (y_1, y_2, y_3)$ и вектор $AB$. Тогда $\vec{c} = \overrightarrow{AB} \rightarrow \begin{cases} c_x = y_1 - x_1 \\ c_y = y_2 - x_2 \\ c_z = y_3 - x_3 \end{cases}$.

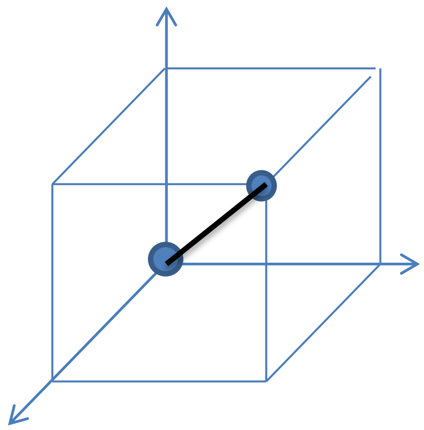
Доказательство:

$C_x$ = проекции вектора $AB$ на ось $Ox\ = \ y_1 - x_1$.

$C_y$ = проекции вектора $AB$ на ось $Oy\ = \ y_2 - x_2$.

$C_z$ = проекции вектора $AB$ на ось $Oz\ = \ y_3 - x_3$. Доказано.

**Теорема 4™**. Длина вектора в пространстве.



Пусть у вектора $OM$ есть координаты $(x, y, z)$. Тогда его длина равна $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Доказательство:$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_{xy}} + \overrightarrow{M_{xy}M} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}$

$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{OM_x^2 + OM_y^2 + OM_z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

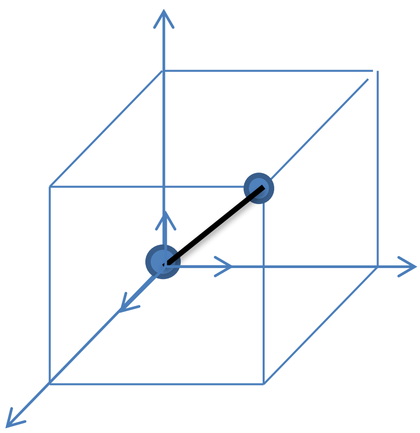
Доказано.

**Теорема 5™.** Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Доказательство: Пусть векторы $a$ и $b$ одинаково направлены. Векторы $b$ и $\left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\right)\vec{a}$ одинаково направлены и имеют одну и ту же абсолютную величину $|\vec{b}|$. Значит, они равны, и $\vec{b} = k\vec{a}$, где $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. А значит по свойству и координаты обоих векторов пропорциональны. Доказано.

## 5. Разложение вектора по координатному базису

**Теорема 6™.** Любой вектор может быть однозначно разложен по ортам, при этом коэффициенты разложения совпадут с координатами.



Доказательство: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_{xy}} + \overrightarrow{M_{xy}M} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z} = k_1\vec{\imath} + k_2\vec{\jmath} + k_3\vec{k}.$

$$\overrightarrow{OM_x} \text{ проекция } \overrightarrow{OM} \text{ на ось } OX$$
$$= \text{проекция } k_1\vec{\imath} + \text{проекция } k_2\vec{\jmath}$$
$$+ \text{проекция } k_3\vec{k} \text{ на ость } OX$$
$$= \text{ проекция } k_1\vec{\imath} = k_1.$$

Аналогично для двух оставшихся проекций. Доказано.

## 6. Скалярное произведение векторов и их свойства.

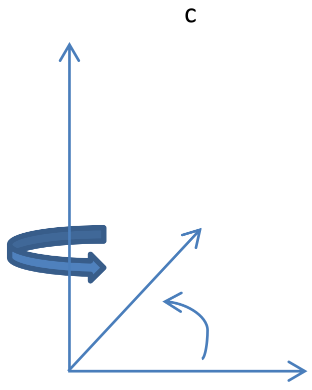
§**Скалярное произведение двух ненулевых векторов** — число, равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

### *Свойства скалярного произведения*

1) $\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$.
2) $(k * \vec{a}) * \vec{b} = k * (\vec{b} * \vec{a})$.
3) $\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$.
4) $\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * \text{проекция } _{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| * \text{проекция } _{b}\vec{a}$.
5) $\vec{a} * \vec{a} = |\vec{a}|^2$.
6) $\vec{a} * \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.
7) $\vec{a} * \vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ перпендикулярен $\vec{b}$.

# 7. Векторное произведение векторов и его свойства.

§Векторное произведение двух векторов — вектор, длина которого равна произведению длин данных векторов на синус угла между ними, а направление такого, что тройка векторов (a, b, c) – правая (либо направление определяется правилом правого винта от вектора a к вектору b).




$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

## *Свойства векторного произведения*

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
2) $(k * \vec{a}) \times \vec{b} = k * (\vec{a} \times \vec{b})$.
3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
4) $\vec{a} * \vec{a} = \vec{0}$.
5) $\vec{a} * \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.
6) $\vec{a} * \vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.
7) $|\vec{a} * \vec{b}|$ = площади параллелограмма, построенного на этих векторах, отложенных от одной точки.

# 8. Смешанное произведение векторов. Свойства. Условие компланарности.

§**Смешанное произведение** — число, равное скалярному произведению одного вектора на векторное произведение двух других векторов.

### *Свойства смешанного произведения*

1) $\vec{a} * (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} * (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} * (\vec{c} \times \vec{a})$.
2) $\vec{a} * (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} * (\vec{c} \times \vec{b})$.
3) $\vec{a} * (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.
4) $\vec{a} * (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $a, b$ и $c$ компланарные.
5) $\vec{a} * (\vec{b} \times \vec{c}) =$ объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, отложенных от одной точки.

## 9. Уравнение прямой на плоскости. Уравнение с угловым коэффициентом. Условия параллельности и перпендикулярности. Угол между прямыми

Каноническое уравнение прямой на плоскости: $y = kx + b$, $k = tg\alpha$ – угловой коэффициент наклона прямой.

Уравнение с заданным $\boldsymbol{k}$: $\begin{cases} y_0 = kx_0 + b \\ y = kx + b \end{cases} \rightarrow y - y_0 = k(x - x_0)$.

Уравнение через две точки: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Уравнение в отрезках: заданы точки $(0;\ b)$ и $(a;\ 0)$ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

### *Условия параллельности и перпендикулярности*

Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны.

Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда произведение их угловых коэффициентов равно минус единице. Доказывается, основываясь на том, что $tg(90° + \alpha) = -ctg\alpha \rightarrow tg\alpha * (-ctg\alpha) = -1$.

### *Угол между прямыми*

Пусть $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — углы между прямыми и положительной осью абсцисс. Тогда угол между прямыми равен $\alpha_1 - \alpha_2$.

$tg(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{tg(\alpha_2) - tg(\alpha_1)}{1 + tg(\alpha_1)tg(\alpha_2)} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}$ = тангенсу угла между прямыми.

## 10. Общее уравнение прямой. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от прямой до точки

Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$.

Если $\mathrm{C} = 0$, то прямая проходит через начало координат.

Если $\mathrm{A} = 0$, то прямая параллельна оси абсцисс.

Если $\mathrm{B} = 0$, то прямая параллельна оси ординат.

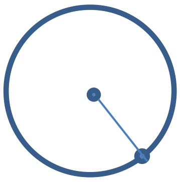
Нормальное уравнение прямой: $xcos\alpha + ysin\alpha - p = 0$, где $\alpha$ – угол между прямой и положительным направлением оси абсцисс, а $p$ – расстояние от прямой до начала координат.

Привод уравнения общего вида к нормальному: $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$, знак выбираем таким образом, чтобы произведение $\mathrm{C} * \mu$ было отрицательным. $cos\alpha = A * \mu; sin\alpha = B * \mu; p = -C * \mu$.

Расстояние от точки до прямой: $d = |x_0 cos\alpha + y_0 sin\alpha - p|$

## 11. Окружность. Общее уравнение

§**Окружность** — геометрическое место точек, расстояние от которых до заданной точки есть величина постоянная.



$C(x_0;\ y_0)$ — центр окружности. $r$ — расстояние от точки $C$ до точки $M(x; y)$, принадлежащей окружности. Тогда $|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r$.

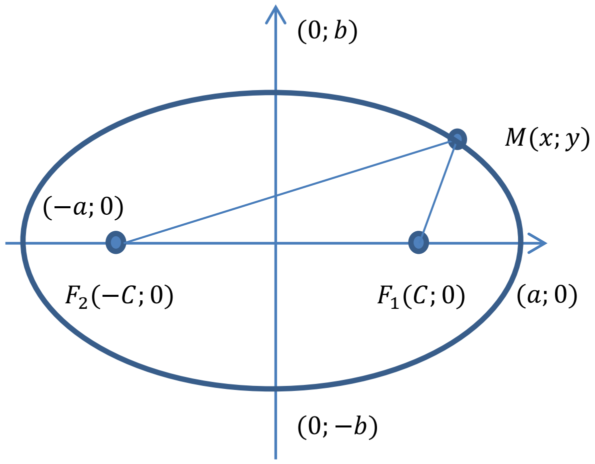
**Общее уравнение окружности**: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

## 12. Эллипс. Каноническое уравнение

§**Эллипс** — геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек, называемыми фокусами, есть величина постоянная.

$r_1 = |\overrightarrow{F_1M}|$; $r_2 = |\overrightarrow{F_2M}|$; $r_1$ и $r_2$ — фокальные радиусы. $r_1 + r_2 = 2a$.

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$.



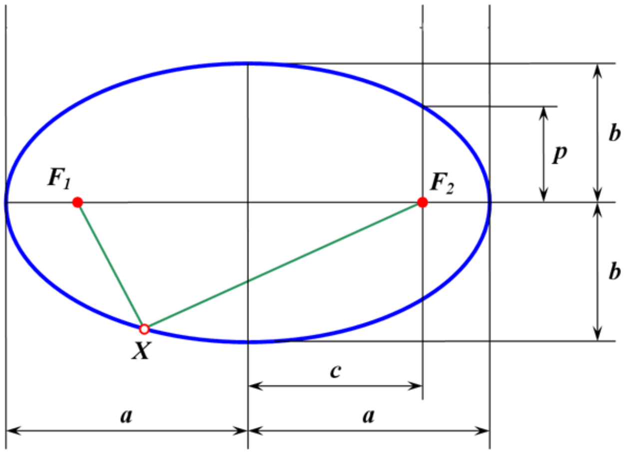

Пусть $b^2 = a^2 - c^2$. Путем нехитрых математических преобразований получаем каноническое уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. $a$ и $b$ — большая и малая полуоси. Если точка $(x;y) \in$ эллипсу, то точки $(-x;y)$ ,$(x;-y)$, $(-x;-y)$ также принадлкжат этому эллипсу.

## 13. Эксцентриситет и директрисы эллипса

**$Эксцентриситет** обозначается буквой $\varepsilon$. $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$. Так как $c < a$, то $\varepsilon < 1$.

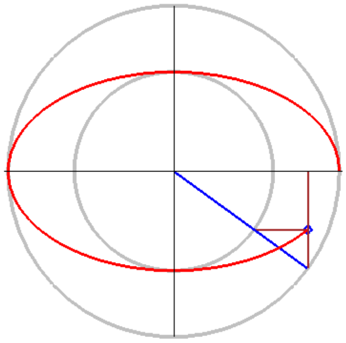
**$Фокальным параметром** $p = \frac{b^2}{a}$ называется половина длины хорды, проходящей через фокус и перпендикулярной большой оси эллипса.

Для каждого из фокусов существует прямая, называемая **$директрисой**, такая, что отношение расстояния от произвольной точки эллипса до его фокуса к расстоянию от этой точки до данной прямой равно эксцентриситету эллипса. Весь эллипс лежит по ту же сторону от такой прямой, что и фокус.




Уравнения директрис эллипса в каноническом виде записываются как $x = \pm\frac{p}{\varepsilon(1+\varepsilon)}$ для фокусов $(\mp\frac{p}{1+\varepsilon}, 0)$ соответственно. Расстояние между фокусом и директрисой равно $\frac{p}{\varepsilon}$.

## 14. Параметрическое уравнение эллипса.

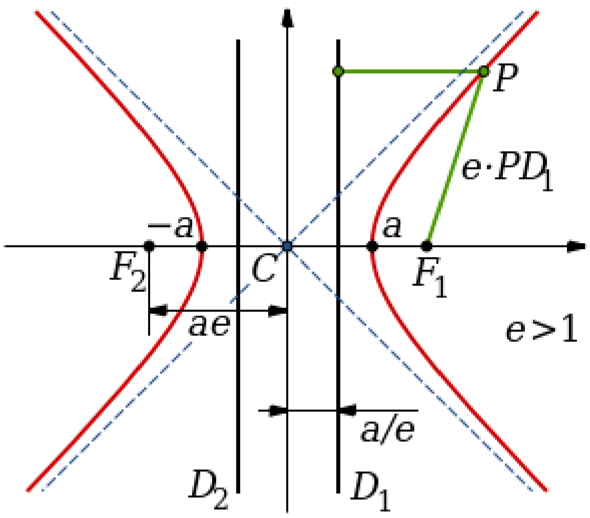


Каноническое уравнение эллипса может быть параметризовано: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, 0 \le t \le 2\pi$

В случае окружности параметр $t$ является углом между радиус-вектором данной точки и положительным направлением оси абсцисс.

## 15. Гипербола. Каноническое уравнение.

§**Гипербола** — геометрическое место точек, для которых разность расстояний, взятая по абсолютной величине от двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.




Асимптоты гиперболы, обозначенной красными кривыми, показанные голубым пунктиром, пересекаются в центре гиперболы $C$. Два фокуса гиперболы обозначены как $F_1$ и $F_2$. Директрисы гиперболы обозначены линиями двойной толщины $D_1$ и $D_2$. Эксцентриситет $\varepsilon$ равен отношению расстояний от точки $P$ на гиперболе до фокуса и до соответствующей директрисы (показаны зелёным). Вершины гиперболы обозначены как $\pm a$.

Параметры гиперболы обозначают следующее:

$a$ — расстояние от центра С до каждой из вершин.

$b$ — длина перпендикуляра, опущенного из вершин на асимптоты.

$c$ — расстояние от центра $C$ до фокусов $F_2$ и $F_1$.

Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Характеристики гиперболы, определённые выше, подчиняются следующим соотношениям:

- $c^2 = a^2 + b^2$.
- $\varepsilon = {}^{c}/_{a}$.
- $b^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1)$.
- $r_p = a(\varepsilon - 1)$.
- $a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}$.
- $b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$.
- $c = \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}$.
- $p = \frac{b^2}{a}$.

# 16. Парабола. Каноническое уравнение

§**Парабола** — геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние от некоторой фиксированной прямой, называемой **директрисой** параболы, до некоторой фиксированной точки, называемой **фокусом** параболы, есть величина постоянная.

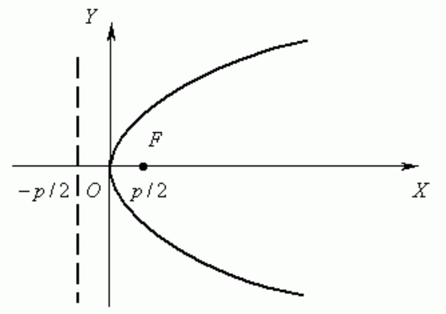


Рис.1

$**Параметр параболы** — расстояние от фокуса параболы до его директрисы.

Уравнение параболы в каноническом виде: $y^2 = 2px, p > 0$

## 17. Свойства линий второго порядка

$Секущая — прямая, проходящая через две различные точки линии.

$Касательная — предельное положение секущей, если концы секущей практически совпадают.

1) Середины параллельных хорд линий второго порядка лежат на одной прямой, называемой диаметром линии.
2) Следствие: все диаметры эллипса проходят через его центр.
3) Следствие: все диаметры параболы параллельны оси симметрии параболы.
4) Прямая, касающаяся эллипса в точке $M$, составляет равные углы с фокальными радиусами, проходящими вне угла $F_1MF_2$.
5) Прямая, касающаяся гиперболы в точке $M$, составляет равные углы с фокальными радиусами, проходящими внутри угла $F_1MF_2$.

## 18. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки

Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A, B, C$ — координаты вектора нормали (перпендикуляра) данной плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

Возьмем произвольную точку $M$ с координатами $(x; y; z)$, лежащую в искомой плоскости. Заданные точки назовем $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$. Тогда векторы $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ должны быть компланарными, а значит их смешанное произведение должно быть равным нулю.

$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$. Далее, после разложения определителя по первой строке и приведения подобных членов, получаем уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

## 19. Прямая в пространства. Каноническое и параметрическое уравнение прямой

У каждой прямой в пространстве есть направляющий вектор $\vec{l}(m; n; p)$.

**Каноническое уравнение прямой**, проходящей через заданную точку с координатами $(x_0, y_0, z_0)$ и с заданным направляющим вектором с координатами $(m, n, p)$: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$.

**Параметрическое уравнение прямой**, проходящей через заданную точку с координатами $(x_0, y_0, z_0)$ и с заданным направляющим вектором с координатами $(m, n, p)$: $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}, t \in (-\infty; +\infty)$.

## 20. Углы между плоскостями и прямыми

Угол между плоскостями есть угол между их нормалями. $cos\alpha = \frac{\overrightarrow{N_1} * \overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}| * |\overrightarrow{N_2}|}$.

Угол между прямыми есть угол между их направляющими. $cos\alpha = \frac{\overrightarrow{l_1} * \overrightarrow{l_2}}{|\overrightarrow{l_1}| * |\overrightarrow{l_2}|}$.

Угол между прямой и плоскостью есть угол между направляющей прямой и перпендикуляром к нормали плоскости. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = sin\alpha = \frac{\vec{l} * \vec{N}}{|\vec{l}| * |\vec{N}|}$.

# 21. Элементарные преобразования над матрицами. Ранг матрицы. Метод Гаусса

## *Действия над матрицами*

1) Умножение на вещественное число. Каждый элемент матрицы умножается на это число.

2) Сложение двух матриц одинакового размера. Каждый элемент результирующей матрицы будет равен сумме элементов складываемых матриц, стоящих на той же позиции. Свойства: $A + B = B + A$; $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3) Умножение двух матриц. $A_{m*n} * B_{n*p} = C_{m*p}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}; C = A * B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$c_{11} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} + a_{13} * b_{31}$; $c_{12} = a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} + a_{13} * b_{32}$

$c_{21} = a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21} + a_{23} * b_{31}$; $c_{22} = a_{21} * b_{21} + a_{22} * b_{22} + a_{23} * b_{32}$

Если матрицу $A$ можно умножить на матрицу $B$, то не всегда можно матрицу $B$ умножить на матрицу $A$. Если можно, то такие матрицы называются **коммутирующими**.

## *Свойства матриц*

1) $A * (B * C) = (A * B) * C$.
2) $k * (A * B) = (k * A) * B = A * (k * B)$.
3) $(A + B) * C = A * C + B * C$.
4) $C * (A + B) = C * A + C * B$.
5) $(A * B)^T = A^T * B^T$.

## *Ранг матрицы*

$**Минором** порядка $k$ матрицы $A$ называется определитель, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых $k$ строк и $k$ столбцов данной матрицы. Таким образом, каждый элемент матрицы является ее минором 1-го порядка.

$Ранг матрицы — это порядок ее наибольшего ненулевого минора. Обозначения: $\mathrm{r(A)}, \mathrm{R(A)}, \mathrm{Rang\ A}$.

Замечание. Для матриц большой размерности непосредственное вычисление всех миноров затруднительно. Поэтому в этом случае можно преобразовать матрицу к так называемому треугольному виду (когда элементы, стоящие ниже $a_{ij}$ равны 0), воспользовавшись операциями, не изменяющими ранг матрицы ($эквивалентными преобразованиями). К ним относятся:

1) транспонирование
2) умножение строки на ненулевое число
3) перестановка строк
4) прибавление к элементам данной строки элементов любой другой строки, умноженных на ненулевое число
5) вычеркивание нулевой строки.

Действительно, любая из этих операций переводит нулевые миноры в нулевые, а ненулевые – в ненулевые. Матрица, полученная в результате, не равна исходной, но имеет тот же ранг.

Пример. Найдем ранг матрицы $A$. Теоретически ранг этой матрицы может принимать значения от 1 до 4, так как из элементов матрицы можно создать миноры по 4-й порядок включительно. Но вместо того, чтобы вычислять все возможные миноры 4-го, 3-го и т.д. порядка, применим к матрице $A$ эквивалентные преобразования. Вначале добьемся того, чтобы в первом столбце все элементы, кроме первого, равнялись 0. Для этого запишем вместо второй строки ее сумму с первой, а вместо третьей – разность третьей и удвоенной первой.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Затем из третьей строки вычтем вторую, а к четвертой прибавим вторую.

$$\tilde{\tilde{A}}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

После вычеркивания нулевых строк получим матрицу размерности $2 \times 5$ для которой максимальный порядок миноров, а, следовательно, и максимально возможное значение ранга равно 2.

$$\tilde{\tilde{\tilde{A}}}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ее минор $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, следовательно, $r(\tilde{\tilde{\tilde{A}}}) = r(A) = 2.$

## *Метод Гаусса*

$**Системой линейных уравнений (линейной системой)** называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$a_{ij}$, $b_i$ — числа, $x_j$ — неизвестные, $n$ — число неизвестных, $m$ — число уравнений.

Линейная система может иметь единственное решение, бесконечно много решений или не иметь ни одного решения.

Условия существования и количества решений линейной системы будут изучены в дальнейшем, а пока рассмотрим способы нахождения единственного решения системы, в которой число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Пусть $a_{11} \neq 0$ (этого всегда можно добиться, поменяв уравнения местами). Разделим обе части первого уравнения на $a_{11}$ и вычтем полученное уравнение из каждого из остальных уравнений системы, умножив его предварительно на $a_{i1}$, где $i$ – номер очередного уравнения. Как известно, полученная при этом новая система будет равносильна исходной. Коэффициенты при $x_1$ во всех уравнениях этой системы, начиная со второго, будут равны 0, т.е. система выглядит так:

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{22}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{a}_{n2}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{nn}x_n = \tilde{b}_n \end{cases}.$$

Если новые коэффициенты при $x_2$ не все равны нулю, можно таким же образом исключить $x_2$ из третьего и последующих уравнений. Продолжая эту операцию для следующих неизвестных, приведем систему к так называемому треугольному виду:

$$\begin{cases} x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \ldots + \hat{a}_{1n}x_n = \hat{b}_1 \\ x_2 + \ldots + \hat{a}_{2n}x_n = \hat{b}_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \hat{b}_n \end{cases}.$$

Здесь символами $\tilde{a}_{ij}, \hat{a}_{ij}, \tilde{b}_i$ и $\hat{b}_i$ обозначены изменившиеся в результате преобразований числовые коэффициенты и свободные члены.

Из последнего уравнения системы единственным образом определяется $x_n$, а затем последовательной подстановкой – остальные неизвестные.

Замечание. Иногда в результате преобразований в каком-либо из уравнений обращаются в 0 все коэффициенты и правая часть, то есть оно превращается в тождество 0=0. Исключив его из системы, мы уменьшим число уравнений по сравнению с числом неизвестных. Такая система не может иметь единственного решения.

Если же в процессе применения метода Гаусса какое-нибудь уравнение превратится в равенство вида 0=1 (коэффициенты при неизвестных обратились в 0, а правая часть приняла ненулевое значение), то исходная система не имеет решения, так как подобное равенство является неверным при любых значениях неизвестных.

Примеры:

1. Решим методом Гаусса систему $\begin{cases} x+3y-z=4 \\ 2x-y-5z=-15. \\ 5x+y+4z=19 \end{cases}$

Вычтем из второго уравнения удвоенное первое, а из третьего – первое, умноженное на 5.

Получим $\begin{cases} x+3y-z=4 \\ -7y-3z=-23 \\ -14y+9z=-1 \end{cases}$. Теперь вычтем из третьего уравнения удвоенное второе, а затем разделим второе уравнение на –7 (коэффициент при y), а третье на 15 (новый коэффициент при z). Система примет вид:

$\begin{cases} x+3y-z=4 \\ y+\frac{3}{7}z=\frac{23}{7} \\ z=3 \end{cases}$. Отсюда z=3, y=2, x=1 – единственное решение системы.

## 22. Теорема Кронекера-Капелли. Фундаментальная система решений

Теорема 7™. Система совместна тогда и только тогда, если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

Доказательство™.

1) Необходимость: пусть система совместна и $c_1, c_2, ..., c_n$ – ее решение. Тогда $\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + ... + a_{2n}c_n = b_2 \\ ........................................ \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + ... + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}$, то есть столбец свободных членов является линейной комбинацией столбцов матрицы системы и, следовательно, столбцов любого ее базисного минора. Поэтому добавление элементов этого столбца и любой строки расширенной матрицы к базисному минору даст нулевой определитель, то есть $r(A_1) = r(A)$.

2) Достаточность: если $r(A_1) = r(A)$, то любой базисный минор матрицы A является и базисным минором расширенной матрицы. Поэтому столбец свободных членов представляет собой линейную комбинацию столбцов этого базисного минора, и, следовательно, линейную комбинацию всех столбцов матрицы A. Если обозначить коэффициенты этой линейной комбинации $c_1, c_2, ..., c_n$, то эти числа будут решением системы (2.2), т.е. эта система совместна. Доказано.

**$Совместная (разрешимая) система** — система, имеющая не менее одного решения.

**$Несовместная (неразрешимая) система** — система, не имеющая решений.

**$Определенная система** — несовместная система или совместная система, имеющая только одно решение.

**$Неопределенная система** — система, имеющая бесконечное множество решений.

**$Эквивалентные (равносильные) системы** — системы, множества решений которых совпадают.

Любые $n - r$ ($r$ – ранг матрицы) линейно независимых решений системы называются ее **$фундаментальной системой** решений.

**Теорема 8™.** Если система совместна и ранг этой матрицы равен количеству неизвестных, то такая система имеет единственное решение. Если ранг матрицы меньше количества неизвестных, то такая система будет иметь бесконечное множество решений. При этом $n - r$ неизвестных можно выбрать произвольно, а остальные $r$ выразить через них.

**Следствие™:** Пусть $A$ — квадратная матрица с ненулевым определителем. Тогда система $Ax = B$ имеет единственное решение.

**Пример.** Решим систему $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$. Найдем ранг матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Преобразуем ее к виду: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, что $r(A) = 2$.

Пусть $x_1, x_2$- базисные неизвестные, $x_3, x_4$- свободные неизвестные. Заменим исходную систему системой из первых двух уравнений, коэффициенты которых входят в базисный минор, и перенесем базисные неизвестные в правые части уравнений:

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 \\ 2x_1 - 3x_2 = -4x_3 - 2x_4 \end{cases}$. Пусть $x_3 = 1, x_4 = 0$. Тогда $x_1 = -1{,}4; x_2 = 0{,}4$. Если $x_3 = 0, x_4 = 1$,

то $x_1 = -1, x_2 = 0$. Получена фундаментальная система решений:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1{,}4 \\ 0{,}4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь общее решение системы можно записать в виде: $X = C_1X_1 + C_2X_2$, где $C_1$ и $C_2$ – любые произвольные числа.

## 23. Обратная матрица. Алгебраические дополнения

Квадратная матрица A называется **$вырожденной**, если $\Delta_A = 0$, и **$невырожденной**, если $\Delta_A \neq 0$.

Квадратная матрица B называется **$обратной** к квадратной матрице $A$ того же порядка, если $AB = BA =$ **единичной матрице**. При этом $B$ обозначается $A^{-1}$.

Рассмотрим условие существования матрицы, обратной к данной, и способ ее вычисления.

**Теорема 9™.** Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы исходная матрица была невырожденной.

**Доказательство 9™.**

1) Необходимость: так как $A \cdot A^{-1} = E$, то $\Delta_A \cdot \Delta_{A^{-1}} = \Delta_E = 1$, поэтому $\Delta_A \neq 0$.

2) Достаточность: зададим матрицу $A^{-1}$ в следующем виде:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta_A} & \frac{A_{21}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta_A} \\ \frac{A_{12}}{\Delta_A} & \frac{A_{22}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta_A} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta_A} & \frac{A_{2n}}{\Delta_A} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta_A} \end{pmatrix}.$$

Тогда любой элемент произведения $A \cdot A^{-1}$ (или $A^{-1} \cdot A$), не лежащий на главной диагонали, равен сумме произведений элементов одной строки (или столбца) матрицы A на алгебраические дополнения к элементам другого столбца и, следовательно, равен 0 (как определитель с двумя равными столбцами). Элементы, стоящие на главной диагонали, равны $\frac{1}{\Delta_A} \cdot \Delta_A = 1$. Таким образом,

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$. Доказано.

**Замечание**. Сформулируем еще раз способ вычисления обратной матрицы: ее элементами являются алгебраические дополнения к элементам транспонированной матрицы $A$, деленные на ее определитель.

Пример. Найдем матрицу, обратную к $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

$\Delta_A=-6\neq 0,$ следовательно, матрица $A$ невырожденная. Найдем алгебраические дополнения к ее элементам:

$A_{11}=-1, A_{12}=7, A_{13}=2, A_{21}=-1, A_{22}=-5, A_{23}=-4, A_{31}=-1, A_{32}=1, A_{33}=2.$ Не забудем, что алгебраические дополнения к элементам строки матрицы $A$ образуют в обратной матрице столбец с тем же номером. Итак, $A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 7 & -5 & 1\\ 2 & -4 & 2\end{pmatrix}$. Можно убедиться, что найденная матрица действительно удовлетворяет определению $A^{-1}$. Найдем

$$A\cdot A^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 7 & -5 & 1\\ 2 & -4 & 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Тот же результат получим и при перемножении в обратном порядке.

## 24. Собственные числа и собственные векторы

Вектор $\boldsymbol{x}$ называется **$собственным вектором** матрицы $A$, если найдется такое число $\lambda$, что выполняется равенство: $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$, то есть результатом применения к $x$ линейного преобразования, задаваемого матрицей $A$, является умножение этого вектора на число $\lambda$. Само число $\lambda$ называется **$собственным числом** матрицы $A$.

Подставив в формулы

$$x`_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$

$$x`_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$x`_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3$$

$x`_j = \lambda x_j$, получим систему уравнений для определения координат собственного вектора:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \lambda x_3 \end{cases}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0 \end{cases}.$$

Эта линейная однородная система будет иметь нетривиальное решение только в случае, если ее главный определитель равен 0 (правило Крамера). Записав это условие в виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

получим уравнение для определения собственных чисел $\lambda$, называемое **характеристическим уравнением**. Кратко его можно представить так:

$$|\,A - \lambda E\,| = 0,$$

поскольку в его левой части стоит определитель матрицы $A - \lambda \mathrm{E}$. Многочлен относительно $\lambda$ $|A - \lambda E|$ называется **$характеристическим многочленом** матрицы А.

### *Свойства характеристического многочлена:*

1) Характеристический многочлен линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Доказательство. $\Delta_A = \Delta_C \Delta_{\underline{A}} \Delta_{C^{-1}}$, но $\Delta_C \Delta_{C^{-1}} = \Delta_E = 1$, следовательно, $\Delta_A = \Delta_{\underline{A}}$. Таким образом, $\Delta_A$ не зависит от выбора базиса. Значит, и $|A\text{-}\lambda E|$ не изменяется при переходе к новому базису.

2) Если матрица $A$ линейного преобразования является **$симметрической** (т.е. $a_{ij}=a_{ji}$), то все корни характеристического уравнения — действительные числа.

### *Свойства собственных чисел и собственных векторов*

1) Если выбрать базис из собственных векторов ***x**₁*, ***x**₂*, ***x**₃*, соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы $A$, то в этом базисе линейное преобразование $A$ имеет матрицу диагонального вида:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Доказательство этого свойства следует из определения собственных векторов.

2) Если собственные значения преобразования $A$ различны, то соответствующие им собственные векторы линейно независимы.

3) Если характеристический многочлен матрицы $A$ имеет три различных корня, то в некотором базисе матрица $A$ имеет диагональный вид.

## 25. Множества. Операции над множествами

$Множество — совокупность элементов, мыслимых как единое целое.

Числовые множества: множество натуральных чисел (N), множество целых чисел (Z), множество рациональных чисел (Q), множество действительных чисел (R), множество комплексных чисел (C);

Подмножества R: интервал (a; b), отрезок [a; b], промежуток [a; b), (a; b], луч [a; +infinity), $\varepsilon$ — окрестность точки $A$ $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$.

### *Операции над множествами*

1. Включение множества *A* в множество *B* $(A \subset B)$. При этом каждый элемент множества *A* является элементом множества *B*, и множество *A* называется подмножеством множества *B*. В частности, *A*=*B*, если все элементы множества *A* принадлежат множеству *B* и наоборот.
2. Объединение множеств *A* и *B* $(A \cup B)$ - множество элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств *A* и *B*.
3. Пересечение множеств *A* и *B* $(A \cap B)$ - множество всех элементов, принадлежащих одновременно *A* и *B*.
4. Разность множеств *A* и *B* ($A \backslash B$) – множество элементов множества *A*, не принадлежащих множеству *B*.

## 26. Элементы мат. логики. Кванторы высказывания. Предикаты

$Высказывание — утверждение, может быть ложным или истинным.

$Предикат — высказывание, содержащее переменную, которое после подстановки становится высказыванием.

У каждого предиката есть область истинности — множество, на котором оно обращается в истинное высказывание.

### *Операции над выражениями и предикатами*

1) Дизъюнкция
2) Конъюнкция
3) Отрицание

### *Кванторы*

Квантор общности (для всех, для каждого) ∀

Квантор существования (существует) ∃

## 27. Последовательности. Предел последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

**$Последовательность** — функция натурального аргумента. $\{a_n\}$

Задание последовательности:

1) Функцией общего члена $f(n) = \frac{1}{n}$.
2) Перечислением $\{0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89 \dots\}$
3) Реккурентно $a_{n+1} = a_n + q$

### *Предел последовательности*

Число $A$ называют **$пределом последовательности** $a_n$ тогда и только тогда, когда для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ существует такое целое число $N_\varepsilon$, что для любого $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.

### *Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности*

Последовательность $a_n$ называется бесконечно малой последовательностью (величиной), если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ существует такое целое число $N_\varepsilon$, что для любого $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n| < \varepsilon$. Или, иными словами, предел данной последовательности, при стремлении аргумента к бесконечности, равен нулю.

Последовательность $a_n$ называется бесконечно большой последовательностью (величиной), если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ существует такое целое число $N_\varepsilon$, что для любого $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n| < \frac{1}{\varepsilon}$. Или, иными словами, предел данной последовательности, при стремлении аргумента к бесконечности, равен бесконечности.

**Теорема 10™.** Число $A$ является пределом последовательности $a_n$ тогда и только тогда, когда $(a_n - A)$ — бесконечно малая величина.

**Доказательство™.** Пусть $b_n = a_n - A$. Тогда для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ существует такое целое положительное число $N_\varepsilon$, что для любого $n > N_\varepsilon$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon \leftrightarrow |b_n| < \varepsilon$. Доказано.

## 28. Свойства сходящихся последовательностей (о предельном переходе)

Если некоторое свойство последовательности $a_n$ начинается с некоторого номера, то будем считать, что оно начинается с некоторого места.

**Теорема 11™.** Если некоторая последовательность $a_n$ имеет предел, равный $a$, при стремлении к бесконечности, и последовательность $b_n$ также имеет предел, равный $b$, при стремлении к бесконечности, и $a < b$, то начиная с некоторого места $a_n < b_n$.

**Доказательство™.** Пусть $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Тогда пусть существуют $N_{1\varepsilon}$ и $N_{2\varepsilon}$ такие, что для любого $n$, большего $N_{1\varepsilon}$, выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ и для любого $n$, большего $N_{2\varepsilon}$, выполняется неравенство $|b_n - b| < \varepsilon$. Пусть $N_\varepsilon$ — наибольшее из $N_{1\varepsilon}$ и $N_{2\varepsilon}$. Тогда для любого $n$, большего $N_\varepsilon$, будут выполняться неравенства $\begin{cases} a_n < a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \\ b_n > b - \varepsilon = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \end{cases} \to a_n < b_n$. Доказано.

**Теорема 12™ (о предельном переходе в неравенстве).** Если некоторая последовательность $a_n$ имеет предел, равный $a$, при стремлении к бесконечности, и последовательность $b_n$ также имеет предел, равный $b$, при стремлении к бесконечности, и начиная с некоторого места $a_n \leq b_n$, то $a \leq b$.

**Доказательство™.** Предположим, что $a > b$. Тогда, опираясь на теорему 11, начиная с некоторого места $a_n > b_n$, что противоречит нашему условию. Значит, $a \leq b$.

**Замечание.** Если в условии теоремы потребовать $a_n < b_n$, то все равно $a \leq b$.

**Следствие.** Если некоторая последовательность $a_n$ имеет предел, равный $a$, при стремлении к бесконечности, и, начиная с некоторого места, $a_n$ лежит в пределах $[c; b]$, то число $a$ тоже будет лежать в этих пределах.

**Теорема 13™ (о предельном переходе в равенстве).** Пусть имеются две последовательности $a_n$ и $b_n$, и последовательность $a_n$ имеет предел, равный $a$, при стремлении к бесконечности, а также, начиная с некоторого места, $a_n = b_n$, тогда $b_n$ будет иметь предел, равный $a$, при стремлении к бесконечности.

Доказательство™. Для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ существует такое число $N_{1\varepsilon}$, что для любого числа $n$, большего $N_{1\varepsilon}$, выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Пусть число $N_{1\varepsilon}$ такого, что для любого числа $n$, большего $N_{2\varepsilon}$, выполняется равенство $a_n = b_n$. Пусть $N_\varepsilon$ — наибольшее из $N_{1\varepsilon}$ и $N_{2\varepsilon}$. Тогда для любого числа $n$, большего $N_\varepsilon$ будет выполняться неравенство $|b_n - a| < \varepsilon$. А значит $b_n$ будет иметь предел, равный $a$, при стремлении к бесконечности.

## 29. Единственность предела. Теорема о сжатой последовательности

**Теорема 14™ (О единственности предела).** Если последовательность имеет предел, то он у нее такой единственный и неповторимый.

**Доказательство™.** Пусть существует некоторая последовательность $a_n$ которая имеет предел, равный $a$, при стремлении к бесконечности, а также предел, равный $b$, при стремлении к бесконечности, и пусть $a < b$. Пусть $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. Тогда пусть существуют $N_{1\varepsilon}$ и $N_{2\varepsilon}$ такие, что для любого $n$, большего $N_{1\varepsilon}$, выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ и для любого $n$, большего $N_{2\varepsilon}$, выполняется неравенство $|a_n - b| < \varepsilon$. Пусть $N_\varepsilon$ — наибольшее из $N_{1\varepsilon}$ и $N_{2\varepsilon}$. Тогда для любого $n$, большего $N_\varepsilon$, будут выполняться неравенства $\begin{cases} a_n - a < \varepsilon \\ -\varepsilon < a_n - b \end{cases}$ $\leftrightarrow \begin{cases} a_n < a + \varepsilon = \frac{b+a}{2} \\ a_n > b - \varepsilon = \frac{b+a}{2} \end{cases}$. $Imposibru$! Значит, предел у последовательности все-таки единственный. Доказано.

**Теорема 15™ (О сжатой последовательности).** Пусть существуют некоторые последовательности $a_n, b_n, c_n$. Причем последовательности $a_n$и $c_n$ будут иметь предел равный $a$, при стремлении к бесконечности, и, начиная с некоторого места, $a_n \leq b_n \leq c_n$. Тогда последовательность $b_n$ будет иметь предел, равный $a$, при стремлении к бесконечности.

**Доказательство™.** Для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ пусть существуют $N_{1\varepsilon}$, $N_{2\varepsilon}$, $N_{3\varepsilon}$ такие, что для любого $n$, большего $N_{1\varepsilon}$, выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, для любого $n$, большего $N_{2\varepsilon}$, выполняется неравенство $|b_n - a| < \varepsilon$, для любого $n$, большего $N_{3\varepsilon}$, выполняется неравенство $|c_n - a| < \varepsilon$. Пусть $N_\varepsilon$ — наибольшее из $N_{1\varepsilon}$ , $N_{2\varepsilon}$и $N_{3\varepsilon}$. Тогда для любого $n$, большего $N_\varepsilon$, выполняется неравенство $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$. Тогда последовательность $b_n$ будет лежать в -окрестности точки $a$, а значит последовательность $b_n$ будет иметь предел, равный $a$, при стремлении к бесконечности. Доказано.

Последовательность $a_n$ называется **$ограниченной**, если существует такое положительное число $c$, что для любого $n$ выполняется неравенство $|x_n| < c$.

**Теорема 16™ (Об ограниченности сходящейся последовательности).** Сходящаяся последовательность ограничена.

**Доказательство™.** Пусть существует некоторая последовательность $a_n$ которая имеет предел, равный $a$, при стремлении к бесконечности. Для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ существует такое число $N_\varepsilon$, что для любого числа $n$, большего $N_\varepsilon$, выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$. Пусть $d$ — максимальное из чисел $|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_e}|$. Тогда максимальным из чисел $d, |a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|$ будет некоторое число $c$. Тогда для любого числа $n$ будет выполняться неравенство $|a_n| \leq c$. Значит последовательность ограничена. Доказано.

**Замечание.** Не всякая ограниченная последовательность сходится. Например $\sin a$.

# 30. Арифметические операции над сходящимися последовательностями

### *Свойства бесконечно малых последовательностей*

1) Пусть существуют бесконечно малые последовательности $a_n$ и $b_n$. Тогда, для любых действительных чисел $\lambda$ и $\mu$, $\lambda a_n + \mu b_n$ — бесконечно малая последовательность.

2) Пусть $a_n$ — бесконечно малая последовательность, $x_n$ — ограниченная последовательность. Тогда $a_n x_n$ — тоже бесконечно малая последовательность.

**Доказательство.** Так как $x_n$ — ограниченная, то существует такое положительное число $C$, что при любом $n$ будет выполняться неравенство $|x_n| < C$. $a_n$ — бесконечно малая последовательность, а значит для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ существует такое число $N_\varepsilon$, что $|a_n| < \frac{\varepsilon}{c}$. Тогда $|a_n x_n| < \frac{\varepsilon}{c} * c = \varepsilon$. Значит, последовательность $a_n x_n$ бесконечно малая.

**Следствие.** Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая величина.

### *Свойства сходящихся последовательностей*

1) Пусть предел некоторой последовательности $a_n$ равен $A$ при стремлении к бесконечности, а предел последовательности $b_n$ при стремлении к бесконечности равен $B$. Тогда для любых действительных чисел $\lambda$ и $\mu$ предел последовательности $(\lambda a_n + \mu b_n)$ равен $(\lambda A + \mu B)$ при стремлении к бесконечности.

2) Пусть предел некоторой последовательности $a_n$ равен $A$ при стремлении к бесконечности, а предел последовательности $b_n$ при стремлении к бесконечности равен $B$. Тогда предел последовательности $a_n * b_n$ равен $A * B$.

3) Пусть предел некоторой последовательности $a_n$ равен $A$ при стремлении к бесконечности, а предел последовательности $b_n$ при стремлении к бесконечности равен $B \neq 0$. Тогда предел последовательности $\frac{a_n}{b_n}$ равен $\frac{A}{B}$.

## 31. Ограниченные последовательности. Точные границы. Теорема о стягивающихся вложенных промежутках. Теорема Вейерштрасса

Последовательность $X$ ограничена сверху, если существует такое число $M$, что для любого числа $x$ из множества $X$ выполняется неравенство $x \le M$. $M$ называется верхней границей. Аналогично для ограниченной снизу последовательности. Последовательность $X$ называется ограниченной, если она ограничена как сверху, так и снизу.

**Замечание.** Если последовательность $X$ ограниченная, то существует такое положительное число $C$, что для любого $x$ из множества $X$ выполняется неравенство $|X| < C$.

Наименьшая из верхних границ называется супремумом ($Supr\ X$).

Наибольшая из нижних границ называется инфимумом ($Inf\ X$).

**Теорема 17™ (О стягивающихся вложенных промежутках).** Если $[x_1, y_1], [x_2, y_2], \ldots, [x_n, y_n]$ — последовательность стягивающихся отрезков, то $\exists$ точка, принадлежащая всем этим отрезкам.

**Доказательство™.** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Множество $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничено сверху $\forall y_n \Rightarrow \exists \sup x_n = \alpha; x_n \le \alpha, x_n \le y_k \forall n, k.$. Множество $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничено снизу $\forall x_n \Rightarrow \exists \inf y_n = \beta; y_n \ge \beta, y_n \ge x_k \forall n, k.$ $\alpha, \beta \in [x_n, y_n]$, $\forall n$; $x_n \le \alpha \le y_n$; $x_n \le \beta \le y_n$. Покажем, что $\alpha \le \beta$. Предположим, что $\alpha \ge \beta$. Тогда $\exists x_n, y_n : x_n > y_n$, чего быть не может. Предположим, что $\alpha \le \beta$. Тогда $\beta - \alpha = 0$. Положим $\varepsilon = \beta - \alpha$. $\forall \varepsilon > 0 \exists N\ (\varepsilon) : \forall n > N\ (\varepsilon)(y_n - x_n) < \varepsilon$. $\exists n_0$: $\varepsilon = \beta - \alpha \le y_n - x_n < \varepsilon$. (*) Значит, $\alpha = \beta$. Предположим, что $\exists$ другая точка $\gamma$, общая для всех отрезков: 1) $\gamma = \alpha$; 2)$\gamma > \alpha$; 3)$\gamma < \alpha$. Но пункты 2), 3) невозможны, т.к. (*). Доказано.

**Теорема 18™ (О существовании точной верхней границы множества).**

У каждого непустого множества существует супремум.

**Теорема 19™ (Вейерштрасса).** Всякая неубывающая ограниченная сверху последовательность имеет предел, равный $Sup\ X$.

# 32. Фундаментальные последовательности. Принцип компактности. Критерий Коши

**Теорема 20™ (О принципе компактности).** Из любой ограниченной последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

### *Фундаментальные последовательности*

Для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ существует такое число $n_0$, что для любых чисел $m$ и $n$, больших $n_0$, выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$ — условие Коши.

Для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ существует такое число $n_0$, что для любого числа $n$, большего $n_0$, и для любого натурального числа $p$ выполняется неравенство $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

**Теорема 21™ (Критерий Коши).** Для того, чтобы последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

## 33. Предел функции по Коши и по Гейне. Бесконечно большие, бесконечно малые функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$, за исключением, может быть, точки $x_0$.

Число $A$ называют пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любого $x \neq x_0$ и $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$0 < |x - x_0| < \delta$ называется проколотой $\delta$ – окрестностью точки $x_0$.

**Предел по Коши.** Число $A$ называют пределом функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда для любой $\varepsilon$ – окрестности точки $A$ существует проколотая $\delta$ – окрестность точки $x_0$ такая, что для любого числа $x$, принадлежащего этой проколотой окрестности, $f(x)$ лежит в проколотой $\varepsilon$ – окрестности точки $A$.

**Замечание.** Если в окрестности потребовать $x_0 - \delta < x < x_0$, то $A$ будет являться левым пределом. Аналогично для правого предела.

**Предел по Гейне.** Число $A$ называют пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда для любого $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ выполняется $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$.

**Замечание.** Определения по Коши и Гейне эквивалентны.

Число $A$ называют пределом функции $f(x)$ при аргументе, стремящемся к плюс бесконечности, тогда и только тогда, когда для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ существует такое положительное число $M$, что для любого $x > M > 0$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

### *Бесконечно малые и большие величины*

$f(x)$ называется бесконечно большой величиной, если для любого положительного числа $Q$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $x$ такого, что $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < Q$.

$f(x)$ называется ограниченной на множестве $X$, если существует такое положительное число $Q$, что для любого числа $x$ из множества $X$ выполняется неравенство $|f(x)| < Q$. В ином случае функция называется неограниченной.

Бесконечно большая величина является неограниченной при $x \to x_0$. Обратное утверждение не верно.

**Теорема 22™.** Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая при $x \to x_0$.

**Доказательство™**. Докажем, что $\forall M > 0 \quad \exists \delta(M) : |\frac{1}{\alpha}| > M$ при $|x - x_0| < \delta$. Для этого достаточно выбрать в качестве $\varepsilon\, 1/M$. Тогда при $|x - x_0| < \delta \ |\alpha(x)| < 1/M$, следовательно, $|1/\alpha(x)| > M$. Значит, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty$, то есть $\frac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая при $x \to x_0$.

## 34. Первый замечательный предел

**Теорема™ («лемма о двух милиционерах»)**. Если $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$ в некоторой окрестности $x_0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$.

**Доказательство™**. Из условия теоремы следует, что $f(x) - A \le \varphi(x) - A \le g(x) - A$. Выберем -окрестность точки $x_0$, в которой $|f(x) - A| < \varepsilon$ и $|g(x) - A| < \varepsilon$. Тогда $-\varepsilon < f(x) - A \le \varphi(x) - A \le g(x) - A < \varepsilon$. Поэтому $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$.

**Теорема 23™**. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

**Доказательство™**. Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат и будем считать, что угол $AOB$ равен x (радиан). Сравним площади треугольника $AOB$, сектора $AOB$ и треугольника $AOC$. Очевидно, что $S_{\Delta AOB} < S_{сект.AOB} < S_{\Delta AOC}$.

Используя соответствующие геометрические формулы для площадей фигур, получим отсюда, что $\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \sin x < \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot tgx$, или $\sin x < x < \tan x$. Разделив все части неравенства на $\sin x$ (при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\sin x > 0$), запишем неравенство в виде: $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

Тогда $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, и по теореме $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

**Следствие™**. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

**Следствие™**. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

## 35. Второй замечательный придел. Неравенства Бернулли

**Теорема 24™ (Неравенство Бернулли).** Пусть есть число $a > -1$. Тогда для любого натурального числа $n$ будет выполняться неравенство $(1+a)^n \geq 1 + n * a$.

**Теорема 25™ (Второй замечательный предел).** $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

**Доказательство™.**

а) Пусть $x \to +\infty$. Тогда $n \leq x < n+1, \frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}, 1+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$. При $x \to \infty$ $n \to \infty$. Найдем пределы левой и правой частей неравенства: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

б) Если $x \to -\infty$, то $t = -(x+1) \to +\infty$, и $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = e\cdot 1 = e$. Теорема доказана.

**Замечание.** $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})$.

**Теорема 26™.** $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{z})^z = e$, где $z$ — непрерывный параметр.

## 36. Непрерывность функции и её свойства

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0$. Пусть существует предел $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Тогда функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$.

$f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ существует такое положительное число $\delta$, что для любого $x$ такого, что $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Функция является непрерывной тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции. $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

### *Свойства функций, непрерывных в точке*

1) Сумма конечного числа функций, непрерывных в одной и той же точке, есть функция, непрерывная в этой же точке.

2) Произведение конечного числа функций, непрерывных в одной и той же точке, есть функция, непрерывная в этой же точке.

3) Пусть функции $f_1$ и $f_2$ непрерывны в одной и той же точке, причем $f_2$ в этой точке не обращается в ноль. Тогда функция, равная частному этих двух функций, есть непрерывная в этой же точке функция.

4) **Теорема 27™**. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве $D(f)$, а функция $z = g(y)$ определена на множестве $D(g)$, и $E(f) \subset D(g)$. Тогда можно говорить о сложной функции $z = g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x)$. Пусть точка $x_0$ принадлежит области определения непрерывной в данной точке функции $f(x)$, и значение этой функции в точке $x_0$ равно $y_0$, причем $y_0$ принадлежит области определения непрерывной в точке $y_0$ функции $g(y)$. Тогда функция $g(f(x))$ будет непрерывной в точке $x_0$.

5) Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает и непрерывна на отрезке $[a;\ b]$. Пусть $A = f(a), B = f(b)$. Тогда существует такая функция $f^{-1}(y)$, что область ее определения $[A;\ B]$, а область значений $[a;\ b]$. Тогда такая функция называется обратной, и является непрерывной и возрастающей.

6) **Теорема 28™.** Все элементарные функции непрерывны на их области определения.

**Доказательство™.** Докажем непрерывность функции $y = sinx$. $sinx < x$ для $0 < x < \frac{\pi}{2}$, тогда $|sinx| < |x|$ для любого $x$. Отсюда $|\sin x - \sin x_0| = 2|\sin\frac{x - x_0}{2}| \cdot |\cos\frac{x + x_0}{2}| \leq |x - x_0|$, что доказывает непрерывность функции при выборе $\varepsilon = \delta = |x - x_0|$. Из непрерывности функции $y = sinx$, в свою очередь, следует непрерывность остальных тригонометрических функций: $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x), tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ и т.д. и непрерывность обратных тригонометрических функций. Следовательно, все элементарные функции непрерывны во всей области своего определения.

Доказательства всех перечисленных свойств непосредственно следуют из соответствующих свойств пределов.

**Замечание.** Основные элементарные функции: многочлены, дробно-рациональные, степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические, и также функции, полученные путем конечного числа линейных операций или композиций основных функций.

## 37. Классификация точек разрыва

Пусть $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки $x_0$. Точка $x_0$ называется точкой **устранимого разрыва**, если существует $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Если $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной справа.

Если $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, то функция называется непрерывной слева.

Если $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и эти пределы существуют, то точка $x_0$ называется точкой скачка, и точкой неустранимого разрыва. При этом сам скачок равен модулю разности правого и левого пределов в этой точке.

Точки скачка и точки устранимого разрыва называются **точками разрыва первого рода**.

Точка $x_0$ называется **точкой разрыва второго рода,** если хотя бы один из односторонних пределов в этой точке не существует или равен бесконечности.

## 38. Свойства функции, непрерывных на отрезке

**Теорема 29™ (Вейерштрасса).** Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена на нем и достигает на нем своей верхней и нижней точной границы.

**Доказательство™.** По свойству предела существует окрестность точки $x = a$, в которой $f(x)$ ограничена, то есть существуют числа $m_0$ и $M_0$: $m_0 < f(x) < M_0$ в рассматриваемой окрестности. Выберем точку в правой части этой окрестности и рассмотрим окрестность этой точки, в которой $f(x)$ тоже ограничена. Продолжим эту процедуру до тех пор, пока весь отрезок $[a; b]$ не будет покрыт системой из $n$ окрестностей, причем для каждой -й окрестности $m_i < f(x) < M_i$. Следовательно, для любого $x$, принадлежащего отрезку $[a; b]$, верно неравенство: $m < f(x) < M$, где $m = min(m_i)$, $M = max(M_i)$. Значит, $f(x)$ ограничена на $[a; b]$. Пусть $\mathrm{M} = \sup f(x)$. Предположим, что $f(x) < M$ на $[a; b]$, и рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. По выдвинутому предположению знаменатель дроби в 0 не обращается, следовательно, $g(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и поэтому ограничена: $g(x) \le \mu, \mu > 0$. Но из этого следует, что $f(x) \le M - \frac{1}{\mu}$, то есть число $M - \frac{1}{\mu}$, меньшее $M$, оказывается верхней гранью $f(x)$, что противоречит выбору $M$. Значит, на $[a; b]$ найдется значение $x_0$ такое, что $f(x_0) = M$. Аналогичным образом можно доказать и то, что $f(x)$ достигает на $[a; b]$ своей нижней грани.

**Теорема 30™ (О промежутках значения функции, непрерывной на отрезке).** Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, $A = f(a), B = f(b)$. Тогда для любого числа $c$ такого, что $A < c < B$ будет существовать такое число $\psi$, лежащее внутри отрезка $[a;\ b]$, что $f(x_0) = c$.

**Доказательство™.** Пусть для определенности $A < C < B$. Найдем середину отрезка $[a; b]$: $x = \frac{a+b}{2}$. Если при этом $f(x) = C$, то искомое значение $x_0$ найдено. В противном случае выберем ту половину отрезка, на концах которой значения $f(x)$ лежат по разные стороны $C$, и обозначим ее концы $a_1$ и $b_1$. Будем продолжать эту процедуру (деления отрезка пополам и выбора соответствующей половины). Тогда либо через конечное число шагов значение функции в середине очередного отрезка станет равно $C$, либо мы получим две последовательности ($\{a_n\}$ – начальных точек выбранных отрезков и $\{b_n\}$ – их конечных точек), имеющие своими пределами одну и ту же общую для всех отрезков точку $x_0$. Тогда в силу непрерывности $f(x)$ $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0)$.

Но, поскольку отрезки выбирались так, что $f(a_n) < C < f(b_n)$, получим, что $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \le C \le \lim_{n\to\infty} f(b_n)$, то есть $f(x_0) \le C \le f(x_0)$, или $C = f(x_0)$.

Следствие™. Если функция непрерывна на отрезке и принимает на его концах значения разных знаков, то на отрезке найдется хотя бы одна точка, в которой значение функции равно нулю.

## 39. Эквивалентные бесконечно малые. Следствия из замечательных пределов

Пусть $a(x)$ и $b(x)$ — бесконечно малые при $x \to x_0$. Тогда, если $\lim_{x\to x_0} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$, то $a{\sim}b$.

**Теорема 31™.** Пусть есть $a'{\sim}a,\ b'{\sim}b$. Тогда $\lim_{x\to x_0} \frac{a(x)}{b(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{a\prime(x)}{b\prime(x)}$.

$a(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $b(x)$, при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} \frac{a(x)}{b(x)} = 0$. $(a(x) = O(b(x)))$.

### *Эквивалентные бесконечно малые*

1) $\sin x \sim x$
2) $\tan x \sim x$
3) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
4) $\arcsin x \sim x$
5) $\operatorname{atan} x \sim x$
6) $(1+y)^{\frac{1}{y}} \sim e$
7) $\ln(1+y) \sim y$
8) $a^x - 1 \sim x * \ln a$
9) $(1+x)^p - 1 \sim p * x$
10) $e^x - 1 \sim x$

## 40. Производная и дифференцируемость функций

Пусть $y = f(x)$ определена в окрестности точки $x_0$. Тогда $\Delta x = x - x_0$ является приращением аргумента. А $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f$ является приращением функции. Пусть существует $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, который будет являться производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.

По определению $f'(x_0) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

**Теорема 32™.** Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Если приращение функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ можно представить в виде $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$, где $A = const$, то $y = f(x)$ называется дифференцируемой при $x = x_0$, а $A\Delta x$ называется главной линейной частью приращения или дифференциалом функции.

**Доказательство™.** Из формулы следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, что и означает непрерывность $f(x)$ при $x = x_0$.

**Замечание.** Обратное утверждение неверно, то есть из непрерывности функции не следует ее дифференцируемость. Например, $y = |x|$ непрерывна при $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

**Теорема 33™.** Функция дифференцируема в некоторой точке в том и только в том случае, если она имеет в этой точке производную.

**Доказательство™.**

1) Если для $y = f(x)$ существует $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то $f'(x_0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} + \beta(\Delta x)$, где $\beta(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Тогда $\Delta y = f'(x_0)\Delta x - \beta(\Delta x)\Delta x = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$. Следовательно, функция $y = f(x)$ дифференцируема при $x = x_0$, причем $A = f'(x_0)$.

2) Пусть $y = f(x)$ дифференцируема при $x = x_0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (A + \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}) = A = f'(x_0)$. Таким образом, $f(x)$ имеет производную в точке $x_0$, равную $A$.

**Следствие.** Дифференциал функции можно представить в виде $dy = f'(x_0)dx$, а производную – в виде $f'(x_0) = \dfrac{dy}{dx}$.

# 41. Геометрический смысл производной и дифференциала. Касательная, нормаль

$Касательная ($\boldsymbol{AC}$) — предельное положение секущей ($AB$) на графике функции.

Производная в точке $x_0$ равна тангенсу угла наклона касательной к данной функции в данной точке.

Дифференциал ($CD$) — приращение ординаты касательной.

Уравнение касательной: $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$.

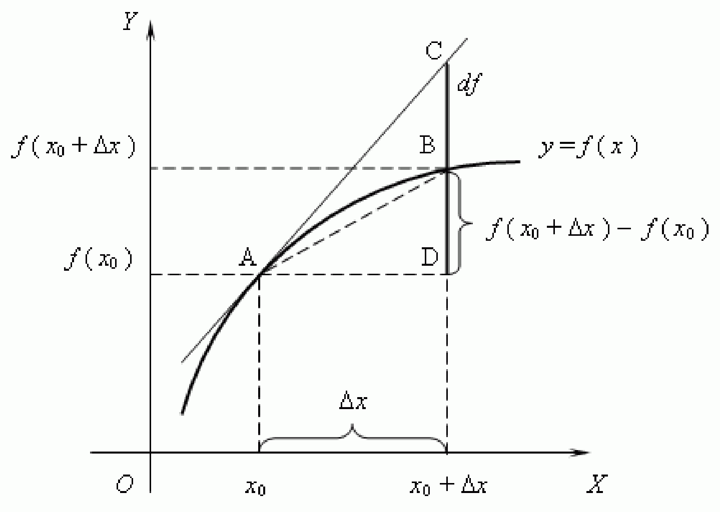


Рис. 2

Нормаль к графику функции в некоторой точке это перпендикуляр к касательной этой же функции в той же самой точке.

Уравнение нормали: $y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Угол между двумя пересекающимися кривыми — угол между их касательными в точке пересечения.

Для того, чтобы существовала производная функции в некоторой точке, необходимо, чтобы были равны односторонние пределы в данной точке.

## 42. Правила вычисления производных

**Теорема 34™.** Производная суммы конечного числа дифференцируемых функций есть сумма производных данных функций.

**Доказательство™.** $(f(x)+g(x))' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(f+\Delta f+g+\Delta g)-(f+g)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f+\Delta g}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}+\dfrac{\Delta g}{\Delta x}) = f'+g'.$

**Теорема 35™.** $(f_1 * f_2)' = f_1' * f_2 + f_1 * f_2{}'$.

**Доказательство™.** $(f(x)\cdot g(x))' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(f+\Delta f)(g+\Delta g)-fg}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g\Delta f + f\Delta g+\Delta f\Delta g}{\Delta x} =$
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}g + f\dfrac{\Delta g}{\Delta x}+\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g\right) = f'g + fg' + f'\cdot 0,$ так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta g = 0$ в силу непрерывности $g(x)$.

**Замечание.** Формула обобщается на конечное число дифференцируемых функций.

**Замечание.** Константа выносится за знак производной.

**Доказательство.** $(kf(x))' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(kf+\Delta kf)-kf}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta kf}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{k\Delta f}{\Delta x} = kf'(x).$

**Теорема 36™.** $\left(\frac{f_1}{f_1}\right)' = \frac{f_1{}' * f_2 - f_1 * f_2{}'}{f_2^2}, f_2(x_0) \neq 0.$

**Доказательство™.**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f+\Delta f}{g+\Delta g}-\frac{f}{g}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(fg+g\Delta f - f\Delta g - fg)}{\Delta x\cdot g(g+\Delta g)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta f}{\Delta x}g - f\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(g+\Delta g)} = \frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

**Теорема 37™.** Если функция $u = \varphi(x)$ имеет при некотором значении x производную $u_x{}' = \varphi'(x)$, а функция $y = f(u)$ имеет при соответствующем значении $u$ производную $y_u{}' = f'(u)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ тоже имеет при данном значении x производную, равную $y'(x) = f'(u)\cdot u'(x)$.

**Доказательство™.** Так как $\lim\limits_{\Delta u\to o}\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'(u),$ то по третьему определению предела можно представить $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'(u)+\alpha,$ где $\alpha\to 0$ при $\Delta u\to 0.$ Тогда $\Delta y = y'(u)\Delta u+\alpha\Delta u.$ Разделив обе части равенства на Δx, получим $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\dfrac{\Delta u}{\Delta x}.$
Переходя к пределу при Δx→0, получаем: $y'(x) = f'(u)u'(x),$ так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha = 0.$

Замечание. Теорема обобщается на любую функцию с любым числом сомножителей.

# 43. Таблица производных

Используя полученные формулы и свойства производных, найдем производные основных элементарных функций.

1. Если $f(x) = C = const$, то $\Delta C = 0$, поэтому $C' = 0$.
2. $y = x^n$, где $n$ – натуральное число. Тогда по формуле бинома Ньютона можно представить

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - x^n = x^n + \frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + o(\Delta x)$$

Следовательно, $y' = nx^{n-1}$.

3. $y = sinx$, $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = 2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos x = \cos x.$
4. $y = cosx$, $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = -\lim\limits_{\Delta x\to 0} 2\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\sin(x+\Delta x) = -2\cdot\frac{1}{2}\sin x = -\sin x.$
5. $(tgx)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\sin' x\cos x - \sin x\cos' x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$
6. Аналогично можно получить формулу $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
7. $(a^x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x\ln a$ (следствие из второго замечательного предела).
8. $(\ln x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \dfrac{1}{x}$ (следствие из второго замечательного предела).
9. $(shx)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = chx.$ Таким же образом можно найти производные остальных гиперболических функций.

## 44. Производная обратной функции, функций заданных неявно и параметрические. Метод логарифмического дифференцирования

Пусть есть непрерывная функция $y = f(x)$. Тогда обратной ей будет называться непрерывная функция $x = f(y)$.

**Теорема 38™.** Если для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = \varphi(y)$, которая в некоторой точке y имеет производную $\varphi'(y) \neq 0$, то в соответствующей точке x функция $f(x)$ тоже имеет производную, причем $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$

**Доказательство™.**

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$. Так как $\varphi(y)$ непрерывна, $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$, и при переходе к пределу при $\Delta y \to 0$ получаем: $y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)} = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

**Обратные тригонометрические функции.**

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arccos x)' = (\frac{\pi}{2} - \arcsin x)' = 0 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(arcctgx)' = (\frac{\pi}{2} - arctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

### *Логарифмическое дифференцирование*

Иногда полезно использовать так называемую формулу логарифмического дифференцирования. Пусть $f(x) > 0$ на некотором множестве значений аргумента и дифференцируема на этом множестве. Тогда по формуле производной сложной функции

$(\ln f(x))' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$, откуда $f'(x) = f(x)(ln\, f(x))'$

Эту формулу удобно использовать в тех случаях, когда производную натурального логарифма данной функции найти проще, чем производную самой функции.

## Примеры.

1. $(x^x)' = x^x(\ln x^x)' = x^x(x\ln x)' = x^x(\ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1).$

2. $\left(\frac{(2x+5)^7\sqrt[5]{3x-7}}{(4x-1)^8\sin^7 x}\right)' = \frac{(2x+5)^7\sqrt[5]{3x-7}}{(4x-1)^8\sin^7 x}\left(7\ln(2x+5)+\frac{1}{5}\ln(3x-7)-8\ln(4x-1)-7\ln\sin x\right)' =$

$= \frac{(2x+5)^7\sqrt[5]{3x-7}}{(4x-1)^8\sin^7 x}\left(\frac{14}{2x+5}+\frac{3}{5(3x-7)}-\frac{32}{4x-1}-7ctgx\right).$

### *Дифференцирование функций, заданных параметрически*

Если функция $y = f(x)$ задана в виде: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, причем функция $\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$, то $y = \psi(\Phi(x))$, и $y'(x) = \psi'(t)\Phi'(x) = \psi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$.

Полученная формула дает возможность находить производную функции, заданной параметрически, без определения непосредственной зависимости y от x.

## Пример.

$x = a(1 - \cos t), y = a(t - \sin t)$ – параметрические уравнения кривой, называемой циклоидой. Найдем $y'(x)$: $x'(t) = a\sin t, y'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(x) = \frac{a(1-\cos t)}{a\sin t} = \frac{1-\cos t}{\sin t}$.

### *Дифференцирование неявно заданных функций*

Пусть значения переменных $x$ и $y$ связаны уравнением $F(x,y) = 0$. Если функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале $(a,b)$, такая, что уравнение при подстановке в него вместо $y$ выражения $f(x)$ обращается в тождество, то говорят, что уравнение задает функцию $y = f(x)$ неявно или что функция $y = f(x)$ есть неявная функция.

Укажем правило нахождения производной неявной функции, не преобразовывая ее в явную, то есть не представляя в виде $y = f(x)$, так как часто это преобразование бывает технически сложным или невозможным.

Для нахождения производной $y_x'$ неявной функции, нужно продифференцировать по $x$ обе части равенства, учитывая, что $y$ есть функция от $x$. Затем из полученного равенства выразить $y_x'$.

# 45. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором отрезке $[a; b]$. В таком случае ее производная представляет собой тоже некоторую функцию $x$. Продифференцировав эту функцию, мы получим так называемую **вторую производную (или производную второго порядка)** функции $f(x)$. Продолжая эту операцию, можно получить производные третьего, четвертого и более высоких порядков. При этом $f`(x)$ будем называть производной первого порядка.

**Производной -го порядка (или $n$-й производной)** от функции $f(x)$ называется производная (первого порядка) от ее $(n-1)-$й производной.

Обозначение: $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=f^{(n)}(x)$. Производные 2-го и 3-го порядка обозначаются соответственно $y''$ и $y'''$.

### *Свойства производных высших порядков*

Основные свойства производных высших порядков следуют из соответствующих свойств первой производной:

1. $(cf(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x)$.
2. $(f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$.
3. Для $y = x^m$ $y^{(n)}=n(n-1)\dots(n-m+1)x^{m-n}$. Если $m$ – натуральное число, то при $n > m$ $y^{(n)} = 0$.
4. Можно вывести так называемую **формулу Лейбница**, позволяющую найти производную -го порядка от произведения функций $f(x)g(x)$:

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + nf^{(n-1)}g' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}f^{(n-2)}g'' + \ldots + fg^{(n)}$$

Заметим, что коэффициенты в этой формуле совпадают с соответствующими коэффициентами формулы бинома Ньютона, если заменить производные данного порядка той же степенью переменной. Для $n = 1$ эта формула была получена при изучении первой производной, для производных высших порядков ее справедливость можно доказать с помощью метода математической индукции.

5. Получим формулу для второй производной функции, заданной параметрически. Пусть $x = \varphi(t), y = \psi(t), t0 \le t \le T.$ Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.

Следовательно,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} : \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

## *Дифференциалы высших порядков*

Дифференциал от дифференциала функции называется ее **вторым дифференциалом** или **дифференциалом второго порядка**.

Обозначение: $d^2y = d(dy)$.

При вычислении второго дифференциала учтем, что $dx$ не зависит от $x$ и при дифференцировании выносится за знак производной как постоянный множитель.

Итак, $d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = (f'(x))'(dx)^2 = f''(x)dx^2$.)

Подобным же образом можно найти третий дифференциал от данной функции:

$d^3y = d(d^2y) = f'''(x)d^3x$ и дифференциалы более высоких порядков.

**Дифференциалом -го порядка** называется первый дифференциал от дифференциала $(n-1)$ – го порядка:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = (f^{(n-1)}(x)d^{n-1}x)' = f^{(n)}(x)d^nx.$$

## 46. Теорема Ролля

**Теорема Ферма™.** Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$, принимает в этой точке наибольшее (наименьшее) в рассматриваемой окрестности значение и имеет в точке $x_0$ производную, то $f'(x_0) = 0$.

**Доказательство™.** Пусть $f(x_0)$ – наибольшее значение функции, то есть для любой точки выбранной окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$. Тогда, если $x < x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, а если $x > x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$.

Переходя к пределу в полученных неравенствах, находим, что из первого из них следует, что $f'(x_0) \geq 0$, а из второго – что $f'(x_0) \leq 0$. Следовательно, $f'(x_0) = 0$.

**Замечание.** В теореме Ферма важно, что $x_0$ – внутренняя точка для данного промежутка. Например, функция $y = x$, рассматриваемая на отрезке $[0; 1]$, принимает наибольшее и наименьшее значения соответственно при $\mathrm{x} = 1$ и $\mathrm{x} = 0$, но ее производная в этих точках в ноль не обращается.

**Теорема 39™ (Ролля).** Если функция $y = f(x)$

1) непрерывна на отрезке $[a; b]$;
2) дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка;
3) принимает равные значения на концах этого отрезка, то есть $f(a) = f(b)$,

то внутри интервала $(a; b)$ существует по крайней мере одна точка $\mathrm{x} = \mathrm{c}, a < c < b$, такая, что $f'(c) = 0$.

**Доказательство™.** Пусть $M$ и $m$ – наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на $[a; b]$. Тогда, если $m = M$, то $f(x) = m = M$ – постоянная функция, и $f'(x) = 0$ для любой точки отрезка $[a; b]$. Если же $m < M$, то по теореме хотя бы одно из значений $m$ или $M$ достигается во внутренней точке $c$ отрезка $[a; b]$ (так как на концах отрезка функция принимает равные значения). Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$.

**Замечание 1.** В теореме Ролля существенно выполнение всех трех условий. Приведем примеры функций, для каждой из которых не выполняется только одно из условий теоремы, и в результате не существует такой точки, в которой производная функции равна нулю.

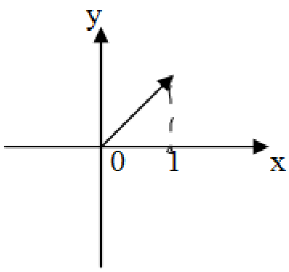



Рис. 1.

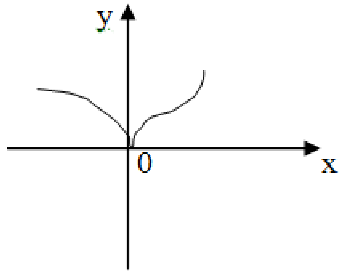



Рис. 2.

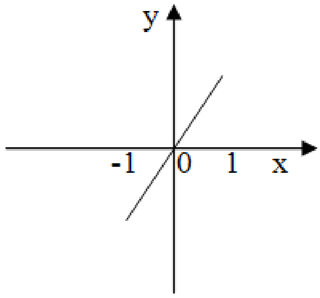



Рис. 3.

Действительно, у функции, график которой изображен на рис. 1, $f(0) = f(1) = 0$, но $x = 1$ – точка разрыва, то есть не выполнено первое условие теоремы Ролля. Функция, график которой представлен на рис.2, не дифференцируема при $x = 0$, а для третьей функции $f(-1) \neq f(1)$.

Замечание 2. Геометрический смысл теоремы Ролля: на графике рассматриваемой функции найдется по крайней мере одна точка, касательная в которой параллельна оси абсцисс.

## 47. Теорема Лагранжа

**Теорема 40™ (Лагранжа).** Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка $[a; b]$ найдется хотя бы одна точка $c$, $a < c < b$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$$

**Доказательство™.** Обозначим $Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ и рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: она непрерывна на $[a; b]$, дифференцируема на $(a; b)$ и $F(a) = F(b) = 0$. Следовательно, на интервале $(a; b)$ есть точка c, в которой $F'(c) = 0$. Но $F'(x) = f'(x) - Q$, то есть $F'(c) = f'(c) - Q$. Подставив в это равенство значение $Q$, получим

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

**Замечание.** Геометрический смысл теоремы Лагранжа: на графике функции $y = f(x)$ найдется точка, касательная в которой параллельна отрезку, соединяющему точки графика с абсциссами a и $b$.

## 48. Теорема Коши

**Теорема 41™ (Коши).** Если $f(x)$ и $g(x)$ – функции, непрерывные на $[a;b]$ и дифференцируемые на $(a;b)$, и $g'(x) \neq 0$ на $(a;b)$, то на $(a;b)$ найдется такая точка $x = c, a < c < b$, что $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ .

**Доказательство™.** Обозначим $Q = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. При этом $g(b) - g(a) \neq 0$, иначе по теореме Ролля нашлась бы точка внутри отрезка $[a;b]$, в которой $g'(x) = 0$, что противоречит условию теоремы. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - Q(g(x) - g(a))$, для которой выполнены все условия теоремы Ролля (в частности, $F(a) = F(b) = 0$). Следовательно, внутри отрезка $[a;b]$ существует точка $x = c$, в которой $F'(c) = 0$. Но $F'(x) = f'(x) - Qg'(x)$, поэтому $f'(c) - Qg'(c) = 0$, откуда $Q = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. Подставляя в это равенство значение $Q$, получаем доказательство утверждения теоремы.

## 49. Правила Лопиталя

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют на некотором отрезке $[a;b]$ условиям теоремы Коши и $f(a) = g(a) = 0$, то отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ не определено при $x = a$, но определено при остальных значениях $x$. Поэтому можно поставить задачу вычисления предела этого отношения при $x \to a$. Вычисление таких пределов называют обычно «раскрытием неопределенностей вида $\{\frac{0}{0}\}$».

**Теорема 42™ (Правило Лопиталя).** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют на отрезке $[a;b]$ условиям теоремы Коши и $f(a) = g(a) = 0$. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

**Доказательство™.** Выберем $x \in [ab], x \neq a$. Из теоремы Коши следует, что $\exists \xi : a < \xi < x$, такое, что $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. По условию теоремы $f(a) = g(a) = 0$, поэтому $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. При $x \to a$ $\xi \to a$. При этом, если существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то существует и $\lim\limits_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$. Поэтому $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim\limits_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Доказано.

**Пример.** $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x - x^a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{(a^x - x^a)'}{(x-a)'} = \lim\limits_{x\to a}\frac{a^x \ln a - ax^{a-1}}{1} = a^a \ln a - a^a = a^a(\ln a - 1)$ при $a > 0$.

**Замечание 1.** Если $f(x)$ или $g(x)$ не определены при $x = a$, можно доопределить их в этой точке значениями $f(a) = g(a) = 0$. Тогда обе функции будут непрерывными в точке a, и к этому случаю можно применить теорему.

**Замечание 2.** Если $f'(a) = g'(a) = 0$ и $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют условиям, наложенным в теореме на $f(x)$ и $g(x)$, к отношению $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ можно еще раз применить правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}$ и так далее.

**Пример.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xctgx-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctgx-\dfrac{x}{\sin^2 x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sin x-x}{2x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin^2 x+\cos^2 x-1}{2\sin^2 x+2x\cdot 2\sin x\cos x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{2\sin x(\sin x+2x\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\sin x+2x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{\cos x+2\cos x-2x\sin x}=-\frac{1}{3}.$$

Правило Лопиталя можно применять и для раскрытия неопределенностей вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, то есть для вычисления предела отношения двух функций, стремящихся к бесконечности при $x\to a$.

**Теорема 43™.** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы при $x\neq a$ в окрестности точки а, причем $g'(x)\neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ и существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

**Доказательство™.** Выберем в рассматриваемой окрестности точки а точки $\alpha$ и $x$ так, чтобы $\alpha<x<a$ (или $a<x<\alpha$). Тогда по теореме Коши существует точка c $(\alpha<c<x)$ такая, что $\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Так как $\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}$, получаем $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}$, откуда $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}\dfrac{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}$.

Так как $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$, можно для любого малого $\varepsilon$ выбрать $\alpha$ настолько близким к а, что для любого $c$ будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)}-A\right|<\varepsilon$, или $A-\varepsilon<\dfrac{f'(c)}{g'(c)}<A+\varepsilon$. Для этого же значения $\varepsilon$ из условия теоремы следует, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}=1$ (так как $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$), поэтому $\left|\dfrac{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}-1\right|<\varepsilon$, или $1-\varepsilon<\dfrac{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}<1+\varepsilon$.

Перемножив неравенства, получим $(A-\varepsilon)(1-\varepsilon) < \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \dfrac{1-\dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} < (A+\varepsilon)(1+\varepsilon)$,

или: $(A-\varepsilon)(1-\varepsilon) < \dfrac{f(x)}{g(x)} < (A+\varepsilon)(1+\varepsilon)$. Поскольку $\varepsilon$ – произвольно малое число, отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Доказано.

**Замечание 1.** Теорема верна и при $A=\infty$. В этом случае $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$. Тогда и $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$, следовательно, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

**Замечание 2.** Теоремы и можно доказать и для случая, когда $x\to\infty$.

**Пример.** $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x^{-2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}} = -2\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0.$

## 50. Формула Тейлора. Остаточный член в формуле Тейлора

Ура! Норин убрал этот билет из списка задаваемых на экзамене!

## 51. Признаки монотонности функций

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на $[a;b]$, если $\forall x_1, x_2 \in [ab]$ таких, что $x1 < x2$, $f(x1) < f(x2)$ ($f(x1) > f(x2)$).

**Теорема™.** Если функция $f(x)$, дифференцируемая на $[a;b]$, возрастает на этом отрезке, то $f'(x) \geq 0$ на $[a;b]$.

Если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$, причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[a;b]$.

**Доказательство™.**

1. Пусть $f(x)$ возрастает на $[a;b]$. Тогда при $\Delta x > 0$ $f(x+\Delta x) > f(x)$, то есть $f(x+\Delta x) - f(x) > 0$. Если же $\Delta x < 0$, $f(x+\Delta x) < f(x)$, поэтому $f(x+\Delta x) - f(x) < 0$. Следовательно, в обоих случаях $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Значит, $\lim\limits_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0$, Доказано.

2. Пусть $f'(x) > 0 \forall x \in [ab]$. Выберем $x_1, x_2 \in [ab] : x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), x_1 < \xi < x_2$. Но по условию $f'(\xi) > 0$, поэтому $f(x2) > f(x1)$, следовательно, $f(x)$ – возрастающая функция.

**Замечание 1.** Аналогичную теорему можно доказать и для убывающей функции: Если $f(x)$ убывает на $[a;b]$, то $f'(x) \leq 0$ на $[a;b]$. Если $f'(x) < 0$ на $(a;b)$, то $f(x)$ убывает на $[a;b]$.

**Замечание 2.** Геометрический смысл доказанной теоремы: если функция возрастает на отрезке $[a;b]$, то касательная к ее графику во всех точках на этом отрезке образует с осью $Ox$ острый угол (или горизонтальна). Если же функция убывает на рассматриваемом отрезке, то касательная к графику этой функции образует с осью $Ox$ тупой угол (или в некоторых точках параллельна оси $Ox$).

# 52. Максимум и минимум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума

### *Необходимое условие экстремума*

**Теорема™ (необходимое условие экстремума).** Пусть функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности точки $x_0$. Если $x_0$ является точкой экстремума функции, то $f'(x_0)=0$ или не существует.

**Доказательство™.** Действительно, производная в точке $x_0$ либо существует, либо нет. Если она существует, то по теореме Ферма она равна нулю.

**Примеры.**

1. Функция $y = x^2$ имеет минимум при $x = 0$, причем $(x^2)' = 2x = 0$ при $\mathrm{x} = 0$.
2. Минимум функции $y = |x|$ достигается при $x = 0$, причем производная в этой точке не существует.

**Замечание.** Отметим еще раз, что теорема дает **необходимое, но не достаточное** условие экстремума, то есть не во всех точках, в которых $f'(x) = 0$, функция достигает экстремума.

**Пример.** У функции $y = x^3$, $y' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, однако функция монотонно возрастает во всей области определения.

Если функция определена в некоторой окрестности точки $x_0$ и ее производная в этой точке равна нулю или не существует, точка $x_0$ называется **критической точкой** функции. Все точки экстремума находятся в множестве критических точек функции.

### *Достаточные условия экстремума*

**Теорема™.** Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $x_0$, дифференцируема в проколотой окрестности этой точки и с каждой стороны от данной точки $f'(x)$ сохраняет постоянный знак. Тогда:

1) если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, точка $x_0$ является точкой максимума;
2) если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, точка $x_0$ является точкой минимума;
3) если $f'(x)$ не меняет знак в точке $x_0$, эта точка не является точкой экстремума.

**Доказательство™.** Справедливость утверждения 3) следует из теоремы. Докажем утверждения 1) и 2). По формуле Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, где $x$ принадлежит окрестности точки $x_0$, а $\xi$ лежит между $x$ и $x_0$. Если $f'(\xi) > 0$ при $x < \xi < x_0$ и $f'(\xi) < 0$ при $x_0 < \xi < x$, приращение функции $f(x) - f(x_0) < 0$ по обе стороны $x_0$ , то есть в рассматриваемой точке достигается максимум. Если же производная при $x = x_0$ меняет знак с «+» на «-», точка $x_0$ является точкой минимума. Следовательно, изменение знака производной в точке $x_0$ является необходимым и достаточным условием наличия экстремума в этой точке.

**Теорема™.** Пусть $f'(x_0) = 0$ и у рассматриваемой функции существует непрерывная вторая производная в некоторой окрестности точки $x_0$. Тогда $x_0$ является точкой максимума, если $f''(x0) < 0$, или точкой минимума, если $f''(x0) > 0$.

**Доказательство™**. Докажем первую часть теоремы. Пусть $f''(x0) < 0$. Так как по условию $f''(x)$ непрерывна, существует окрестность точки $x_0$ , в которой $f''(x) < 0$. Вспомним, что $f''(x) = (f'(x))'$ , и из условия $(f'(x))' < 0$ следует, что $f'(x)$ убывает в рассматриваемой окрестности. Поскольку $f'(x_0) = 0$ , $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$. Тогда по теореме точка $x_0$ является точкой максимума функции. Доказано. Утверждение 2) доказывается аналогично. Доказано.

## 53. Исследования функций на экстремум с помощью формулы Тейлора (возможно не нужен)

**Теорема™.** Пусть функция $y = f(x)$ $n$ раз дифференцируема в точке $x_0$ и $f^{(k)}(x_0) = 0$ при $k = 1,2,\dots,n-1$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда, если $n$ – четное число ($n = 2m$), функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ экстремум, а именно максимум при $f^{(2m)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(2m)}(x_0) > 0$. Если же $n$ – нечетное число ($n = 2m - 1$), то точка $x_0$ не является точкой экстремума.

**Доказательство™.** Из формулы Тейлора следует, что $f(x) - f(x_0) = \dfrac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$, где $\xi$ лежит между $x$ и $x_0$.

а) Если $n = 2m$ – четное и $f^{(2m)}(x_0) < 0$, то найдется окрестность точки $x_0$, в которой $f^{(2m)}(x) < 0$. Пусть $x$ принадлежит этой окрестности, тогда $\xi$ тоже ей принадлежит, то есть $f^{(2m)}(\xi) < 0$. Но $(x - x_0)^{2m} > 0$ при $x \neq x_0$, поэтому $f(x) - f(x_0) < 0$ во всей рассматриваемой окрестности, следовательно, точка $x_0$ является точкой максимума.

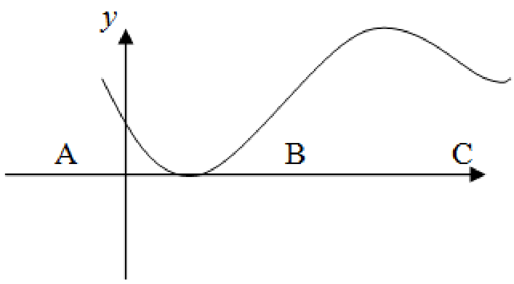
б) Если $n = 2m$ – четное и $f^{(2m)}(x_0) > 0$, то таким же образом доказывается, что $x_0$ – точка минимума.

в) Если $n = 2m - 1$ – нечетное, то $(x - x_0)^{2m-1}$ имеет разные знаки по разные стороны точки $x_0$. Поэтому в окрестности этой точки, в которой производная порядка $2m - 1$ сохраняет постоянный знак, приращение функции меняет знак при $x = x_0$. Следовательно, экстремум в этой точке не достигается.

## 54. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба

Кривая называется **выпуклой (обращенной выпуклостью вверх)** на интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

Кривая называется **вогнутой (обращенной выпуклостью вниз)** на интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.




Например, кривая, изображенная на рисунке, выпукла на интервале $(BC)$ и вогнута на интервале $(AB)$.

**Теорема™** Если $f''(x) < 0$ во всех точках интервала $(a;b)$, то кривая $y = f(x)$ выпукла на этом интервале. Если $f''(x) > 0$ во всех точках интервала $(a;b)$, то кривая $y = f(x)$ вогнутаа на этом интервале.

**Доказательство™.** Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $f''(x) < 0$ на $(a;b)$. Выберем на интервале $(a;b)$ произвольную точку $x = x_0$и докажем, что все точки кривой на этом интервале лежат ниже проведенной в точке с абсциссой $x_0$ касательной, то есть ордината любой точки кривой на рассматриваемом интервале меньше ординаты касательной. Уравнение кривой имеет вид $y = f(x)$, а уравнение касательной при $x = x_0$:

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тогда $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Применив теорему Лагранжа, получим: $y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0)$, где c лежит между $x$ и $x_0$. Применим к первому множителю правой части полученного равенства еще раз теорему Лагранжа: $y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$

(здесь $c_1$ – между $x_0$ и c). Пусть $x > x_0$. Тогда $x_0 < c_1 < c < x$, то есть $c - x_0 > 0$, $x - x_0 > 0$, $f''(c_1) < 0$, поэтому $y - \overline{y} < 0$. Если же $x < x_0$, то $x < c < c_1 < x_0$, поэтому $c - x_0 < 0$, $x - x_0 < 0$, $f''(c_1) < 0$. Но при этом по-прежнему $y - \overline{y} < 0$. Таким образом, любая точка кривой на данном интервале лежит ниже касательной в точке с абсциссой $x_0$. Следовательно, кривая является выпуклой.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогичным образом.

Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

**Замечание.** Если в точке перегиба существует касательная к кривой, то в этой точке она пересекает кривую, потому что по одну сторону от данной точки кривая проходит выше касательной, а по другую – ниже.

**Теорема™ (Необходимое условие точки перегиба).** Если в точке $x_0$ перегиба кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, существует вторая производная $f''(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

**Доказательство™**. Так как при $\mathrm{x} = x_0$ $y = \overline{y} = f(x_0), y' = \overline{y}' = f'(x_0)$, по формуле Тейлора получаем: $y - \overline{y} = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$. Если бы $f''(x_0) \neq 0$, разность $y - \overline{y}$ сохраняла бы постоянный знак в некоторой окрестности точки $x_0$, в то время как в точке перегиба эта разность должна менять знак. Следовательно, $f''(x_0) = 0$.

**Теорема™ (Достаточное условие точек перегиба).** Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, дважды дифференцируема в проколотой окрестности этой точки и $f''(x)$ меняет знак при $x = x_0$, то $x_0$ – точка перегиба.

**Доказательство™.** Воспользовавшись формулой, получим, что знак разности $y - \overline{y}$ определяется знаком $f''(c_1)$, так как $(c - x_0)(x - x_0) > 0$ по обе стороны точки $x_0$. Следовательно, $y - \overline{y}$ меняет знак при $x = x_0$, то есть $x_0$ – точка перегиба.

**Замечание.** Можно доказать, что если в условиях теоремы критическая точка не является точкой экстремума, то она является точкой перегиба.

**Пример.** Найдем интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба функции $y = x^3 - 6x^2 + x - 12$, $y' = 3x^2 - 12x + 1$, $y'' = 6x - 12$. $y'' = 0$ при $\mathrm{x} = 2$, $y'' < 0$ при $\mathrm{x} < 2$, $y'' > 0$ при $\mathrm{x} > 2$. Таким образом, график функции является выпуклым при $\mathrm{x} < 2$, вогнутым при $\mathrm{x} > 2$, а $\mathrm{x} = 2$ – точка его перегиба.

## 55. Асимтоты

Ура! Норин убрал этот билет из списка задаваемых на экзамене!