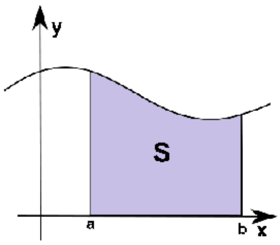
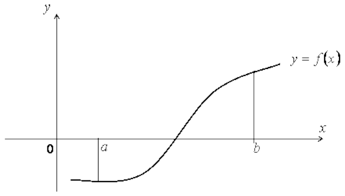
§15. Вычисление площадей с помощью определенного интеграла

П.1. Вычисление площадей в декартовых координатах

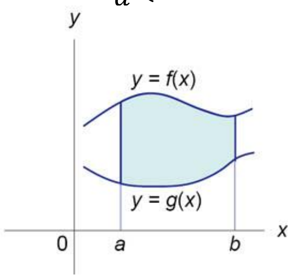
1) $f(x) \geq 0$ непрерывна на $[a; b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции.



2) $f(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения и непрерывна на $[a; b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = S_2 - S_1$.

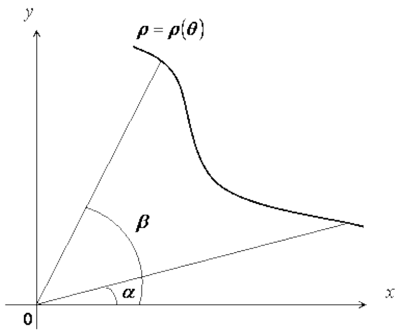


3) $f(x) \geq g(x)$ на $[a; b]$. Тогда $S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$.



4) Кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$; $t \in [\alpha; \beta]; x'(t) \neq 0; x(\alpha) = a; x(\beta) = b; a < b$. Тогда $S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$.

П.2. Вычисление площадей в полярных координатах



Пусть $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta]$ задает границу криволинейного сектора. Разобьем промежуток $[\alpha; \beta]$ на n частей: $\varphi_0 = \alpha < \varphi_1 < \cdots < \varphi_n = \beta$, и в каждом промежутке выберем точку $\xi_i \in [\varphi_{i-1}; \varphi_i]$. Тогда $\rho(\xi_i)$ – радиус кругового сектора, $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ – размер угла сектора. Площадь фигуры, составленной из получившихся круговых секторов, вычисляется как $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho^2(\xi_i)\,\Delta\varphi_i$. При $\max\limits_i \Delta\varphi_i \to 0$ формула сводится к интегральному виду $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$. А площадь отдельно взятого i – го кругового сектора будет находиться как $\frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$.

§16. Вычисление длины дуги

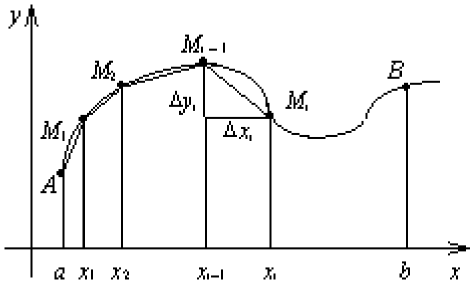


Рис. 16

Пусть $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема на $[a; b]$ и требуется найти длину дуги графика функции. Разобьем $[a; b]$ на n частей: точки $M_i(x_i; y(x_i))$ будут являться концами соответствующих хорд. В итоге вся дуга разобьется на n звеньев. Длина каждого звена будет вычисляться как $\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} * \Delta x_i$. Тогда длина всей дуги будет равна сумме длин всех ломаных $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} * \Delta x_i$. При $\max_i \Delta l_i \to 0$ формула сводится к интегральному виду $\int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$.

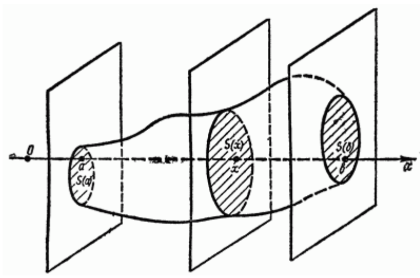
<u>Замечание.</u> Длина графика функции существует, если функция непрерывна и дифференцируема. Такие кривые называются спрямляемыми. Если функция только непрерывна, то может возникнуть ситуация неспрямляемой кривой.

Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$; $t \in [\alpha; \beta]$, то длина дуги вычисляется по формуле $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt$.

Если кривая задана в полярных координатах, то для вывода формулы выразим декартовы координаты x, y через полярные ρ, φ: $x = \rho(\varphi) \cos \varphi$, $y = \rho(\varphi) \sin \varphi$. Подставив получившиеся выражения в формулу длины дуги для параметрически заданной функции, получим $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2} d\varphi$.

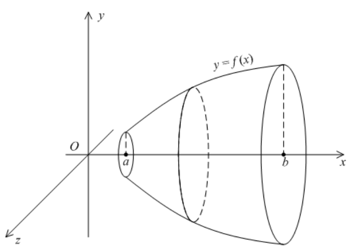
§17. Объем тела вращения

П.1. Объем тела через площади поперечного сечения



Пусть есть некоторое тело, которое можно спроектировать на ось Ox $[a; b]$. Введем непрерывную функцию $S(x)$, отображающую площадь поперечного сечения в каждой точке $[a; b]$. Тогда объем тела можно вычислять как $V = \int_a^b S(x)dx$. Разобьем $[a; b]$ на n частей таких, что $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. На каждом разбиении выберем точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Тогда $S(\xi_i)$ – площадь поперечного сечения, $S(\xi_i)\Delta x_i$ – объем цилиндрического тела. Складывая эти объемы, получаем $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i \xrightarrow[\max_i \Delta x_i \to 0]{} \int_a^b S(x)dx$.

П.1. Объем тела вращения



Пусть есть непрерывная кривая $y = f(x)$, заданная на $[a; b]$. Тогда радиус отдельно взятого поперечного сечения будет равен $r = f(x)$, а площадь поперечного сечения равна $S(x) = \pi r^2 = \pi f^2(x)$. Тогда объем тела вращения можно вычислять как $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$. Вывод аналогичный.

Глава 2. Функции нескольких переменных

§1. Основные понятия

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^n$ размерности n. Любой элемент $x \in \mathbb{R}^n$ может быть представлен как вектор $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Их можно складывать, вычитать, умножать на число. Также говорят о расстоянии в линейном пространстве $||x - y|| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$. Введем понятие n – мерного шара с центром в точке x_0 и радиусом r: $S_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2} < r\}$.

С помощью этих шаром можно ввести понятие внутренней точки области. Пусть D – подмножество $\mathbb{R}^n$. Точка $x_0 \in D$ называется внутренней точкой множества D, если существует такое r, что n – мерный шар с центром в точке x_0 полностью лежит в D ($S_r(x_0) \in D$). Точка x_0 (уже не обязательно лежащей в D) называется граничной точкой множества D, если для любого r в $S_r(x_0)$ существуют точки, отличные от x_0, принадлежащие D и не принадлежащие в D.

Множество $D \in \mathbb{R}^n$ называют открытым, если все его точки внутренние.

Множество $D \in \mathbb{R}^n$ называют замкнутым, если оно содержит и внутренние, и граничные точки.

Пусть заданы $\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ \dots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$ – непрерывные дифференцируемые функции, $t \in [\alpha, \beta]$. Тогда говорят, что эти функции задают в $\mathbb{R}^n$ кривую. Кривые задаются неоднозначно.

Множество называется связным, если любые две его точки можно соединить кривой, лежащей в D.

Областью в $\mathbb{R}^n$ называется открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть дана точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда любое открытое множество, содержащее x_0, называется окрестностью этой точки. Шар с центром в точке x_0 и радиусом r называется r – окрестностью точки x_0.

Пусть $D \in \mathbb{R}^n$ – область и пусть в D задана функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Эту функцию будет называть функцией нескольких переменный.

Пределом во внутренней точке $x_0 \in D$ функции f называется $A = \lim\limits_{\substack{x_1 \to x_{01} \\ x_2 \to x_{02} \\ \dots \\ x_n \to x_{0n}}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая δ – окрестность $S_\delta(x_0)$, что если $x \in \dot{S}_\delta(x_0)$, то $f(x_1, x_2, \dots, x_n) < \varepsilon$. Функция переводит точку из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^1$.

<u>Замечание.</u> Можно показать, что покоординатное стремление $\begin{cases} x_1 \to x_{01} \\ x_2 \to x_{02} \\ \dots \\ x_n \to x_{0n} \end{cases}$ равносильно стремлению по метрике $||x - x_0||$. Поэтому можно писать предел в виде $A = \lim\limits_{||x - x_0|| \to 0} f(x)$.

Если $\lim\limits_{||x - x_0|| \to 0} f(x)$ равен значению функции в точке, то $f(x)$ непрерывна в этой точке.

Есть две формы записи: $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0}} \big(f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) = 0$ и $\lim\limits_{||\Delta x|| \to 0} \Delta f = 0$. При выполнении условия в любой из двух форм записи функция будет являться непрерывной. Δf называется приращением функции. Частным приращением функции f по x_1 называется $\Delta_{x_1} f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Функция называется непрерывной на множестве $M \in \mathbb{R}^n$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пусть есть некоторая область $G \in \mathbb{R}^n$. Определим множество $\bar{G} = G \vee \partial G$ (∂G – граница G), включающее в себя область и ее границу. Такое множество называется замкнутой областью. Если функция непрерывна в замкнутой области, то она достигает на ней своих наибольших и наименьших значений и принимает на этом множестве все промежуточные значения.