Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора. Пусть есть функция двух переменных $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{df(x_0,y_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0,y_0)}{2!} + o((\Delta\rho)^2)$, где $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Так как в точке (x_0,y_0) производная обращается в ноль $df(x_0,y_0) = 0$, то приращение функции $\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0)$ есть второй дифференциал, деленный на 2!: $\Delta f = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right) + o((\Delta\rho)^2)$. Перепишем в виде $\Delta f = \frac{1}{2}\left(A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x\Delta y + C(\Delta y)^2 + 2o((\Delta\rho)^2)\right)$. Теперь перейдем к полярным координатам $\begin{cases}\Delta x = \Delta\rho * \cos\varphi \\ \Delta y = \Delta\rho * \sin\varphi\end{cases}$, и выражение $\frac{2o((\Delta\rho)^2)}{(\Delta q)^2}$ заменим на $\varepsilon(\Delta\rho)$, которое будет малой величиной, так как $\lim\limits_{\Delta q\to 0}\frac{2o((\Delta\rho)^2)}{(\Delta q)^2} = 0$. Тогда наше выражение примет вид $\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi + \varepsilon(\Delta\varphi))$. Теперь выражение в скобках домножим и разделим на A, а также в числителе прибавим и вычтем $B^2\sin^2\varphi$ для выделения полного квадрата: $\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 * \left(\frac{A^2*\cos^2\varphi + 2*A*B*\cos\varphi*\sin\varphi + B^2*\sin^2\varphi - B^2*\sin^2\varphi + A*C*\sin^2\varphi + \varepsilon_1(\Delta\rho)}{A}\right) = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left(\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2}{A} + \frac{(AC-B^2)\sin^2\varphi + \varepsilon_1(\Delta\rho)}{A}\right)$, где $\varepsilon_1(\Delta\rho) = \varepsilon(\Delta\rho) * A$, что все равно является малой величиной. Теперь рассмотрим четыре возможных случая:

1. $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$. В этом случае весь числитель нашего выражение будет положителен. (В некоторой окрестности точки (x_0,y_0) будет выполняться неравенство $(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC-B^2)\sin^2\varphi > |\varepsilon_1(\Delta\rho)|$, так как последнее является бесконечно малой величиной). Знаменатель также положителен. Отсюда следует, что $\Delta f > 0$, а значит, точка (x_0,y_0) является точкой минимума.
2. $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$. Числитель так же положителен, но вот знаменатель отрицателен. (В некоторой окрестности точки (x_0,y_0) будет выполняться неравенство $(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC-B^2)\sin^2\varphi > |\varepsilon_1(\Delta\rho)|$, так как последнее является бесконечно малой величиной). Отсюда следует, что $\Delta f < 0$, а значит, точка (x_0,y_0) является точкой максимума.
3. $AC - B^2 < 0$ и $A > 0$. Если мы возьмем $\sin\varphi = 0$, т.е. $\varphi = 0$ (приравняем к нулю второе слагаемое числителя), то, рассуждая аналогично предыдущим пунктам, получим что $\Delta f > 0$ в некоторой окрестности точки (x_0,y_0). А если теперь мы приравняем к нулю первое слагаемое числителя, $\tan\varphi = -\frac{A}{B}$, то $\Delta f < 0$. Как видим, у нас есть направление угла, по которому функция возрастает, и направление угла, по которому функция убывает. Следовательно, экстремума нет, точка (x_0,y_0) является седловой точкой.
4. $AC - B^2 = 0$. Тогда для $\tan\varphi = -\frac{A}{B}$ (первое слагаемое обращается в ноль) выражение примет вид $\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\varepsilon(\Delta\rho)$. В этом случае все будет определяться знаком $\varepsilon(\Delta\rho)$, а для выяснения этого требуется дополнительно исследование.

Замечание. Теорему можно обобщить на n переменных. Знак приращения определяется прежде всего вторым дифференциалом, а все частные производные содержатся в матрице Гессе, именуемой квадратичной формой. Если она определена и положительна, тогда максимум, отрицательная – минимум, если ноль, то нет экстремума, а если положительна и отрицательна по различным направлениям, то это седловая точка и требуется дополнительно исследование.

Глава 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения

§1. Понятие дифференциального уравнения

П.1. Основные определения

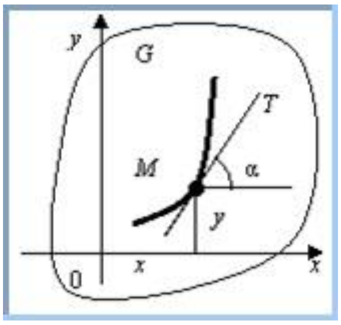
Уравнение вида $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ называется дифференциальным. Причем порядок старшей производной этого уравнения будет называться порядком этого уравнения. Пример: $(y'')^3 + y'x + yx^2 = 0$ – дифференциальное уравнение второго порядка.

Частным решением дифференциального уравнения называется любая функция $y(x)$, подстановка которой обращает выражение $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ в верное тождество. Пример: $y'' + y = 0$. $y = \sin x$, $y = c_1 \sin x$, $y = c_1 \cos x$, $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ – частные решения этого уравнения. Таких решений может быть несколько.

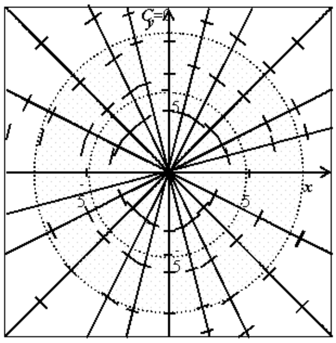
Общим решением дифференциального уравнения $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ называется такое $y = \varphi(c_1, c_2, \ldots, c_n, x)$, если оно является частным решением уравнения при всех допустимых значениях констант $c_1, c_2, \ldots, c_n$, а также если для любого частного решения существуют такие константы $c_1 = c_{10}, c_2 = c_{20}, \ldots, c_n = c_{n0}$, что $\varphi(x) = \varphi(c_{10}, c_{20}, \ldots, c_{n0}, x)$, то есть если всегда можно подобрать константы для получения решения.

П.2. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Уравнение вида $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ называется разрешенным относительно старшей производной. Пример: $y' = f(x, y)$. К такому виду дифференциальное уравнение можно привести не всегда.



Геометрический смысл: если функция задана в подобном виде, то в каждой точке некоторой области, на которой определена эта функция, мы можем вычислить ее производную, то есть тангенс угла наклона касательной. Если есть частное решение $y = \varphi(x)$, то его график называется интегральной кривой. Пусть $f(x, y)$ определена в некоторой области $D \in R^2$. Она задает значение в каждой точке. Тогда в каждой точке области будет задан вектор, касательный к интегральной кривой. Тогда, построив эти вектора, можно будет нарисовать интегральную кривую. $f(x, y)$ задает в D касательные векторы к интегральным кривым. Линии уровня вида $f(x, y) = c$ называются изоклинами. Пример: $y' = -\frac{x}{y}$. $-\frac{x}{y} = c$ – изоклины. $y = -\frac{1}{c}x$. Пусть $-\frac{1}{c} = k$. Тогда $y = kx$, то есть линии уровня представляют собой прямые. Если $k = 1$, то $y = x, y' = -1$. Если $k = -1$, то $y = -x, y' = 1$. Если $k = 0$, то $y = 0, y' = \infty$. Если соединить все получившиеся касательные к интегральным кривым, то получатся окружности. Интегральные кривые представляют собой множество окружностей.



Задача Коши: пусть есть уравнение $y' = f(x, y)$ и точка (x_0, y_0), принадлежащая D, а также значение функции в точке x_0: $y(x_0) = y_0$. Последнее условие называется начальным условием. Задача состоит в следующем: требуется найти решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, которое удовлетворяло бы начальному условию (поиск такой интегральной кривой, которая бы проходила через точку (x_0, y_0)).

Оказывается, если функция $f(x, y)$ непрерывна в D и частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в D, то для любой точки (x_0, y_0) существует единственная функция $y = \varphi(x)$, являющаяся решением $y' = f(x, y)$, которая удовлетворяет начальному условию, т.е. решает задачу Коши, и для которой в некоторой окрестности точки x_0 значения $(x, \varphi(x))$ лежат в области D. (При выполнении условий через некоторую точку области D проходит единственная интегральная кривая, которая хотя бы в окрестности этой точки будет лежать в области D).

§2. Уравнения первого порядка

П.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то $dy = f(x, y)dx$. Пусть есть функция $f(x, y)$. Ее можно расписать как $f_1(x)f_2(y)$. Уравнение вида $dy = f_1(x)f_2(y)dx$ называется уравнением с разделяющимися переменными (их можно разделить), а уравнение вида $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$ называется уравнением с разделенными переменными ($dG(y) = dF(x) \rightarrow G(y) = F(x) + c$), где F и G – первообразные от $f_1(x)$ и $\frac{1}{f_2(y)}$. Получится, что можно проинтегрировать: $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$. Почти все решения дифференциальных уравнений сводятся к подобному разделению.

В частности, $M_1(x)M_2(y)dy = N_1(x)N_2(y)dx$ – обычный вид уравнения с разделяющимися переменными. Можно привести к уравнению с разделенными: $\frac{M_2}{N_2}(y)dy = \frac{N_1}{M_1}(x)dx$.

П.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$ называется линейным дифференциальным уравнением. Если $q(x) = 0$, то уравнение будет однородным. Если $q(x) \neq 0$, то будет неоднородным. Оказывается, что однородное линейное дифференциальное уравнение $y' + p(x)y = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными: разделим и проинтегрируем $\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \ln|y| = -\int p(x)dx + c_1; y = e^{c_1}e^{-\int p(x)dx} = ce^{-\int p(x)dx}$. Последнее является общим решением линейного дифференциального уравнения.