§8. Частные производные и дифференциалы высших порядков

П.1. Формула Тейлора

Производная второго порядка функции f двух переменных есть $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Аналогично определяется производная n – го порядка $\frac{\partial^k f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial_{x_1}^{k_1} * \partial_{x_2}^{k_2} * \dots * \partial_{x_n}^{k_n}} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial^{k-1} f}{\partial_{x_1}^{k_1-1} * \partial_{x_2}^{k_2} * \dots * \partial_{x_n}^{k_n}}$ $, k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$. Точно таким же образом определяется дифференциал n – го порядка функции f. По определению это есть $d^n f \equiv d(d^{n-1} f)$, где $d^2 f = d(df)$. Пусть есть некая функция от двух переменных $f(x,y)$. Тогда $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. Дифференциал зависит от четырех переменных – точки $(x,y), dx, dy$, от последних двух зависит линейно. Тогда дифференциал второго порядка есть $d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(dy)^2$. Таким образом, дифференциал второго порядка есть $d(\dots) = \frac{\partial}{\partial x}(\dots)dx + \frac{\partial}{\partial y}(\dots)dy$, а дифференциал n – го порядка есть $d^n(\dots) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\dots)dx + \frac{\partial}{\partial y}(\dots)dy\right)^n$. Рассмотрим функцию $f(x,y)$, у которой существуют частные производные n – го порядка в окрестности точки в окрестности точки (x_0,y_0). Тогда имеет место выражение $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0) + o\left(\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)^n\right)$, где $dx = x - x_0, dy = y - y_0$, которое и называется формулой Тейлора. Пояснение: $\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)^n$ – бесконечно малая функция, а $o\left(\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)^n\right)$ – бесконечно большая более высокого порядка, остаточный член формулы Тейлора. Аналогичная формула для одной переменной была в первом семестре.

П.2. Экстремум функции нескольких переменных

Пусть некая функция $f(x,y)$ определена в окрестности точки (x_0,y_0) и имеет частные производные 1-го порядка. Говорят, что функция f имеет локальный максимум в точке (x_0,y_0), если существует такая окрестность точки (x_0,y_0), что для любого x и $y \in$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$. Аналогичным образом определяется локальный минимум. Точки локального минимума и максимума называются точками экстремума.

Теорема 24. Пусть точка (x_0,y_0) – точка экстремума. Тогда частные производные (если они существуют) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ равны нулю.

Доказательство. Пусть точка (x_0,y_0) – точка максимума (аналогичные рассуждения можно вести для точки минимума) функции f. Тогда по определению существует такая окрестность точки (x_0,y_0), что $f(x_0,y_0) \ge f(x_0 + \Delta x, y_0) = f(x,y_0)$. Так как y_0 фиксировано, то это функция одной переменной, и, следовательно, частная производная по x обращается в ноль $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$. Это является необходимым условием существования экстремума для функции одной переменной (также существование производной в этой точке). Аналогичным образом частная производная по y обращается в ноль $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Точки, в которых производная обращается в ноль, называются стационарными точками.

Замечание. Обращение частных производных в ноль является необходимым, но не достаточным условием существования точки экстремума. Пример: $f(x, y) = x^2 - y^2$. Точка $(0; 0)$ не принимает экстермальное значение, хотя частные производные в этой точке равны нулю $\frac{\partial f}{\partial x}(0; 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0; 0) = 0$.

Теорема 25. Достаточные условия экстремума. Пусть некая функция $f(x, y)$ имеет частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки (x_0, y_0). Пусть $A = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x_0, y_0), B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0); C = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x_0, y_0)$. Если:

1. $A * C - B^2 > 0$ и $A > 0$, то точка (x_0, y_0) – точка минимума.
2. $A * C - B^2 > 0$ и $A < 0$, то точка (x_0, y_0) – точка максимума.
3. $A * C - B^2 < 0$, то точка (x_0, y_0) не является точкой экстремума.
4. $A * C - B^2 = 0$, то требуется дополнительное исследование.

Доказательство теоремы в следующей лекции.