П.2. Признаки сравнения

<u>Теорема 15.</u> Рассмотри интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{Mdx}{x^\alpha}$, где $M > 0, \alpha > 0$. Этот интеграл расходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\alpha \neq 1$. Тогда $\int_a^{+\infty} \frac{Mdx}{x^\alpha} = \left.\frac{Mx^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_a^{+\infty} = \left[\begin{matrix} +\infty, & \alpha<1 \\ \frac{Ma^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha>1 \end{matrix}\right.$. Пусть $\alpha = 1$. Тогда $\int_a^{+\infty} \frac{Mdx}{x} = M \ln x \Big|_a^{+\infty} = +\infty$.

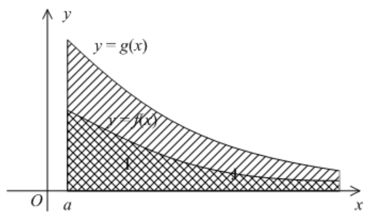
<u>Теорема 16 (Сравнение несобственных интегралов 1 рода).</u> Пусть на интервале $[a; +\infty)$ $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$. Тогда:

1) Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится.
2) Если $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим доказательства для обоих случаев:

1) Пусть существует предел $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = I$. Но по свойству определенных интегралов $\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq I$. Рассмотри функцию $\Phi(b) = \int_a^b \varphi(x)dx$. Эта функция возрастающая и ограничена сверху. Следовательно, существует ее предел $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b \varphi(x)dx$, т.е. интеграл сходится.

2) От противного: Пусть $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ расходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда, по первому пункту доказательства $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится. Противоречие. Следовательно, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.



Геометрический смысл теоремы: площадь криволинейной трапеции, ограниченной меньшей функцией, имеющей предел на $+\infty$, меньше площади криволинейной трапеции, ограниченной большей функцией, имеющей предел на $+\infty$.

<u>Теорема 17 (признак сходимости неопределенных интегралов первого рода).</u> Пусть $f(x)$ определена на интервале $[a; +\infty)$, где $a > 0$ и $f(x) \geq 0$. Тогда, если

1) Если существуют такие $M > 0, \alpha > 1$, что $f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha}$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.
2) Если существуют такие $M > 0, 1 \geq \alpha > 0$, что $f(x) \geq \frac{M}{x^\alpha}$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

<u>Доказательство.</u> Очевидно. Вытекает из теорем 15 и 16.

<u>Пример:</u> Рассмотрим интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(e^x+1)}$. $\frac{1}{x^2(e^x+1)} < \frac{1}{2x^2}$. Но $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^2}$ сходится. Следовательно, и исходный интеграл сходится.

П.3. Абсолютная и исходная сходимости

<u>Теорема 18.</u> Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале $[a; +\infty)$. Тогда, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$, где $f^+(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2}$, $f^-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2}$. Следовательно, $f^+(x)$ и $f^-(x) \geq 0$. Если их сложить, получим: $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ и $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. Рассмотрим интеграл

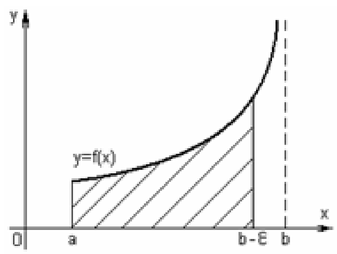
$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx$. Значит, так как существует предел $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b |f(x)|dx$, то должны существовать и пределы $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f^+(x)dx$, $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f^-(x)dx$, так как в противном случае не существовал бы $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b |f(x)|dx$. Теперь распишем интеграл $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$. Аналогично, интеграл левой части существует, так как существуют оба интеграла из правой части. Следовательно, существует и $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$, то есть интеграл сходится.

Замечание. Утверждение, обратное теореме, неверно. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то говорят, что этот интеграл сходится абсолютно. Если же интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ не сходится, а $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то говорят, что этот интеграл сходится условно.

Пример: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ сходится абсолютно. Рассмотрим интеграл $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x dx}{x\sqrt{1+x^2}}\right|$. $\left|\frac{\sin x dx}{x\sqrt{1+x^2}}\right| \le \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \le \frac{1}{x^2}$, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится.

§13. Несобственные интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы второго рода)

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором интервале $[a;b)$. Пусть в точке b функция имеет бесконечный разрыв, т.е. $\begin{cases} f(x) \to \infty \\ x \to b-0 \end{cases}$. Рассмотрим интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Этот интеграл существует, так как функция непрерывна. Тогда рассмотрим предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Если этот предел существует, то говорят, что несобственный интеграл второго рода существует и сходится: $\int_a^b f(x)dx \equiv \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Если этот предел не существует, то говорят, что несобственный интеграл не существует или расходится. Точку b называют особой точкой функции $f(x)$.



Замечание. Аналогичным образом определяется несобственный интеграл второго рода, где специальной точкой является точка a.

Пусть точка c является внутренней точкой интервала $(a;b)$ и пусть эта точка является особой точкой функции $f(x)$, т.е. $\lim\limits_{x\to c-\varepsilon} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to c+\varepsilon} f(x) = \infty$. Если существуют пределы $\lim\limits_{\varepsilon_1\to+0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx$ и $\lim\limits_{\varepsilon_2\to+0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$, то говорят, что несобственный интеграл с особой точкой c сходится: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon_1\to+0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon_2\to+0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$. Иначе же говорят о расходимости, или несуществовании несобственного интеграла второго рода с особой точкой c. Если же в пределах ε_1 и ε_2 будут равны, то говорят о существовании несобственного интеграла в смысле главного значения $(V.P.)$: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right)$.

Примеры: 1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \operatorname{asin} x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$.

2) $(V.P.) \int_{-1}^{2} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x}\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{2}\right) = \ln 2$.

__Теорема 19 (признак сходимости и расходимости интегралов 2 рода).__ Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале $[a;b)$ и b – особая точка $f(x)$. Тогда:

1) Если существуют такие $M > 0$ и $0 < m < 1$, что для любого x из исходного интервала выполняется неравенство $0 < f(x) \leq \frac{M}{(b-x)^m}$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится.

2) Если существуют такие $M > 0$ и $m \geq 1$, что для любого x из исходного интервала выполняется неравенство $f(x) > \frac{M}{(b-x)^m}$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

__Доказательство.__ Можно произвести замену переменной и свести к несобственному интегралу первого рода, для которого признак доказан.

__Замечание.__ Заменой переменной несобственный интеграл второго рода можно свести к интегралу первого рода и наоборот. В силу этого для интегралов второго рода выполняются признаки сравнения.

§14. Некоторые часто встречающиеся несобственные интегралы

1) Интеграл Эйлера $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$. Особая точка $x = 0$. Выполним замену $x = 2t$. Получаем $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin 2t\,dt = 2\int_0^{\pi/4} (\ln 2 + \ln\sin t + \ln\cos t)dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t\,dt + 2\int_0^{\pi/4} \ln\cos t\,dt = \left[\begin{matrix} t = \frac{\pi}{2} - u;\ dt = -du \\ \ln\cos t = \ln\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \ln\sin u \end{matrix}\right] = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4} \ln\sin t\,dt + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln\sin u\,du = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt$. Следовательно, $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

2) Интеграл Пуассона $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3) Интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.