# §3. Интегрирование с трехчленом

# П.1.

Интегралы такого вида решаются выделением в знаменателе полного квадрата, а затем применения одной из формул таблицы интегралов.

**Пример:** по 11 формуле таблицы интегралов = .

**Пример:** по 13 формуле таблицы интегралов = .

**Пример:** по 1 формуле таблицы интегралов = .

# П.2.

.

# П.3.

Интеграл сводится к выделению под корнем полного квадрата и заменой на интеграл вида или .

16. .

17. .

**Доказательство.** .

# §4. Метод интегрирования по частям

. Проинтегрируем обе части: . Отсюда . Последнее называется формулой интегрирования по частям.

**Пример:** . Общее правило: .

**Пример:** . Общее правило: .

**Пример:** . Общее правило: .

**Задача на доли:** . Отсюда .

# §5. Интегрирование рациональных дробей

# П.1. Разложение многочлена на множители

Пусть дан многочлен , где принадлежит множеству комплексных чисел, то есть многочлен принадлежит множеству значений с комплексными коэффициентами (). Аналогично – с действительными, – с целыми. Корнем называется такое значение , при котором обращается в ноль.

Пусть в или заданы многочлены степени и степени . Пусть . Тогда существует такие многочлены степени и степени , что .

**Теорема 2 (Безу).** При делении многочлена на двучлен получается остаток, равный .

**Доказательство.** . При подстановке имеем , следовательно, .

**Следствие:** является корнем , значит остаток от деления равен нулю.

Определение кратности и корня: , если существует такой многочлен , что , то есть разделится без остатка. называется корнем многочлена тогда и только тогда, когда . называется корнем кратности множества , если , но не . Можно сказать, что условие – необходимое и достаточное условие того, что – корень многочлена.

**Теорема 3 (Следствие из основной теоремы алгебры).** Многочлен степени имеет ровно комплексных корней. Пусть и , а степень равна , тогда , где – корни с учетом кратности, а – кратности этих корней, . Для действительных коэффициентов: . Доказательство не требуется, но элементарно выводится применением раз теоремы Безу.

**Теорема 4.** Пусть – корень многочлена . Тогда – тоже корень .

**Доказательство.** , так как , следовательно, , а так как , то . Пусть ( – корень), тогда . , тогда , а, значит, – тоже корень .

**Замечание.** Пусть – корень кратности многочлена . Тогда сопряженный ему корень тоже кратности .

**Теорема 5.** Пусть дан многочлен . Тогда можно выразить в виде , где – действительные корни , а для каждого выражение не имеет действительных корней и соответствует паре сопряженных корней .

**Доказательство.** Пусть – действительные корни , – комплексные корни кратностей . По теореме 3 . Выражение не имеет действительных корней и соответствует паре сопряженных корней .

# П.2. Дробно-рациональные функции

Рассмотрим выражение , где и – многочлены степеней и соответственно. Если , то такая дробь называется неправильной. Если же , то правильной.

Пусть – неправильная дробь, тогда ее можно выразить в виде , т.е. на многочлен и правильную дробь.

**Теорема 6.** Любую правильную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей. Простейшие дроби:

1. .
2. .
3. знаменатель не имеет действительных корней.
4. , знаменатель не имеет действительных корней.

Пример: . – неопределенные коэффициенты, зависящие от числителя дроби. Если привести к общему знаменателю, то получим многочлен, решение которого сводится к решению САУ.