3) k_1, k_2 – комплексные сопряженные корни. ($k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta$). Тогда, воспользовавшись формулой Эйлера, получим, что $y_1 = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$. Аналогично $y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x$.

<u>Теорема 33.</u> Если $y = u(x) + iv(x)$ – решение уравнения $y'' + py' + qy = 0$, то $u(x)$ и $v(x)$ также являются решениями этого уравнения.

<u>Доказательство.</u> Просто подставим: $u'' + iv'' + p(u' + iv') + q(u + iv) = 0$. Разделим действительную и мнимую части: $u'' + pu' + qu + i(v'' + pv' + q) = 0$. Получаем систему $\begin{cases} u'' + pu' + qu = 0 \\ v'' + pv' + qv = 0 \end{cases}$. Следовательно, $u(x)$ и $v(x)$ также являются решениями этого уравнения.

В качестве $u(x)$ возьмем $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, а в качестве $v(x)$ возьмем $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Так как $\frac{y_1}{y_2} = \cot\beta x \not\equiv 0$, то y_1 и y_2 линейно-независимы. Тогда общее решение такого уравнения будет находиться в виде $y = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$.

<u>Замечание.</u> Обобщается на уравнение с постоянными коэффициентами n-го порядка. $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$. Характеристическое уравнение $k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \dots + a_1k + a_0 = 0$ имеет ровно n корней. Кратному действительному корню k_1 кратности r отвечают r линейно-независимых функций (решений уравнений). $y_1 = e^{k_1x}, y_2 = xe^{k_1x}, \dots, y_r = x^{r-1}e^{k_1x}$. Комплексным корням $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения кратности r отвечают $2r$ линейно-независимых функций (решений уравнений). $y_1e^{\alpha x}\cos\beta x\,, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x\,, y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x\,, y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x\,, \dots, y_{2n-1} = x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x\,, y_{2n} = x^{n-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка составляется из линейной комбинации его частных линейно-независимых решений.

§7. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$ $(*)$, где $a_0, \dots, a_{n-1}$ – константы. Общее решение такого уравнение определяется как сумма общего решения однородного линейного уравнения и любого частного решения неоднородного линейного уравнения: $y = \bar{y} + y^*$.

Не умоляя общности, рассмотрим уравнение второго порядка. $y'' + py' + qy = f(x)$ $(**)$. Тогда $\bar{y} = c_1y_1 + c_2y_2$, где y_1, y_2 – линейно-независимые частные решения однородного уравнения. Как ищется y^*:

1) Если $f(x) = e^{\lambda x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – конкретный многочлен n-й степени.
   a. Если λ не является корнем характеристического уравнения, то $y^* = e^{\lambda x}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен n-й степени с неопределенными коэффициентами. Сокращаем обе части уравнения $(**)$ на $e^{\lambda x}$, после чего получаем линейную систему из $n + 1$ уравнений, решая которую мы находим все коэффициенты Q_n.
   <u>Пример.</u> $y'' + 3y' - 4y = e^{2x}(x^3 + 1)$. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$. Корни $\lambda = -4; 1$. 2 не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, $y^* = e^{2x}(ax^3 + bx^2 + cx + d)$.
   b. Если λ является корнем характеристического уравнения r-й кратности, то $y^* = x^re^{\lambda x}Q_n(x)$.

2) Если $f(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x\, M_m(x) + e^{\alpha x}\sin\beta x\, N_p(x)$, где M_m – многочлен степени m, $N_p(x)$ – многочлен степени p.

a. Если $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то $y^* = e^{\alpha x}\cos\beta x\, P_n(x) + e^{\alpha x}\sin\beta x\, Q_n(x)$, где $n = greater(m, p)$, а $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами.

b. Если $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения r-й кратности, то $y^* = x^r(e^{\alpha x}\cos\beta x\, P_n(x) + e^{\alpha x}\sin\beta x\, Q_n(x))$.

<u>Замечание.</u> Все эти решения обобщаются и на уравнения n-го порядка.