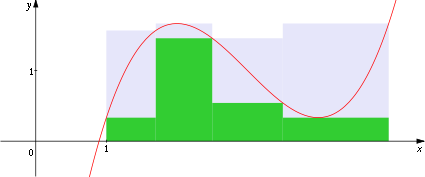
# §9. Определенный интеграл

# П.1. Интегральные суммы Дарбу

Пусть на отрезке задана некая непрерывная функция . Разобьем отрезок на частей таких, что . Введем обозначения на отрезке , на отрезке и . Тогда можно ввести понятия верхней и нижней суммы Дарбу: – верхняя сумма Дарбу (на рисунке изображена серым, равна площади описанной ступенчатой фигуры), – нижняя сумма Дарбу (на рисунке изображена зеленым, равна площади вписанной ступенчатой фигуры). При этом всегда выполняется неравенство .

# http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/97/RiemannInt.png/250px-RiemannInt.pngП.2. Интегральные суммы Римана. Определенный интеграл

Пусть на отрезке задана некая функция . Разобьем отрезок на частей таких, что . Введем обозначение . Выберем точки , тогда будет соответствовать площади -го прямоугольника. А выражение будет называться интегральной суммой Римана для на отрезке и равно площади ступенчатой фигуры на этом отрезке.

Если при любых разбиениях отрезка таких, что максимальная длина разбитого отрезка стремится к нулю (при любом выборе ) и сумма стремится к одному и тому же пределу, то говорят, что функция интегрируема на этом отрезке, а предел называется определенным интегралом. . Если функция непрерывна на , то она интегрируема на .

**Замечание.** , т.к. для любого выполняется .

**Теорема 8.** Для существования интеграла функции на отрезке необходимо и достаточно, чтобы предел существовал и был равен нулю.

**Замечание.** Определенный интеграл – площадь криволинейной трапеции под графиком функции .

# §10. Свойства определенного интеграла

# П.1. Основные свойства

1. Линейность
   1. .
   2. =.
2. **Теорема 9 (о знаке интеграла).** Пусть некая функция на отрезке и пусть существует интеграл . Тогда .

**Доказательство.** . , так как , так как . Выходит, , и, следовательно, .

**Следствие.** Пусть на отрезке и существуют интегралы . Тогда . Для доказательства достаточно рассмотреть интеграл разности этих функций.

1. . (во втором случае ).

**Следствие.** .

1. **Теорема 10 (о разбиении промежутка интегрирования).** Пусть некий отрезок разбит на отрезки и . Тогда .

**Доказательство.** Такое разбиение подразумевает, что точка является точкой деления. Тогда (до ) + (после ). Таким образом, при выполняется .

1. Оценка определенного интеграла. Пусть на некотором отрезке выполняется неравенство , где на отрезке , на отрезке . Тогда .

**Доказательство.** . Первая и последняя части соответственно равны и . Средняя же часть равна определенному интегралу.

**Замечание.** .

**Следствие.** Пусть некоторая функция на отрезке по модулю не превосходит . Тогда .

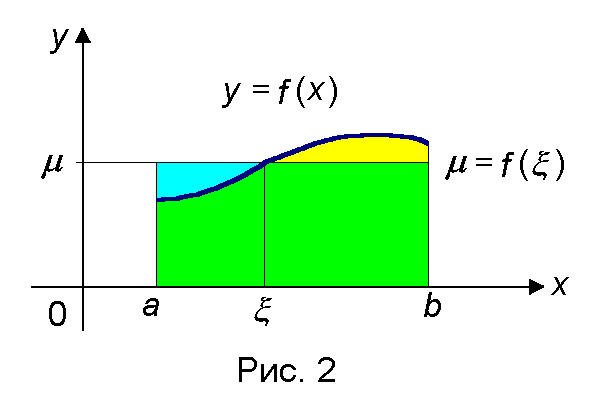
1. **Теорема 11 (неравенство Коши-Буняковского).** Пусть некоторая функция на отрезке является произведением двух других функций и и существуют интегралы . Тогда выполняется неравенство .

**Доказательство.** Рассмотрим интеграл . Представим его в виде . Так как это выражение является квадратным трехчленом, то оно имеет не более одного корня, а значит , , ее можно опустить. Тогда получаем .

**Замечание.** Рассмотрим непрерывное множество функций на отрезке . По определению, скалярное произведение двух кусочно-непрерывных на отрезке функций равно интегралу Величину , равную будем называть нормой функции . Тогда для двух функций и из множества будет выполняться равенство . Это другая форма записи неравенства Коши-Буняковского.

# П.2. Теорема о среднем

**Теорема 12 (о среднем).** Пусть некоторая функция непрерывна на отрезке . Тогда существует такая точка , что .

**Доказательство.** принимает на отрезке все значения между и . И . Следовательно, . А значит, найдется такая точка , что . обобщает среднее значение последовательности .

Геометрический смысл теоремы о среднем: . В правой части выражения записана площадь криволинейной трапеции, которая равна площади прямоугольника, площадь которого записана в левой части выражения.

# П.3. Производная интеграла по верхнему пределу

Пусть некоторая функция непрерывна на отрезке . Рассмотрим интеграл , где , причем будет функцией от .

**Теорема 13.** .

**Доказательство.** Возьмем за . Тогда = (по теореме о среднем) = . Тогда . Следовательно, существует такой .

**Следствие.** .