

## Оглавление

Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенных интегралов .....	2
Интегрирование методом замены переменной и по частям .....	4
Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители .....	5
Дробно-рациональные функции. Простейшие дроби. Интегрирование дробно-рациональных функций .....	6
Интегралы от иррациональных функций. Подстановки Эйлера .....	7
Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка .....	8
Интегральные суммы Дарбу и Римана. Необходимое и достаточное условие существования интеграла Римана .....	9
Свойства интеграла Римана .....	10
Теорема о среднем .....	11
Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница .....	12
Несобственные интегралы 1-го рода и их свойства .....	13
Абсолютная и условная сходимость .....	14
Несобственные интегралы второго рода и их свойства .....	15
Интеграл Эйлера .....	16
Вычисление площадей в декартовых и полярных координатах .....	17
Вычисление длины дуг .....	18
Вычисление объема тела через площади поперечных сечений. Объем тела вращения .....	19
Пространство $\mathbb{R}^n$ . Сходимость в $\mathbb{R}^n$ . Функции нескольких переменных. Предел, непрерывность. Свойства непрерывных функций .....	20
Частные производные. Полный дифференциал .....	21
Производные сложных функций и функции, заданной неявно .....	22
Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных .....	23
Производная по направлению. Градиент и его свойства .....	24
Касательная плоскость и нормаль к поверхности .....	25
Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции $n$ переменных .....	26
Необходимые и достаточные условия экстремума функции $n$ переменных .....	27
Обыкновенные дифференциальные уравнения. Частное и общее решения. Задача Коши. Изоклины. ....	29
Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и с однородной функцией .....	30
Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли .....	31
Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель .....	32
Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка .....	33
Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков. Определитель Вронского и его свойства .....	34
Неоднородные линейные уравнения высших порядков. Метод вариации произвольных постоянных .....	36
Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение .....	37
Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью .....	38

**Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенных интегралов****Основные определения**

Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a; b]$ . Нам нужно найти такую функцию  $F(x)$ , что  $F'(x) = f(x)$  на  $[a; b]$ . Функция  $F(x)$  будет называться первообразной от функции  $f(x)$  на  $[a; b]$  при условии что  $F'(x) = f(x)$  во всех точках этого отрезка.

Пример:  $f(x) = x^3; F(x) = \frac{x^4}{4}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  – две первообразные от функции  $f(x)$  на  $[a; b]$ . Тогда  $F_1(x) - F_2(x)$  равно некоторому константному значению.

**Доказательство.** Пусть  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  – две первообразные, и  $F_1'(x) = f(x), F_2'(x) = f(x)$ . Тогда  $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$ . Пусть  $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ . Тогда  $\varphi'(x) = 0$ . Покажем, что  $\varphi(x)$  – константа на отрезке  $[a; b]$ . Рассмотрим отрезок  $[a; x]$ . По теореме Лагранжа существует такое  $\xi$ , принадлежащее промежутку  $(a; x)$ , что  $\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(x - a)$ . Но  $\varphi'(\xi) = 0$ . Следовательно,  $\varphi(x) - \varphi(a) = 0$ , а значит  $\varphi(x) = \varphi(a)$  и равно некоторому константному значению. Доказано.

**Следствие.** Если найдена первообразная, то все остальные отличаются от нее на константу.  $F(x) + c$  – семейство первообразных ( $c \in R$ ) (сдвиг графика первообразной по оси ординат).

Если  $(F(x) + c)' = f(x)$ , то  $\int f(x)dx = F(x) + c$  – неопределенный интеграл, где  $f(x)dx$  – подынтегральное выражение,  $f(x)$  – подынтегральная функция. Действия от нахождения первообразной – неопределенное интегрирование. В отличие от производной, интеграл элементарной функции не является элементарной функцией. Первообразную можно найти не для всех функций.

**Свойства неопределенных интегралов**

$$1. (\int f(x) dx)' = (F(x) + c)' = f(x).$$

$$2. d(\int f(x)dx) = f(x)dx = dF.$$

$$3. \int dF(x) = F(x) + c.$$

4. Линейность

$$a. \int af(x)dx = a \int f(x)dx.$$

$$b. \int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

**Доказательство б.**  $(\int (f_1(x) + f_2(x))dx)' = f_1(x) + f_2(x) = (\int f_1(x)dx)' + (\int f_2(x)dx)' = (\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx)'$ . По первому свойству равны подынтегральные функции, и, следовательно, сами интегралы.

$$5. \int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + c.$$

**Доказательство.**  $(\int f(ax + b)dx)' = f(ax + b)$ . Тогда  $(\frac{1}{a}F(ax + b) + c)' = \frac{1}{a}F'_y(y)(ax + b)' = \frac{1}{a}F'(ax + b) * a = f(ax + b)$ .

**Следствие.**  $\int f(\frac{x}{a})dx = aF(\frac{x}{a}) + c$ .

**Таблица интегралов**

$$1. \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, a \neq -1.$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + c.$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + c.$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c.$$

$$7. \int e^x dx = e^x + c.$$

$$8. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$$

$$9. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{atan} x + c.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{asin} x + c.$$

Первые 10 интегралов являются следствиями из таблицы производных. Остальные выводятся.

$$11. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{atan} \frac{x}{a} + c.$$

**Доказательство.**  $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2}$ . По следствию пятого свойства и девятому интегралу это равно

$$\frac{a}{a^2} \operatorname{atan} \frac{x}{a} + c = \frac{1}{a} \operatorname{atan} \frac{x}{a} + c.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{asin} \frac{x}{a} + c.$$

**Доказательство.**  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$ . По следствию пятого свойства и десятому интеграла это

равно  $\frac{a}{a} \arcsin \frac{x}{a} + c = \arcsin \frac{x}{a} + c$ .

$$13. \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c.$$

**Доказательство.**  $\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{(a-x)(a+x)} = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right)$ . Следовательно,  $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \left( \int \frac{dx}{x+a} - \int \frac{dx}{x-a} \right) =$   
 $\frac{1}{2a} (\ln|x+a| - \ln|x-a|) + c = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$ .

**Интегрирование методом замены переменной и по частям****Интегрирование методом замены переменной**

Пусть нужно найти интеграл вида  $\int f(x)dx$  и пусть этот интеграл существует. Тогда  $x = \varphi(t)$ ;  $dx = \varphi'(t)dt$ ;  $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ . Это называется формулой замены переменной для неопределенного интеграла. Рассмотрим интеграл  $\int f(\varphi)d\varphi = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ . Тогда  $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi)d\varphi = F(\varphi(t)) + c$ .

**Пример:**  $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt{\sin x} d(\sin x) = \int u^{1/2} du = \frac{2u^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + c$ .

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(-\cos x)}{-\cos x} = -\ln |\cos x| + c.$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + c.$$

**Интегрирование по частям**

$d(u(x)v(x)) = u'(x)v(x)dx + u(x)v'(x)dx = v(x)du + u(x)dv$ . Проинтегрируем обе части:  $\int u(x)dv = \int d(uv) - \int v(x)du$ . Отсюда  $\int u(x)dv = uv - \int v(x)du$ . Последнее называется формулой интегрирования по частям.

**Пример:**  $\int x \sin x dx = \left[ \begin{matrix} u=x; du=dx \\ dv=\sin x dx; v=-\cos x \end{matrix} \right] = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$ . Общее правило:  $\int P_n(x) \frac{\sin ax}{(\cos ax)} dx = \left[ \begin{matrix} u=P_n(x) \\ dv=\frac{\sin ax}{(\cos ax)} dx \end{matrix} \right]$ .

**Пример:**  $\int x e^x dx = \left[ \begin{matrix} u=x; du=dx \\ dv=e^x dx; v=e^x \end{matrix} \right] = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$ . Общее правило:  $\int P_n(x) e^{\alpha x} dx = \left[ \begin{matrix} u=P_n(x) \\ dv=e^{\alpha x} dx \end{matrix} \right]$ .

**Пример:**  $\int x \ln x dx = \left[ \begin{matrix} u=\ln x; du=\frac{dx}{x} \\ dv=x dx; v=\frac{x^2}{2} \end{matrix} \right] = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x dx}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$ . Общее правило:  $\int P_n(x) \ln x dx = \left[ \begin{matrix} u=\ln x \\ dv=P_n(x) dx \end{matrix} \right]$ .

**Задача на доли:**  $I = \int e^x \sin x dx = \left[ \begin{matrix} u=e^x; du=e^x dx \\ dv=\sin x dx; v=-\cos x \end{matrix} \right] = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \left[ \begin{matrix} u=e^x; du=e^x dx \\ dv=\cos x dx; v=\sin x \end{matrix} \right] = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$ . Отсюда  $I = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c$ .

Билеты для подготовки к экзамену по математике. Трофимов Владислав

**Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители**

Пусть дан многочлен  $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n$ , где  $A_i$  принадлежит множеству комплексных чисел, то есть многочлен принадлежит множеству значений с комплексными коэффициентами ( $f(x) \in C[x]$ ). Аналогично  $f(x) \in R[x]$  – с действительными,  $f(x) \in Z[x]$  – с целыми. Корнем  $f(x)$  называется такое значение  $x = x_0$ , при котором  $f(x_0)$  обращается в ноль.

Пусть в  $C[x]$  или  $R[x]$  заданы многочлены  $Q(x)$  степени  $m$  и  $f(x)$  степени  $n$ . Пусть  $m \geq n$ . Тогда существует такие многочлены  $q(x)$  степени  $m - n$  и  $r(x)$  степени  $< n$ , что  $Q(x) = f(x)q(x) + r(x)$ .

**Теорема 2 (Безу).** При делении многочлена  $Q(x)$  на двучлен  $x - a$  получается остаток, равный  $Q(a)$ .

**Доказательство.**  $Q(x) = (x - a)q(x) + r(x)$ . При подстановке  $x = a$  имеем  $(a - a)q(a) = 0$ , следовательно,  $Q(a) = r(a)$ .

**Следствие:**  $x = a$  является корнем  $Q(x)$ , значит остаток от деления равен нулю.

Определение кратности и корня:  $Q(x) : f(x)$ , если существует такой многочлен  $q(x)$ , что  $Q(x) = f(x)q(x)$ , то есть разделится без остатка.  $x = a$  называется корнем многочлена  $Q(x)$  тогда и только тогда, когда  $Q(x) : (x - a)$ .  $x = a$  называется корнем кратности  $\lambda \in N$  множества  $Q(x)$ , если  $Q(x) : (x - a)^\lambda$ , но  $Q(x)$  не  $: (x - a)^{\lambda+1}$ . Можно сказать, что условие  $r(x) = 0$  – необходимое и достаточное условие того, что  $x = a$  – корень многочлена.

**Теорема 3 (Следствие из основной теоремы алгебры).** Многочлен степени  $n$  имеет ровно  $n$  комплексных корней. Пусть  $Q(x) \in C[x]$  и  $x \in C$ , а степень  $Q(x)$  равна  $m$ , тогда  $Q(x) = A_0(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_n)^{k_n}$ , где  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – корни  $Q(x)$  с учетом кратности, а  $k_1, k_2, \dots, k_n$  – кратности этих корней,  $\sum_{i=1}^n k_i = m$ . Для действительных коэффициентов:  $Q(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m$ . Доказательство не требуется, но элементарно выводится применением  $m$  раз теоремы Безу.

**Теорема 4.** Пусть  $z = a + ib$  – корень многочлена  $Q(x) \in R[x]$ . Тогда  $\bar{z} = a - ib$  – тоже корень  $Q(x)$ .

**Доказательство.**  $(\bar{z})^k = \overline{(z^k)}$ , так как  $\bar{z}_1 * \bar{z}_2 = \overline{z_1 * z_2}$ , следовательно,  $A_{m-k}\bar{z}^k = \overline{A_{m-k}z^k}$ , а так как  $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$ , то  $Q(\bar{z}) = \overline{Q(z)}$ . Пусть  $Q(z) = Q(a + ib) = M + iN = 0$  ( $z = ai + b$  – корень), тогда  $M = 0; N = 0$ .  $Q(\bar{z}) = Q(a - ib) = \overline{Q(a + ib)} = M - iN = 0$ , тогда  $M = 0, N = 0$ , а значит,  $\bar{z} = a - ib$  – тоже корень  $Q(x)$ .

**Замечание.** Пусть  $z = a + ib$  – корень кратности  $\lambda$  многочлена  $Q(x) \in R[x]$ . Тогда сопряженный ему корень тоже кратности  $\lambda$ .

**Теорема 5.** Пусть дан многочлен  $Q(x) \in R[x]$ . Тогда  $Q(x)$  можно выразить в виде  $Q(x) = A_0(x - x_1)^{\lambda_1}(x - x_2)^{\lambda_2} \dots (x - x_n)^{\lambda_n}(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1} \dots (x^2 + p_\rho x + q_\rho)^{\mu_\rho}$ , где  $x_1, \dots, x_n$  – действительные корни  $Q(x)$ , а для каждого  $i$  выражение  $x^2 + p_ix + q_i$  не имеет действительных корней и соответствует паре сопряженных корней  $Q(x)$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_1, \dots, x_n$  – действительные корни  $Q(x)$ ,  $z_1 = a_1 + ib_1, \bar{z}_1 = a_1 - ib_1, \dots, z_\rho = a_\rho + ib_\rho, \bar{z}_\rho = a_\rho - ib_\rho$  – комплексные корни кратностей  $\mu_1, \dots, \mu_\rho$ . По теореме 3  $Q(x) = A_0(x - x_1)^{\lambda_1} \dots (x - x_n)^{\lambda_n} * (x - z_1)^{\mu_1}(x - \bar{z}_1)^{\mu_1} \dots (x - z_\rho)^{\mu_\rho}(x - \bar{z}_\rho)^{\mu_\rho}$ . Выражение  $(x - (a + ib))(x - (a - ib)) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q$  не имеет действительных корней и соответствует паре сопряженных корней  $Q(x)$ .

## Дробно-рациональные функции. Простейшие дроби.

### Интегрирование дробно-рациональных функций

#### Дробно-рациональные функции. Простейшие дроби

Рассмотрим выражение  $\frac{Q(x)}{f(x)}$ , где  $Q(x)$  и  $f(x)$  – многочлены степеней  $m$  и  $n$  соответственно. Если  $m \geq n$ , то такая дробь называется неправильной. Если же  $m < n$ , то правильной.

Пусть  $\frac{Q(x)}{f(x)}$  – неправильная дробь, тогда ее можно выразить в виде  $\frac{q(x)f(x)+r(x)}{f(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{f(x)}$ , т.е. на многочлен и правильную дробь.

**Теорема 6.** Любую правильную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей. Простейшие дроби:

1.  $\frac{A}{x-a}$ .
2.  $\frac{A}{(x-a)^k}, k \geq 2$ .
3.  $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ , знаменатель не имеет действительных корней.
4.  $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, k \geq 2$ , знаменатель не имеет действительных корней.

Пример:  $\frac{x^3+3x^2+5x+9}{(x-1)^2(x+2)^3(x^2+4)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{B_3}{(x+2)^3} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+4} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+4)^2} + \frac{P_1x+R_1}{x^2+x+1}$ .  
 $A_1 \dots R_1$  – неопределенные коэффициенты, зависящие от числителя дроби. Если привести к общему знаменателю, то получим многочлен, решение которого сводится к решению САУ.

#### Интегрирование простейших дробей

1.  $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a|$ .
2.  $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{1-k} (x-a)^{1-k}, k \geq 2$ .
3.  $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Mx}{x^2+px+q} dx + \int \frac{N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x}{x^2+px+q} dx + \int \frac{N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x+p-p}{x^2+px+q} dx + \int \frac{N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(N - \frac{pM}{2}\right) * \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{M}{2} * \ln|x^2+px+q| + \left(N - \frac{pM}{2}\right) * \int \frac{dx}{x^2+px+q}$ .
4.  $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx = \int \frac{Mx}{(x^2+px+q)^k} dx + \int \frac{N}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x}{(x^2+px+q)^k} dx + \int \frac{N}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x+p-p}{(x^2+px+q)^k} dx + \int \frac{N}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx + \left(N - \frac{pM}{2}\right) * \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{M}{2} * \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} + \left(N - \frac{pM}{2}\right) * \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{M}{2} * \frac{(x^2+px+q)^{1-k}}{1-k} + \left(N - \frac{pM}{2}\right) * I_k$ ;  
 $I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$ , где  $t = x + \frac{p}{2}; m^2 = q - \frac{p^2}{4}$ .

Вывод рекуррентной формулы:  $\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = I_k = \left[ u = \frac{1}{(t^2+m^2)^k}; du = -k(t^2+m^2)^{-k-1} 2t dt \right] = \frac{t}{(t^2+m^2)^k} + 2k \int \frac{t^2 dt}{(t^2+m^2)^{k+1}}; \int \frac{t^2 dt}{(t^2+m^2)^{k+1}} = \int \frac{(t^2+m^2-m^2) dt}{(t^2+m^2)^{k+1}} = \int \frac{(t^2+m^2) dt}{(t^2+m^2)^{k+1}} - m^2 \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k+1}} = I_k - m^2 I_{k+1}$ . Поставим в исходное выражение:  $I_k = \frac{t}{(t^2+m^2)^k} + 2k \int \frac{t^2 dt}{(t^2+m^2)^{k+1}} = \frac{t}{(t^2+m^2)^k} + 2k(I_k - m^2 I_{k+1})$ . Отсюда  $I_{k+1} = \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} I_k + \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}}$ .

$$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$$

Пусть  $k$  – общий знаменатель дробей  $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$ , т.е.  $k = \text{НОК}(n, \dots, s)$ . Выполним замену  $x = t^k$ ;  $R\left(t^k, t^{\frac{km}{n}}, \dots, t^{\frac{rk}{s}}\right)$ . Все показатели целые;  $dx = kt^{k-1}dt$ .

**Пример.**  $I = \int \frac{\sqrt{x}}{x^4+1}; k=4; x=t^4; dx=4t^3dt; I = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3 dt}{t^{12}+1} = 4 \int \frac{t^5}{t^{12}+1} = 4 \int \frac{t^5+t^2-t^2}{t^{12}+1} dt = 4 \left( \int t^2 dt - \int \frac{t^2}{t^{12}+1} \right) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3} \int \frac{d(t^3+1)}{t^{12}+1} = \frac{4}{3}(t^3 - \ln|t^3+1|) + c = \frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}} - \ln|x^{\frac{3}{4}}+1|\right) + c.$

**Замечание.** Аналогичным образом берется интеграл вида  $\int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}; \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$  с помощью подстановки  $t^k = \frac{ax+b}{cx+d}, k = \text{НОК}(n, \dots, s)$ .

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$$

Решаются одной из подстановок Эйлера:

1.  $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{ax}$ . Используется при  $a > 0$ .
2.  $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$ . Используется при  $c > 0$ .
3.  $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$ . Используется когда подкоренное выражение имеет два действительных корня, один из которых  $\lambda$ .

#### Интегрирование дифференциальных биномов

Выражение вида  $x^m(a+bx^n)^p dx$ , где  $m, n, p$  – рациональные числа,  $a$  и  $b$  – постоянные, называется дифференциальным биномом. Не всегда интеграл дифференциального бинома можно свести к дифференциальной рациональной функции.

**Теорема 7 (Чебышева).**  $\int x^m(a+bx^n)^p dx$  сводится к интегралу от рациональных функций, если:

1.  $p$  – целое число (сводится к пункту 1).
2.  $\frac{m+1}{n}$  – целое число (сводится к пункту 1).
3.  $\frac{m+1}{n} + p$  – целое число.

## Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\int R(\cos x, \sin x) dx$$

$t = \tan \frac{x}{2}$  – универсальная тригонометрическая подстановка.  $\frac{x}{2} = \operatorname{atan} t$ ;  $x = 2 \operatorname{atan} t$ ;  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ;  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ;  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ .

**Пример.**  $\int \frac{dx}{\sin x} = \int_{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}} \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt(1+t^2)}{(1+t^2)2t} = \ln|t| + c = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c.$

$$\int R(\cos^2 x, \sin^2 x) dx$$

Интеграл рационализуется  $t = \tan x$ ;  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ ;  $\cos^2 x = \frac{1}{\tan^2 x + 1} = \frac{1}{t^2 + 1}$ ;  $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$ .

**Пример.**  $\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} = \int_{\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, dx = \frac{dt}{1+t^2}} \frac{1}{2 - \frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{(1+t^2)(2 - \frac{t^2}{1+t^2})} = \int \frac{dt(1+t^2)}{(1+t^2)(2+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{atan} \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + c.$

**Замечание.**  $\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} = \int \frac{dx}{2 \cos^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x (2 + \tan^2 x)} = \int \frac{d(\tan x)}{2 + \tan^2 x}.$

$$\int R(\cos x) \sin x dx \text{ \& \> } \int R(\sin x) \cos x dx$$

$$\int R(\cos x) \sin x dx = \int R(\cos x) d(\cos x)$$

$$\int R(\sin x) \cos x dx = \int R(\sin x) d(\sin x)$$

**Пример.**  $\int \sin^m x \cos^{2p+1} x dx = \int \sin^m x (\cos^p x) d(\sin x) = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p d(\sin x).$

$$\int \tan^n x dx$$

$$I_n = \int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \tan^{n-2} x d(\tan x) - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}.$$

$$I_1 = \int \tan x dx; I_2 = \int \tan^2 x dx = \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \tan x - x + c.$$

### Интегрирование функций, не выражающихся через элементарные функции

1.  $\int \frac{e^x}{x} dx = ei x + c$  – интегральная экспонента.

2.  $\int \frac{dx}{\ln x} = li x + c$  – интегральный логарифм.

3.  $\int \frac{\sin x}{x} dx = si x + c$  – интегральный синус.

4.  $\int \frac{\cos x}{x} dx = ci x + c$  – интегральный косинус.

5.  $\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} x + c$  – интеграл от функции Гаусса, интеграл Пуассона.

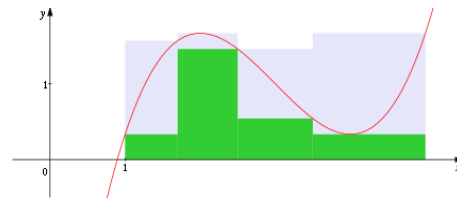


## Интегральные суммы Дарбу и Римана.

### Необходимое и достаточное условие существования интеграла Римана

#### Интегральные суммы Дарбу

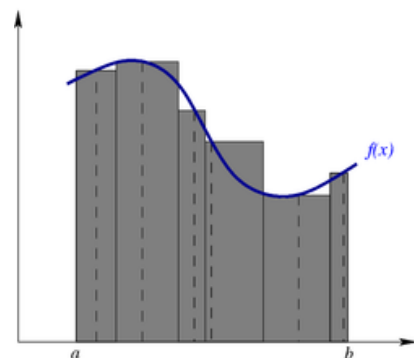
Пусть на отрезке  $[a; b]$  задана некая непрерывная функция  $f(x)$ . Разобьем отрезок на  $n$  частей таких, что  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Введем обозначения  $m_i = \min_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$  на отрезке  $[x_{i-1}; x_i]$ ,  $M_i = \max_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$  на отрезке  $[x_{i-1}; x_i]$  и  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Тогда можно ввести понятия верхней и нижней суммы Дарбу:  $S(n) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$  – верхняя сумма Дарбу (на рисунке изображена серым, равна площади описанной ступенчатой фигуры),  $\rho(n) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$  – нижняя сумма Дарбу (на рисунке изображена зеленым, равна площади вписанной ступенчатой фигуры). При этом всегда выполняется неравенство  $\min_{[a;b]} f(x) (b - a) \leq \rho_n \leq S_n \leq \max_{[a;b]} f(x) (b - a)$ .



#### Интегральные суммы Римана. Определенный интеграл

Пусть на отрезке  $[a; b]$  задана некая функция  $f(x)$ . Разобьем отрезок на  $n$  частей таких, что  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Введем обозначение  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Выберем точки  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ , тогда  $f(\xi_i) \Delta x_i$  будет соответствовать площади  $i$ -го прямоугольника. А выражение  $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  будет называться интегральной суммой Римана для  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  и равно площади ступенчатой фигуры на этом отрезке.

Если при любых разбиениях отрезка  $[a; b]$  таких, что максимальная длина разбитого отрезка стремится к нулю (при любом выборе  $\xi_i$ ) и сумма  $\sigma_n$  стремится к одному и тому же пределу, то говорят, что функция интегрируема на этом отрезке, а предел называется определенным интегралом.  $I = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$ . Если функция непрерывна на  $[a; b]$ , то она интегрируема на  $[a; b]$ .



**Замечание.**  $\rho_n \leq \sigma_n \leq S_n$ , т.к. для любого  $i$  выполняется  $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ .

**Теорема 8.** Для существования интеграла функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  необходимо и достаточно, чтобы предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - \rho_n)$  существовал и был равен нулю.

**Замечание.** Определенный интеграл – площадь криволинейной трапеции под графиком функции  $f(x)$ .

## Свойства интеграла Римана

## 1. Линейность

$$a. \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx.$$

$$b. \int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx.$$

2. Теорема 9 (о знаке интеграла). Пусть некая функция  $f(x) \geq 0$  на отрезке  $[a; b]$  и пусть существует интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ . Тогда  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**Доказательство.**  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ .  $\Delta x_i > 0$ , так как  $b > a$ ,  $f(\xi_i) \geq 0$  так как  $f(x) \geq 0$ .

Выходит,  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0$ , и, следовательно,  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

**Следствие.** Пусть  $f(x) \geq \varphi(x)$  на отрезке  $[a; b]$  и существуют интегралы  $\int_a^b f(x) dx$ ,  $\int_a^b \varphi(x) dx$ . Тогда  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx$ . Для доказательства достаточно рассмотреть интеграл разности этих функций.

$$3. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \text{ (во втором случае } \Delta x_i < 0 \text{).}$$

$$\text{Следствие. } \int_a^a f(x) dx = 0.$$

4. Теорема 10 (о разбиении промежутка интегрирования). Пусть некий отрезок  $[a; b]$  разбит на отрезки  $[a; c]$  и  $[c; b]$ . Тогда  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

**Доказательство.** Такое разбиение подразумевает, что точка  $c$  является точкой деления. Тогда  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  (до  $c$ ) +  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  (после  $c$ ). Таким образом, при  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$  выполняется  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

5. Оценка определенного интеграла. Пусть на некотором отрезке  $[a; b]$  выполняется неравенство  $m \leq f(x) \leq M$ , где  $M = \max f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ ,  $m = \min f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ . Тогда  $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$ .

**Доказательство.**  $\sum_{i=1}^n m \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M \Delta x_i$ . Первая и последняя части соответственно равны  $m(b - a)$  и  $M(b - a)$ . Средняя же часть равна определенному интегралу.

$$\text{Замечание. } \int_a^b 1 dx = b - a.$$

**Следствие.** Пусть некоторая функция  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  по модулю не превосходит  $M$ . Тогда  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq M(b - a)$ .

6. Теорема 11 (неравенство Коши-Буняковского). Пусть некоторая функция  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  является произведением двух других функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  и существуют интегралы  $\int_a^b f_1^2(x) dx$ ;  $\int_a^b f_2^2(x) dx$ ;  $\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$ . Тогда выполняется неравенство  $\left| \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f_1^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b f_2^2(x) dx}$ .

**Доказательство.** Рассмотрим интеграл  $\int_a^b (\lambda f_1(x) + f_2(x))^2 dx = \lambda^2 \int_a^b f_1^2(x) dx + 2\lambda \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx + \int_a^b f_2^2(x) dx \geq 0$ . Представим его в виде  $\lambda^2 I_{11} + 2\lambda I_{12} + I_{22} \geq 0$ . Так как это выражение является квадратным трехчленом, то оно имеет не более одного корня, а значит  $\frac{D}{4} = \lambda^2 (I_{12}^2 - I_{11} I_{22}) \leq 0$ ,  $\lambda^2 > 0$ , ее можно опустить. Тогда получаем  $\left( \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f_1^2(x) dx \int_a^b f_2^2(x) dx$ .

**Замечание.** Рассмотрим непрерывное множество функций  $c$  на отрезке  $[a; b]$ . По определению, скалярное произведение двух кусочно-непрерывных на отрезке  $[a; b]$  функций  $(f_1 f_2)$  равно интегралу  $\int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$ . Величину  $\|f\|$ , равную  $\sqrt{(f f)}$  будем называть нормой функции  $f$ . Тогда для двух функций  $f_1$  и  $f_2$  из множества  $c$  будет выполняться равенство  $(f_1 f_2) \leq \|f_1\|_c \|f_2\|_c$ . Это другая форма записи неравенства Коши-Буняковского.

### Теорема о среднем

**Теорема 12 (о среднем).** Пусть некоторая функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ . Тогда существует такая точка  $\xi \in (a; b)$ , что  $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ .

**Доказательство.**  $f(x)$  принимает на отрезке  $[a; b]$  все значения между  $M = \max_{[a;b]} f(x)$  и  $m = \min_{[a;b]} f(x)$ .

И  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ . Следовательно,  $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$ .

А значит, найдется такая точка  $\xi \in (a; b)$ , что  $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ .  $y_{\text{ср}} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$  обобщает среднее значение последовательности  $\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} = a_{\text{ср}}$ .

Геометрический смысл теоремы о среднем:  $f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$ . В правой части выражения записана площадь криволинейной трапеции, которая равна площади прямоугольника, площадь которого записана в левой части выражения.

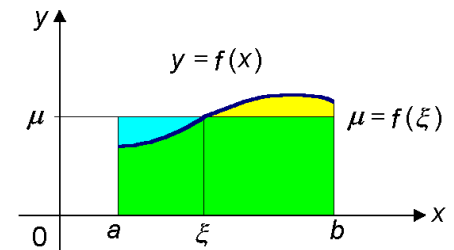


Рис. 2

Билеты для подготовки к экзамену по математике. Трофимов Владислав  
**Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница**

**Производная интеграла по верхнему пределу**

Пусть некоторая функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ . Рассмотрим интеграл  $\int_a^x f(t)dt$ , где  $a < x < b$ , причем  $\int_a^x f(t)dt$  будет функцией от  $x$ .

**Теорема 13.**  $(\int_a^x f(t)dt)' = f(x)$ .

**Доказательство.** Возьмем  $\int_a^x f(t)dt$  за  $I(x)$ . Тогда  $I(x + \Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt =$  (по теореме о среднем)  $= f(\xi)\Delta x; \xi \in [x; x + \Delta x]$ . Тогда  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = f(x)$ . Следовательно, существует такой  $I'(x) = f(x)$ .

**Следствие.**  $d(\int_a^x f(t)dt) = f(x)dx$ .

**Формула Ньютона-Лейбница**

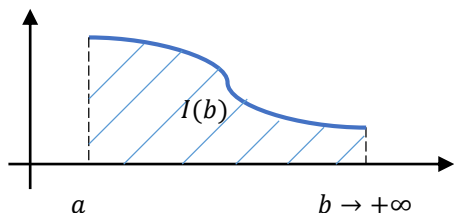
**Теорема 14.** Пусть некая функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и пусть  $F(x)$  – первообразная от  $f(x)$ . Тогда интеграл  $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$ .

**Доказательство.** По теореме о производной интеграла по верхнему пределу  $I(x) = \int_a^x f(t)dt; I'(x) = f(x)$ ,  $I(x)$  – первообразная от  $f(x)$ .  $I(a) = F(a) + c = 0; c = -F(a)$ . Тогда  $I(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ , а, следовательно,  $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$ .

## Несобственные интегралы 1-го рода и их свойства

Пусть некая функция  $f(x)$  непрерывна на промежутке  $[a; +\infty)$ , где  $a$  – некоторое конечное число. Возьмем некоторое число  $b > a$  и рассмотрим интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ , который обозначим  $I(b)$ . Так как функция непрерывна, то этот интеграл существует, обычный интеграл Римана. А теперь узнаем, как ведет себя  $I(b)$  когда  $b \rightarrow +\infty$ . Оказывается, что если существует конечный предел  $\lim_{b \rightarrow +\infty} I(b)$ , то этот предел называется несобственным интегралом первого рода функции  $f$ , и обозначается следующим образом:  $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ . Если этот предел существует, то говорят о существовании, или сходимости, несобственного интеграла. Если же не существует, то говорят о том, что несобственный интеграл не сходится, или не существует.

Геометрический смысл несобственного интеграла:



Площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции.

Аналогичным образом определяется  $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ . А в случае, когда оба предела интегрирования – бесконечности, можно взять некоторую точку  $c$  и рассмотреть два интеграла:  $\int_{-\infty}^c f(x)dx$  и  $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ . Тогда, если эти интегралы существуют, то интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  равен сумме этих интегралов:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$ .

Пример:  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}.$

## Абсолютная и условная сходимость

### Признаки сравнения

**Теорема 15.** Рассмотрим интеграл  $\int_a^{+\infty} \frac{Mdx}{x^\alpha}$ , где  $M > 0, a > 0$ . Этот интеграл сходится при  $\alpha > 1$  и расходится при  $\alpha \leq 1$ .

**Доказательство.** Пусть  $\alpha \neq 1$ . Тогда  $\int_a^{+\infty} \frac{Mdx}{x^\alpha} = \left. \frac{Mx^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & \alpha < 1 \\ \frac{Ma^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha > 1 \end{cases}$ . Пусть  $\alpha = 1$ . Тогда  $\int_a^{+\infty} \frac{Mdx}{x} = M \ln x \Big|_a^{+\infty} = +\infty$ .

**Теорема 16 (Сравнение несобственных интегралов 1 рода).** Пусть на интервале  $[a; +\infty)$   $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ . Тогда:

1. Если  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится, то  $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$  сходится.
2. Если  $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$  расходится, то  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  расходится.

**Доказательство.** Рассмотрим доказательства для обоих случаев:

1. Пусть существует предел  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx = I$ . Но по свойству определенных интегралов  $\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq I$ . Рассмотрим функцию  $\Phi(b) = \int_a^b \varphi(x)dx$ . Эта функция возрастающая и ограничена сверху. Следовательно, существует ее предел  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(x)dx$ , т.е. интеграл сходится.
2. От противного: Пусть  $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$  расходится и  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится. Тогда, по первому пункту доказательства  $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$  сходится. Противоречие. Следовательно,  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  расходится.

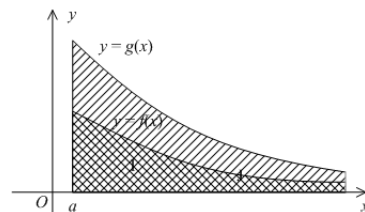
Геометрический смысл теоремы: площадь криволинейной трапеции, ограниченной меньшей функцией, имеющей предел на  $+\infty$ , меньше площади криволинейной трапеции, ограниченной большей функцией, имеющей предел на  $+\infty$ .

**Теорема 17 (признак сходимости неопределенных интегралов первого рода).** Пусть  $f(x)$  определена на интервале  $[a; +\infty)$ , где  $a > 0$  и  $f(x) \geq 0$ . Тогда, если

1. Если существуют такие  $M > 0, \alpha > 1$ , что  $f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha}$ , то интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится.
2. Если существуют такие  $M > 0, 1 \geq \alpha > 0$ , что  $f(x) \geq \frac{M}{x^\alpha}$ , то интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  расходится.

**Доказательство.** Очевидно. Вытекает из теорем 15 и 16.

**Пример:** Рассмотрим интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(e^x+1)}$ .  $\frac{1}{x^2(e^x+1)} < \frac{1}{2x^2}$ . Но  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^2}$  сходится. Следовательно, и исходный интеграл сходится.



### Абсолютная и исходная сходимости

**Теорема 18.** Пусть  $f(x)$  непрерывна на интервале  $[a; +\infty)$ . Тогда, если сходится интеграл  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ , то сходится и интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ .

**Доказательство.** Рассмотрим функции  $f^+(x)$  и  $f^-(x)$ , где  $f^+(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2}$ ,  $f^-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2}$ . Следовательно,  $f^+(x)$  и  $f^-(x) \geq 0$ . Если их сложить, получим:  $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$  и  $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ . Рассмотрим интеграл  $\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx$ . Значит, так как существует предел  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b |f(x)|dx$ , то должны существовать и пределы  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f^+(x)dx$ ,  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f^-(x)dx$ , так как в противном случае не существовал бы  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b |f(x)|dx$ . Теперь распишем интеграл  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$ . Аналогично, интеграл левой части существует, так как существуют оба интеграла из правой части. Следовательно, существует и  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$ , то есть интеграл сходится.

**Замечание.** Утверждение, обратное теореме, неверно. Если сходится интеграл  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ , то говорят, что этот интеграл сходится абсолютно. Если же интеграл  $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$  не сходится, а  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  сходится, то говорят, что этот интеграл сходится условно.

**Пример:**  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x\sqrt{1+x^2}}$  сходится абсолютно. Рассмотрим интеграл  $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x dx}{x\sqrt{1+x^2}} \right|$ .  $\left| \frac{\sin x dx}{x\sqrt{1+x^2}} \right| \leq \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{1}{x^2}$ , а интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  сходится.

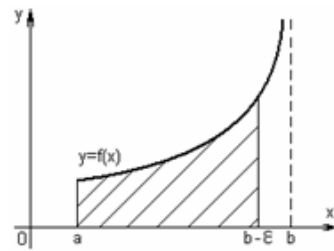
**Несобственные интегралы второго рода и их свойства**

Пусть функция  $f(x)$  задана на некотором интервале  $[a; b)$ . Пусть в точке  $b$  функция имеет бесконечный разрыв, т.е.  $\begin{cases} f(x) \rightarrow \infty \\ x \rightarrow b-0 \end{cases}$ . Рассмотрим интеграл  $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ . Этот интеграл существует, так как функция непрерывна. Тогда рассмотрим предел  $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ . Если этот предел существует, то говорят, что несобственный интеграл второго рода существует и сходится:  $\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ . Если этот предел не существует, то говорят, что несобственный интеграл не существует или расходится. Точку  $b$  называют особой точкой функции  $f(x)$ .

**Замечание.** Аналогичным образом определяется несобственный интеграл второго рода, где специальной точкой является точка  $a$ .

Пусть точка  $c$  является внутренней точкой интервала  $(a; b)$  и пусть эта точка является особой точкой функции  $f(x)$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = \infty$  и  $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = \infty$ .

Если существуют пределы  $\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx$  и  $\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$ , то говорят, что несобственный интеграл с особой точкой  $c$  сходится:  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$ . Иначе же говорят о расхождении, или несуществовании несобственного интеграла второго рода с особой точкой  $c$ . Если же в пределах  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  будут равны, то говорят о существовании несобственного интеграла в смысле главного значения (V.P.):  $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right)$ .



**Примеры:**  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$ .

(V.P.)  $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-1}^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{c+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln|x| \Big|_{-1}^{c-\varepsilon} + \ln|x| \Big|_{c+\varepsilon}^2) = \ln 2$ .

**Теорема 19 (признак сходимости и расходимости интегралов 2 рода).** Пусть  $f(x)$  непрерывна на интервале  $[a; b)$  и  $b$  – особая точка  $f(x)$ . Тогда:

1. Если существуют такие  $M > 0$  и  $0 < m < 1$ , что для любого  $x$  из исходного интервала выполняется неравенство  $0 < f(x) \leq \frac{M}{(b-x)^m}$ , то интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  сходится.
2. Если существуют такие  $M > 0$  и  $m \geq 1$ , что для любого  $x$  из исходного интервала выполняется неравенство  $f(x) > \frac{M}{(b-x)^m}$ , то интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  расходится.

**Доказательство.** Можно произвести замену переменной и свести к несобственному интегралу первого рода, для которого признак доказан.

**Замечание.** Заменой переменной несобственный интеграл второго рода можно свести к интегралу первого рода и наоборот. В силу этого для интегралов второго рода выполняются признаки сравнения.

## Интеграл Эйлера

### Некоторые часто встречающиеся несобственные интегралы

1. Интеграл Эйлера  $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$ . Особая точка  $x = 0$ . Выполним замену  $x = 2t$ . Получаем  

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t \, dt = 2 \int_0^{\pi/4} (\ln 2 + \ln \sin t + \ln \cos t) \, dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t \, dt +$$

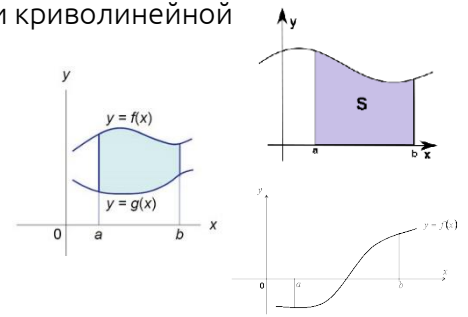
$$2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t \, dt = \left[ \begin{array}{l} t = \frac{\pi}{2} - u; \, dt = -du \\ \ln \cos t = \ln \cos(\frac{\pi}{2} - u) = \ln \sin u \end{array} \right] = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t \, dt + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin u \, du = \frac{\pi}{2} \ln 2 +$$

$$2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin t \, dt. \text{ Следовательно, } \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$
2. Интеграл Пуассона  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .
3. Интеграл Дирихле  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$ .



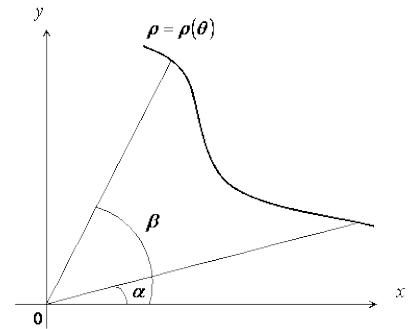
**Вычисление площадей в декартовых координатах**

1.  $f(x) \geq 0$  непрерывна на  $[a; b]$ . Тогда  $\int_a^b f(x)dx$  равен площади криволинейной трапеции.
2.  $f(x)$  принимает как положительные, так и отрицательные значения и непрерывна на  $[a; b]$ . Тогда  $\int_a^b f(x)dx = S_2 - S_1$ .
3.  $f(x) \geq g(x)$  на  $[a; b]$ . Тогда  $S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ .
4. Кривая задана параметрически  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}; t \in [\alpha; \beta]; x'(t) \neq 0; x(\alpha) = a; x(\beta) = b; a < b$ . Тогда  $S = \int_a^b y(t)x'(t)dt$ .



**Вычисление площадей в полярных координатах**

Пусть  $\rho = \rho(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\alpha; \beta]$  задает границу криволинейного сектора. Разобьем промежуток  $[\alpha; \beta]$  на  $n$  частей:  $\varphi_0 = \alpha < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta$ , и в каждом промежутке выберем точку  $\xi_i \in [\varphi_{i-1}; \varphi_i]$ . Тогда  $\rho(\xi_i)$  – радиус кругового сектора,  $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$  – размер угла сектора. Площадь фигуры, составленной из получившихся круговых секторов, вычисляется как  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho^2(\xi_i) \Delta\varphi_i$ . При  $\max_i \Delta\varphi_i \rightarrow 0$  формула сводится к интегральному виду  $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$ . А площадь отдельно взятого  $i$  – го кругового сектора будет находиться как  $\frac{1}{2} \rho^2(\xi_i) \Delta\varphi_i$ .



### Вычисление длины дуг

Пусть  $y = f(x)$  непрерывна и дифференцируема на  $[a; b]$  и требуется найти длину дуги графика функции. Разобьем  $[a; b]$  на  $n$  частей: точки  $M_i(x_i; y(x_i))$  будут являться концами соответствующих хорд. В итоге вся дуга разобьется на  $n$  звеньев. Длина каждого звена будет вычисляться как  $\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} * \Delta x_i$ . Тогда длина всей дуги будет равна сумме длин всех ломаных  $\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} * \Delta x_i$ . При  $\max_i \Delta l_i \rightarrow 0$  формула сводится к интегральному виду  $\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .

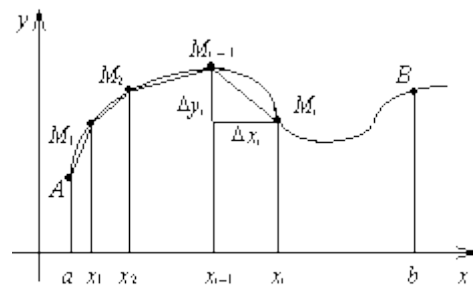


Рис. 16

**Замечание.** Длина графика функции существует, если функция непрерывна и дифференцируема. Такие кривые называются спрямляемыми. Если функция только непрерывна, то может возникнуть ситуация неспрямляемой кривой.

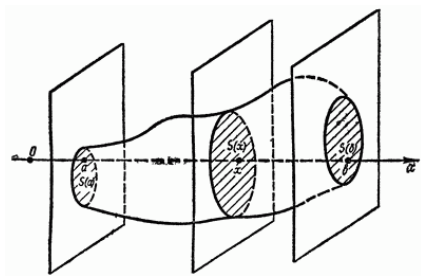
Если кривая задана параметрически  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}; t \in [\alpha; \beta]$ , то длина дуги вычисляется по формуле  $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ .

Если кривая задана в полярных координатах, то для вывода формулы выразим декартовы координаты  $x, y$  через полярные  $\rho, \varphi$ :  $x = \rho(\varphi) \cos \varphi, y = \rho(\varphi) \sin \varphi$ . Подставив получившиеся выражения в формулу длины дуги для параметрически заданной функции, получим  $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi$ .

### Объем тела вращения

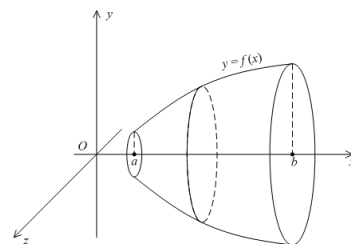
#### Объем тела через площади поперечного сечения

Пусть есть некоторое тело, которое можно спроектировать на ось  $Ox$   $[a; b]$ . Введем непрерывную функцию  $S(x)$ , отображающую площадь поперечного сечения в каждой точке  $[a; b]$ . Тогда объем тела можно вычислять как  $V = \int_a^b S(x)dx$ . Разобьем  $[a; b]$  на  $n$  частей таких, что  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . На каждом разбиении выберем точку  $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ . Тогда  $S(\xi_i)$  – площадь поперечного сечения,  $S(\xi_i)\Delta x_i$  – объем цилиндрического тела. Складывая эти объемы, получаем  $\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i$ .  
 $\xrightarrow{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \int_a^b S(x)dx$ .



#### Объем тела вращения

Пусть есть непрерывная кривая  $y = f(x)$ , заданная на  $[a; b]$ . Тогда радиус отдельно взятого поперечного сечения будет равен  $r = f(x)$ , а площадь поперечного сечения равна  $S(x) = \pi r^2 = \pi f^2(x)$ . Тогда объем тела вращения можно вычислять как  $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ . Вывод аналогичный.



Билеты для подготовки к экзамену по математике. Трофимов Владислав

**Пространство  $\mathbb{R}^n$ . Сходимость в  $\mathbb{R}^n$ . Функции нескольких переменных.**

**Предел, непрерывность. Свойства непрерывных функций**

Рассмотрим линейное пространство  $\mathbb{R}^n$  размерности  $n$ . Любой элемент  $x \in \mathbb{R}^n$  может быть представлен как вектор  $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Их можно складывать, вычитать, умножать на число. Также говорят о расстоянии в линейном пространстве  $\|x - y\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$ . Введем понятие  $n$ -мерного шара с центром в точке  $x_0$  и радиусом  $r$ :  $S_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2} < r\}$ .

С помощью этих шаров можно ввести понятие внутренней точки области. Пусть  $D$  – подмножество  $\mathbb{R}^n$ . Точка  $x_0 \in D$  называется внутренней точкой множества  $D$ , если существует такое  $r$ , что  $n$ -мерный шар с центром в точке  $x_0$  полностью лежит в  $D$  ( $S_r(x_0) \subset D$ ). Точка  $x_0$  (уже не обязательно лежащая в  $D$ ) называется граничной точкой множества  $D$ , если для любого  $r$  в  $S_r(x_0)$  существуют точки, отличные от  $x_0$ , принадлежащие  $D$  и не принадлежащие  $D$ .

Множество  $D \subset \mathbb{R}^n$  называют открытым, если все его точки внутренние.

Множество  $D \subset \mathbb{R}^n$  называют замкнутым, если оно содержит и внутренние, и граничные точки.

Пусть заданы  $\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ \dots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$  – непрерывные дифференцируемые функции,  $t \in [\alpha, \beta]$ . Тогда говорят, что

эти функции задают в  $\mathbb{R}^n$  кривую. Кривые задаются неоднозначно.

Множество называется связным, если любые две его точки можно соединить кривой, лежащей в  $D$ .

Область в  $\mathbb{R}^n$  называется открытой связной областью в  $\mathbb{R}^n$ . Пусть дана точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Тогда любое открытое множество, содержащее  $x_0$ , называется окрестностью этой точки. Шар с центром в точке  $x_0$  и радиусом  $r$  называется  $r$ -окрестностью точки  $x_0$ .

Пусть  $D \subset \mathbb{R}^n$  – область и пусть в  $D$  задана функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Эту функцию будут называть функцией нескольких переменных.

Пределом во внутренней точке  $x_0 \in D$  функции  $f$  называется  $A = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_{01} \\ x_2 \rightarrow x_{02} \\ \dots \\ x_n \rightarrow x_{0n}}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая  $\delta$  – окрестность  $S_\delta(x_0)$ , что если  $x \in S_\delta(x_0)$ , то  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) < \varepsilon$ . Функция переводит точку из пространства  $\mathbb{R}^n$  в пространство  $\mathbb{R}^1$ .

**Замечание.** Можно показать, что покомпонентное стремление  $\begin{cases} x_1 \rightarrow x_{01} \\ x_2 \rightarrow x_{02} \\ \dots \\ x_n \rightarrow x_{0n} \end{cases}$  равносильно стремлению

по метрике  $\|x - x_0\|$ . Поэтому можно писать предел в виде  $A = \lim_{\|x - x_0\| \rightarrow 0} f(x)$ .

Если  $\lim_{\|x - x_0\| \rightarrow 0} f(x)$  равен значению функции в точке, то  $f(x)$  непрерывна в этой точке.

Есть две формы записи:  $\lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \rightarrow 0}} (f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$  и  $\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \Delta f = 0$ .

При выполнении условия в любой из двух форм записи функция будет являться непрерывной.  $\Delta f$  называется приращением функции. Частным приращением функции  $f$  по  $x_1$  называется  $\Delta_{x_1} f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Функция называется непрерывной на множестве  $M \subset \mathbb{R}^n$ , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пусть есть некоторая область  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Определим множество  $\bar{G} = G \cup \partial G$  ( $\partial G$  – граница  $G$ ), включающее в себя область и ее границу. Такое множество называется замкнутой областью. Если функция непрерывна в замкнутой области, то она достигает на ней своих наибольших и наименьших значений и принимает на этом множестве все промежуточные значения.

## Частные производные. Полный дифференциал

### Частные производные

Пусть  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  определена в окрестности точки  $x_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ . Частной производной функции в точке  $x_0$  называется  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta x_1 f(x_0)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_{01} + \Delta x_1, x_{02}, \dots, x_{0n}) - f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\Delta x_1}$ . Обозначается как  $f'_x(x_0)$ . Аналогично определяются частные производные по другим параметрам.

Пример:  $z = x^2 \sin y$ ;  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y$ ;  $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$ .

### Полный дифференциал

Пусть  $z = f(x, y)$  имеет частные производные по  $x$  и  $y$  в точке  $(x, y)$  и в ее окрестности. Пусть эти частные производные непрерывны. Рассмотрим полное приращение функции  $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ . По теореме Лагранжа это равно  $\frac{\partial f}{\partial y}(x + \Delta x, \bar{y})\Delta y + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y)\Delta x$ , где  $\bar{x}$  – значение между  $x$  и  $x + \Delta x$ ,  $\bar{y}$  – значение между  $y$  и  $y + \Delta y$ . Раз производные существуют и непрерывны в окрестности точки  $(x, y)$ , то можно записать, что  $\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \gamma_2(\Delta x, \Delta y)\right)\Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \gamma_1(\Delta x, \Delta y)\right)\Delta x$ , где  $\gamma_1, \gamma_2$  – бесконечно малые величины при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta y \rightarrow 0$ . Получаем, что  $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y + \gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y$ . Тогда величина  $df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$  называется полным дифференциалом, а  $\gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y = O(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = O(\Delta \rho)$  – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем расстояние между точками  $(x, y)$  и  $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ .  $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + df$ .

## Производные сложных функций и функции, заданной неявно

### Производная сложной функции

Пусть  $z = f(u, v)$ ,  $u = \varphi(x, y)$ ,  $v = \psi(x, y)$  и пусть  $\varphi$  и  $\psi$  определены в области  $G$ . Тогда  $z$  определена в  $D$  – образе  $G$  при отображении  $\varphi$  и  $\psi$ . Пусть  $\Delta x$  – приращение  $x$ , тогда  $\Delta_x u, \Delta_x v$  – приращение  $u$  и  $v$ .  $\Delta_x z = \frac{\partial f}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v$ . При  $\Delta x \rightarrow 0$   $\gamma_1, \gamma_2 \rightarrow 0$ . Частная производная по  $x$  сложной функции  $z(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ :  $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial u} * \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial v} * \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$ . Аналогичным образом  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$ .

**Замечание.** Пусть  $z = f(u, v, x)$ ,  $u = \varphi(x)$ ,  $v = \psi(x)$ . Тогда  $z = f(\varphi(x), \psi(x), x)$ . Отсюда  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{d\psi}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x}$ .

### Производная функции, заданной неявно

$F(x, y) = 0$  – неявное задание  $y(x)$ .

**Теорема 20.** Пусть  $F(x, y)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ ,  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$  определены и непрерывны в области  $G$ , содержащей точку  $(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению:  $F(x, y) = 0$ . Пусть в этой точке  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ , тогда  $y'_x = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$ .

**Доказательство.** Зададим приращения  $x + \Delta x, y + \Delta y$  так, чтобы они лежали в области  $G$  и  $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$ , тогда  $F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0$ .  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \rightarrow 0$  при  $\Delta \rho \rightarrow 0$ . Разделим на  $\Delta x$ .  $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \gamma_1 + \gamma_2 \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . При  $\Delta x \rightarrow 0$  получим  $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'_x = 0$ , откуда  $y'_x = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$ .

**Замечание.** Теорему можно обобщить на случай функции  $n$  переменных.  $F(z, x_1, x_2, \dots, x_n)$  – неявное задание  $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Тогда  $\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ ,  $\dots$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$  (при условии, что  $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ ).

### Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных

Частная производная  $n$  – порядка есть частная производная от производной  $n - 1$  порядка. Пусть дана  $z = f(x, y)$ . Тогда ее производные второго порядка:  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$ . Последние две производные называются смешанными производными.

**Теорема 21.** Пусть  $z = f(x, y)$ ,  $f'_x(x, y)$ ,  $f'_y(x, y)$ ,  $f''_{xy}(x, y)$ ,  $f''_{yx}(x, y)$  определены и непрерывны в точке  $(x, y)$  и ее окрестности. Тогда  $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим  $A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$  и  $\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ . Тогда  $A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$ . Так как  $f'_x$  определена в окрестности точки  $(x, y)$  то  $\varphi(x)$  дифференцируема на  $[x, x + \Delta x]$ ,  $\Delta x > 0$ . Следовательно, по теореме Лагранжа,  $A = \varphi'(\bar{x})\Delta x$ .  $\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y)$ . По теореме Лагранжа  $\varphi'(\bar{x}) = f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta y$ .  $f'_x$  существует в окрестности точки  $(x, y)$  и  $A = f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x\Delta y$ . Теперь рассмотрим  $A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)]$  и  $\psi(x) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ . Аналогичный образом получим  $A = f''_{yx}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x\Delta y$ . Приравняем полученные выражения  $f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x\Delta y = f''_{yx}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x\Delta y$ . При  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$  точки  $(\bar{x}, \bar{y}), (\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (x, y)$ . Получаем  $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$ .

**Замечание.** Теорему можно обобщить на случай функции  $n$  переменных.

## Производная по направлению. Градиент и его свойства

### Поверхности уровня. Линии уровня

Пусть в  $D \in \mathbb{R}^3$  задана  $f(x, y, z)$ . Множество точек из  $D$  таких, что  $f(x, y, z) = c$  называется поверхностями уровня.

**Пример:**  $f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$ ;  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = c$ .

Аналогично определяются линии уровня  $f(x, y) = c$ .

### Производная по направлению

Пусть есть функция  $u = f(x, y, z)$ , определенная в области  $D \in \mathbb{R}^3$  и пусть есть точка  $M(x, y, z) \in D$ . Из точки  $M$  проведем вектор  $\vec{l}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  ( $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  – приращения относительно точки  $M$ ) с направляющими  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ . Тогда длина вектора будет определяться как  $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ , а направляющие косинусы  $\cos \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta l}$ ;  $\cos \beta = \frac{\Delta y}{\Delta l}$ ;  $\cos \gamma = \frac{\Delta z}{\Delta l}$ . Тогда  $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y + \gamma_3 \Delta z$ . Производной по направлению называется  $\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial u}{\partial y} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial u}{\partial z} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} + 0 = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$ .

**Замечание.** Частные производные по  $x, y, z$  тоже являются производными по направлению.

### Градиент и его свойства

Пусть  $u = f(x, y, z)$  определена в  $D \in \mathbb{R}^3$  и пусть точка  $M(x, y, z) \in D$ . Пусть существуют  $\frac{\partial u}{\partial x}(M)$ ;  $\frac{\partial u}{\partial y}(M)$ ;  $\frac{\partial u}{\partial z}(M)$ . Тогда градиентом функции  $u$  в точке  $M$  называют вектор  $\text{grad } u(M) = \frac{\partial u}{\partial x}(M)\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M)\vec{k}$ . Если определить градиент в каждой точке поля, то говорят о поле градиентов.

Пусть у  $u(x, y, z)$  существуют в  $D$  частные производные. Тогда функции  $u$  в каждой точке можно сопоставить ее градиент.

**Теорема 22.**  $\frac{\partial u}{\partial l}$  – проекция  $\text{grad } u$  на  $\vec{l}$  в каждой точке.

**Доказательство.** проекция  $\text{grad } u$  на  $\vec{l}$  равна  $\frac{\text{grad } u * \vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma = \frac{\partial u}{\partial l}$ .

Свойства градиента:

1.  $\frac{\partial u}{\partial l}$  принимает наибольшее значение в точке, если  $\vec{l}$  сонаправлен  $\text{grad } u$  и  $\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u|$ .

**Доказательство.**  $\frac{\partial u}{\partial l}$  – проекция  $\text{grad } u$  на  $\vec{l}$ .  $\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| * \cos(\vec{l}; \text{grad } u)$  принимает максимум, если они сонаправлены.

2.  $du = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z = \text{grad } u * d\vec{r}$ ,  $d\vec{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (dx, dy, dz)$ .

3. **Теорема 23.** Пусть задана  $u(x, y, z)$  в  $D \in \mathbb{R}^3$  и пусть  $M(x, y, z)$  – точка, лежащая на поверхности уровня, и пусть существует частная производная, и пусть в точке  $M$   $|\text{grad } u| \neq 0$ . Тогда градиент перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через точку  $M$ .

**Доказательство.** Пусть  $M(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$  лежит на той же поверхности уровня, что и  $M(x, y, z)$ , т.е.  $u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = c$ . Тогда  $u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z) = 0$ , т.е.  $\Delta u = du + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y + \gamma_3 \Delta z = \text{grad } u * \Delta \vec{r} + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y + \gamma_3 \Delta z = 0$ . Разделим на  $|\Delta \vec{r}|$ :  $\text{grad } u * \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} + \gamma_1 \frac{\Delta x}{|\Delta \vec{r}|} + \gamma_2 \frac{\Delta y}{|\Delta \vec{r}|} + \gamma_3 \frac{\Delta z}{|\Delta \vec{r}|} = 0$ . Очевидно, что  $\frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} = \vec{l}$  – единичный вектор, выходящий из точки  $M$  на поверхности уровня.

$\lim_{|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|}$  – единичный вектор, касательный к поверхности в точке  $M$ .  $\text{grad } u * \lim_{|\Delta \vec{r}| \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta \vec{r}|} = 0$ , откуда следует, что градиент перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через точку  $M$ .



### Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть  $u(x, y, z) = 0$  определена в  $D \in \mathbb{R}^3$  и точка  $M(x, y, z)$ , лежащая на поверхности. Пусть существуют частные производные  $u$  в точке  $M$  и градиент  $u$  в этой точке ненулевой. Пусть  $L$  – некоторая кривая на поверхности, проходящая через точку  $M$ .  $L$  задается параметрически задается параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [\alpha; \beta], t_0 \in (\alpha; \beta), M(x(t_0), y(t_0), z(t_0)). \end{cases}$$

Пусть существуют  $x'(t), y'(t), z'(t)$ . Тогда вектор  $r'(t) =$

$x'(t), y'(t), z'(t)$  будет являться касательным к  $L$  в точке  $M$ .  $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial u}{\partial z} z'(t)$ . Рассмотрим точку  $M'(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), z(t_0 + \Delta t))$ , которая тоже будет лежать на поверхности уровня. Тогда  $\Delta u = u(M') - u(M) = 0$ . Значит,  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial u}{\partial z} z'(t) = 0$ . Следовательно, градиент перпендикулярен произвольному вектору касательной в точке  $t_0$ . Следовательно, все касательные вектора лежат в одной плоскости и градиент в этой точке перпендикулярен касательной плоскости в этой же точке.

Уравнение касательной плоскости:  $\frac{\partial u}{\partial x}(M)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(M)(y - y_0) + \frac{\partial u}{\partial z}(M)(z - z_0) = 0$ , или же  $\text{grad } u(M) * (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ .

Нормаль к поверхности – нормаль к касательной плоскости. Уравнение нормали к поверхности:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial u}{\partial x}(M)} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial u}{\partial y}(M)} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial u}{\partial z}(M)}.$$

## Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции $n$ переменных

Производная второго порядка функции  $f$  двух переменных есть  $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ .

Аналогично определяется производная  $n$  – го порядка  $\frac{\partial^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1^{k_1-1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}}, k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ . Точно таким же образом определяется дифференциал  $n$  – го порядка функции  $f$ . По определению это есть  $d^n f \equiv d(d^{n-1} f)$ , где  $d^2 f = d(df)$ . Пусть есть некая функция от двух переменных  $f(x, y)$ . Тогда  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ . Дифференциал зависит от четырех переменных – точки  $(x, y)$ ,  $dx, dy$ , от последних двух зависит линейно. Тогда дифференциал второго порядка есть  $d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) dy = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} (dy)^2$ . Таким образом, дифференциал второго порядка есть  $d(\dots) = \frac{\partial}{\partial x}(\dots) dx + \frac{\partial}{\partial y}(\dots) dy$ , а дифференциал  $n$  – го порядка есть  $d^n(\dots) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\dots) dx + \frac{\partial}{\partial y}(\dots) dy\right)^n$ . Рассмотрим функцию  $f(x, y)$ , у которой существуют частные производные  $n$  – го порядка в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . Тогда имеет место выражение  $f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + o\left(\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)^n\right)$ , где  $dx = x - x_0, dy = y - y_0$ , которое и называется формулой Тейлора. Пояснение:  $\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)^n$  – бесконечно малая функция, а  $o\left(\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)^n\right)$  – бесконечно большая более высокого порядка, остаточный член формулы Тейлора. Аналогичная формула для одной переменной была в первом семестре.

**Необходимые и достаточные условия экстремума функции  $n$  переменных**

Пусть некая функция  $f(x, y)$  определена в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  и имеет частные производные 1-го порядка. Говорят, что функция  $f$  имеет локальный максимум в точке  $(x_0, y_0)$ , если существует такая окрестность точки  $(x_0, y_0)$ , что для любого  $x$  и  $y$  в этой окрестности выполняется неравенство  $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ . Аналогичным образом определяется локальный минимум. Точки локального минимума и максимума называются точками экстремума.

**Теорема 24.** Пусть точка  $(x_0, y_0)$  – точка экстремума. Тогда частные производные (если они существуют)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  равны нулю.

**Доказательство.** Пусть точка  $(x_0, y_0)$  – точка максимума (аналогичные рассуждения можно вести для точки минимума) функции  $f$ . Тогда по определению существует такая окрестность точки  $(x_0, y_0)$ , что  $f(x_0, y_0) \geq f(x_0 + \Delta x, y_0) = f(x, y_0)$ . Так как  $y_0$  фиксировано, то это функция одной переменной, и, следовательно, частная производная по  $x$  обращается в ноль  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ . Это является необходимым условием существования экстремума для функции одной переменной (также существование производной в этой точке). Аналогичным образом частная производная по  $y$  обращается в ноль  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ . Точки, в которых производная обращается в ноль, называются стационарными точками.

**Замечание.** Обращение частных производных в ноль является необходимым, но не достаточным условием существования точки экстремума. Пример:  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Точка  $(0; 0)$  не принимает экстремальное значение, хотя частные производные в этой точке равны нулю  $\frac{\partial f}{\partial x}(0; 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0; 0) = 0$ .

**Теорема 25.** Достаточные условия экстремума. Пусть некая функция  $f(x, y)$  имеет частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . Пусть  $A = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x_0, y_0)$ ,  $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ ;  $C = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x_0, y_0)$ . Если:

1.  $A * C - B^2 > 0$  и  $A > 0$ , то точка  $(x_0, y_0)$  – точка минимума.
2.  $A * C - B^2 > 0$  и  $A < 0$ , то точка  $(x_0, y_0)$  – точка максимума.
3.  $A * C - B^2 < 0$ , то точка  $(x_0, y_0)$  не является точкой экстремума.
4.  $A * C - B^2 = 0$ , то требуется дополнительное исследование.

**Доказательство.** Воспользуемся формулой Тейлора. Пусть есть функция двух переменных  $f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{df(x_0, y_0)}{1!} + \frac{d^2f(x_0, y_0)}{2!} + o((\Delta\rho)^2)$ , где  $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ . Так как в точке  $(x_0, y_0)$  производная обращается в ноль  $df(x_0, y_0) = 0$ , то приращение функции  $\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$  есть второй дифференциал, деленный на  $2!$ :  $\Delta f = \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right) + o((\Delta\rho)^2)$ . Перепишем в виде  $\Delta f = \frac{1}{2} (A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x \Delta y + C(\Delta y)^2 + 2o((\Delta\rho)^2))$ . Теперь перейдем к полярным координатам  $\begin{cases} \Delta x = \Delta\rho * \cos \varphi \\ \Delta y = \Delta\rho * \sin \varphi \end{cases}$ , и выражение  $\frac{2o((\Delta\rho)^2)}{(\Delta\rho)^2}$  заменим на  $\varepsilon(\Delta\rho)$ , которое будет малой величиной, так как  $\lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \frac{2o((\Delta\rho)^2)}{(\Delta\rho)^2} = 0$ . Тогда наше выражение примет вид  $\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta\rho)^2 (A \cos^2 \varphi + 2B \cos \varphi \sin \varphi + C \sin^2 \varphi + \varepsilon(\Delta\rho))$ . Теперь выражение в скобках домножим и разделим на  $A$ , а также в числителе прибавим и вычтем  $B^2 \sin^2 \varphi$  для выделения полного квадрата:  $\Delta f = \frac{1}{2} (\Delta\rho)^2 * \left( \frac{A^2 \cos^2 \varphi + 2A * B \cos \varphi \sin \varphi + B^2 \sin^2 \varphi - B^2 \sin^2 \varphi + A * C \sin^2 \varphi + \varepsilon_1(\Delta\rho)}{A} \right) = \frac{1}{2} (\Delta\rho)^2 \left( \frac{(A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2}{A} + \frac{(AC - B^2) \sin^2 \varphi + \varepsilon_1(\Delta\rho)}{A} \right)$ , где  $\varepsilon_1(\Delta\rho) = \varepsilon(\Delta\rho) * A$ , что все равно является малой величиной. Теперь рассмотрим четыре возможных случая:

1.  $AC - B^2 > 0$  и  $A > 0$ . В этом случае весь числитель нашего выражения будет положителен. (В некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  будет выполняться неравенство  $(A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2 + (AC - B^2) \sin^2 \varphi > |\varepsilon_1(\Delta\rho)|$ , так как последнее является бесконечно малой величиной). Знаменатель также положителен. Отсюда следует, что  $\Delta f > 0$ , а значит, точка  $(x_0, y_0)$  является точкой минимума.
2.  $AC - B^2 > 0$  и  $A < 0$ . Числитель так же положителен, но вот знаменатель отрицателен. (В некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  будет выполняться неравенство  $(A \cos \varphi + B \sin \varphi)^2 + (AC - B^2) \sin^2 \varphi > |\varepsilon_1(\Delta\rho)|$ , так как последнее является бесконечно малой величиной). Отсюда следует, что  $\Delta f < 0$ , а значит, точка  $(x_0, y_0)$  является точкой максимума.
3.  $AC - B^2 < 0$  и  $A > 0$ . Если мы возьмем  $\sin \varphi = 0$ , т.е.  $\varphi = 0$  (приравняем к нулю второе слагаемое числителя), то, рассуждая аналогично предыдущим пунктам, получим что  $\Delta f > 0$  в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$ . А если теперь мы приравняем к нулю первое слагаемое числителя,

$\tan \varphi = -\frac{A}{B}$ , то  $\Delta f < 0$ . Как видим, у нас есть направление угла, по которому функция возрастает, и направление угла, по которому функция убывает. Следовательно, экстремума нет, точка  $(x_0, y_0)$  является седловой точкой.

4.  $AC - B^2 = 0$ . Тогда для  $\tan \varphi = -\frac{A}{B}$  (первое слагаемое обращается в ноль) выражение примет вид  $\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta \rho)^2 \varepsilon(\Delta \rho)$ . В этом случае все будет определяться знаком  $\varepsilon(\Delta \rho)$ , а для выяснения этого требуется дополнительно исследование.

**Замечание.** Теорему можно обобщить на  $n$  переменных. Знак приращения определяется прежде всего вторым дифференциалом, а все частные производные содержатся в матрице Гессе, именуемой квадратичной формой. Если она определена и положительна, тогда максимум, отрицательная – минимум, если ноль, то нет экстремума, а если положительна и отрицательна по различным направлениям, то это седловая точка и требуется дополнительно исследование.

### Задача Коши. Изоклины.

Уравнение вида  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  называется дифференциальным. Причем порядок старшей производной этого уравнения будет называться порядком этого уравнения. Пример:  $(y'')^3 + y'x + yx^2 = 0$  – дифференциальное уравнение второго порядка.

Частным решением дифференциального уравнения называется любая функция  $y(x)$ , подстановка которой обращает выражение  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  в верное тождество. Пример:  $y'' + y = 0$ .  $y = \sin x$ ,  $y = c_1 \sin x$ ,  $y = c_1 \cos x$ ,  $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$  – частные решения этого уравнения. Таких решений может быть несколько.

Общим решением дифференциального уравнения  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  называется такое  $y = \varphi(c_1, c_2, \dots, c_n, x)$ , если оно является частным решением уравнения при всех допустимых значениях констант  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , а также если для любого частного решения существуют такие константы  $c_1 = c_{10}, c_2 = c_{20}, \dots, c_n = c_{n0}$ , что  $\varphi(x) = \varphi(c_{10}, c_{20}, \dots, c_{n0}, x)$ , то есть если всегда можно подобрать константы для получения решения.

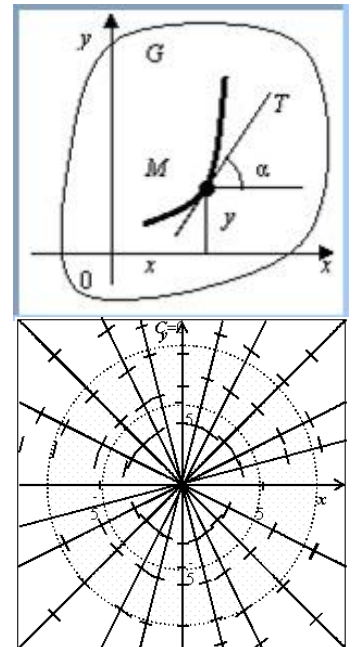
### Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Уравнение вида  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  называется разрешенным относительно старшей производной. Пример:  $y' = f(x, y)$ . К такому виду дифференциальное уравнение можно привести не всегда.

Геометрический смысл: если функция задана в подобном виде, то в каждой точке некоторой области, на которой определена эта функция, мы можем вычислить ее производную, то есть тангенс угла наклона касательной. Если есть частное решение  $y = \varphi(x)$ , то его график называется интегральной кривой. Пусть  $f(x, y)$  определена в некоторой области  $D \in \mathbb{R}^2$ . Она задает значение в каждой точке. Тогда в каждой точке области будет задан вектор, касательный к интегральной кривой. Тогда, построив эти вектора, можно будет нарисовать интегральную кривую.  $f(x, y)$  задает в  $D$  касательные векторы к интегральным кривым. Линии уровня вида  $f(x, y) = c$  называются изоклинами. Пример:  $y' = -\frac{x}{y}$ .  $-\frac{x}{y} = c$  – изоклины.  $y = -\frac{1}{c}x$ . Пусть  $-\frac{1}{c} = k$ . Тогда  $y = kx$ , то есть линии уровня представляют собой прямые. Если  $k = 1$ , то  $y = x, y' = -1$ . Если  $k = -1$ , то  $y = -x, y' = 1$ . Если  $k = 0$ , то  $y = 0, y' = \infty$ . Если соединить все получившиеся касательные к интегральным кривым, то получатся окружности. Интегральные кривые представляют собой множество окружностей.

Задача Коши: пусть есть уравнение  $y' = f(x, y)$  и точка  $(x_0, y_0)$ , принадлежащая  $D$ , а также значение функции в точке  $x_0$ :  $y(x_0) = y_0$ . Последнее условие называется начальным условием. Задача состоит в следующем: требуется найти решение  $y = \varphi(x)$  дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$ , которое удовлетворяло бы начальному условию (поиск такой интегральной кривой, которая бы проходила через точку  $(x_0, y_0)$ ).

Оказывается, если функция  $f(x, y)$  непрерывна в  $D$  и частная производная  $\frac{\partial f}{\partial y}$  непрерывна в  $D$ , то для любой точки  $(x_0, y_0)$  существует единственная функция  $y = \varphi(x)$ , являющаяся решением  $y' = f(x, y)$ , которая удовлетворяет начальному условию, т.е. решает задачу Коши, и для которой в некоторой окрестности точки  $x_0$  значения  $(x, \varphi(x))$  лежат в области  $D$ . (При выполнении условий через некоторую точку области  $D$  проходит единственная интегральная кривая, которая хотя бы в окрестности этой точки будет лежать в области  $D$ ).



Билеты для подготовки к экзамену по математике. Трофимов Владислав  
**Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными  
и с однородной функцией**

**Уравнения с разделяющимися переменными**

Так как  $y' = \frac{dy}{dx}$ , то  $dy = f(x, y)dx$ . Пусть есть функция  $f(x, y)$ . Ее можно расписать как  $f_1(x)f_2(y)$ . Уравнение вида  $dy = f_1(x)f_2(y)dx$  называется уравнением с разделяющимися переменными (их можно разделить), а уравнение вида  $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$  называется уравнением с разделенными переменными ( $dG(y) = dF(x) \rightarrow G(y) = F(x) + c$ ), где  $F$  и  $G$  – первообразные от  $f_1(x)$  и  $\frac{1}{f_2(y)}$ . Получится, что можно проинтегрировать:  $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$ . Почти все решения дифференциальных уравнений сводятся к подобному разделению.

В частности,  $M_1(x)M_2(y)dy = N_1(x)N_2(y)dx$  – обычный вид уравнения с разделяющимися переменными. Можно привести к уравнению с разделенными:  $\frac{M_2}{N_2}(y)dy = \frac{N_1}{M_1}(x)dx$ .

**Уравнения с однородной функцией**

Функция  $F(x, y)$  называется однородной функцией  $n$  – го измерения, если  $F(tx, ty) = t^n F(x, y)$ .

**Пример:**  $F(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 = t^2x^2 + 2t^2xy + 3t^2y^2 = t^2(x^2 + 2xy + 3y^2)$  – однородная функция второго измерения.

В частности, если  $F(tx, ty) = F(x, y)$ , то  $F(x, y)$  – однородная функция нулевого измерения.

**Замечание.** Если  $F$  и  $G$  – однородные функции  $n$  – го измерения, то  $\frac{F}{G}$  – однородная функция нулевого измерения.

Если  $y' = f(x, y)$ , где  $f(x, y)$  – однородная функция нулевого измерения, то  $y' = f(x, y)$  называется дифференциальным уравнением первого порядка с однородной функцией.

**Замечание.** Если  $G(x, y)dy = F(x, y)dx$ , где  $F, G$  – однородные функции  $n$  – го измерения, то такое уравнение будет называться дифференциальным уравнением с однородной функцией.

Принцип решения: делается замена  $y = xu(x)$ ;  $y' = u(x) + xu'(x)$ ;  $f(x, u * x) = f(1, u)$ . Получаем  $u + xu' = f(1, u)$ ;  $xu' = f(1, u) - u$ ;  $\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}$ .

**Пример:**  $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ;  $y = xu$ ;  $u'x + u = \frac{1}{u} + u$ ;  $udu = \frac{dx}{x}$ ;  $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + \ln|c|$ ;  $e^{\frac{y^2}{2x^2}} = cx$ . Последнее называется общим интегралом.

## Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли

### Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида  $y' + p(x)y = q(x)$  называется линейным дифференциальным уравнением. Если  $q(x) = 0$ , то уравнение будет однородным. Если  $q(x) \neq 0$ , то будет неоднородным. Оказывается, что однородное линейное дифференциальное уравнение  $y' + p(x)y = 0$  является уравнением с разделяющимися переменными: разделим и проинтегрируем  $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$ ,  $\ln|y| = -\int p(x)dx + c_1$ ;  $y = e^{c_1}e^{-\int p(x)dx} = ce^{-\int p(x)dx}$ . Последнее является общим решением линейного дифференциального уравнения.

Решение уравнений вида  $y' + p(x)y = q(x)$ .

1. Решение однородного уравнения  $y' + p(x)y = 0$ .  $\frac{dy}{dx} = -p(x)y$ ;  $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$ ;  $y = ce^{-\int p(x)dx}$ . Последнее является общим решением однородного уравнения. Тогда частным решением при  $c = 1$  будет являться  $y_0 = e^{-\int p(x)dx}$ .
2. Решение неоднородного уравнения будем искать в виде  $y = c(x)y_0(x)$ , где  $y_0$  – частное решение однородного уравнения. Подставим в уравнение:  $c'(x)y_0 + c(x)y_0' + p(x)c(x)y_0 = q(x)$ . Второе и третье слагаемые в сумме равны нулю, т.к.  $y_0$  – частное решение однородного уравнения. Отсюда получаем  $c'(x)y_0 = q(x)$ ;  $c'(x) = \frac{q(x)}{y_0}$ ;  $c = \int \frac{q(x)}{y_0}dx + c_1$ . Получается, что общее решение неоднородного уравнения будет иметь вид  $y(x) = \left(\int \frac{q(x)}{y_0}dx + c_1\right)y_0$ .

**Пример:**  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ . Однородное:  $y' + 2xy = 0$ ;  $\frac{dy}{y} = -2xdx$ ;  $\ln|y| = \ln|c| - x^2$ ;  $y = ce^{-x^2}$  – общее решение. Тогда  $y_0 = e^{-x^2}$  – частное решение. Неоднородное:  $y = c(x)e^{-x^2}$ . Подставим  $y' = c'(x)e^{-x^2} - c(x) * 2xe^{-x^2} + c(x) * 2xe^{-x^2} = xe^{-x^2}$ . При решении данным методом обязательно должны сократиться слагаемые, содержащие  $c(x)$ . В противном случае было неверно найдено общее решение однородного уравнения.  $c'(x) = x$ ;  $c(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$ ;  $y = \left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)e^{-x^2}$  – общее решение неоднородного уравнения.

### Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида  $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ , где  $\alpha \neq 1, 0$  (потому что в противном случае получим линейное однородное уравнение). Будем решать это уравнение методом Бернулли. Искать решение будем в виде  $y = u(x)v(x)$ . Подставим в исходное уравнение.  $u'v + uv' + piv = q(x)u^\alpha v^\alpha$ ;  $v(u' + pu) + uv' = q(x)u^\alpha v^\alpha$ . Потребуем  $v(u' + pu) = 0$ . Тогда  $u_0$  – частное решение.  $u_0v' = q(x)u_0^\alpha v^\alpha$ ;  $\frac{dv}{v^\alpha} = q(x)u_0^{\alpha-1}dx$ .

### Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Уравнение вида  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ , если  $d\Phi = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ , называется уравнением в полных дифференциалах, т.е. если  $M(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ;  $N(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ . Если  $d\Phi = 0$ , то  $\Phi(x, y) = c$ . Последнее называется общим интегралом.

**Теорема 26.**  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ .

**Доказательство.** Пусть есть уравнение в полных дифференциалах, т.е. существует такая функция  $\Phi(x, y)$ , что  $M(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ;  $N(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ . Тогда  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ .

**Замечание.** Пусть функции  $M$  и  $N$  дважды дифференцируемые функции.  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  не всегда является уравнением в полных дифференциалах, но всегда существует интегрирующий множитель  $\mu(x, y)$  такой, что  $\mu M(x, y) + \mu N(x, y)dy = 0$  будет являться уравнением в полных дифференциалах.



$$F(x, y', y'') = 0$$

Замена  $y' = z(x)$ ;  $y'' = z'(x)$ . Уравнение приводится к уравнению первого порядка  $F(x, z, z') = 0$ .

**Пример:**  $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ ;  $z(x) = y'(x)$ ;  $xz' = z \ln \frac{z}{x}$ ;  $z' = \frac{z}{x} \ln \frac{z}{x}$ ;  $u = \frac{z}{x}$ ;  $z = ux$ ;  $u'x + u = u \ln u$ ;  $\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$ ;  $\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln c$ ;  $\ln u - 1 = cx$ ;  $u = e^{cx+1}$ ;  $\frac{z}{x} = e^{cx+1}$ ;  $z = xe^{cx+1}$ ;  $y' = xe^{cx+1}$ ;  $y = \int xe^{cx+1} dx$ . Не забывайте про вторую константу.

$$F(y, y', y'') = 0$$

Замена  $y' = p(y)$ ;  $y''_{xx} = p'(y)y'_x = p'_y p$ . Уравнение приводится к уравнению первого порядка  $F(y, p, p' * p) = 0$ .

Билеты для подготовки к экзамену по математике. Трофимов Владислав  
**Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков.**  
**Определитель Вронского и его свойства**

Уравнение вида  $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$ , где  $a_0 \neq 0$ , называется линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка. Если  $f(x) = 0$ , то оно будет являться линейным однородным дифференциальным уравнением.

Не умоляя общности, будем рассматривать уравнения второго порядка  $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$  (\*).

**Теорема 27.** Пусть  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  являются частными решениями (\*), тогда  $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  тоже будет являться частным решением (\*).

**Доказательство.** Подстановкой.

**Замечание.** Теорема обобщается на уравнения  $n$ -го порядка.

Пусть функции  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  определены на отрезке  $[a; b]$ . Их комбинация будет являться линейно-независимой, если из равенства  $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + c_nf_n(x) = 0$  следует  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ .

Функции  $f_1, f_2$  линейно-зависимы, если существует нулевая линейная комбинация с константами, среди которых хотя бы одна отлична от нуля.

**Пример:**  $f_1(x) = x; f_2(x) = x^2$  – линейно-независимы,  $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x + x^2$  – линейно-зависимы.

Пусть функции  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  определены на отрезке  $[a; b]$  и дифференцируемы  $n - 1$  раз. Тогда

определитель матрицы  $W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$  будет называться определителем

Вронского, или вронскианом. Если он равен нулю, то функции, на которых он построен, линейно-зависимы.

**Теорема 28.** Пусть функции  $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$  линейно зависимы и дифференцируемы на отрезке  $[a; b]$ . Тогда  $W(\varphi_1, \varphi_2) = 0$  на этом отрезке.

**Доказательство.** Если эти функции линейно зависимы, то выполняется равенство  $\varphi_2(x) = \lambda\varphi_1(x)$ ,  $\lambda \neq 0$ . Тогда  $W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \lambda\varphi_1 \\ \varphi_1' & \lambda\varphi_1' \end{vmatrix} = 0$ .

**Замечание.** Теорема распространяется на случай  $n$  функций.

**Теорема 29.** Рассмотрим однородное линейное уравнение  $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ . Пусть  $y_1, y_2$  – решения этого уравнения на отрезке  $[a; b]$ . Пусть  $x_0 \in (a; b)$  и  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ . Тогда для любого  $x$  на отрезке  $[a; b]$   $W(y_1, y_2) \neq 0$ .

**Доказательство.** Так как  $y_1, y_2$  – решения, то подставим их и составим систему  $\begin{cases} y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = 0 \\ y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 = 0 \end{cases}$  \*  $y_2$ . Вычитаем второе из первого и получаем  $y_1''y_2 - y_2''y_1 + a_1(y_1'y_2 - y_1y_2') = 0$ . Но  $(y_1'y_2 - y_1y_2')' = y_1''y_2 + y_1'y_2' - y_1'y_2' - y_1y_2'' = y_1''y_2 - y_1y_2''$  и  $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$ . Тогда  $-W'(y_1, y_2) - a_1W(y_1, y_2) = 0$ .  $\frac{W'}{W} = -a_1(x)$ . Проинтегрировав, получаем  $\ln|W| = -\int_{x_0}^x a_1 dx$ .  $W = W(x_0) * e^{-\int_{x_0}^x a_1 dx}$ . По условию  $W(x_0) \neq 0$ . А значит и все выражение не обращается в ноль.

**Замечание.** Пусть  $y_1, y_2$  – решения линейного однородного дифференциального уравнения на отрезке  $[a; b]$  такие, что в какой-то точке этого отрезка  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ . Тогда  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$  на всем отрезке  $[a; b]$ .

**Теорема 30.** Пусть  $y_1, y_2$  – линейно-независимые решения однородного линейного уравнения  $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ . Тогда  $W(y_1, y_2) \neq 0$  на отрезке  $[a; b]$ . Без доказательства.

**Теорема 31.** Общее решение  $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$  представимо в виде  $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ , где  $y_1(x), y_2(x)$  – линейно-независимые частные решения линейного однородного дифференциального уравнения.

**Доказательство.** Так как  $y_1$  и  $y_2$  – решения, то  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  – тоже решение. Пусть есть некоторая задача Коши.  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ . Покажем, что существуют такие  $c_1, c_2$ , что  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  решают задачу Коши.  $\begin{cases} y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = c_1 y'_1(x_0) + c_2 y'_2(x_0) = y'_0 \end{cases}$ . Следовательно,  $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$  – определитель системы. Следовательно, система имеет единственное решение  $c_1, c_2$ .

**Замечание.** Теорема распространяется на случай линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка. Пусть  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  – линейно-независимые частные решения уравнения  $y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$ . Тогда  $y = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$  является общим решением.

## Неоднородные линейные уравнения высших порядков.

### Метод вариации произвольных постоянных

Не ограничивая общности, рассмотрим неоднородное уравнение второго порядка  $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$  (далее - (\*)).

**Теорема 32.** Общее решение (\*) представляется как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:  $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_4(x)$ , где  $c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = \bar{y}$  – общее решение однородного уравнения,  $y_4(x)$  – частное решение (\*).

**Доказательство.** Просто возьмем и подставим  $y(x)$  в уравнение:  $c_1y_1'' + c_2y_2'' + y_4'' + a_1(x)(c_1y_1' + c_2y_2' + y_4') + a_2(x)(c_1y_1 + c_2y_2 + y_4) = c_1(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1) + c_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2) + y_4'' + a_1(x)y_4' + a_2(x)y_4 = f(x)$ . Первые двое слагаемых равны нулю в силу того, что  $y_1, y_2$  – частные решения однородного уравнения. Третье слагаемое является частным решением неоднородного уравнения. Получаем, что это выражение является решением уравнения (\*). Теперь надо сделать, чтобы решалась задача Коши. Пусть  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$ . Тогда  $y(x_0) = c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) + y_4(x_0) = y_0, y'(x_0) = c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) + y_4'(x_0) = y_0'$ . Следовательно,  $\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0 - y_4(x_0) \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y_0' - y_4'(x_0) \end{cases}$ . Выходит, что определитель этой системы  $W(y_1, y_2)(x_0)$  построен на линейно-независимых решениях однородного уравнения и отличен от нуля. Тогда система имеет единственное решение  $c_1, c_2$ .

**Замечание.** Теорема распространяется на случай линейного неоднородного уравнения порядка  $n$ .

### Метод вариации произвольных постоянных

Не ограничивая общности, рассмотрим неоднородное уравнение второго порядка  $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ . Пусть  $\bar{y} = c_1y_1 + c_2y_2$  – общее решение однородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения можно искать в виде  $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$  ( $y_1, y_2$  – линейно-независимые решения однородного уравнения).  $y' = c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2'$ . Потребуем  $c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0$ . Тогда получим  $y' = c_1y_1' + c_2y_2'$ .  $y'' = c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2''$ . Подставим  $y'', y'$  в уравнение. Получаем  $c_1'y_1' + c_1y_1'' + c_2'y_2' + c_2y_2'' + a_1(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + a_2(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = f(x)$ . Выражаем в виде  $c_1(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1) + c_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2) + c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x)$ . Первое и второе слагаемые равны нулю, так что получаем  $c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x)$ . Составим систему  $\begin{cases} c_1y_1 + c_2y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f(x) \end{cases}$ , определитель которой  $W(y_1, y_2)$  в каждой точке  $x$  отличен от нуля. Значит, система имеет единственное решение  $c_1'(x), c_2'(x)$ . После этого интегрируем и получаем  $c_1(x), c_2(x)$ .

Билеты для подготовки к экзамену по математике. Трофимов Владислав  
**Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.**  
**Характеристическое уравнение. Общее решение**

Рассмотрим неоднородное уравнение  $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$ , где  $a_1, \dots, a_n$  – константы. Если  $f(x) = 0$ , то уравнение однородное.

**Однородные уравнения второго порядка**

Рассмотрим однородное уравнение  $y'' + py' + qy = 0$ , где  $p, q$  – константы. Будем искать решение уравнения в виде  $y = e^{kx}$ , где  $k$  – константа. Тогда  $y' = ke^{kx}$ ,  $y'' = k^2 e^{kx}$ . После подстановки в уравнение получим  $k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$ . Сократив, получим  $k^2 + p + q = 0$  – характеристическое уравнение дифференциального уравнения. Если  $k$  – корень этого уравнения, тогда  $y = e^{kx}$  – решение дифференциального. Отдельные случаи:

1.  $k_1 \neq k_2$  – различные действительные корни. Пусть  $y_1 = e^{k_1 x}$ ,  $y_2 = e^{k_2 x}$ . Тогда, если они линейно-зависимы, то  $y_2 = \lambda y_1$ ,  $\lambda = \frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{x(k_2 - k_1)}$ , чего не может быть в силу того, что  $k_1 \neq k_2$ . Следовательно  $y_1, y_2$  линейно-независимы. Тогда общее решение будет выглядеть в виде  $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$ .
2.  $k_1 = k_2$  – действительные корни второй кратности. Пусть  $y_1 = e^{k_1 x}$ ,  $y_2 = e^{k_2 x}$ . Они линейно-зависимы. Покажем, что  $y_2 = x e^{k_1 x}$ . Будем искать второе линейно-независимое решение в виде  $y_2 = U(x) e^{k_1 x}$ .  $y_2' = U'(x) e^{k_1 x} + k_1 U(x) e^{k_1 x}$ ,  $y_2'' = U''(x) e^{k_1 x} + U'(x) k_1 e^{k_1 x} + k_1^2 U(x) e^{k_1 x}$ . Подставим эти два выражения в уравнение:  $U''(x) e^{k_1 x} + 2k_1 U'(x) e^{k_1 x} + k_1^2 U(x) e^{k_1 x} + pU'(x) e^{k_1 x} + pU(x) k_1 e^{k_1 x} + qU(x) e^{k_1 x} = 0$ . После сокращения получим  $U''(x) + (2k_1 + p)U'(x) + (k_1^2 + pk_1 + q)U(x) = 0$ . Второе и третье слагаемые равны нулю, так как  $k_1$  – корень второй кратности. Значит,  $D = 0$ ,  $k_1 = \frac{-p \pm \sqrt{D}}{2} = -\frac{p}{2}$ . Выходит, уравнение преобразуется к виду  $U''(x) = 0$ . Следовательно, После двойного интегрирования,  $U(x) = A(x) + B$ . Так как нам нужно любое частное решение, то можно положить  $B = 0$ ,  $A = 1$ ,  $U(x) = x$ . Тогда  $y_2 = x e^{k_1 x}$  – линейно-независимое решение с  $e^{k_1 x}$ . Общее решение:  $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x}$ .
3.  $k_1, k_2$  – комплексные сопряженные корни. Тогда, воспользовавшись формулой Эйлера, получим, что  $y_1 = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x + i e^{\alpha x} \sin \beta x$ . Аналогично  $y_2 = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) = e^{\alpha x} \cos \beta x - i e^{\alpha x} \sin \beta x$ .

**Теорема 33.** Если  $y = u(x) + iv(x)$  – решение уравнения  $y'' + py' + qy = 0$ , то  $u(x)$  и  $v(x)$  также являются решениями этого уравнения.

**Доказательство.** Просто подставим:  $u'' + iv'' + p(u' + iv') + q(u + iv) = 0$ . Разделим действительную и мнимую части:  $u'' + pu' + qu + i(v'' + pv' + qv) = 0$ . Получаем систему  $\begin{cases} u'' + pu' + qu = 0 \\ v'' + pv' + qv = 0 \end{cases}$ . Следовательно,  $u(x)$  и  $v(x)$  также являются решениями этого уравнения.

В качестве  $u(x)$  возьмем  $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ , а в качестве  $v(x)$  возьмем  $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ . Так как  $\frac{y_1}{y_2} = \cot \beta x \neq 0$ , то  $y_1$  и  $y_2$  линейно-независимы. Тогда общее решение такого уравнения будет находиться в виде  $y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ .

**Замечание.** Обобщается на уравнение с постоянными коэффициентами  $n$ -го порядка.  $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ . Характеристическое уравнение  $k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0 = 0$  имеет ровно  $n$  корней. Кратному действительному корню  $k_1$  кратности  $r$  отвечают  $r$  линейно-независимых функций (решений уравнений).  $y_1 = e^{k_1 x}$ ,  $y_2 = x e^{k_1 x}$ , ...,  $y_r = x^{r-1} e^{k_1 x}$ . Комплексным корням  $\alpha \pm i\beta$  характеристического уравнения кратности  $r$  отвечают  $2r$  линейно-независимых функций (решений уравнений).  $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ ,  $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ ,  $y_3 = x e^{\alpha x} \cos \beta x$ ,  $y_4 = x e^{\alpha x} \sin \beta x$ , ...,  $y_{2n-1} = x^{n-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$ ,  $y_{2n} = x^{n-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$ .

Общее решение дифференциального уравнения  $n$ -го порядка составляется из линейной комбинации его частных линейно-независимых решений.

## Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$  (\*), где  $a_0, \dots, a_{n-1}$  – константы. Общее решение такого уравнения определяется как сумма общего решения однородного линейного уравнения и любого частного решения неоднородного линейного уравнения:  $y = \bar{y} + y^*$ .

Не умоляя общности, рассмотрим уравнение второго порядка.  $y'' + py' + qy = f(x)$  (\*\*). Тогда  $\bar{y} = c_1y_1 + c_2y_2$ , где  $y_1, y_2$  – линейно-независимые частные решения однородного уравнения. Как ищется  $y^*$ :

1. Если  $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$ , где  $P_n(x)$  – конкретный многочлен  $n$ -й степени.

а. Если  $\lambda$  не является корнем характеристического уравнения, то  $y^* = e^{\lambda x} Q_n(x)$ , где  $Q_n(x)$  – многочлен  $n$ -й степени с неопределенными коэффициентами. Сокращаем обе части уравнения (\*\*) на  $e^{\lambda x}$ , после чего получаем линейную систему из  $n + 1$  уравнений, решая которую мы находим все коэффициенты  $Q_n$ .

**Пример.**  $y'' + 3y' - 4y = e^{2x}(x^3 + 1)$ . Характеристическое уравнение:  $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ . Корни  $\lambda = -4; 1$ . 2 не является корнем характеристического уравнения. Следовательно,  $y^* = e^{2x}(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ .

б. Если  $\lambda$  является корнем характеристического уравнения  $r$ -й кратности, то  $y^* = x^r e^{\lambda x} Q_n(x)$ .

2. Если  $f(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x M_m(x) + e^{\alpha x} \sin \beta x N_p(x)$ , где  $M_m$  – многочлен степени  $m$ ,  $N_p(x)$  – многочлен степени  $p$ .

а. Если  $\alpha + i\beta$  не является корнем характеристического уравнения, то  $y^* = e^{\alpha x} \cos \beta x P_n(x) + e^{\alpha x} \sin \beta x Q_n(x)$ , где  $n = \max(m, p)$ , а  $P_n(x)$  и  $Q_n(x)$  – многочлены с неопределенными коэффициентами.

б. Если  $\alpha + i\beta$  является корнем характеристического уравнения  $r$ -й кратности, то  $y^* = x^r (e^{\alpha x} \cos \beta x P_n(x) + e^{\alpha x} \sin \beta x Q_n(x))$ .

**Замечание.** Все эти решения обобщаются и на уравнения  $n$ -го порядка.