## §3. Интегрирование с трехчленом

### П.1. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, a \neq 0$

Интегралы такого вида решаются выделением в знаменателе полного квадрата, а затем применения одной из формул таблицы интегралов.

<u>Пример:</u> $\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+9} =$ по 11 формуле таблицы интегралов $= \frac{1}{3} \operatorname{atan} \frac{x+2}{3} + c.$

<u>Пример:</u> $\int \frac{dx}{x^2-2x-8} = \int \frac{dx}{(x-1)^2-9} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2-9} =$ по 13 формуле таблицы интегралов $= \frac{1}{6} \ln \left|\frac{x+2}{4-x}\right| + c.$

<u>Пример:</u> $\int \frac{dx}{x^2+8x+16} = \int \frac{dx}{(x+4)^2} = \int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2} =$ по 1 формуле таблицы интегралов $= -\frac{1}{x+4} + c.$

### П.2. $\int \frac{Ax+b}{ax^2+bx+c} dx, a \neq 0$

$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} * \int \frac{2ax+b-b}{ax^2+bx+c} dx + \int \frac{Bdx}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} * \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \left(B - \frac{bA}{2a}\right) * \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \ln|ax^2+bx+c| + \left(B - \frac{bA}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$

### П.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Интеграл сводится к выделению под корнем полного квадрата и заменой на интеграл вида $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} (a > 0)$ или $\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} (a < 0)$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}} (a < 0) = \operatorname{asin} \frac{t}{k} + c.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} (a > 0) = \ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm k^2}\right| + c.$

<u>Доказательство.</u> $\left(\mathrm{Ln}\left|t + \sqrt{t^2 \pm k^2}\right| + c\right)' = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}}{t+\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}.$

## §4. Метод интегрирования по частям

$d\big(u(x)v(x)\big) = u'(x)v(x)dx + u(x)v'(x)dx = v(x)du + u(x)dv$. Проинтегрируем обе части: $\int u(x)dv = \int d(uv) - \int v(x)du$. Отсюда $\int u(x)dv = uv - \int v(x)du$. Последнее называется формулой интегрирования по частям.

<u>Пример:</u> $\int x \sin x\, dx = \begin{bmatrix} u=x;\, du=dx \\ dv=\sin x dx;\, v=-\cos x \end{bmatrix} = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \sin x + c$. Общее правило: $\int P_n(x) \begin{matrix} \sin \alpha x \\ (\cos \alpha x) \end{matrix} dx = \begin{bmatrix} u=P_n(x) \\ dv=\begin{matrix} \sin \alpha x \\ (\cos \alpha x) \end{matrix} dx \end{bmatrix}.$

<u>Пример:</u> $\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u=x;\, du=dx \\ dv=e^x dx;\, v=e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$. Общее правило: $\int P_n(x)e^{\alpha x} dx = \begin{bmatrix} u=P_n(x) \\ dv=e^{\alpha x}dx \end{bmatrix}.$

Пример: $\int x\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x;\ du=\frac{dx}{x} \\ dv=xdx;\ v=\frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{xdx}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$. Общее правило: $\int P_n(x)\ln x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x \\ dv=P_n(x)dx \end{bmatrix}$.

Задача на доли: $I = \int e^x \sin x\,dx = \begin{bmatrix} u=e^x;\ du=e^x dx \\ dv=\sin x dx;\ v=-\cos x \end{bmatrix} = -e^x\cos x + \int e^x \cos x\,dx = \begin{bmatrix} u=e^x;\ du=e^x dx \\ dv=\cos x dx;\ v=\sin x \end{bmatrix} = -e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx = -e^x\cos x + e^x\sin x - I$. Отсюда $I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$.

## §5. Интегрирование рациональных дробей

### П.1. Разложение многочлена на множители

Пусть дан многочлен $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n$, где $A_i$ принадлежит множеству комплексных чисел, то есть многочлен принадлежит множеству значений с комплексными коэффициентами ($f(x) \in C[x]$). Аналогично $f(x) \in R[x]$ – с действительными, $f(x) \in Z[x]$ – с целыми. Корнем $f(x)$ называется такое значение $x = x_0$, при котором $f(x_0)$ обращается в ноль.

Пусть в $C[x]$ или $R[x]$ заданы многочлены $Q(x)$ степени $m$ и $f(x)$ степени $n$. Пусть $m \geq n$. Тогда существует такие многочлены $q(x)$ степени $m-n$ и $r(x)$ степени $< n$, что $Q(x) = f(x)q(x) + r(x)$.

Теорема 2 (Безу). При делении многочлена $Q(x)$ на двучлен $x - a$ получается остаток, равный $Q(a)$.

Доказательство. $Q(x) = (x-a)q(x) + r(x)$. При подстановке $x = a$ имеем $(a-a)q(a) = 0$, следовательно, $Q(a) = r(a)$.

Следствие: $x = a$ является корнем $Q(x)$, значит остаток от деления равен нулю.

Определение кратности и корня: $Q(x) \vdots f(x)$, если существует такой многочлен $q(x)$, что $Q(x) = f(x)q(x)$, то есть разделится без остатка. $x = a$ называется корнем многочлена $Q(x)$ тогда и только тогда, когда $Q(x) \vdots (x-a)$. $x = a$ называется корнем кратности $\lambda \in N$ множества $Q(x)$, если $Q(x) \vdots (x-a)^{\lambda}$, но $Q(x)$ не $\vdots$ $(x-a)^{\lambda+1}$. Можно сказать, что условие $r(x) = 0$ – необходимое и достаточное условие того, что $x = a$ – корень многочлена.

Теорема 3 (Следствие из основной теоремы алгебры). Многочлен степени $n$ имеет ровно $n$ комплексных корней. Пусть $Q(x) \in C[x]$ и $x \in C$, а степень $Q(x)$ равна $m$, тогда $Q(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \dots (x-a_n)^{k_n}$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – корни $Q(x)$ с учетом кратности, а $k_1, k_2, \dots, k_n$ – кратности этих корней, $\sum_{i=1}^{n} k_i = m$. Для действительных коэффициентов: $Q(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m$. Доказательство не требуется, но элементарно выводится применением $m$ раз теоремы Безу.

Теорема 4. Пусть $z = a + ib$ – корень многочлена $Q(x) \in R[x]$. Тогда $\bar{z} = a - ib$ – тоже корень $Q(x)$.

Доказательство. $(\bar{z})^k = \overline{(z^k)}$, так как $\bar{z_1} * \bar{z_2} = \overline{z_1 * z_2}$, следовательно, $A_{m-k}\bar{z}^k = \overline{A_{m-k}z^k}$, а так как $\bar{z_1} + \bar{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$, то $Q(\bar{z}) = \overline{Q(z)}$. Пусть $Q(z) = Q(a+ib) = M + iN = 0$ ($z = ai + b$ – корень), тогда $M = 0; N = 0$. $Q(\bar{z}) = Q(a - ib) = \overline{Q(a+ib)} = M - iN = 0$, тогда $M = 0, N = 0$, а, значит, $\bar{z} = a - ib$ – тоже корень $Q(x)$.

Замечание. Пусть $z = a + ib$ – корень кратности $\lambda$ многочлена $Q(x) \in R[x]$. Тогда сопряженный ему корень тоже кратности $\lambda$.

Теорема 5. Пусть дан многочлен $Q(x) \in R[x]$. Тогда $Q(x)$ можно выразить в виде $Q(x) = A_0(x-x_1)^{\lambda_1}(x-x_2)^{\lambda_2} \dots (x-x_n)^{\lambda_n}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1} \dots \left(x^2+p_\rho x+q_\rho\right)^{\mu_\rho}$, где $x_1, \dots, x_n$ – действительные корни $Q(x)$, а для каждого $i$ выражение $x^2+p_ix+q_i$ не имеет действительных корней и соответствует паре сопряженных корней $Q(x)$.

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_n$ – действительные корни $Q(x)$, $z_1 = a_1 + ib_1, \bar{z_1} = a_1 - ib_i, \dots, z_\rho = a_\rho + ib_\rho, \bar{z_\rho} = a_\rho - ib_\rho$ – комплексные корни кратностей $\mu_1, \dots, \mu_\rho$. По теореме 3 $Q(x) = A_0(x-x_1)^{\lambda_1} \dots (x-x_n)^{\lambda_n} * (x-z_1)^{\mu_1}(x-\bar{z_1})^{\mu_1} \dots \left(x-z_\rho\right)^{\mu_\rho}\left(x-\bar{z_\rho}\right)^{\mu_\rho}$. Выражение $\left(x-(a+ib)\right)\left(x-(a-ib)\right) = x^2-2ax+a^2+b^2 = x^2+px+q$ не имеет действительных корней и соответствует паре сопряженных корней $Q(x)$.

## П.2. Дробно-рациональные функции

Рассмотрим выражение $\frac{Q(x)}{f(x)}$, где $Q(x)$ и $f(x)$ – многочлены степеней $m$ и $n$ соответственно. Если $m \geq n$, то такая дробь называется неправильной. Если же $m < n$, то правильной.

Пусть $\frac{Q(x)}{f(x)}$ – неправильная дробь, тогда ее можно выразить в виде $\frac{q(x)f(x)+r(x)}{f(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{f(x)}$, т.е. на многочлен и правильную дробь.

Теорема 6. Любую правильную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей. Простейшие дроби:

1. $\frac{A}{x-a}$.
2. $\frac{A}{(x-a)^k}, k \geq 2$.
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, знаменатель не имеет действительных корней.
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, k \geq 2$, знаменатель не имеет действительных корней.

Пример: $\frac{x^3+3x^2+5x+9}{(x-1)^2(x+2)^3(x^2+4)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{B_3}{(x+2)^3} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+4} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+4)^2} + \frac{P_1x+R_1}{x^2+x+1}$. $A_1 \dots R_1$ – неопределенные коэффициенты, зависящие от числителя дроби. Если привести к общему знаменателю, то получим многочлен, решение которого сводится к решению САУ.