Глава 1. Интегрирование

§1. Первообразная и неопределенный интеграл

П.1. Основные определения

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$. Нам нужно найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$ на $[a;b]$. Функция $F(x)$ будет называться первообразной от функции $f(x)$ на $[a;b]$ при условии что $F'(x) = f(x)$ во всех точках этого отрезка.

Пример: $f(x) = x^3; F(x) = \frac{x^4}{4}$.

<u>Теорема 1.</u> Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные от функции $f(x)$ на $[a;b]$. Тогда $F_1(x) - F_2(x)$ равно некоторому константному значению.

<u>Доказательство.</u> Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные, и $F_1'(x) = f(x), F_2'(x) = f(x)$. Тогда $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$. Пусть $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Тогда $\varphi'(x) = 0$. Покажем, что $\varphi(x)$ – константа на отрезке $[a;b]$. Рассмотрим отрезок $[a;x]$. По теореме Лагранжа существует такое ξ, принадлежащее промежутку $(a;x)$, что $\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(x-a)$. Но $\varphi'(\xi) = 0$. Следовательно, $\varphi(x) - \varphi(a) = 0$, а значит $\varphi(x) = \varphi(a)$ и равно некоторому константному значению. Доказано.

<u>Следствие.</u> Если найдена первообразная, то все остальные отличаются от нее на константу. $F(x) + c$ – семейство первообразных ($c \in R$) (сдвиг графика первообразной по оси ординат).

Если $(F(x)+c)' = f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + c$ – неопределенный интеграл, где $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция. Действия от нахождения первообразной – неопределенное интегрирование. В отличие от производной, интеграл элементарной функции не является элементарной функцией. Первообразную можно найти не для всех функций.

П.2. Свойства неопределенных интегралов

1) $(\int f(x)\,dx)' = (F(x)+c)' = f(x)$.
2) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx = dF$.
3) $\int dF(x) = F(x) + c$.
4) Линейность
   a) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.
   b) $\int \big(f_1(x) + f_2(x)\big)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

<u>Доказательство b.</u> $(\int (f_1(x)+f_2(x))dx)' = f_1(x) + f_2(x) = (\int f_1(x)dx)' + (\int f_2(x)dx)' = (\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx)'$. По первому свойству равны подынтегральные функции, и, следовательно, сами интегралы.

5) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$.

<u>Доказательство.</u> $(\int f(ax+b)dx)' = f(ax+b)$. Тогда $\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+c\right)' = \frac{1}{a}F_y'(y)(ax+b)' = \frac{1}{a}F'(ax+b) * a = f(ax+b)$.

<u>Следствие.</u> $\int f\left(\frac{x}{a}\right)dx = aF\left(\frac{x}{a}\right) + c$.

П.3. Таблица интегралов

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c\,, a \,! = -1.$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$
3. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c.$
4. $\int \cos x\, dx = \sin x + c.$
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c.$
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c.$
7. $\int e^x dx = e^x + c.$
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{atan} x + c.$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{asin} x + c.$

Первые 10 интегралов являются следствиями из таблицы производных. Остальные выводятся.

11. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{atan}\frac{x}{a} + c.$

Доказательство. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$. По следствию пятого свойства и девятому интегралу это равно $\frac{a}{a^2}\operatorname{atan}\frac{x}{a} + c = \frac{1}{a}\operatorname{atan}\frac{x}{a} + c.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{asin}\frac{x}{a} + c.$

Доказательство. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$. По следствию пятого свойства и десятому интеграла это равно $\frac{a}{a}\operatorname{asin}\frac{x}{a} + c = \operatorname{asin}\frac{x}{a} + c.$

13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c.$

Доказательство. $\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{(a-x)(a+x)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$. Следовательно, $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x+a} - \int \frac{dx}{x-a}\right) = \frac{1}{2a}(\ln|x+a| - \ln|x-a|) + \mathrm{c} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c.$

§2. Интегрирование методом замены переменной или подстановкой

Пусть нужно найти интеграл вида $\int f(x)dx$ и пусть этот интеграл существует. Тогда $x = \varphi(t); dx = \varphi'(t)dt; \int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$. Это называется формулой замены переменной для неопределенного интеграла. Рассмотрим интеграл $\int f(\varphi)d\varphi = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$. Тогда $\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int f(\varphi)d\varphi = F\big(\varphi(t)\big) + c.$

Пример: $\int \sqrt{\sin x}\cos x\, dx = \int \sqrt{\sin x}\, d(\sin x) = \int u^{1/2} du = \frac{2u^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + c.$

14. $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(-\cos x)}{-\cos x} = -\ln|\cos x| + c.$
15. $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + c.$

Частные случаи

$$\int af(ax)dx = \int f(ax)d(ax)$$

$$\int f(x+b)dx = \int f(x+b)d(x+b)$$

<u>Пример:</u> $\int \sin(2x+6)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(2x+6)\,d(2x+6) = -\frac{1}{2}\cos(2x+6) + c.$