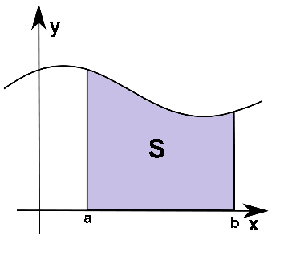
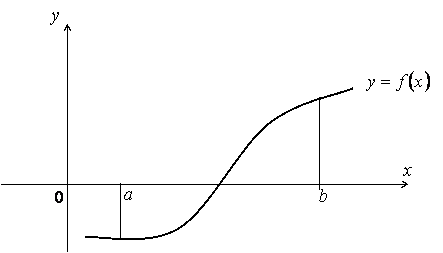
# §15. Вычисление площадей с помощью определенного интеграла

# П.1. Вычисление площадей в декартовых координатах

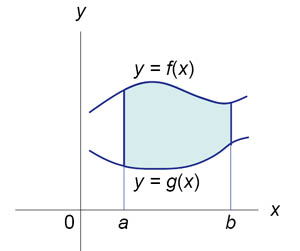
1) непрерывна на . Тогда равен площади криволинейной трапеции.



2) принимает как положительные, так и отрицательные значения и непрерывна на . Тогда .



3) на . Тогда .



4) Кривая задана параметрически . Тогда .

# П.2. Вычисление площадей в полярных координатах

Пусть задает границу криволинейного сектора. Разобьем промежуток на частей: , и в каждом промежутке выберем точку . Тогда – радиус кругового сектора, – размер угла сектора. Площадь фигуры, составленной из получившихся круговых секторов, вычисляется как . При формула сводится к интегральному виду . А площадь отдельно взятого – го кругового сектора будет находиться как .

# http://kurs.ido.tpu.ru/courses/ingmathsem3/tema10/Image7893.gif§16. Вычисление длины дуги

Пусть непрерывна и дифференцируема на и требуется найти длину дуги графика функции. Разобьем на частей: точки будут являться концами соответствующих хорд. В итоге вся дуга разобьется на звеньев. Длина каждого звена будет вычисляться как . Тогда длина всей дуги будет равна сумме длин всех ломаных . При формула сводится к интегральному виду .

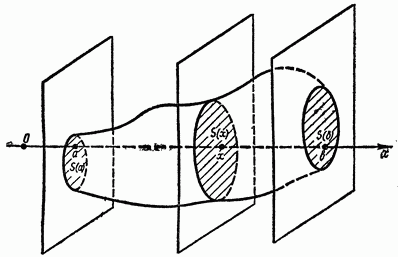
**Замечание.** Длина графика функции существует, если функция непрерывна и дифференцируема. Такие кривые называются спрямляемыми. Если функция только непрерывна, то может возникнуть ситуация неспрямляемой кривой.

Если кривая задана параметрически , то длина дуги вычисляется по формуле .

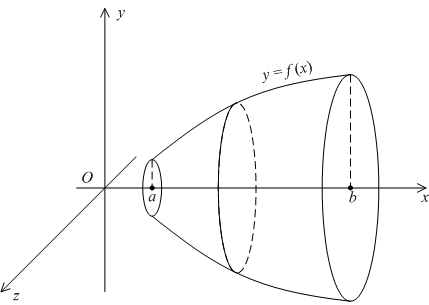
Если кривая задана в полярных координатах, то для вывода формулы выразим декартовы координаты через полярные : . Подставив получившиеся выражения в формулу длины дуги для параметрически заданной функции, получим .

# §17. Объем тела вращения

# П.1. Объем тела через площади поперечного сечения

Пусть есть некоторое тело, которое можно спроектировать на ось . Введем непрерывную функцию , отображающую площадь поперечного сечения в каждой точке . Тогда объем тела можно вычислять как . Разобьем на частей таких, что . На каждом разбиении выберем точку . Тогда – площадь поперечного сечения, – объем цилиндрического тела. Складывая эти объемы, получаем .

# П.1. Объем тела вращения

Пусть есть непрерывная кривая , заданная на . Тогда радиус отдельно взятого поперечного сечения будет равен , а площадь поперечного сечения равна . Тогда объем тела вращения можно вычислять как . Вывод аналогичный.

# Глава 2. Функции нескольких переменных

# §1. Основные понятия

Рассмотрим линейное пространство размерности . Любой элемент может быть представлен как вектор . Их можно складывать, вычитать, умножать на число. Также говорят о расстоянии в линейном пространстве . Введем понятие – мерного шара с центром в точке и радиусом : .

С помощью этих шаром можно ввести понятие внутренней точки области. Пусть – подмножество . Точка называется внутренней точкой множества , если существует такое , что – мерный шар с центром в точке полностью лежит в (). Точка (уже не обязательно лежащей в ) называется граничной точкой множества , если для любого в существуют точки, отличные от , принадлежащие и не принадлежащие в .

Множество называют открытым, если все его точки внутренние.

Множество называют замкнутым, если оно содержит и внутренние, и граничные точки.

Пусть заданы – непрерывные дифференцируемые функции, . Тогда говорят, что эти функции задают в кривую. Кривые задаются неоднозначно.

Множество называется связным, если любые две его точки можно соединить кривой, лежащей в .

Областью в называется открытое связное множество в . Пусть дана точка . Тогда любое открытое множество, содержащее , называется окрестностью этой точки. Шар с центром в точке и радиусом называется – окрестностью точки .

Пусть – область и пусть в задана функция . Эту функцию будет называть функцией нескольких переменный.

Пределом во внутренней точке функции называется , если для любого существует такая – окрестность , что если , то . Функция переводит точку из пространства в пространство .

**Замечание.** Можно показать, что покоординатное стремление равносильно стремлению по метрике . Поэтому можно писать предел в виде .

Если равен значению функции в точке, то непрерывна в этой точке.

Есть две формы записи: и . При выполнении условия в любой из двух форм записи функция будет являться непрерывной. называется приращением функции. Частным приращением функции по называется .

Функция называется непрерывной на множестве , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пусть есть некоторая область . Определим множество ( – граница ), включающее в себя область и ее границу. Такое множество называется замкнутой областью. Если функция непрерывна в замкнутой области, то она достигает на ней своих наибольших и наименьших значений и принимает на этом множестве все промежуточные значения.