# §2. Частные производные. Полный дифференциал

# П.1. Частные производные

Пусть определена в окрестности точки . Частной производной функции в точке называется . Обозначается как . Аналогично определяются частные производные по другим параметрам.

**Пример:** .

# П.2. Полный дифференциал

Пусть имеет частные производные по и в точке и в ее окрестности. Пусть эти частные производные непрерывны. Рассмотрим полное приращение функции . По теореме Лагранжа это равно , где – значение между и , – значение между и . Раз производные существуют и непрерывны в окрестности точки , то можно записать, что , где – бесконечно малые величины при и . Получаем, что . Тогда величина называется полным дифференциалом, а – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем расстояние между точками и . .

# П.2. Производная сложной функции

Пусть и пусть и определены в области . Тогда определена в – образе при отображении и . Пусть – приращение , тогда – приращение и . . При . Частная производная по сложной функции : . Аналогичным образом .

**Замечание.** Пусть . Тогда . Отсюда .

# §3. Производная функции, заданной неявно

– неявное задание .

**Теорема 20.** Пусть определены и непрерывны в области , содержащей точку ,удовлетворяющую уравнению: . Пусть в этой точке , тогда .

**Доказательство.** Зададим приращения так, чтобы они лежали в области и , тогда . , при . Разделим на . . При получим , откуда .

**Замечание.** Теорему можно обобщить на случай функции переменных. – неявное задание . Тогда (при условии, что ).

# §4. Частные производные высших порядков

Частная производная – порядка есть частная производная от производной порядка. Пусть дана . Тогда ее производные второго порядка: . Последние две производные называются смешанными производными.

**Теорема 21.** Пусть определены и непрерывны в точке и ее окрестности. Тогда .

**Доказательство.** Рассмотрим и . Тогда . Так как определена в окрестности точки то дифференцируема на . Следовательно, по теореме Лагранжа, . . По теореме Лагранжа . существует в окрестности точки и . Теперь рассмотрим и . Аналогичный образом получим . Приравняем полученные выражения . При точки . Получаем .

**Замечание.** Теорему можно обобщить на случай функции переменных.