Билеты для подготовки к экзамену по математике

Преподаватель: Норин Александр Владимирович

Подготовил и оформил: Трофимов Владислав

Оглавление

[Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенных интегралов 2](#_Toc358503618)

[Интегрирование методом замены переменной и по частям 3](#_Toc358503622)

[Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители 3](#_Toc358503625)

[Дробно-рациональные функции. Простейшие дроби. Интегрирование дробно-рациональных функций 4](#_Toc358503626)

[Интегралы от иррациональных функций. Подстановки Эйлера 5](#_Toc358503629)

[Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка 5](#_Toc358503633)

[Интегральные суммы Дарбу и Римана. Необходимое и достаточное условие существование интеграла Римана 6](#_Toc358503639)

[Свойства интеграла Римана 6](#_Toc358503642)

[Теорема о среднем 7](#_Toc358503643)

[Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница 8](#_Toc358503644)

[Несобственные интегралы 1-го рода и их свойства 8](#_Toc358503647)

[Абсолютная и условная сходимость 8](#_Toc358503648)

[Несобственные интегралы второго рода и их свойства 9](#_Toc358503651)

[Интеграл Эйлера 10](#_Toc358503652)

[Вычисление площадей в декартовых и полярных координатах 10](#_Toc358503654)

[Вычисление длины дуг 11](#_Toc358503657)

[Вычисление объема тела через площади поперечных сечений. Объем тела вращения 11](#_Toc358503658)

[Пространство . Сходимость в . Функции нескольких переменных. Предел, непрерывность. Свойства непрерывных функций 11](#_Toc358503661)

[Частные производные. Полный дифференциал 12](#_Toc358503662)

[Производные сложных функций и функции, заданной неявно 13](#_Toc358503665)

[Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных 13](#_Toc358503668)

[Производная по направлению. Градиент и его свойства 13](#_Toc358503669)

[Касательная плоскость и нормаль к поверхности 14](#_Toc358503673)

[Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции переменных 15](#_Toc358503674)

[Необходимые и достаточные условия экстремума функции переменных 15](#_Toc358503675)

[Обыкновенные дифференциальные уравнения. Частное и общее решения. Задача Коши. Изоклины. 16](#_Toc358503676)

[Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и с однородной функцией 17](#_Toc358503678)

[Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли 18](#_Toc358503681)

[Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель 18](#_Toc358503684)

[Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка 19](#_Toc358503685)

[Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков. Определитель Вронского и его свойства 19](#_Toc358503688)

[Неоднородные линейные уравнения высших порядков. Метод вариации произвольных постоянных 20](#_Toc358503689)

[Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение 20](#_Toc358503691)

[Линейные неоднородное дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью 21](#_Toc358503693)

# Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенных интегралов

## Основные определения

Пусть функция определена на отрезке . Нам нужно найти такую функцию , что на . Функция будет называться первообразной от функции на при условии что во всех точках этого отрезка.

Пример:

**Теорема 1.** Пусть и – две первообразные от функции на . Тогда равно некоторому константному значению.

**Доказательство.** Пусть и – две первообразные, и . Тогда . Пусть . Тогда . Покажем, что – константа на отрезке . Рассмотрим отрезок . По теореме Лагранжа существует такое , принадлежащее промежутку , что . Но . Следовательно, , а значит и равно некоторому константному значению. Доказано.

**Следствие.** Если найдена первообразная, то все остальные отличаются от нее на константу. – семейство первообразных (сдвиг графика первообразной по оси ординат).

Если , то – неопределенный интеграл, где – подынтегральное выражение, – подынтегральная функция. Действия от нахождения первообразной – неопределенное интегрирование. В отличие от производной, интеграл элементарной функции не является элементарной функцией. Первообразную можно найти не для всех функций.

## Свойства неопределенных интегралов

1. .
2. .
3. .
4. Линейность
   1. .
   2. .

**Доказательство b.** . По первому свойству равны подынтегральные функции, и, следовательно, сами интегралы.

1. .

**Доказательство.** . Тогда .

**Следствие.** .

## Таблица интегралов

1. .
2. .
3. .
4. .
5. .
6. .
7. .
8. .
9. .
10. .

Первые 10 интегралов являются следствиями из таблицы производных. Остальные выводятся.

1. .

**Доказательство.** . По следствию пятого свойства и девятому интегралу это равно .

1. .

**Доказательство.** . По следствию пятого свойства и десятому интеграла это равно .

1. .

**Доказательство.** . Следовательно,

# Интегрирование методом замены переменной и по частям

## Интегрирование методом замены переменной

Пусть нужно найти интеграл вида и пусть этот интеграл существует. Тогда . Это называется формулой замены переменной для неопределенного интеграла. Рассмотрим интеграл . Тогда .

**Пример:** .

.

.

## Интегрирование по частям

. Проинтегрируем обе части: . Отсюда . Последнее называется формулой интегрирования по частям.

**Пример:** . Общее правило: .

**Пример:** . Общее правило: .

**Пример:** . Общее правило: .

**Задача на доли:** . Отсюда .

# Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители

Пусть дан многочлен , где принадлежит множеству комплексных чисел, то есть многочлен принадлежит множеству значений с комплексными коэффициентами (). Аналогично – с действительными, – с целыми. Корнем называется такое значение , при котором обращается в ноль.

Пусть в или заданы многочлены степени и степени . Пусть . Тогда существует такие многочлены степени и степени , что .

**Теорема 2 (Безу).** При делении многочлена на двучлен получается остаток, равный .

**Доказательство.** . При подстановке имеем , следовательно, .

**Следствие:** является корнем , значит остаток от деления равен нулю.

Определение кратности и корня: , если существует такой многочлен , что , то есть разделится без остатка. называется корнем многочлена тогда и только тогда, когда . называется корнем кратности множества , если , но не . Можно сказать, что условие – необходимое и достаточное условие того, что – корень многочлена.

**Теорема 3 (Следствие из основной теоремы алгебры).** Многочлен степени имеет ровно комплексных корней. Пусть и , а степень равна , тогда , где – корни с учетом кратности, а – кратности этих корней, . Для действительных коэффициентов: . Доказательство не требуется, но элементарно выводится применением раз теоремы Безу.

**Теорема 4.** Пусть – корень многочлена . Тогда – тоже корень .

**Доказательство.** , так как , следовательно, , а так как , то . Пусть ( – корень), тогда . , тогда , а, значит, – тоже корень .

**Замечание.** Пусть – корень кратности многочлена . Тогда сопряженный ему корень тоже кратности .

**Теорема 5.** Пусть дан многочлен . Тогда можно выразить в виде , где – действительные корни , а для каждого выражение не имеет действительных корней и соответствует паре сопряженных корней .

**Доказательство.** Пусть – действительные корни , – комплексные корни кратностей . По теореме 3 . Выражение не имеет действительных корней и соответствует паре сопряженных корней .

# Дробно-рациональные функции. Простейшие дроби. Интегрирование дробно-рациональных функций

## Дробно-рациональные функции. Простейшие дроби

Рассмотрим выражение , где и – многочлены степеней и соответственно. Если , то такая дробь называется неправильной. Если же , то правильной.

Пусть – неправильная дробь, тогда ее можно выразить в виде , т.е. на многочлен и правильную дробь.

**Теорема 6.** Любую правильную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей. Простейшие дроби:

1. .
2. .
3. знаменатель не имеет действительных корней.
4. , знаменатель не имеет действительных корней.

Пример: . – неопределенные коэффициенты, зависящие от числителя дроби. Если привести к общему знаменателю, то получим многочлен, решение которого сводится к решению САУ.

## Интегрирование простейших дробей

* + - 1. .
      2. , .
      3. .
      4. где .

Вывод рекуррентной формулы: . Поставим в исходное выражение: . Отсюда .

# Интегралы от иррациональных функций. Подстановки Эйлера

## 

Пусть – общий знаменатель дробей , т.е. НОК . Выполним замену . Все показатели целые; .

**Пример.** .

**Замечание.** Аналогичным образом берется интеграл вида с помощью подстановки = НОК.

## 

Решаются одной из подстановок Эйлера:

1. . Используется при .
2. . Используется при .
3. . Используется когда подкоренное выражение имеет два действительных корня, один из которых .

## Интегрирование дифференциальных биномов

Выражение вида , где – рациональные числа, и – постоянные, называется дифференциальным биномом. Не всегда интеграл дифференциального бинома можно свести к дифференциальной рациональной функции.

**Теорема 7 (Чебышева).** сводится к интегралу от рациональных функций, если:

1. – целое число (сводится к пункту 1).
2. – целое число (сводится к пункту 1).
3. – целое число.

# Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка

## 

– универсальная тригонометрическая подстановка. . Аналогично .

**Пример.** .

## 

Интеграл рационализуется .

**Пример.** .

**Замечание.** .

## 

**Пример.** .

## 

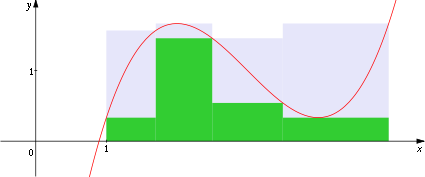
.

## Интегрирование функций, не выражающихся через элементарные функции

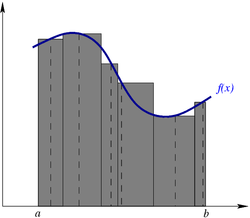
1. – интегральная экспонента.
2. – интегральный логарифм.
3. – интегральный синус.
4. – интегральный косинус.
5. – интеграл от функции Гаусса, интеграл Пуассона.

# Интегральные суммы Дарбу и Римана. Необходимое и достаточное условие существование интеграла Римана

## Интегральные суммы Дарбу

Пусть на отрезке задана некая непрерывная функция . Разобьем отрезок на частей таких, что . Введем обозначения на отрезке , на отрезке и . Тогда можно ввести понятия верхней и нижней суммы Дарбу: – верхняя сумма Дарбу (на рисунке изображена серым, равна площади описанной ступенчатой фигуры), – нижняя сумма Дарбу (на рисунке изображена зеленым, равна площади вписанной ступенчатой фигуры). При этом всегда выполняется неравенство .

## Интегральные суммы Римана. Определенный интеграл

Пусть на отрезке задана некая функция . Разобьем отрезок на частей таких, что . Введем обозначение . Выберем точки , тогда будет соответствовать площади -го прямоугольника. А выражение будет называться интегральной суммой Римана для на отрезке и равно площади ступенчатой фигуры на этом отрезке.

Если при любых разбиениях отрезка таких, что максимальная длина разбитого отрезка стремится к нулю (при любом выборе ) и сумма стремится к одному и тому же пределу, то говорят, что функция интегрируема на этом отрезке, а предел называется определенным интегралом. . Если функция непрерывна на , то она интегрируема на .

**Замечание.** , т.к. для любого выполняется .

**Теорема 8.** Для существования интеграла функции на отрезке необходимо и достаточно, чтобы предел существовал и был равен нулю.

**Замечание.** Определенный интеграл – площадь криволинейной трапеции под графиком функции .

# Свойства интеграла Римана

1. Линейность
   1. .
   2. =.
2. **Теорема 9 (о знаке интеграла).** Пусть некая функция на отрезке и пусть существует интеграл . Тогда .

**Доказательство.** . , так как , так как . Выходит, , и, следовательно, .

**Следствие.** Пусть на отрезке и существуют интегралы . Тогда . Для доказательства достаточно рассмотреть интеграл разности этих функций.

1. . (во втором случае ).

**Следствие.** .

1. **Теорема 10 (о разбиении промежутка интегрирования).** Пусть некий отрезок разбит на отрезки и . Тогда .

**Доказательство.** Такое разбиение подразумевает, что точка является точкой деления. Тогда (до ) + (после ). Таким образом, при выполняется .

1. Оценка определенного интеграла. Пусть на некотором отрезке выполняется неравенство , где на отрезке , на отрезке . Тогда .

**Доказательство.** . Первая и последняя части соответственно равны и . Средняя же часть равна определенному интегралу.

**Замечание.** .

**Следствие.** Пусть некоторая функция на отрезке по модулю не превосходит . Тогда .

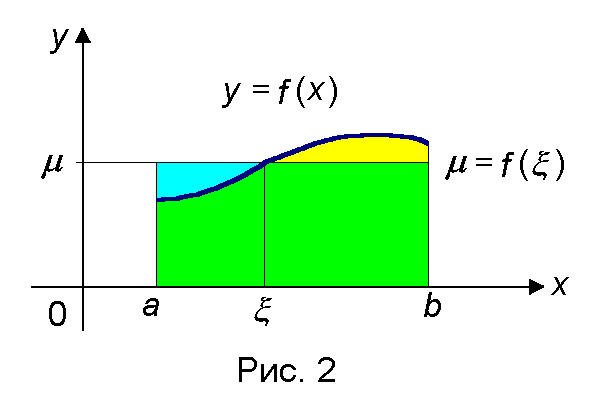
1. **Теорема 11 (неравенство Коши-Буняковского).** Пусть некоторая функция на отрезке является произведением двух других функций и и существуют интегралы . Тогда выполняется неравенство .

**Доказательство.** Рассмотрим интеграл . Представим его в виде . Так как это выражение является квадратным трехчленом, то оно имеет не более одного корня, а значит , , ее можно опустить. Тогда получаем .

**Замечание.** Рассмотрим непрерывное множество функций на отрезке . По определению, скалярное произведение двух кусочно-непрерывных на отрезке функций равно интегралу Величину , равную будем называть нормой функции . Тогда для двух функций и из множества будет выполняться равенство . Это другая форма записи неравенства Коши-Буняковского.

# Теорема о среднем

**Теорема 12 (о среднем).** Пусть некоторая функция непрерывна на отрезке . Тогда существует такая точка , что .

**Доказательство.** принимает на отрезке все значения между и . И . Следовательно, . А значит, найдется такая точка , что . обобщает среднее значение последовательности .

Геометрический смысл теоремы о среднем: . В правой части выражения записана площадь криволинейной трапеции, которая равна площади прямоугольника, площадь которого записана в левой части выражения.

# Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница

## Производная интеграла по верхнему пределу

Пусть некоторая функция непрерывна на отрезке . Рассмотрим интеграл , где , причем будет функцией от .

**Теорема 13.** .

**Доказательство.** Возьмем за . Тогда = (по теореме о среднем) = . Тогда . Следовательно, существует такой .

**Следствие.** .

## Формула Ньютона-Лейбница

**Теорема 14.** Пусть некая функция непрерывна на отрезке и пусть – первообразная от . Тогда интеграл .

**Доказательство.** По теореме о производной интеграла по верхнему пределу , – первообразная от . . Тогда , а, следовательно, .

# Несобственные интегралы 1-го рода и их свойства

Пусть некая функция непрерывна на промежутке , где – некоторое конечное число. Возьмем некоторое число и рассмотрим интеграл , который обозначим . Так как функция непрерывна, то этот интеграл существует, обычный интеграл Римана. А теперь узнаем, как ведет себя когда . Оказывается, что если существует конечный предел , то этот предел называется несобственным интегралом первого рода функции , и обозначается следующим образом: . Если этот предел существует, то говорят о существовании, или сходимости, несобственного интеграла. Если же не существует, то говорят о том, что несобственный интеграл не сходится, или не существует.

Геометрический смысл несобственного интеграла:

Площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции.

Аналогичным образом определяется . А в случае, когда оба предела интегрирования – бесконечности, можно взять некоторую точку и рассмотреть два интеграла: и . Тогда, если эти интегралы существуют, то интеграл равен сумме этих интегралов: .

**Пример:** .

# Абсолютная и условная сходимость

## Признаки сравнения

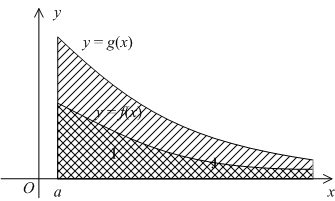
**Теорема 15.** Рассмотри интеграл , где . Этот интеграл сходится при и расходится при .

**Доказательство.** Пусть . Тогда . Пусть . Тогда .

**Теорема 16 (Сравнение несобственных интегралов 1 рода).** Пусть на интервале . Тогда:

1. Если сходится, то сходится.
2. Если расходится, то расходится.

**Доказательство.** Рассмотрим доказательства для обоих случаев:

1. Пусть существует предел . Но по свойству определенных интегралов . Рассмотри функцию . Эта функция возрастающая и ограничена сверху. Следовательно, существует ее предел , т.е. интеграл сходится.
2. От противного: Пусть расходится и сходится. Тогда, по первому пункту доказательства сходится. Противоречие. Следовательно, расходится.

Геометрический смысл теоремы: площадь криволинейной трапеции, ограниченной меньшей функцией, имеющей предел на , меньше площади криволинейной трапеции, ограниченной большей функцией, имеющей предел на .

**Теорема 17 (признак сходимости неопределенных интегралов первого рода).** Пусть определена на интервале , где и . Тогда, если

1. Если существуют такие , что , то интеграл сходится.
2. Если существуют такие , что , то интеграл расходится.

**Доказательство.** Очевидно. Вытекает из теорем 15 и 16.

**Пример:** Рассмотрим интеграл . . Но сходится. Следовательно, и исходный интеграл сходится.

## Абсолютная и исходная сходимости

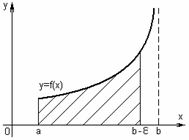
**Теорема 18.** Пусть непрерывна на интервале . Тогда, если сходится интеграл , то сходится и интеграл .

**Доказательство.** Рассмотрим функции и , где . Следовательно, и . Если их сложить, получим: и . Рассмотрим интеграл . Значит, так как существует предел , то должны существовать и пределы , так как в противном случае не существовал бы . Теперь распишем интеграл . Аналогично, интеграл левой части существует, так как существуют оба интеграла из правой части. Следовательно, существует и , то есть интеграл сходится.

**Замечание.** Утверждение, обратное теореме, неверно. Если сходится интеграл , то говорят, что этот интеграл сходится абсолютно. Если же интеграл не сходится, а сходится, то говорят, что этот интеграл сходится условно.

**Пример:** сходится абсолютно. Рассмотрим интеграл . , а интеграл сходится.

# Несобственные интегралы второго рода и их свойства

Пусть функция задана на некотором интервале . Пусть в точке функция имеет бесконечный разрыв, т.е. . Рассмотрим интеграл . Этот интеграл существует, так как функция непрерывна. Тогда рассмотрим предел . Если этот предел существует, то говорят, что несобственный интеграл второго рода существует и сходится: . Если этот предел не существует, то говорят, что несобственный интеграл не существует или расходится. Точку называют особой точкой функции .

**Замечание.** Аналогичным образом определяется несобственный интеграл второго рода, где специальной точкой является точка .

Пусть точка является внутренней точкой интервала и пусть эта точка является особой точкой функции , т.е. и . Если существуют пределы и , то говорят, что несобственный интеграл с особой точкой сходится: . Иначе же говорят о расходимости, или несуществовании несобственного интеграла второго рода с особой точкой . Если же в пределах и будут равны, то говорят о существовании несобственного интеграла в смысле главного значения : .

**Примеры:** .

.

**Теорема 19 (признак сходимости и расходимости интегралов 2 рода).** Пусть непрерывна на интервале и – особая точка . Тогда:

1. Если существуют такие и , что для любого из исходного интервала выполняется неравенство , то интеграл сходится.
2. Если существуют такие и , что для любого из исходного интервала выполняется неравенство , то интеграл расходится.

**Доказательство.** Можно произвести замену переменной и свести к несобственному интегралу первого рода, для которого признак доказан.

**Замечание.** Заменой переменной несобственный интеграл второго рода можно свести к интегралу первого рода и наоборот. В силу этого для интегралов второго рода выполняются признаки сравнения.

# Интеграл Эйлера

## Некоторые часто встречающиеся несобственные интегралы

1. Интеграл Эйлера . Особая точка . Выполним замену . Получаем . Следовательно, .
2. Интеграл Пуассона .
3. Интеграл Дирихле .

# Вычисление площадей в декартовых и полярных координатах

## http://www.kvadromir.com/math/int/47.gifhttp://edu.glavsprav.ru/_static/info/opredelennyj-integral.pnghttp://www.math24.ru/images/defint2.jpgВычисление площадей в декартовых координатах

1. непрерывна на . Тогда равен площади криволинейной трапеции.
2. принимает как положительные, так и отрицательные значения и непрерывна на . Тогда .
3. на . Тогда .
4. Кривая задана параметрически . Тогда .

## Вычисление площадей в полярных координатах

Пусть задает границу криволинейного сектора. Разобьем промежуток на частей: , и в каждом промежутке выберем точку . Тогда – радиус кругового сектора, – размер угла сектора. Площадь фигуры, составленной из получившихся круговых секторов, вычисляется как . При формула сводится к интегральному виду . А площадь отдельно взятого – го кругового сектора будет находиться как .

# Вычисление длины дугhttp://kurs.ido.tpu.ru/courses/ingmathsem3/tema10/Image7893.gif

Пусть непрерывна и дифференцируема на и требуется найти длину дуги графика функции. Разобьем на частей: точки будут являться концами соответствующих хорд. В итоге вся дуга разобьется на звеньев. Длина каждого звена будет вычисляться как . Тогда длина всей дуги будет равна сумме длин всех ломаных . При формула сводится к интегральному виду .

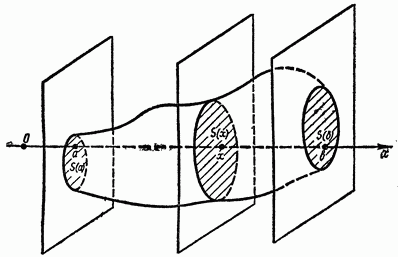
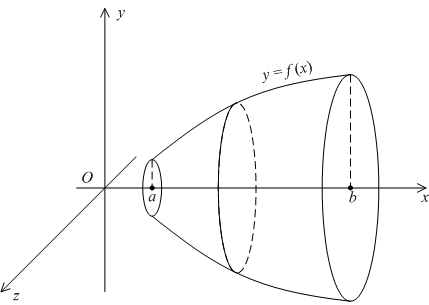
**Замечание.** Длина графика функции существует, если функция непрерывна и дифференцируема. Такие кривые называются спрямляемыми. Если функция только непрерывна, то может возникнуть ситуация неспрямляемой кривой.

Если кривая задана параметрически , то длина дуги вычисляется по формуле .

Если кривая задана в полярных координатах, то для вывода формулы выразим декартовы координаты через полярные : . Подставив получившиеся выражения в формулу длины дуги для параметрически заданной функции, получим .

# Вычисление объема тела через площади поперечных сечений. Объем тела вращения

## Объем тела через площади поперечного сечения

Пусть есть некоторое тело, которое можно спроектировать на ось . Введем непрерывную функцию , отображающую площадь поперечного сечения в каждой точке . Тогда объем тела можно вычислять как . Разобьем на частей таких, что . На каждом разбиении выберем точку . Тогда – площадь поперечного сечения, – объем цилиндрического тела. Складывая эти объемы, получаем .

## Объем тела вращения

Пусть есть непрерывная кривая , заданная на . Тогда радиус отдельно взятого поперечного сечения будет равен , а площадь поперечного сечения равна . Тогда объем тела вращения можно вычислять как . Вывод аналогичный.

# Пространство . Сходимость в . Функции нескольких переменных. Предел, непрерывность. Свойства непрерывных функций

Рассмотрим линейное пространство размерности . Любой элемент может быть представлен как вектор . Их можно складывать, вычитать, умножать на число. Также говорят о расстоянии в линейном пространстве . Введем понятие – мерного шара с центром в точке и радиусом : .

С помощью этих шаром можно ввести понятие внутренней точки области. Пусть – подмножество . Точка называется внутренней точкой множества , если существует такое , что – мерный шар с центром в точке полностью лежит в (). Точка (уже не обязательно лежащей в ) называется граничной точкой множества , если для любого в существуют точки, отличные от , принадлежащие и не принадлежащие в .

Множество называют открытым, если все его точки внутренние.

Множество называют замкнутым, если оно содержит и внутренние, и граничные точки.

Пусть заданы – непрерывные дифференцируемые функции, . Тогда говорят, что эти функции задают в кривую. Кривые задаются неоднозначно.

Множество называется связным, если любые две его точки можно соединить кривой, лежащей в .

Областью в называется открытое связное множество в . Пусть дана точка . Тогда любое открытое множество, содержащее , называется окрестностью этой точки. Шар с центром в точке и радиусом называется – окрестностью точки .

Пусть – область и пусть в задана функция . Эту функцию будет называть функцией нескольких переменный.

Пределом во внутренней точке функции называется , если для любого существует такая – окрестность , что если , то . Функция переводит точку из пространства в пространство .

**Замечание.** Можно показать, что покоординатное стремление равносильно стремлению по метрике . Поэтому можно писать предел в виде .

Если равен значению функции в точке, то непрерывна в этой точке.

Есть две формы записи: и . При выполнении условия в любой из двух форм записи функция будет являться непрерывной. называется приращением функции. Частным приращением функции по называется .

Функция называется непрерывной на множестве , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пусть есть некоторая область . Определим множество ( – граница ), включающее в себя область и ее границу. Такое множество называется замкнутой областью. Если функция непрерывна в замкнутой области, то она достигает на ней своих наибольших и наименьших значений и принимает на этом множестве все промежуточные значения.

# Частные производные. Полный дифференциал

## Частные производные

Пусть определена в окрестности точки . Частной производной функции в точке называется . Обозначается как . Аналогично определяются частные производные по другим параметрам.

**Пример:** .

## Полный дифференциал

Пусть имеет частные производные по и в точке и в ее окрестности. Пусть эти частные производные непрерывны. Рассмотрим полное приращение функции . По теореме Лагранжа это равно , где – значение между и , – значение между и . Раз производные существуют и непрерывны в окрестности точки , то можно записать, что , где – бесконечно малые величины при и . Получаем, что . Тогда величина называется полным дифференциалом, а – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем расстояние между точками и . .

# Производные сложных функций и функции, заданной неявно

## Производная сложной функции

Пусть и пусть и определены в области . Тогда определена в – образе при отображении и . Пусть – приращение , тогда – приращение и . . При . Частная производная по сложной функции : . Аналогичным образом .

**Замечание.** Пусть . Тогда . Отсюда .

## Производная функции, заданной неявно

– неявное задание .

**Теорема 20.** Пусть определены и непрерывны в области , содержащей точку ,удовлетворяющую уравнению: . Пусть в этой точке , тогда .

**Доказательство.** Зададим приращения так, чтобы они лежали в области и , тогда . , при . Разделим на . . При получим , откуда .

**Замечание.** Теорему можно обобщить на случай функции переменных. – неявное задание . Тогда (при условии, что ).

# Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных

Частная производная – порядка есть частная производная от производной порядка. Пусть дана . Тогда ее производные второго порядка: . Последние две производные называются смешанными производными.

**Теорема 21.** Пусть определены и непрерывны в точке и ее окрестности. Тогда .

**Доказательство.** Рассмотрим и . Тогда . Так как определена в окрестности точки то дифференцируема на . Следовательно, по теореме Лагранжа, . . По теореме Лагранжа . существует в окрестности точки и . Теперь рассмотрим и . Аналогичный образом получим . Приравняем полученные выражения . При точки . Получаем .

**Замечание.** Теорему можно обобщить на случай функции переменных.

# Производная по направлению. Градиент и его свойства

## Поверхности уровня. Линии уровня

Пусть в задана . Множество точек из таких, что называется поверхностями уровня.

**Пример:** .

Аналогично определяются линии уровня .

## Производная по направлению

Пусть есть функция , определенная в области и пусть есть точка . Из точки проведем вектор ( – приращения относительно точки ) с направляющими . Тогда длина вектора будет определяться как , а направляющие косинусы . Тогда . Производной по направлению называется .

**Замечание.** Частные производные по тоже являются производными по направлению.

## Градиент и его свойства

Пусть определена в и пусть точка . Пусть существуют . Тогда градиентом функции в точке называют вектор . Если определить градиент в каждой точке поля, то говорят о поле градиентов.

Пусть у существуют в частные производные. Тогда функции в каждой точке можно сопоставить ее градиент.

**Теорема 22.** – проекция на в каждой точке.

**Доказательство.** проекция на равна .

Свойства градиента:

1. принимает наибольшее значение в точке, если сонаправлен и .

**Доказательство.** – проекция на . принимает максимум, если они сонаправлены.

1. , .
2. **Теорема 23.** Пусть задана в и пусть – точка, лежащая на поверхности уровня, и пусть существует частная производная, и пусть в точке . Тогда градиент перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через точку .

**Доказательство.** Пусть лежит на той же поверхности уровня, что и , т.е. . Тогда , т.е. . Разделим на : . Очевидно, что – единичный вектор, выходящий из точки на поверхности уровня. – единичный вектор, касательный к поверхности в точке . , откуда следует, что градиент перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через точку .

# Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть определена в и точка , лежащая на поверхности. Пусть существуют частные производные в точке и градиент в этой точке ненулевой. Пусть – некоторая кривая на поверхности, проходящая через точку . задается параметрически задается параметрически . Пусть существуют . Тогда вектор будет являться касательным к в точке . . Рассмотрим точку , которая тоже будет лежать на поверхности уровня. Тогда . Значит, . Следовательно, градиент перпендикулярен произвольному вектору касательной в точке . Следовательно, все касательные вектора лежат в одной плоскости и градиент в этой точке перпендикулярен касательной плоскости в этой же точке.

Уравнение касательной плоскости: , или же .

Нормаль к поверхности – нормаль к касательной плоскости. Уравнение нормали к поверхности: .

# Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции переменных

Производная второго порядка функции двух переменных есть . Аналогично определяется производная – го порядка . Точно таким же образом определяется дифференциал – го порядка функции . По определению это есть , где . Пусть есть некая функция от двух переменных . Тогда . Дифференциал зависит от четырех переменных – точки , от последних двух зависит линейно. Тогда дифференциал второго порядка есть . Таким образом, дифференциал второго порядка есть , а дифференциал – го порядка есть . Рассмотрим функцию , у которой существуют частные производные – го порядка в окрестности точки в окрестности точки . Тогда имеет место выражение , где , которое и называется формулой Тейлора. Пояснение: – бесконечно малая функция, а – бесконечно большая более высокого порядка, остаточный член формулы Тейлора. Аналогичная формула для одной переменной была в первом семестре.

# Необходимые и достаточные условия экстремума функции переменных

Пусть некая функция определена в окрестности точки и имеет частные производные 1-го порядка. Говорят, что функция имеет локальный максимум в точке , если существует такая окрестность точки , что для любого и этой окрестности выполняется неравенство . Аналогичным образом определяется локальный минимум. Точки локального минимума и максимума называются точками экстремума.

**Теорема 24.** Пусть точка – точка экстремума. Тогда частные производные (если они существуют) и равны нулю.

**Доказательство.** Пусть точка – точка максимума (аналогичные рассуждения можно вести для точки минимума) функции . Тогда по определению существует такая окрестность точки , что . Так как фиксировано, то это функция одной переменной, и, следовательно, частная производная по обращается в ноль . Это является необходимым условием существования экстремума для функции одной переменной (также существование производной в этой точке). Аналогичным образом частная производная по обращается в ноль . Точки, в которых производная обращается в ноль, называются стационарными точками.

**Замечание.** Обращение частных производных в ноль является необходимым, но не достаточным условием существования точки экстремума. Пример: . Точка не принимает экстермальное значение, хотя частные производные в этой точке равны нулю .

**Теорема 25.** Достаточные условия экстремума. Пусть некая функция имеет частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки . Пусть . Если:

1. и , то точка – точка минимума.
2. и , то точка – точка максимума.
3. , то точка не является точкой экстремума.
4. , то требуется дополнительное исследование.

**Доказательство.** Воспользуемся формулой Тейлора. Пусть есть функция двух переменных , где . Так как в точке производная обращается в ноль , то приращение функции есть второй дифференциал, деленный на : . Перепишем в виде . Теперь перейдем к полярным координатам , и выражение заменим на , которое будет малой величиной, так как . Тогда наше выражение примет вид . Теперь выражение в скобках домножим и разделим на , а также в числителе прибавим и вычтем для выделения полного квадрата: , где , что все равно является малой величиной. Теперь рассмотрим четыре возможных случая:

1. и . В этом случае весь числитель нашего выражение будет положителен. (В некоторой окрестности точки будет выполняться неравенство , так как последнее является бесконечно малой величиной). Знаменатель также положителен. Отсюда следует, что , а значит, точка является точкой минимума.
2. и . Числитель так же положителен, но вот знаменатель отрицателен. (В некоторой окрестности точки будет выполняться неравенство , так как последнее является бесконечно малой величиной). Отсюда следует, что , а значит, точка является точкой максимума.
3. и . Если мы возьмем , т.е. (приравняем к нулю второе слагаемое числителя), то, рассуждая аналогично предыдущим пунктам, получим что в некоторой окрестности точки . А если теперь мы приравняем к нулю первое слагаемое числителя, , то . Как видим, у нас есть направление угла, по которому функция возрастает, и направление угла, по которому функция убывает. Следовательно, экстремума нет, точка является седловой точкой.
4. . Тогда для (первое слагаемое обращается в ноль) выражение примет вид . В этом случае все будет определяться знаком , а для выяснения этого требуется дополнительно исследование.

**Замечание.** Теорему можно обобщить на переменных. Знак приращения определяется прежде всего вторым дифференциалом, а все частные производные содержатся в матрице Гессе, именуемой квадратичной формой. Если она определена и положительна, тогда максимум, отрицательная – минимум, если ноль, то нет экстремума, а если положительна и отрицательна по различным направлениям, то это седловая точка и требуется дополнительно исследование.

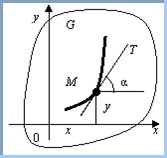
# Обыкновенные дифференциальные уравнения. Частное и общее решения. Задача Коши. Изоклины.

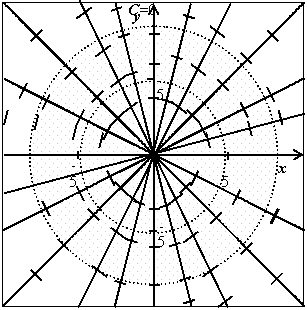
Уравнение вида называется дифференциальным. Причем порядок старшей производной этого уравнения будет называться порядком этого уравнения. Пример: – дифференциальное уравнение второго порядка.

Частным решением дифференциального уравнения называется любая функция , подстановка которой обращает выражение в верное тождество. Пример: – частные решения этого уравнения. Таких решений может быть несколько.

Общим решением дифференциального уравнения называется такое , если оно является частным решением уравнения при всех допустимых значениях констант , а также если для любого частного решения существуют такие константы , что , то есть если всегда можно подобрать константы для получения решения.

## Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Уравнение вида называется разрешенным относительно старшей производной. Пример: . К такому виду дифференциальное уравнение можно привести не всегда.

Геометрический смысл: если функция задана в подобном виде, то в каждой точке некоторой области, на которой определена эта функция, мы можем вычислить ее производную, то есть тангенс угла наклона касательной. Если есть частное решение , то его график называется интегральной кривой. Пусть определена в некоторой области . Она задает значение в каждой точке. Тогда в каждой точке области будет задан вектор, касательный к интегральной кривой. Тогда, построив эти вектора, можно будет нарисовать интегральную кривую. задает в касательные векторы к интегральным кривым. Линии уровня вида называются изоклинами. Пример: . – изоклины. . Пусть . Тогда , то есть линии уровня представляют собой прямые. Если , то . Если , то . Если , то . Если соединить все получившиеся касательные к интегральным кривым, то получатся окружности. Интегральные кривые представляют собой множество окружностей.

Задача Коши: пусть есть уравнение и точка , принадлежащая , а также значение функции в точке : . Последнее условие называется начальным условием. Задача состоит в следующем: требуется найти решение дифференциального уравнения , которое удовлетворяло бы начальному условию (поиск такой интегральной кривой, которая бы проходила через точку ).

Оказывается, если функция непрерывна в и частная производная непрерывна в , то для любой точки существует единственная функция , являющаяся решением , которая удовлетворяет начальному условию, т.е. решает задачу Коши, и для которой в некоторой окрестности точки значения лежат в области . (При выполнении условий через некоторую точку области проходит единственная интегральная кривая, которая хотя бы в окрестности этой точки будет лежать в области ).

# Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и с однородной функцией

## Уравнения с разделяющимися переменными

Так как , то . Пусть есть функция . Ее можно расписать как . Уравнение вида называется уравнением с разделяющимися переменными (их можно разделить), а уравнение вида называется уравнением с разделенными переменными , где и – первообразные от и . Получится, что можно проинтегрировать: . Почти все решения дифференциальных уравнений сводятся к подобному разделению.

В частности, – обычный вид уравнения с разделяющимися переменными. Можно привести к уравнению с разделенными: .

## Уравнения с однородной функцией

Функция называется однородной функцией – го измерения, если .

**Пример:** – однородная функция второго измерения.

В частности, если , то – однородная функция нулевого измерения.

**Замечание.** Если и – однородные функции – го измерения, то – однородная функция нулевого измерения.

Если , где – однородная функция нулевого измерения, то называется дифференциальным уравнением первого порядка с однородной функцией.

**Замечание.** Если , где – однородные функции – го измерения, то такое уравнение будет называться дифференциальным уравнением с однородной функцией.

Принцип решения: делается замена . Получаем .

**Пример:** . Последнее называется общим интегралом.

# Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли

## Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида называется линейным дифференциальным уравнением. Если , то уравнение будет однородным. Если , то будет неоднородным. Оказывается, что однородное линейное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными: разделим и проинтегрируем . Последнее является общим решением линейного дифференциального уравнения.

Решение уравнений вида .

1. Решение однородного уравнения . . Последнее является общим решением однородного уравнения. Тогда частным решением при будет являться .
2. Решение неоднородного уравнения будем искать в виде , где – частное решение однородного уравнения. Подставим в уравнение: . Второе и третье слагаемые в сумме равны нулю, т.к. – частное решение однородного уравнения. Отсюда получаем . Получается, что общее решение неоднородного уравнения будет иметь вид .

**Пример:** . Однородное: – общее решение. Тогда – частное решение. Неоднородное: . Подставим . При решении данным методом обязательно должны сократиться слагаемые, содержащие . В противном случае было неверно найдено общее решение однородного уравнения. – общее решение неоднородного уравнения.

## Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида , где (потому что в противном случае получим линейное однородное уравнение). Будем решать это уравнение методом Бернулли. Искать решение будем в виде . Подставим в исходное уравнение. . Потребуем . Тогда – частное решение. .

# Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Уравнение вида , если , называется уравнением в полных дифференциалах, т.е. если . Если , то . Последнее называется общим интегралом.

**Теорема 26.** является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда .

**Доказательство.** Пусть есть уравнение в полных дифференциалах, т.е. существует такая функция , что . Тогда .

**Замечание.** Пусть функции и дважды дифференцируемые функции. не всегда является уравнением в полных дифференциалах, но всегда существует интегрирующий множитель такой, что будет являться уравнением в полных дифференциалах.

# Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

## 

Замена . Уравнение приводится к уравнению первого порядка .

**Пример:** . Не забывайте про вторую константу.

## 

Замена . Уравнение приводится к уравнению первого порядка .

# Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков. Определитель Вронского и его свойства

Уравнение вида , где , называется линейным дифференциальным уравнением – го порядка. Если , то оно будет являться линейным однородным дифференциальным уравнением.

Не умоляя общности, будем рассматривать уравнения второго порядка .

**Теорема 27.** Пусть и являются частными решениями , тогда тоже будет являться частным решением .

**Доказательство.** Подстановкой.

**Замечание.** Теорема обобщается на уравнения – го порядка.

Пусть функции определены на отрезке . Их комбинация будет являться линейно-независимой, если из равенства следует .

Функции линейно-зависимы, если существует нулевая линейная комбинация с константами, среди которых хотя бы одна отлична от нуля.

**Пример:** – линейно-независимы, – линейно-зависимы.

Пусть функции определены на отрезке и дифференцируемы раз. Тогда определитель матрицы будет называться определителем Вронского, или вронскианом. Если он равен нулю, то функции, на которых он построен, линейно-зависимы.

**Теорема 28.** Пусть функции линейно зависимы и дифференцируемы на отрезке . Тогда на этом отрезке.

**Доказательство.** Если эти функции линейно зависимы, то выполняется равенство , . Тогда .

**Замечание.** Теорема распространяется на случай функций.

**Теорема 29.** Рассмотрим однородное линейное уравнение . Пусть – решения этого уравнения на отрезке . Пусть и . Тогда для любого на отрезке .

**Доказательство.** Так как – решения, то подставим их и составим систему . Вычитаем второе из первого и получаем . Но и . Тогда . . Проинтегрировав, получаем . По условию . А значит и все выражение не обращается в ноль.

**Замечание.** Пусть – решения линейного однородного дифференциального уравнения на отрезке такие, что в какой-то точке этого отрезка . Тогда на всем отрезке .

**Теорема 30.** Пусть – линейно-независимые решения однородного линейного уравнения . Тогда на отрезке . Без доказательства.

**Теорема 31.** Общее решение представимо в виде , где – линейно-независимые частные решения линейного однородного дифференциального уравнения.

**Доказательство.** Так как и – решения, то – тоже решение. Пусть есть некоторая задача Коши. . Покажем, что существуют такие , что решают задачу Коши. . Следовательно, – определитель системы. Следовательно, система имеет единственное решение .

**Замечание.** Теорема распространяется на случай линейного однородного уравнения -го порядка. Пусть – линейно-независимые частные решения уравнения . Тогда является общим решением.

# Неоднородные линейные уравнения высших порядков. Метод вариации произвольных постоянных

Не ограничивая общности, рассмотрим неоднородное уравнение второго порядка (далее - ).

**Теорема 32.** Общее решение представляется как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: , где – общее решение однородного уравнения, – частное решение .

**Доказательство.** Просто возьмем и подставим в уравнение: . Первые двое слагаемых равны нулю в силу того, что – частные решения однородного уравнения. Третье слагаемое является частным решением неоднородного уравнения. Получаем, что это выражение является решением уравнения . Теперь надо сделать, чтобы решалась задача Коши. Пусть . Тогда . Следовательно, . Выходит, что определитель этой системы построен на линейно-независимых решениях однородного уравнения и отличен от нуля. Тогда система имеет единственное решение .

**Замечание.** Теорема распространяется на случай линейного неоднородного уравнения порядка .

## Метод вариации произвольных постоянных

Не ограничивая общности, рассмотрим неоднородное уравнение второго порядка . Пусть – общее решение однородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения можно искать в виде ( – линейно-независимые решения однородного уравнения). . Потребуем . Тогда получим . . Подставим в уравнение. Получаем . Выражаем в виде . Первое и второе слагаемые равны нулю, так что получаем . Составим систему , определитель которой в каждой точке отличен от нуля. Значит, система имеет единственное решение . После этого интегрируем и получаем .

# Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение

Рассмотрим неоднородное уравнение , где – константы. Если , то уравнение однородное.

## Однородные уравнения второго порядка

Рассмотрим однородное уравнение , где – константы. Будем решение уравнения в виде , где – константа. Тогда . После подстановки в уравнение получим . Сократив, получим – характеристическое уравнение дифференциального уравнения. Если – корень этого уравнения, тогда – решение дифференциального. Отдельные случаи:

1. – различные действительные корни. Пусть . Тогда, если они линейно-зависимы, то , чего не может быть в силе того, что . Следовательно линейно-независимы. Тогда общее решение будет выглядеть в виде .
2. – действительные корни второй кратности. Пусть . Они линейно-зависимы. Покажем, что . Будем искать второе линейно-независимое решение в виде . . Подставим эти два выражения в уравнение: . После сокращения получим . Второе и третье слагаемые равны нулю, так как – корень второй кратности. Значит, . Выходит, уравнение преобразуется к виду . Следовательно, После двойного интегрирования, . Так как нам нужно любое частное решение, то можно положить . Тогда – линейно-независимое решение с . Общее решение: .
3. – комплексные сопряженные корни. Тогда, воспользовавшись формулой Эйлера, получим, что . Аналогично .

**Теорема 33.** Если – решение уравнения , то и также являются решениями этого уравнения.

**Доказательство.** Просто подставим: . Разделим действительную и мнимую части: . Получаем систему . Следовательно, и также являются решениями этого уравнения.

В качестве возьмем , а в качестве возьмем . Так как , то и линейно-независимы. Тогда общее решение такого уравнения будет находиться в виде .

**Замечание.** Обобщается на уравнение с постоянными коэффициентами -го порядка. . Характеристическое уравнение имеет ровно корней. Кратному действительному корню кратности отвечают линейно-независимых функций (решений уравнений). . Комплексным корням характеристического уравнения кратности отвечают линейно-независимых функций (решений уравнений). .

Общее решение дифференциального уравнения -го порядка составляется из линейной комбинации его частных линейно-независимых решений.

# Линейные неоднородное дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

, где – константы. Общее решение такого уравнение определяется как сумма общего решения однородного линейного уравнения и любого частного решения неоднородного линейного уравнения: .

Не умоляя общности, рассмотрим уравнение второго порядка. . Тогда , где – линейно-независимые частные решения однородного уравнения. Как ищется :

1. Если , где – конкретный многочлен -й степени.
   1. Если не является корнем характеристического уравнения, то , где – многочлен -й степени с неопределенными коэффициентами. Сокращаем обе части уравнения на , после чего получаем линейную систему из уравнений, решая которую мы находим все коэффициенты .

**Пример.** . Характеристическое уравнение: . Корни . не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, .

* 1. Если является корнем характеристического уравнения -й кратности, то .

1. Если , где – многочлен степени , – многочлен степени .
   1. Если не является корнем характеристического уравнения, то , где , а и – многочлены с неопределенными коэффициентами.
   2. Если является корнем характеристического уравнения -й кратности, то .

**Замечание.** Все эти решения обобщаются и на уравнения -го порядка.