1. – комплексные сопряженные корни. (). Тогда, воспользовавшись формулой Эйлера, получим, что . Аналогично .

**Теорема 33.** Если – решение уравнения , то и также являются решениями этого уравнения.

**Доказательство.** Просто подставим: . Разделим действительную и мнимую части: . Получаем систему . Следовательно, и также являются решениями этого уравнения.

В качестве возьмем , а в качестве возьмем . Так как , то и линейно-независимы. Тогда общее решение такого уравнения будет находиться в виде .

**Замечание.** Обобщается на уравнение с постоянными коэффициентами -го порядка. . Характеристическое уравнение имеет ровно корней. Кратному действительному корню кратности отвечают линейно-независимых функций (решений уравнений). . Комплексным корням характеристического уравнения кратности отвечают линейно-независимых функций (решений уравнений). .

Общее решение дифференциального уравнения -го порядка составляется из линейной комбинации его частных линейно-независимых решений.

# §7. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

, где – константы. Общее решение такого уравнение определяется как сумма общего решения однородного линейного уравнения и любого частного решения неоднородного линейного уравнения: .

Не умоляя общности, рассмотрим уравнение второго порядка. . Тогда , где – линейно-независимые частные решения однородного уравнения. Как ищется :

1. Если , где – конкретный многочлен -й степени.
   1. Если не является корнем характеристического уравнения, то , где – многочлен -й степени с неопределенными коэффициентами. Сокращаем обе части уравнения на , после чего получаем линейную систему из уравнений, решая которую мы находим все коэффициенты .

**Пример.** . Характеристическое уравнение: . Корни . не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, .

* 1. Если является корнем характеристического уравнения -й кратности, то .

1. Если , где – многочлен степени , – многочлен степени .
   1. Если не является корнем характеристического уравнения, то , где , а и – многочлены с неопределенными коэффициентами.
   2. Если является корнем характеристического уравнения -й кратности, то .

**Замечание.** Все эти решения обобщаются и на уравнения -го порядка.