П.2. Интегрирование простейших дробей

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|.$
2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{1-k}(x-a)^{1-k}, k \geq 2.$
3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx}{x^2+px+q}dx + \int \frac{N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x}{x^2+px+q}dx + \int \frac{N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x+p-p}{x^2+px+q}dx + \int \frac{N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(N - \frac{pM}{2}\right) * \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{M}{2} * \ln|x^2 + px + q| + \left(N - \frac{pM}{2}\right) * \int \frac{dx}{x^2+px+q}.$
4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{Mx}{(x^2+px+q)^k}dx + \int \frac{N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x}{(x^2+px+q)^k}dx + \int \frac{N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x+p-p}{(x^2+px+q)^k}dx + \int \frac{N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx + \left(N - \frac{pM}{2}\right) * \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} + \left(N - \frac{pM}{2}\right) * \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{M}{2} * \frac{(x^2+px+q)^{1-k}}{1-k} + \left(N - \frac{pM}{2}\right) * I_k;$ $I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$, где $t = x + \frac{p}{2}; m^2 = q - \frac{p^2}{4}.$

Вывод рекуррентной формулы: $\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = I_k = \left[\begin{matrix} u=\frac{1}{(t^2+m^2)^k};\ du=-k(t^2+m^2)^{-k-1}2tdt \\ dv=dt;\ v=t \end{matrix}\right] = \frac{t}{(t^2+m^2)^k} + 2k\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^{k+1}};$ $\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^{k+1}} = \int \frac{(t^2+m^2-m^2)dt}{(t^2+m^2)^{k+1}} = \int \frac{(t^2+m^2)dt}{(t^2+m^2)^{k+1}} - m^2\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k+1}} = I_k - m^2 I_{k+1}$. Поставим в исходное выражение: $I_k = \frac{t}{(t^2+m^2)^k} + 2k\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^{k+1}} = \frac{t}{(t^2+m^2)^k} + 2k(I_k - m^2 I_{k+1})$. Отсюда $I_{k+1} = \frac{2k-3}{2m^2(k-1)}I_k + \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}}.$

§6. Интегралы иррациональных функций

П.1. $\int \boldsymbol{R}\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$

Пусть k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$, т.е. $k =$ НОК $(n, \dots, s)$. Выполним замену $x = t^k; R\left(t^k, t^{\frac{km}{n}}, \dots, t^{\frac{rk}{s}}\right)$. Все показатели целые; $dx = kt^{k-1}dt$.

Пример. $I = \int \frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{4}}+1}; k = 4;$ $x = t^4; dx = 4t^3dt;$ $I = \int \frac{t^2 4t^3dt}{t^3+1} = 4\int \frac{t^5}{t^3+1} = 4\int \frac{t^5+t^2-t^2}{t^3+1}dt = 4\left(\int t^2dt - \int \frac{t^2}{t^3+1}\right) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\int \frac{d(t^3+1)}{t^3+1} = \frac{4}{3}(t^3 - \ln|t^3+1|) + c = \frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}} - \ln\left|x^{\frac{3}{4}} + 1\right|\right) + c.$

Замечание. Аналогичным образом берется интеграл вида $\int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}; \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ с помощью подстановки $t^k = \frac{ax+b}{cx+d}$, k = НОК$(n, \dots, s)$.

П.2. $\int \boldsymbol{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

Решаются одной из подстановок Эйлера:

1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$. Используется при $a > 0$.
2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$. Используется при $c > 0$.
3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$. Используется когда подкоренное выражение имеет два действительных корня, один из которых λ.

П.3. Интегрирование дифференциальных биномов

Выражение вида $x^m(a+bx^n)^p dx$, где m, n, p – рациональные числа, a и b – постоянные, называется дифференциальным биномом. Не всегда интеграл дифференциального бинома можно свести к дифференциальной рациональной функции.

Теорема 7 (Чебышева). $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ сводится к интегралу от рациональных функций, если:

1) p – целое число (сводится к пункту 1).
2) $\frac{m+1}{n}$ – целое число (сводится к пункту 1).
3) $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число.

§7. Интегрирование тригонометрических функций

П.1. $\int R(\cos x, \sin x)dx$

$t=\tan\frac{x}{2}$ – универсальная тригонометрическая подстановка. $\frac{x}{2}=\operatorname{atan} t\,; x = 2\operatorname{atan} t\,; dx=\frac{2dt}{1+t}; \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. Аналогично $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$.

Пример. $\int\frac{dx}{\sin x}=\left[\begin{matrix} t=\tan\frac{x}{2} \\ \sin x=\frac{2t}{1-t^2};\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt\end{matrix}\right]=\int\frac{2dt(1+t^2)}{(1+t^2)2t}=\ln|t|+c=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c.$

П.2. $\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)dx$

Интеграл рационализуется $t=\tan x\,; dx=\frac{dt}{1+t^2}; \cos^2 x=\frac{1}{\tan^2 x+1}=\frac{1}{t^2+1}; \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2}$.

Пример. $\int\frac{dx}{2-\sin^2 x}=\left[\begin{matrix} t=\tan x \\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2};\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\end{matrix}\right]=\int\frac{dt}{(1+t^2)\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt(1+t^2)}{(1+t^2)(2+t^2)}=\int\frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{atan}\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+c.$

Замечание. $\int\frac{dx}{2-\sin^2 x}=\int\frac{dx}{2\cos^2 x+\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x(2+\tan^2 x)}=\int\frac{d(\tan x)}{2+\tan^2 x}$.

П.3. $\int R(\cos x)\sin x\, dx$ & $\int R(\sin x)\cos x\, dx$

$\int R(\cos x)\sin x\ dx=\int R(\cos x)\,d(\cos x)$

$\int R(\sin x)\cos x\ dx=\int R(\sin x)\,d(\sin x)$

Пример. $\int \sin^m x\cos^{2p+1}x\,dx=\int\sin^m x\,(\cos^p x)d(\sin x)=\int\sin^{\mathrm{m}} x\,(1-\sin^2 x)^p\,d(\sin x)$.

П.4. $\int \tan^n x\, dx$

$I_n=\int\tan^n x\,dx=\int\tan^{n-2}x\tan^2 x\,dx=\int\tan^{n-2}x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\tan^{n-2}x\,d(\tan x)-I_{n-2}=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}$.

$I_1=\int\tan x\,dx\,; I_2=\int\tan^2 x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\tan x-x+c.$

§8. Интегрирование функций, не выражающихся через элементарные функции

1) $\int \frac{e^x}{x} dx = ei\ x + c$ – интегральная экспонента.
2) $\int \frac{dx}{\ln x} = li\ x + c$ – интегральный логарифм.
3) $\int \frac{\sin x}{x} dx = si\ x + c$ – интегральный синус.
4) $\int \frac{\cos x}{x} dx = ci\ x + c$ – интегральный косинус.
5) $\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} x + c$ – интеграл от функции Гаусса, интеграл Пуассона.