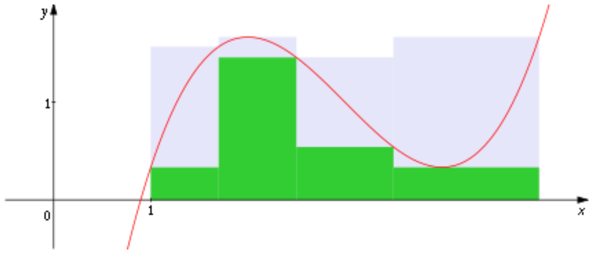
§9. Определенный интеграл

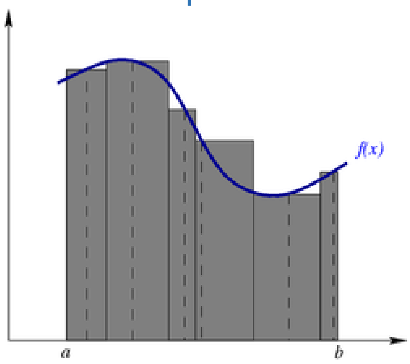
П.1. Интегральные суммы Дарбу

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана некая непрерывная функция $f(x)$. Разобьем отрезок на n частей таких, что $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Введем обозначения $m_i = \min f(x)$ на отрезке $[x_{i-1};x_i]$, $M_i = \max f(x)$ на отрезке $[x_{i-1};x_i]$ и $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Тогда можно ввести понятия верхней и нижней суммы Дарбу: $S(n) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ – верхняя сумма Дарбу (на рисунке изображена серым, равна площади описанной ступенчатой фигуры), $\rho(n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ – нижняя сумма Дарбу (на рисунке изображена зеленым, равна площади вписанной ступенчатой фигуры). При этом всегда выполняется неравенство $\min\limits_{[a;b]} f(x)\,(b-a) \le \rho_n \le S_n \le \max\limits_{[a;b]} f(x)\,(b-a)$.



П.2. Интегральные суммы Римана. Определенный интеграл

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана некая функция $f(x)$. Разобьем отрезок на n частей таких, что $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Введем обозначение $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Выберем точки $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$, тогда $f(\xi_i)\Delta x_i$ будет соответствовать площади i-го прямоугольника. А выражение $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ будет называться интегральной суммой Римана для $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и равно площади ступенчатой фигуры на этом отрезке.



Если при любых разбиениях отрезка $[a;b]$ таких, что максимальная длина разбитого отрезка стремится к нулю (при любом выборе ξ_i) и сумма σ_n стремится к одному и тому же пределу, то говорят, что функция интегрируема на этом отрезке, а предел называется определенным интегралом. $I = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$. Если функция непрерывна на $[a;b]$, то она интегрируема на $[a;b]$.

<u>Замечание.</u> $\rho_n \le \sigma_n \le S_n$, т.к. для любого i выполняется $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$.

<u>Теорема 8.</u> Для существования интеграла функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ необходимо и достаточно, чтобы предел $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - \rho_n)$ существовал и был равен нулю.

<u>Замечание.</u> Определенный интеграл – площадь криволинейной трапеции под графиком функции $f(x)$.

§10. Свойства определенного интеграла

П.1. Основные свойства

1. Линейность
   a. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.
   b. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$.
2. <u>Теорема 9 (о знаке интеграла).</u> Пусть некая функция $f(x) \ge 0$ на отрезке $[a;b]$ и пусть существует интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Тогда $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

Доказательство. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$. $\Delta x_i > 0$, так как $b > a$, $f(\xi_i) \geq 0$ так как $f(x) \geq 0$. Выходит, $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$, и, следовательно, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Следствие. Пусть $f(x) \geq \varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$ и существуют интегралы $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b \varphi(x)dx$. Тогда $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$. Для доказательства достаточно рассмотреть интеграл разности этих функций.

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. (во втором случае $\Delta x_i < 0$).

Следствие. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

4. Теорема 10 (о разбиении промежутка интегрирования). Пусть некий отрезок $[a;b]$ разбит на отрезки $[a;c]$ и $[c;b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Доказательство. Такое разбиение подразумевает, что точка c является точкой деления. Тогда $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ (до c) $+ \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ (после c). Таким образом, при $\max \Delta x_i \to 0$ выполняется $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

5. Оценка определенного интеграла. Пусть на некотором отрезке $[a;b]$ выполняется неравенство $m \leq f(x) \leq M$, где $M = \max f(x)$ на отрезке $[a;b]$, $m = \min f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Доказательство. $\sum_{i=1}^n m\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M\Delta x_i$. Первая и последняя части соответственно равны $m(b-a)$ и $M(b-a)$. Средняя же часть равна определенному интегралу.

Замечание. $\int_a^b 1dx = b - a$.

Следствие. Пусть некоторая функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ по модулю не превосходит M. Тогда $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$.

6. Теорема 11 (неравенство Коши-Буняковского). Пусть некоторая функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ является произведением двух других функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и существуют интегралы $\int_a^b f_1^2(x)dx$; $\int_a^b f_2^2(x)dx$; $\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx$. Тогда выполняется неравенство $\left|\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f_1^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b f_2^2(x)dx}$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл $\int_a^b \left(\lambda f_1(x) + f_2(x)\right)^2 dx = \lambda^2 \int_a^b f_1^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx + \int_a^b f_2^2(x)dx \geq 0$. Представим его в виде $\lambda^2 I_{11} + 2\lambda I_{12} + I_{22} \geq 0$. Так как это выражение является квадратным трехчленом, то оно имеет не более одного корня, а значит $\frac{D}{4} = \lambda^2(I_{12}^2 - I_{11}I_{22}) \leq 0$, $\lambda^2 > 0$, ее можно опустить. Тогда получаем $\left(\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f_1^2(x)dx \int_a^b f_2^2(x)dx$.

Замечание. Рассмотрим непрерывное множество функций c на отрезке $[a;b]$. По определению, скалярное произведение двух кусочно-непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций $(f_1 f_2)$ равно интегралу $\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx$. Величину $\|f\|$, равную $\sqrt{(ff)}$ будем называть нормой функции f. Тогда для двух функций f_1 и f_2 из множества c будет выполняться равенство $(f_1 f_2) \leq \|f_1\|_c \|f_2\|_c$. Это другая форма записи неравенства Коши-Буняковского.

П.2. Теорема о среднем

<u>Теорема 12 (о среднем).</u> Пусть некоторая функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда существует такая точка $\xi \in (a;b)$, что $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

<u>Доказательство.</u> $f(x)$ принимает на отрезке $[a;b]$ все значения между $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ и $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$. И $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. Следовательно, $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$. А значит, найдется такая точка $\xi \in (a;b)$, что $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$. $y_{\text{ср}} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ обобщает среднее значение последовательности $\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} = a_{\text{ср}}$.

Геометрический смысл теоремы о среднем: $f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)dx$. В правой части выражения записана площадь криволинейной трапеции, которая равна площади прямоугольника, площадь которого записана в левой части выражения.

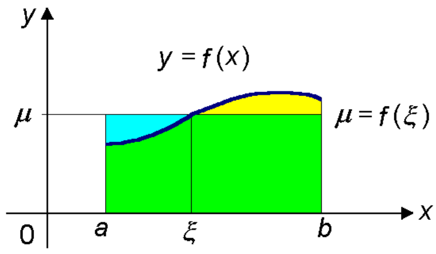


Рис. 2

П.3. Производная интеграла по верхнему пределу

Пусть некоторая функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Рассмотрим интеграл $\int_a^x f(t)dt$, где $a < x < b$, причем $\int_a^x f(t)dt$ будет функцией от x.

<u>Теорема 13.</u> $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$.

<u>Доказательство.</u> Возьмем $\int_a^x f(t)dt$ за $I(x)$. Тогда $I(x+\Delta x) - I(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ = (по теореме о среднем) = $f(\xi)\Delta x; \xi \in [x; x+\Delta x]$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x)$. Следовательно, существует такой $I'(x) = f(x)$.

<u>Следствие.</u> $d\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)dx$.