# Глава 1. Интегрирование

# §1. Первообразная и неопределенный интеграл

# П.1. Основные определения

Пусть функция определена на отрезке . Нам нужно найти такую функцию , что на . Функция будет называться первообразной от функции на при условии что во всех точках этого отрезка.

Пример:

**Теорема 1.** Пусть и – две первообразные от функции на . Тогда равно некоторому константному значению.

**Доказательство.** Пусть и – две первообразные, и . Тогда . Пусть . Тогда . Покажем, что – константа на отрезке . Рассмотрим отрезок . По теореме Лагранжа существует такое , принадлежащее промежутку , что . Но . Следовательно, , а значит и равно некоторому константному значению. Доказано.

**Следствие.** Если найдена первообразная, то все остальные отличаются от нее на константу. – семейство первообразных (сдвиг графика первообразной по оси ординат).

Если , то – неопределенный интеграл, где – подынтегральное выражение, – подынтегральная функция. Действия от нахождения первообразной – неопределенное интегрирование. В отличие от производной, интеграл элементарной функции не является элементарной функцией. Первообразную можно найти не для всех функций.

# П.2. Свойства неопределенных интегралов

1) .

2) .

3) .

4) Линейность

a) .

b) .

**Доказательство b.** . По первому свойству равны подынтегральные функции, и, следовательно, сами интегралы.

5) .

**Доказательство.** . Тогда .

**Следствие.** .

# П.3. Таблица интегралов

1. .
2. .
3. .
4. .
5. .
6. .
7. .
8. .
9. .
10. .

Первые 10 интегралов являются следствиями из таблицы производных. Остальные выводятся.

1. .

**Доказательство.** . По следствию пятого свойства и девятому интегралу это равно .

1. .

**Доказательство.** . По следствию пятого свойства и десятому интеграла это равно .

1. .

**Доказательство.** . Следовательно,

# §2. Интегрирование методом замены переменной или подстановкой

Пусть нужно найти интеграл вида и пусть этот интеграл существует. Тогда . Это называется формулой замены переменной для неопределенного интеграла. Рассмотрим интеграл . Тогда .

**Пример:** .

1. .
2. .

# Частные случаи

**Пример:** .