**Теорема 28.** Пусть функции линейно зависимы и дифференцируемы на отрезке . Тогда на этом отрезке.

**Доказательство.** Если эти функции линейно зависимы, то выполняется равенство , . Тогда .

**Замечание.** Теорема распространяется на случай функций.

**Теорема 29.** Рассмотрим однородное линейное уравнение . Пусть – решения этого уравнения на отрезке . Пусть и . Тогда для любого на отрезке .

**Доказательство.** Так как – решения, то подставим их и составим систему . Вычитаем второе из первого и получаем . Но и . Тогда . . Проинтегрировав, получаем . По условию . А значит и все выражение не обращается в ноль.

**Замечание.** Пусть – решения линейного однородного дифференциального уравнения на отрезке такие, что в какой-то точке этого отрезка . Тогда на всем отрезке .

**Теорема 30.** Пусть – линейно-независимые решения однородного линейного уравнения . Тогда на отрезке . Без доказательства.

**Теорема 31.** Общее решение представимо в виде , где – линейно-независимые частные решения линейного однородного дифференциального уравнения.

**Доказательство.** Так как и – решения, то – тоже решение. Пусть есть некоторая задача Коши. . Покажем, что существуют такие , что решают задачу Коши. . Следовательно, – определитель системы. Следовательно, система имеет единственное решение .

**Замечание.** Теорема распространяется на случай линейного однородного уравнения -го порядка. Пусть – линейно-независимые частные решения уравнения . Тогда является общим решением.

# §5. Неоднородные линейные уравнения высших порядков

# П.1. Структура решения

Не ограничивая общности, рассмотрим неоднородное уравнение второго порядка (далее - ).

**Теорема 32.** Общее решение представляется как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: , где – общее решение однородного уравнения, – частное решение .

**Доказательство.** Просто возьмем и подставим в уравнение: . Первые двое слагаемых равны нулю в силу того, что – частные решения однородного уравнения. Третье слагаемое является частным решением неоднородного уравнения. Получаем, что это выражение является решением уравнения . Теперь надо сделать, чтобы решалась задача Коши. Пусть . Тогда . Следовательно, . Выходит, что определитель этой системы построен на линейно-независимых решениях однородного уравнения и отличен от нуля. Тогда система имеет единственное решение .

**Замечание.** Теорема распространяется на случай линейного неоднородного уравнения порядка .

# П.2. Метод вариации произвольных постоянных

Не ограничивая общности, рассмотрим неоднородное уравнение второго порядка . Пусть – общее решение однородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения можно искать в виде ( – линейно-независимые решения однородного уравнения). . Потребуем . Тогда получим . . Подставим в уравнение. Получаем . Выражаем в виде . Первое и второе слагаемые равны нулю, так что получаем . Составим систему , определитель которой в каждой точке отличен от нуля. Значит, система имеет единственное решение . После этого интегрируем и получаем .

# §6. Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Рассмотрим неоднородное уравнение , где – константы. Если , то уравнение однородное.

# П.1. Однородные уравнения второго порядка

Рассмотрим однородное уравнение , где – константы. Будем решение уравнения в виде , где – константа. Тогда . После подстановки в уравнение получим . Сократив, получим – характеристическое уравнение дифференциального уравнения. Если – корень этого уравнения, тогда – решение дифференциального. Отдельные случаи:

1. – различные действительные корни. Пусть . Тогда, если они линейно-зависимы, то , чего не может быть в силе того, что . Следовательно линейно-независимы. Тогда общее решение будет выглядеть в виде .
2. – действительные корни второй кратности. Пусть . Они линейно-зависимы. Покажем, что . Будем искать второе линейно-независимое решение в виде . . Подставим эти два выражения в уравнение: . После сокращения получим . Второе и третье слагаемые равны нулю, так как – корень второй кратности. Значит, . Выходит, уравнение преобразуется к виду . Следовательно, После двойного интегрирования, . Так как нам нужно любое частное решение, то можно положить . Тогда – линейно-независимое решение с . Общее решение: .
3. – комплексные сопряженные корни.