Решение уравнений вида .

1. Решение однородного уравнения . . Последнее является общим решением однородного уравнения. Тогда частным решением при будет являться .
2. Решение неоднородного уравнения будем искать в виде , где – частное решение однородного уравнения. Подставим в уравнение: . Второе и третье слагаемые в сумме равны нулю, т.к. – частное решение однородного уравнения. Отсюда получаем . Получается, что общее решение неоднородного уравнения будет иметь вид .

**Пример:** . Однородное: – общее решение. Тогда – частное решение. Неоднородное: . Подставим . При решении данным методом обязательно должны сократиться слагаемые, содержащие . В противном случае было неверно найдено общее решение однородного уравнения. – общее решение неоднородного уравнения.

# П.3. Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида , где (потому что в противном случае получим линейное однородное уравнение). Будем решать это уравнение методом Бернулли. Искать решение будем в виде . Подставим в исходное уравнение. . Потребуем . Тогда – частное решение. .

# П.4. Уравнения с однородной функцией

Функция называется однородной функцией – го измерения, если .

**Пример:** – однородная функция второго измерения.

В частности, если , то – однородная функция нулевого измерения.

**Замечание.** Если и – однородные функции – го измерения, то – однородная функция нулевого измерения.

Если , где – однородная функция нулевого измерения, то называется дифференциальным уравнением первого порядка с однородной функцией.

**Замечание.** Если , где – однородные функции – го измерения, то такое уравнение будет называться дифференциальным уравнением с однородной функцией.

Принцип решения: делается замена . Получаем .

**Пример:** . Последнее называется общим интегралом.

# П.5. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение вида , если , называется уравнением в полных дифференциалах, т.е. если . Если , то . Последнее называется общим интегралом.

**Теорема 26.** является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда .

**Доказательство.** Пусть есть уравнение в полных дифференциалах, т.е. существует такая функция , что . Тогда .

**Замечание.** Пусть функции и дважды дифференцируемые функции. не всегда является уравнением в полных дифференциалах, но всегда существует интегрирующий множитель такой, что будет являться уравнением в полных дифференциалах.

# §3. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

# П.1.

Замена . Уравнение приводится к уравнению первого порядка .

**Пример:** . Не забывайте про вторую константу.

# П.2.

Замена . Уравнение приводится к уравнению первого порядка .

# §4. Линейные однородные уравнения высших порядков

Уравнение вида , где , называется линейным дифференциальным уравнением – го порядка. Если , то оно будет являться линейным однородным дифференциальным уравнением.

Не умоляя общности, будем рассматривать уравнения второго порядка .

**Теорема 27.** Пусть и являются частными решениями , тогда тоже будет являться частным решением .

**Доказательство.** Подстановкой.

**Замечание.** Теорема обобщается на уравнения – го порядка.

Пусть функции определены на отрезке . Их комбинация будет являться линейно-независимой, если из равенства следует .

Функции линейно-зависимы, если существует нулевая линейная комбинация с константами, среди которых хотя бы одна отлична от нуля.

**Пример:** – линейно-независимы, – линейно-зависимы.

Пусть функции определены на отрезке и дифференцируемы раз. Тогда определитель матрицы будет называться определителем Вронского, или вронскианом. Если он равен нулю, то функции, на которых он построен, линейно-зависимы.