**Доказательство.** Воспользуемся формулой Тейлора. Пусть есть функция двух переменных , где . Так как в точке производная обращается в ноль , то приращение функции есть второй дифференциал, деленный на : . Перепишем в виде . Теперь перейдем к полярным координатам , и выражение заменим на , которое будет малой величиной, так как . Тогда наше выражение примет вид . Теперь выражение в скобках домножим и разделим на , а также в числителе прибавим и вычтем для выделения полного квадрата: , где , что все равно является малой величиной. Теперь рассмотрим четыре возможных случая:

1. и . В этом случае весь числитель нашего выражение будет положителен. (В некоторой окрестности точки будет выполняться неравенство , так как последнее является бесконечно малой величиной). Знаменатель также положителен. Отсюда следует, что , а значит, точка является точкой минимума.
2. и . Числитель так же положителен, но вот знаменатель отрицателен. (В некоторой окрестности точки будет выполняться неравенство , так как последнее является бесконечно малой величиной). Отсюда следует, что , а значит, точка является точкой максимума.
3. и . Если мы возьмем , т.е. (приравняем к нулю второе слагаемое числителя), то, рассуждая аналогично предыдущим пунктам, получим что в некоторой окрестности точки . А если теперь мы приравняем к нулю первое слагаемое числителя, , то . Как видим, у нас есть направление угла, по которому функция возрастает, и направление угла, по которому функция убывает. Следовательно, экстремума нет, точка является седловой точкой.
4. . Тогда для (первое слагаемое обращается в ноль) выражение примет вид . В этом случае все будет определяться знаком , а для выяснения этого требуется дополнительно исследование.

**Замечание.** Теорему можно обобщить на переменных. Знак приращения определяется прежде всего вторым дифференциалом, а все частные производные содержатся в матрице Гессе, именуемой квадратичной формой. Если она определена и положительна, тогда максимум, отрицательная – минимум, если ноль, то нет экстремума, а если положительна и отрицательна по различным направлениям, то это седловая точка и требуется дополнительно исследование.

# Глава 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения

# §1. Понятие дифференциального уравнения

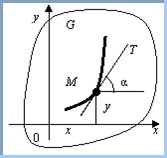
# П.1. Основные определения

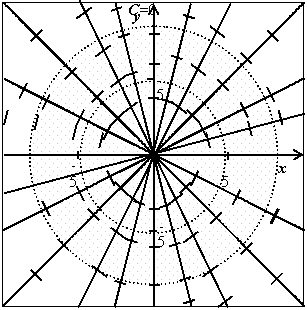
Уравнение вида называется дифференциальным. Причем порядок старшей производной этого уравнения будет называться порядком этого уравнения. Пример: – дифференциальное уравнение второго порядка.

Частным решением дифференциального уравнения называется любая функция , подстановка которой обращает выражение в верное тождество. Пример: – частные решения этого уравнения. Таких решений может быть несколько.

Общим решением дифференциального уравнения называется такое , если оно является частным решением уравнения при всех допустимых значениях констант , а также если для любого частного решения существуют такие константы , что , то есть если всегда можно подобрать константы для получения решения.

# П.2. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Уравнение вида называется разрешенным относительно старшей производной. Пример: . К такому виду дифференциальное уравнение можно привести не всегда.

Геометрический смысл: если функция задана в подобном виде, то в каждой точке некоторой области, на которой определена эта функция, мы можем вычислить ее производную, то есть тангенс угла наклона касательной. Если есть частное решение , то его график называется интегральной кривой. Пусть определена в некоторой области . Она задает значение в каждой точке. Тогда в каждой точке области будет задан вектор, касательный к интегральной кривой. Тогда, построив эти вектора, можно будет нарисовать интегральную кривую. задает в касательные векторы к интегральным кривым. Линии уровня вида называются изоклинами. Пример: . – изоклины. . Пусть . Тогда , то есть линии уровня представляют собой прямые. Если , то . Если , то . Если , то . Если соединить все получившиеся касательные к интегральным кривым, то получатся окружности. Интегральные кривые представляют собой множество окружностей.

Задача Коши: пусть есть уравнение и точка , принадлежащая , а также значение функции в точке : . Последнее условие называется начальным условием. Задача состоит в следующем: требуется найти решение дифференциального уравнения , которое удовлетворяло бы начальному условию (поиск такой интегральной кривой, которая бы проходила через точку ).

Оказывается, если функция непрерывна в и частная производная непрерывна в , то для любой точки существует единственная функция , являющаяся решением , которая удовлетворяет начальному условию, т.е. решает задачу Коши, и для которой в некоторой окрестности точки значения лежат в области . (При выполнении условий через некоторую точку области проходит единственная интегральная кривая, которая хотя бы в окрестности этой точки будет лежать в области ).

# §2. Уравнения первого порядка

# П.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Так как , то . Пусть есть функция . Ее можно расписать как . Уравнение вида называется уравнением с разделяющимися переменными (их можно разделить), а уравнение вида называется уравнением с разделенными переменными , где и – первообразные от и . Получится, что можно проинтегрировать: . Почти все решения дифференциальных уравнений сводятся к подобному разделению.

В частности, – обычный вид уравнения с разделяющимися переменными. Можно привести к уравнению с разделенными: .

# П.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида называется линейным дифференциальным уравнением. Если , то уравнение будет однородным. Если , то будет неоднородным. Оказывается, что однородное линейное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными: разделим и проинтегрируем . Последнее является общим решением линейного дифференциального уравнения.