# §6. Поверхности уровня. Линии уровня

Пусть в задана . Множество точек из таких, что называется поверхностями уровня.

**Пример:** .

Аналогично определяются линии уровня .

# §7. Производная по направлению. Градиент

# П.1. Производная по направлению

Пусть есть функция , определенная в области и пусть есть точка . Из точки проведем вектор ( – приращения относительно точки ) с направляющими . Тогда длина вектора будет определяться как , а направляющие косинусы . Тогда . Производной по направлению называется .

**Замечание.** Частные производные по тоже являются производными по направлению.

# П.2. Градиент и его свойства

Пусть определена в и пусть точка . Пусть существуют . Тогда градиентом функции в точке называют вектор . Если определить градиент в каждой точке поля, то говорят о поле градиентов.

Пусть у существуют в частные производные. Тогда функции в каждой точке можно сопоставить ее градиент.

**Теорема 22.** – проекция на в каждой точке.

**Доказательство.** проекция на равна .

Свойства градиента:

1. принимает наибольшее значение в точке, если сонаправлен и .

**Доказательство.** – проекция на . принимает максимум, если они сонаправлены.

1. , .
2. **Теорема 23.** Пусть задана в и пусть – точка, лежащая на поверхности уровня, и пусть существует частная производная, и пусть в точке . Тогда градиент перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через точку .

**Доказательство.** Пусть лежит на той же поверхности уровня, что и , т.е. . Тогда , т.е. . Разделим на : . Очевидно, что – единичный вектор, выходящий из точки на поверхности уровня. – единичный вектор, касательный к поверхности в точке . , откуда следует, что градиент перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через точку .

# П.3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть определена в и точка , лежащая на поверхности. Пусть существуют частные производные в точке и градиент в этой точке ненулевой. Пусть – некоторая кривая на поверхности, проходящая через точку . задается параметрически задается параметрически . Пусть существуют . Тогда вектор будет являться касательным к в точке . . Рассмотрим точку , которая тоже будет лежать на поверхности уровня. Тогда . Значит, . Следовательно, градиент перпендикулярен произвольному вектору касательной в точке . Следовательно, все касательные вектора лежат в одной плоскости и градиент в этой точке перпендикулярен касательной плоскости в этой же точке.

Уравнение касательной плоскости: , или же .

Нормаль к поверхности – нормаль к касательной плоскости. Уравнение нормали к поверхности: .