Решение уравнений вида $y' + p(x)y = q(x)$.

1) Решение однородного уравнения $y' + p(x)y = 0$. $\frac{dy}{dx} = -p(x)y; \frac{dy}{y} = -p(x)dx; y = ce^{-\int p(x)dx}$. Последнее является общим решением однородного уравнения. Тогда частным решением при $c = 1$ будет являться $y_0 = e^{-\int p(x)dx}$.

2) Решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y = c(x)y_0(x)$, где y_0 – частное решение однородного уравнения. Подставим в уравнение: $c'(x)y_0 + c(x)y_0' + p(x)c(x)y_0 = q(x)$. Второе и третье слагаемые в сумме равны нулю, т.к. y_0 – частное решение однородного уравнения. Отсюда получаем $c'(x)y_0 = q(x); c'(x) = \frac{q(x)}{y_0}; c = \int \frac{q(x)}{y_0}dx + c_1$. Получается, что общее решение неоднородного уравнения будет иметь вид $y(x) = \left(\int \frac{q(x)}{y_0}dx + c_1\right)y_0$.

<u>Пример:</u> $y' + 2xy = xe^{-x^2}$. Однородное: $y' + 2xy = 0; \frac{dy}{y} = -2xdx; \ln|y| = \ln|c| - x^2; y = ce^{-x^2}$ – общее решение. Тогда $y_0 = e^{-x^2}$ – частное решение. Неоднородное: $y = c(x)e^{-x^2}$. Подставим $y' = c'(x)e^{-x^2} - c(x) * 2xe^{-x^2} + c(x) * 2xe^{-x^2} = xe^{-x^2}$. При решении данным методом обязательно должны сократиться слагаемые, содержащие $c(x)$. В противном случае было неверно найдено общее решение однородного уравнения. $c'(x) = x; c(x) = \frac{x^2}{2} + c_1; y = \left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)e^{-x^2}$ – общее решение неоднородного уравнения.

П.3. Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, где $\alpha \neq 1{,}0$ (потому что в противном случае получим линейное однородное уравнение). Будем решать это уравнение методом Бернулли. Искать решение будем в виде $y = u(x)v(x)$. Подставим в исходное уравнение. $u'v + uv' + puv = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha}; v(u' + pu) + uv' = q(x)u^{\alpha}v^{\alpha}$. Потребуем $v(u' + pu) = 0$. Тогда u_0 – частное решение. $u_0v' = q(x)u_0^{\alpha}v^{\alpha}; \frac{dv}{v^{\alpha}} = q(x)u_0^{\alpha-1}dx$.

П.4. Уравнения с однородной функцией

Функция $F(x, y)$ называется однородной функцией n – го измерения, если $F(tx, ty) = t^n F(x, y)$.

<u>Пример:</u> $F(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 = t^2x^2 + 2t^2xy + 3t^2y^2 = t^2(x^2 + 2xy + 3y^2)$ – однородная функция второго измерения.

В частности, если $F(tx, ty) = F(x, y)$, то $F(x, y)$ – однородная функция нулевого измерения.

<u>Замечание.</u> Если F и G – однородные функции n – го измерения, то $\frac{F}{G}$ – однородная функция нулевого измерения.

Если $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – однородная функция нулевого измерения, то $y' = f(x, y)$ называется дифференциальным уравнением первого порядка с однородной функцией.

Замечание. Если $G(x, y)dy = F(x, y)dx$, где F, G – однородные функции n – го измерения, то такое уравнение будет называться дифференциальным уравнением с однородной функцией.

Принцип решения: делается замена $y = xu(x); y' = u(x) + xu'(x); f(x, u * x) = f(1, u)$. Получаем $u + xu' = f(1, u); xu' = f(1, u) - u; \frac{du}{f(1,u)-u} = \frac{dx}{x}$.

Пример: $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}; y = xu; u'x + u = \frac{1}{u} + u; udu = \frac{dx}{x}; \frac{u^2}{2} = \ln|x| + \ln|c|; e^{\frac{y^2}{2x^2}} = cx$. Последнее называется общим интегралом.

П.5. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение вида $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, если $d\Phi = M(x, y)dx + N(x, y)dy$, называется уравнением в полных дифференциалах, т.е. если $M(x, y) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}; N(x, y) = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$. Если $d\Phi = 0$, то $\Phi(x, y) = c$. Последнее называется общим интегралом.

Теорема 26. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Доказательство. Пусть есть уравнение в полных дифференциалах, т.е. существует такая функция $\Phi(x, y)$, что $M(x, y) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}; N(x, y) = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$. Тогда $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Замечание. Пусть функции M и N дважды дифференцируемые функции. $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ не всегда является уравнением в полных дифференциалах, но всегда существует интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ такой, что $\mu M(x, y) + \mu N(x, y)dy = 0$ будет являться уравнением в полных дифференциалах.

§3. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

П.1. $F(x, y', y'') = 0$

Замена $y' = z(x); y'' = z'(x)$. Уравнение приводится к уравнению первого порядка $F(x, z, z') = 0$.

Пример: $xy'' = y' \ln\frac{y'}{x}; z(x) = y'(x); xz' = z\ln\frac{z}{x}; z' = \frac{z}{x}\ln\frac{z}{x}; u = \frac{z}{x}; z = ux; u'x + u = u\ln u; \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}; \ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln c; \ln u - 1 = cx; u = e^{cx+1}; \frac{z}{x} = e^{cx+1}; z = xe^{cx+1}; y' = xe^{cx+1}; y = \int xe^{cx+1}dx$. Не забывайте про вторую константу.

П.2. $F(y, y', y'') = 0$

Замена $y' = p(y); y''_{xx} = p'(y)y'_x = p'_y p$. Уравнение приводится к уравнению первого порядка $F(y, p, p' * p) = 0$.

§4. Линейные однородные уравнения высших порядков

Уравнение вида $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(y-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$, где $a_0 \neq 0$, называется линейным дифференциальным уравнением n – го порядка. Если $f(x) = 0$, то оно будет являться линейным однородным дифференциальным уравнением.

Не умоляя общности, будем рассматривать уравнения второго порядка $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ $(*)$.

Теорема 27. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются частными решениями $(*)$, тогда $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ тоже будет являться частным решением $(*)$.

Доказательство. Подстановкой.

Замечание. Теорема обобщается на уравнения n – го порядка.

Пусть функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ определены на отрезке $[a; b]$. Их комбинация будет являться линейно-независимой, если из равенства $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0$ следует $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Функции f_1, f_2 линейно-зависимы, если существует нулевая линейная комбинация с константами, среди которых хотя бы одна отлична от нуля.

Пример: $f_1(x) = x; f_2 = x^2$ – линейно-независимы, $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x + x^2$ – линейно-зависимы.

Пусть функции $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x)$ определены на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы $n - 1$ раз. Тогда определитель матрицы $W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ будет называться определителем Вронского, или вронскианом. Если он равен нулю, то функции, на которых он построен, линейно-зависимы.