§11. Вычисление определенных интегралов

П.1. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 14. Пусть некая функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и пусть $F(x)$ – первообразная от $f(x)$. Тогда интеграл $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$.

Доказательство. По теореме о производной интеграла по верхнему пределу $I(x) = \int_a^x f(t)dt\,; I'(x) = f(x)$, $I(x)$ – первообразная от $f(x)$. $I(a) = F(a) + c = 0; c = -F(a)$. Тогда $I(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$, а, следовательно, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

П.2. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Пусть есть непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(t)$, которая отображает промежуток $[\alpha;\beta]$ в промежуток $[a;b]$, при этом $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ (или наоборот). Рассмотрим интеграл от непрерывной функции $\int_a^b f(x)dx$. Оказывается, от переменной x и пределов интегрирования a и b можно перейти к переменной t и пределам интегрирования α и β: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta \big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$. Это называется формулой замены переменной в определенном интеграле.

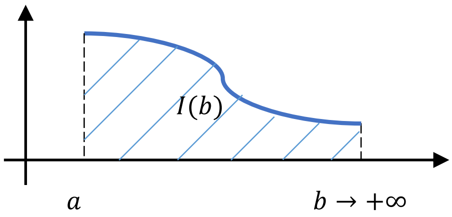
Интегрирование по частям: рассмотрим производную произведения $(uv)' = u'v + uv'$. Проинтегрируем обе части от a до b: $\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx$. По определению интеграла и дифференциала с помощью формулы Ньютона-Лейбница получаем: $uv\big|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv$. Следовательно, $\int_a^b udv = uv\big|_a^b - \int_a^b vdu$. Это называется формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.

§12. Несобственные интегралы первого рода (интегралы с бесконечными пределами интегрирования)

П.1. Основные определения

Пусть некая функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$, где a – некоторое конечное число. Возьмем некоторое число $b > a$ и рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)dx$, который обозначим $I(b)$. Так как функция непрерывна, то этот интеграл существует, обычный интеграл Римана. А теперь узнаем, как ведет себя $I(b)$ когда $b \to +\infty$. Оказывается, что если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} I(b)$, то этот предел называется несобственным интегралом первого рода функции f, и обозначается следующим образом: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$. Если этот предел существует, то говорят о существовании, или сходимости, несобственного интеграла. Если же не существует, то говорят о том, что несобственный интеграл не сходится, или не существует.

Геометрический смысл несобственного интеграла:



Площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции.

Аналогичным образом определяется $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$. А в случае, когда оба предела интегрирования – бесконечности, можно взять некоторую точку c и рассмотреть два интеграла: $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ и $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$. Тогда, если эти интегралы существуют, то интеграл $\int_{c-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ равен сумме этих интегралов: $\int_{c-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$.

<u>Пример:</u> $\int_{b}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{atan} x \Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{atan} b = \frac{\pi}{2}$.