# П.2. Признаки сравнения

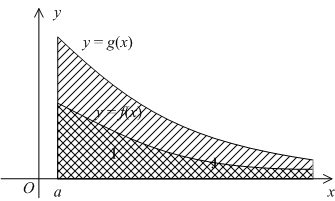
**Теорема 15.** Рассмотри интеграл , где . Этот интеграл расходится при и расходится при .

**Доказательство.** Пусть . Тогда . Пусть . Тогда .

**Теорема 16 (Сравнение несобственных интегралов 1 рода).** Пусть на интервале . Тогда:

1. Если сходится, то сходится.
2. Если расходится, то расходится.

**Доказательство.** Рассмотрим доказательства для обоих случаев:

1. Пусть существует предел . Но по свойству определенных интегралов . Рассмотри функцию . Эта функция возрастающая и ограничена сверху. Следовательно, существует ее предел , т.е. интеграл сходится.
2. От противного: Пусть расходится и сходится. Тогда, по первому пункту доказательства сходится. Противоречие. Следовательно, расходится.

Геометрический смысл теоремы: площадь криволинейной трапеции, ограниченной меньшей функцией, имеющей предел на , меньше площади криволинейной трапеции, ограниченной большей функцией, имеющей предел на .

**Теорема 17 (признак сходимости неопределенных интегралов первого рода).** Пусть определена на интервале , где и . Тогда, если

1. Если существуют такие , что , то интеграл сходится.
2. Если существуют такие , что , то интеграл расходится.

**Доказательство.** Очевидно. Вытекает из теорем 15 и 16.

**Пример:** Рассмотрим интеграл . . Но сходится. Следовательно, и исходный интеграл сходится.

# П.3. Абсолютная и исходная сходимости

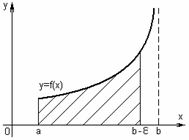
**Теорема 18.** Пусть непрерывна на интервале . Тогда, если сходится интеграл , то сходится и интеграл .

**Доказательство.** Рассмотрим функции и , где . Следовательно, и . Если их сложить, получим: и . Рассмотрим интеграл . Значит, так как существует предел , то должны существовать и пределы ,  
, так как в противном случае не существовал бы . Теперь распишем интеграл . Аналогично, интеграл левой части существует, так как существуют оба интеграла из правой части. Следовательно, существует и , то есть интеграл сходится.

**Замечание.** Утверждение, обратное теореме, неверно. Если сходится интеграл , то говорят, что этот интеграл сходится абсолютно. Если же интеграл не сходится, а сходится, то говорят, что этот интеграл сходится условно.

**Пример:** сходится абсолютно. Рассмотрим интеграл . , а интеграл сходится.

# §13. Несобственные интегралы от неограниченных функций (несобственные интегралы второго рода)

Пусть функция задана на некотором интервале . Пусть в точке функция имеет бесконечный разрыв, т.е. . Рассмотрим интеграл . Этот интеграл существует, так как функция непрерывна. Тогда рассмотрим предел . Если этот предел существует, то говорят, что несобственный интеграл второго рода существует и сходится: . Если этот предел не существует, то говорят, что несобственный интеграл не существует или расходится. Точку называют особой точкой функции .

**Замечание.** Аналогичным образом определяется несобственный интеграл второго рода, где специальной точкой является точка .

Пусть точка является внутренней точкой интервала и пусть эта точка является особой точкой функции , т.е. и . Если существуют пределы и , то говорят, что несобственный интеграл с особой точкой сходится: . Иначе же говорят о расходимости, или несуществовании несобственного интеграла второго рода с особой точкой . Если же в пределах и будут равны, то говорят о существовании несобственного интеграла в смысле главного значения : .

**Примеры:** 1) .

2) .

**Теорема 19 (признак сходимости и расходимости интегралов 2 рода).** Пусть непрерывна на интервале и – особая точка . Тогда:

1. Если существуют такие и , что для любого из исходного интервала выполняется неравенство , то интеграл сходится.
2. Если существуют такие и , что для любого из исходного интервала выполняется неравенство , то интеграл расходится.

**Доказательство.** Можно произвести замену переменной и свести к несобственному интегралу первого рода, для которого признак доказан.

**Замечание.** Заменой переменной несобственный интеграл второго рода можно свести к интегралу первого рода и наоборот. В силу этого для интегралов второго рода выполняются признаки сравнения.

# §14. Некоторые часто встречающиеся несобственные интегралы

1. Интеграл Эйлера . Особая точка . Выполним замену . Получаем . Следовательно, .
2. Интеграл Пуассона .
3. Интеграл Дирихле .