# §11. Вычисление определенных интегралов

# П.1. Формула Ньютона-Лейбница

**Теорема 14.** Пусть некая функция непрерывна на отрезке и пусть – первообразная от . Тогда интеграл .

**Доказательство.** По теореме о производной интеграла по верхнему пределу , – первообразная от . . Тогда , а, следовательно, .

# П.2. Замена переменной в определенном интеграле. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Пусть есть непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция , которая отображает промежуток в промежуток , при этом (или наоборот). Рассмотрим интеграл от непрерывной функции . Оказывается, от переменной и пределов интегрирования и можно перейти к переменной и пределам интегрирования и : . Это называется формулой замены переменной в определенном интеграле.

Интегрирование по частям: рассмотрим производную произведения . Проинтегрируем обе части от до : . По определению интеграла и дифференциала c помощью формулы Ньютона-Лейбница получаем: . Следовательно, . Это называется формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.

# §12. Несобственные интегралы первого рода (интегралы с бесконечными пределами интегрирования)

# П.1. Основные определения

Пусть некая функция непрерывна на промежутке , где – некоторое конечное число. Возьмем некоторое число и рассмотрим интеграл , который обозначим . Так как функция непрерывна, то этот интеграл существует, обычный интеграл Римана. А теперь узнаем, как ведет себя когда . Оказывается, что если существует конечный предел , то этот предел называется несобственным интегралом первого рода функции , и обозначается следующим образом: . Если этот предел существует, то говорят о существовании, или сходимости, несобственного интеграла. Если же не существует, то говорят о том, что несобственный интеграл не сходится, или не существует.

Геометрический смысл несобственного интеграла:

Площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции.

Аналогичным образом определяется . А в случае, когда оба предела интегрирования – бесконечности, можно взять некоторую точку и рассмотреть два интеграла: и . Тогда, если эти интегралы существуют, то интеграл равен сумме этих интегралов: .

**Пример:** .