§2. Частные производные. Полный дифференциал

П.1. Частные производные

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в окрестности точки $x_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$. Частной производной функции в точке x_0 называется $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x_0)}{\Delta x_1} = \lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_{01}+\Delta x_1, x_{02}, \dots, x_{0n}) - f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\Delta x_1}$. Обозначается как $f'_x(x_0)$. Аналогично определяются частные производные по другим параметрам.

<u>Пример:</u> $z = x^2 \sin y$; $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$.

П.2. Полный дифференциал

Пусть $z = f(x, y)$ имеет частные производные по x и y в точке (x, y) и в ее окрестности. Пусть эти частные производные непрерывны. Рассмотрим полное приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$. По теореме Лагранжа это равно $\frac{\partial f}{\partial y}(x + \Delta x, \bar{y})\Delta y + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y)\Delta x$, где $\bar{x}$ – значение между x и $x + \Delta x$, $\bar{y}$ – значение между y и $y + \Delta y$. Раз производные существуют и непрерывны в окрестности точки (x, y), то можно записать, что $\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \gamma_2(\Delta x, \Delta y)\right)\Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \gamma_1(\Delta x, \Delta y)\right)\Delta x$, где γ_1, γ_2 – бесконечно малые величины при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Получаем, что $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$. Тогда величина $df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$ называется полным дифференциалом, а $\gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = O\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right) = O(\Delta \rho)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем расстояние между точками (x, y) и $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + df$.

П.2. Производная сложной функции

Пусть $z = f(u, v), u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ и пусть φ и ψ определены в области G. Тогда z определена в D – образе G при отображении φ и ψ. Пусть Δx – приращение x, тогда $\Delta_x u, \Delta_x v$ – приращение u и v. $\Delta_x z = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v$. При $\Delta x \to 0$ $\gamma_1, \gamma_2 \to 0$. Частная производная по x сложной функции $z\big(\varphi(x, y), \psi(x, y)\big)$: $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\partial f}{\partial u} * \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\partial f}{\partial v} * \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$. Аналогичным образом $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$.

<u>**Замечание.**</u> Пусть $z = f(u, v, x), u = \varphi(x), v = \psi(x)$. Тогда $z = f(\varphi(x), \psi(x), x)$. Отсюда $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{d\psi}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x}$.

§3. Производная функции, заданной неявно

$F(x, y) = 0$ – неявное задание $y(x)$.

Теорема 20. Пусть $F(x,y), \frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ определены и непрерывны в области G, содержащей точку (x,y),удовлетворяющую уравнению: $F(x,y)=0$. Пусть в этой точке $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$, тогда $y'_x = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$.

Доказательство. Зададим приращения $x+\Delta x, y+\Delta y$ так, чтобы они лежали в области G и $F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$, тогда $F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=0$. $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\Delta y + \gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y,\ \gamma_1,\gamma_2 \to 0$ при $\Delta\rho \to 0$. Разделим на Δx. $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \gamma_1 + \gamma_2\frac{\Delta y}{\Delta x}$. При $\Delta x \to 0$ получим $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' = 0$, откуда $y'_x = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$.

Замечание. Теорему можно обобщить на случай функции n переменных. $F(z,x_1,x_2,\dots,x_n)$ – неявное задание $z(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ (при условии, что $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$).

§4. Частные производные высших порядков

Частная производная n – порядка есть частная производная от производной $n-1$ порядка. Пусть дана $z=f(x,y)$. Тогда ее производные второго порядка: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$. Последние две производные называются смешанными производными.

Теорема 21. Пусть $z=f(x,y), f'_x(x,y), f'_y(x,y), f''_{xy}(x,y), f''_{yx}(x,y)$ определены и непрерывны в точке (x,y) и ее окрестности. Тогда $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

Доказательство. Рассмотрим $A = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y)] - [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$ и $\varphi(x) = f(x,y+\Delta y) - f(x,y)$. Тогда $A = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)$. Так как f'_x определена в окрестности точки (x,y) то $\varphi(x)$ дифференцируема на $[x, x+\Delta x], \Delta x > 0$. Следовательно, по теореме Лагранжа, $A = \varphi'(\bar{x})\Delta x$. $\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y+\Delta y) - f'_x(\bar{x}, y)$. По теореме Лагранжа $\varphi'(\bar{x}) = f''_{xy}(\bar{x},\bar{y})\Delta y$. f'_x существует в окрестности точки (x,y) и $A = f''_{xy}(\bar{x},\bar{y})\Delta x\Delta y$. Теперь рассмотрим $A = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] - [f(x+\Delta x, y) - f(x,y)]$ и $\psi(x) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$. Аналогичный образом получим $A = f''_{yx}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})\Delta x\Delta y$. Приравняем полученные выражения $f''_{xy}(\bar{x},\bar{y})\Delta x\Delta y = f''_{yx}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}})\Delta x\Delta y$. При $\Delta x, \Delta y \to 0$ точки $(\bar{x},\bar{y}), (\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}}) \to (x,y)$. Получаем $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

Замечание. Теорему можно обобщить на случай функции n переменных.