## §6. Поверхности уровня. Линии уровня

Пусть в $D \in \mathbb{R}^3$ задана $f(x,y,z)$. Множество точек из $D$ таких, что $f(x,y,z) = c$ называется поверхностями уровня.

<u>Пример:</u> $f(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = c.$

Аналогично определяются линии уровня $f(x,y) = c$.

## §7. Производная по направлению. Градиент

### П.1. Производная по направлению

Пусть есть функция $u = f(x,y,z)$, определенная в области $D \in \mathbb{R}^3$ и пусть есть точка $M(x,y,z) \in D$. Из точки $M$ проведем вектор $\vec{l}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – приращения относительно точки $M$) с направляющими $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. Тогда длина вектора будет определяться как $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, а направляющие косинусы $\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta l}; \cos\beta = \frac{\Delta y}{\Delta l}; \cos\gamma = \frac{\Delta z}{\Delta l}$. Тогда $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y + \gamma_3 \Delta z$. Производной по направлению называется $\frac{\partial u}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x} \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial u}{\partial y} \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial u}{\partial z} \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l} + 0 = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

<u>Замечание.</u> Частные производные по $x, y, z$ тоже являются производными по направлению.

### П.2. Градиент и его свойства

Пусть $u = f(x,y,z)$ определена в $D \in \mathbb{R}^3$ и пусть точка $M(x,y,z) \in D$. Пусть существуют $\frac{\partial u}{\partial x}(M); \frac{\partial u}{dy}(M); \frac{\partial u}{\partial z}(M)$. Тогда градиентом функции $u$ в точке $M$ называют вектор $grad\, u(M) = \frac{\partial u}{\partial x}(M)\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}(M)\vec{k}$. Если определить градиент в каждой точке поля, то говорят о поле градиентов.

Пусть у $u(x,y,z)$ существуют в $D$ частные производные. Тогда функции $u$ в каждой точке можно сопоставить ее градиент.

<u>Теорема 22.</u> $\frac{\partial u}{\partial l}$ – проекция $grad\, u$ на $\vec{l}$ в каждой точке.

<u>Доказательство.</u> проекция $grad\, u$ на $\vec{l}$ равна $\frac{grad\, u * \vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \frac{\partial u}{\partial l}$.

Свойства градиента:

1. $\frac{\partial u}{\partial l}$ принимает наибольшее значение в точке, если $\vec{l}$ сонаправлен $grad\, u$ и $\max \frac{\partial u}{\partial l} = |grad\, u|$.

<u>Доказательство.</u> $\frac{\partial u}{\partial l}$ – проекция $grad\, u$ на $\vec{l}$. $\frac{\partial u}{\partial l} = |grad\, u| * \cos(\vec{l}; grad\, u)$ принимает максимум, если они сонаправлены.

2. $du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z = grad\, u * d\vec{r}$, $d\vec{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (dx, dy, dz)$.

3. **Теорема 23.** Пусть задана $u(x, y, z)$ в $D \in \mathbb{R}^3$ и пусть $M(x, y, z)$ – точка, лежащая на поверхности уровня, и пусть существует частная производная, и пусть в точке $M$ $|grad\, u| \neq 0$. Тогда градиент перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через точку $M$.

**Доказательство.** Пусть $M(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ лежит на той же поверхности уровня, что и $M(x, y, z)$, т.е. $u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = c$. Тогда $u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - u(x, y, z) = 0$, т.е. $\Delta u = du + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y + \gamma_3 \Delta z = grad\, u * \Delta\vec{r} + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y + \gamma_3 \Delta z = 0$. Разделим на $|\Delta\vec{r}|$: $grad\, u * \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|} + \gamma_1 \frac{\Delta x}{|\Delta\vec{r}|} + \gamma_2 \frac{\Delta y}{|\Delta\vec{r}|} + \gamma_3 \frac{\Delta z}{|\Delta\vec{r}|} = 0$. Очевидно, что $\frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|} = \vec{l}$ – единичный вектор, выходящий из точки $M$ на поверхности уровня. $\lim\limits_{|\Delta\vec{r}| \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}$ – единичный вектор, касательный к поверхности в точке $M$. $grad\, u * \lim\limits_{|\Delta\vec{r}| \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|} = 0$, откуда следует, что градиент перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через точку $M$.

## П.3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $u(x, y, z) = 0$ определена в $D \in \mathbb{R}^3$ и точка $M(x, y, z)$, лежащая на поверхности. Пусть существуют частные производные $u$ в точке $M$ и градиент $u$ в этой точке ненулевой. Пусть $L$ – некоторая кривая на поверхности, проходящая через точку $M$. $L$ задается параметрически задается параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [\alpha; \beta], t_0 \in (\alpha; \beta), M\big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\big)$. Пусть существуют $x'(t), y'(t), z'(t)$. Тогда вектор $r'(t) = x'(t), y'(t), z'(t)$ будет являться касательным к $L$ в точке $M$. $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial u}{\partial z} z'(t)$. Рассмотрим точку $M'\big(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), z(t_0 + \Delta t)\big)$, которая тоже будет лежать на поверхности уровня. Тогда $\Delta u = u(M') - u(M) = 0$. Значит, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial u}{\partial z} z'(t) = 0$. Следовательно, градиент перпендикулярен произвольному вектору касательной в точке $t_0$. Следовательно, все касательные вектора лежат в одной плоскости и градиент в этой точке перпендикулярен касательной плоскости в этой же точке.

Уравнение касательной плоскости: $\frac{\partial u}{\partial x}(M)(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(M)(y - y_0) + \frac{\partial z}{\partial z}(M)(z - z_0) = 0$, или же $grad\, u(M) * (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$.

Нормаль к поверхности – нормаль к касательной плоскости. Уравнение нормали к поверхности: $\frac{x - x_0}{\frac{\partial u}{\partial x}(M)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial u}{\partial y}(M)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial u}{\partial z}(M)}$.