Теорема 7 (Парсеваля). Пусть $f(x)$ – непрерывна и имеет кусочно-гладкую производную на $[-\pi;\pi]$ и $f(\pi)=f(-\pi)$. Тогда имеет место равенство $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$.

Доказательство. Рассмотрим выведенное выражение $\Delta n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}R_n^2(x)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\right)$. Мы знаем, что $\Phi_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ равномерно. Это значит, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что для любого $n>N$ и для любого $x\in[-\pi;\pi]$ выполняется $|R_n(x)|<\varepsilon$. Тогда выражение Δn^2 представить в виде $\Delta n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}R_n^2(x)dx\le\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varepsilon^2dx=\varepsilon^2$, откуда следует $\Delta n<\varepsilon$, что соответствует $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_n=0$. Тогда имеем $\frac{1}{2}\left(-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\right)=0$ при $n\to\infty$, откуда и следует требуемое равенство.

§6. Интеграл Фурье

П.1. Преобразование Фурье. cos и sin преобразование Фурье

Пусть $f(x)$ определена на $(-\infty;+\infty)$ и абсолютно интегрируема на этом интервале, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<Q<+\infty$. И пусть она раскладывается в ряд Фурье на любом промежутке $[-l;l]$ (удовлетворяет теореме Дирихле или предшествующей ей), т.е. в точках непрерывности $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{\pi k}{l}x+b_k\sin\frac{\pi k}{l}x\,,\frac{a_0}{2}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)dt\,,a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi k}{l}t\,dt\,,b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi k}{l}t\,dt$. Тогда $f(x)$ можно представить в виде $f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\left(\cos\frac{\pi k}{l}t\cos\frac{\pi k}{l}x+\cos\frac{\pi k}{l}t\sin\frac{\pi k}{l}x\right)dt=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi k}{l}(x-t)\,dt$. Узнаем, к чему сойдется ряд при $l\to\infty$. Для этого рассмотрим $\frac{1}{2l}\left|\int_{-l}^{l}f(t)dt\right|\le\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<\frac{Q}{2l}\xrightarrow[l\to\infty]{}0$ и $\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi k}{l}(x-t)\,dt=\left[\alpha_k=\frac{\pi k}{l}\right]=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}\frac{f(t)\pi}{l}\cos\alpha_k(x-t)\,dt=\left[\Delta\alpha_k=\frac{\pi}{l}\right]=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\Delta\alpha_k\cos\alpha_k(x-t)\,dt$. Без доказательства скажем, что последнее выражение стремится к $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt$ при $l\to\infty$. Последний интеграл называется двойным интегралом Фурье. В результате имеем, что в точках непрерывности при $l\to\infty$ $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt$, а в точках разрыва выражение $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt$ стремится к $\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big)$. Используя коитус разности, получим другую формулу интеграла Фурье: $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\alpha(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt\cos\alpha x+\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt\sin\alpha x)$. Ее также записывают в виде $\int_{0}^{\infty}d\alpha(A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x)$. Таким образом, мы получили удобный вид формулы для разложения функции любого вида в ряд Фурье, где $A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt\,,B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt$. Для четной функции поимеем разложение по косинусам: $B(\alpha)=0,A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt$, для нечетной поимеем разложение по синусам: $A(\alpha)=0,B(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt$.

Рассмотрим также функцию, которую будем называть производящей $F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt$ – косинус – преобразование Фурье, аналог $A(\alpha)$. Обратно восстанавливается как $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F(\alpha) \cos \alpha t \, d\alpha$. Аналогичным образом определяется синус – преобразование $F(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt \; \big(B(\alpha)\big), f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F(\alpha) \sin \alpha t \, d\alpha$.

П.2. Комплексная форма интеграла Фурье

Рассмотрим $A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x = A(\alpha) \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} + B(\alpha) \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2} = \frac{\left(A(\alpha) - iB(\alpha)\right)}{2} e^{i\alpha x} + \frac{\left(A(\alpha) + iB(\alpha)\right)}{2} e^{-i\alpha x} = C(\alpha) e^{i\alpha x} + \overline{C(\alpha)} e^{-i\alpha x}$, где $C(\alpha) = \frac{\left(A(\alpha) - iB(\alpha)\right)}{2}$, причем $\overline{C(\alpha)} = C(-\alpha)$. Применим это к любому интегралу, например: $\int_0^\lambda (A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x) d\alpha = \int_0^\lambda \left(c(\alpha) e^{i\alpha x} + c(-\alpha) e^{i(-\alpha x)}\right) = \int_{-\lambda}^{\lambda} c(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$, откуда имеем $f(x) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} (A(\alpha) \cos \alpha x + B(\alpha) \sin \alpha x) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} c(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$, где $C(\alpha) = \frac{\left(A(\alpha) - iB(\alpha)\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha t \, dt - \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \alpha t \, dt\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt$. Мы получили интеграл Фурье в комплексной форме.