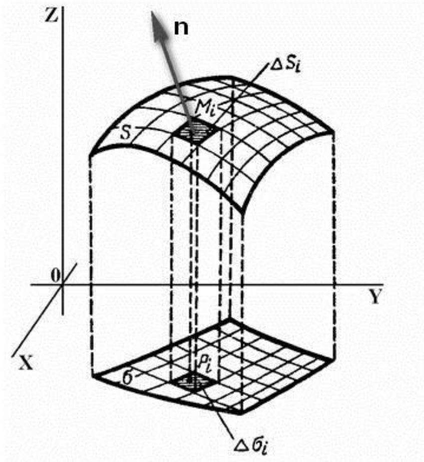
§7. Площадь поверхности

Пусть в $D \in \mathbb{R}^2$ задана непрерывная дифференцируемая функция $z = f(x, y)$. Пусть k – поверхность, которая проектируется на область D.

Площадь поверхности k измеряется пределом, к которому стремится площадь многогранника, описанного около поверхности при неограниченном увеличении числа его граней и при стремлении к нулю наибольшего из диаметров этих граней.



Описанный многогранник задает разбиение области D. Пусть $P_0(x_0, y_0)$ и $M_0\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ – проекция точки M_0 и точка касания $z_0 = f(x_0, y_0)$. Тогда уравнение касательной плоскости будет выглядеть следующим образом: $z - z_0 = f_x'(x, y)(x - x_0) + f_y'(x, y)(y - y_0)$. Обозначим площадь каждой грани как dq, а площадь ее проекции как $d\sigma$. Тогда $d\sigma = dq \cos\gamma$, где γ – угол между нормалью $\vec{n}$ в точке M_0 и осью Oz. Координаты этого вектора нормали будут совпадать с координатами вектора градиента: $\vec{n}\big(-f_x'(x_0, y_0); -f_y'(x_0, y_0); 1\big)$, так как мы рассматриваем внешнюю нормаль. Единичный вектор нормали к поверхности тогда будет равен:

$$\vec{n}\left(-\frac{f_x'(x_0,y_0)}{\sqrt{1+f_x'^2(x_0,y_0)+f_y'^2(x_0,y_0)}}; -\frac{f_y'(x_0,y_0)}{\sqrt{1+f_x'^2(x_0,y_0)+f_y'^2(x_0,y_0)}}; \frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2(x_0,y_0)+f_y'^2(x_0,y_0)}}\right)$$

$\cos\gamma$ будет тогда равен $\frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2(x_0,y_0)+f_y'^2(x_0,y_0)}}$. Тогда $dq = \frac{d\sigma}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + f_x'^2(x_0, y_0) + f_y'^2(x_0, y_0)}\,d\sigma$. Теперь можно выразить площадь поверхности как $S_{\text{пов}} = \lim\limits_{\max diam(q_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta q_k$, где q_k – грань, $\Delta q_k = dq_k$ – ее площадь, n – число разбиений. Подставим в наше выражение dq: $S_{\text{пов}} = \lim\limits_{\max diam(q_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta\sigma_k \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}$. При большой количестве разбиений можно перейти к интегральной сумме $S_{\text{пов}} = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dxdy$.

<u>Замечание:</u> Сложную фигуру можно разбить на части, каждую из которых можно однозначно спроектировать на какую-либо координатную плоскость.

§8. Криволинейные интегралы
П.1. Криволинейные интегралы 1 рода

Пусть L – кусочно-гладкая кривая, которая представляется как $\vec{r}(t) = \big(x(t); y(t); z(t)\big)$, где $t \in [\alpha;\beta]$, и каждый кусок которой имеет производную. Пусть L является дугой AB. Разобьем ее на n частей $[\alpha;\beta]$ так, что $t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$, $\vec{r}(t_0) = \overrightarrow{OA}, \vec{r}(t_n) = \overrightarrow{OB}$, а $\vec{r}(t_i)$ – точки деления дуги AB. Пусть на L задана функция $f(x,y,z)$. Для каждого промежутка $\Delta S_i = |\vec{r_i}|$ – длина промежутка, или звена ломаной, вписанной в кривую. На каждом промежутке возьмем точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, принадлежащую куску i ломаной. В каждой такой точке посчитаем значение функции, умножим на длину звена i и составим сумму для всех звеньев: $I_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(P_i)\Delta S_i$.

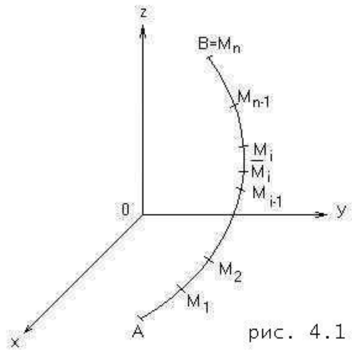


рис. 4.1

По определению, интеграл первого рода от функции f по кривой L называется предел последовательности интегральных сумм I_n при условии, что $\max \Delta S_i \to 0$ и не зависит от выбора точек P_i на кривой и характера разбиения кривой на отрезки. $\int_L f(x,y,z)dS \equiv \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta S_i \to 0}} \sum_{n=1}^{\infty} f(P_i)\Delta S_i = \int_{\cup AB} f(x,y,z)dS$.

<u>**Замечание:**</u> Иногда интеграл 1 рода называется интегралом по длине.

Свойства криволинейных интегралов 1 рода

1) Линейность
   a. $\int_L cf dS = c\int_L f dS$.
   b. $\int_L (f+g)dS = \int_L f dS + \int_L g dS$.
2) $\int_L dS = S_n$ – длина дуги L.
3) Интеграл не зависит от ориентации кривой.
4) Пусть $L = L_1 \cup L_2$ и L_1, L_2 имеют только одну общую точку. Тогда $\int_L f dS = \int_{L_1} f dS + \int_{L_2} f dS$.

Вычисление криволинейных интегралов 1 рода

Пусть $L = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [\alpha;\beta], \vec{r}(\alpha) = \overrightarrow{OA}, \vec{r}(\beta) = \overrightarrow{OB}$. Тогда $dS = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$. Криволинейный интеграл вычисляется как $\int_L f(x,y,z)dS = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$. В случае кривой $y = g(x)$ на плоскости: $dS = \sqrt{1 + g'^2(x)}dx$, $\int_L f(x,y)dS = \int_A^B f\big(x, g(x)\big)\sqrt{1+g'^2(x)}dx$.

П.2. Криволинейные интегралы 2 рода

Пусть L – кусочно-гладкая кривая, которая представляется как $\vec{r}(t) = \big(x(t); y(t); z(t)\big)$, где $t \in [\alpha; \beta]$, и каждый кусок которой имеет производную. Пусть L является дугой AB. Разобьем кривую на n частей так, что точки деления будут: $A = A_0; A_1; \dots; A_{n-1}; A_n = B$. На каждой дуге выберем точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Для каждой дуги $A_{i-1}A_i$ обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ как ее проекцию на ось Ox. Пусть на L задана функция $f(x, y, z)$. В каждой точке P_i посчитаем значение функции и умножим на проекцию Δx_i длины звена и составим сумму для всех звеньев: $\sum_{n=1}^{\infty} f(P_i)\Delta S_i$.

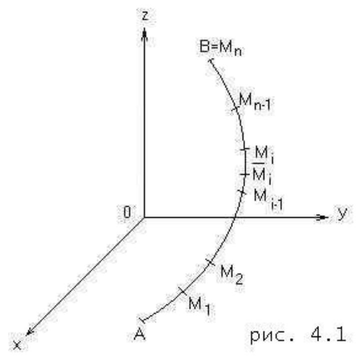


рис. 4.1

По определению, интеграл второго рода от функции f по кривой L по переменной x называется предел последовательности интегральных сумм I_n при условии, что $\max \Delta S_i \to 0$ и не зависит от выбора точек P_i на кривой и характера разбиения кривой на отрезки. $\int_L f(x, y, z)dx \equiv \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta S_i \to 0}} \sum_{n=1}^{\infty} f(P_i)\Delta x_i = \int_{\cup AB} f(x, y, z)dx$. При смене ориентации знак криволинейного интеграла второго рода меняется на противоположный. Аналогичным образом выводятся криволинейные интегралы второго рода по проекции на другую координатную ось.

Пусть на L задана вектор-функция $\vec{A} = (f, g, h)$. Тогда $J = \int_L f(x, y, z)dx + \int_L g(x, y, z)dy + \int_L h(x, y, z)dz = \int_L (fdx + gdy + hdz) = \int_L \vec{A}d\vec{r}$.

<u>Пример:</u> Работа силы по кривой $A = \int_L \vec{F}d\vec{r}$.