П.3. Разложение произвольных функций

Пусть $f(x)$ удовлетворяет а $[-\pi;\pi]$ теореме Дирихле. Тогда в точках непрерывности $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx$. Но тогда вне заданного промежутка функция $f(x)$ не будет определяться рядом, она будет повторяться периодически.

Замечание. Аналогично ведет себя и разложение на промежутке $[0;2\pi]$.

П.4. Ряды Фурье в комплексной форме

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$. Для действительной переменной справедливо разложение $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx$. Рассмотрим комплексный случай $c_n=a_n-ib_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos nx-i\sin nx)f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-inx}f(x)dx$. Тогда для $a_n\cos kx+b_n\sin kx=Re\big((a_n-ib_n)(\cos nx+i\sin nx)\big)=Re\big(c_ne^{inx}\big)=\frac{1}{2}\big(c_ne^{inx}+\overline{c_n}e^{-inx}\big)$. Откуда получаем ряд Фурье в комплексной форме $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\big(c_ne^{inx}+\overline{c_n}e^{-inx}\big)$; $\overline{c_n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos nx+i\sin nx)f(x)dx=c_{-n}$. В результате имеем ряд Фурье в комплексной форме $f(x)=\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx}$.

§5. Равномерная сходимость ряда Фурье. Сходимость ряда Фурье «в среднем»

Теорема 5. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$ и имеет кусочно-гладкую производную, и $f(-\pi)=f(\pi)$. Тогда ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно.

Доказательство. Рассмотрим $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=[u=f(x);dv=\cos nx\,dx]=\frac{1}{\pi n}f(x)\sin nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,dx=-\frac{b_n'}{n}$, где b_n' – коэффициент Фурье для $f'(x)$. Аналогично можно вывести $b_n=\frac{a_n'}{n}$. По следствию из теоремы 4 ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n'|}{n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n'|}{n}$ сходятся, а следовательно сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|, \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$, а вместе с ними и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|$.Тогда для разложения Фурье имеем $|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\le|a_n|+|b_n|$. По признаку Вейерштрасса ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно.

Сходимость «в среднем»

Пусть $F(x),F_1(x)$ – функции, заданные на $[a;b]$ и интегрируемы на нем вместе со своими квадратами. Рассмотрим $F_1(x)$ как приближение $F(x)$, при этом отклонением будет $R(x)=F(x)-F_1(x)$. Охарактеризовать это отклонение можно следующими способами:

1) $\max\limits_{[a;b]}|R(x)|$
2) по порядку малости $R(x)$ при $x\to a(b)$.
3) $\Delta=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b R^2(x)dx}$ – среднеквадратичное отклонение (квадраты площадей отклонений). Оно обобщает и дискретный случай $\Delta=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y(x_i)-y_1(x_i))^2}$.

Задача приближения в среднем: для $F(x)$ – найти такое $F_1(x)$ в некотором классе функций, чтобы среднеквадратичное отклонение было минимальным.

Теорема 6. Среди тригонометрических многочленов n – го порядка наилучшим приближением данной функции в смысле среднего квадратичного на $[-\pi;\pi]$

является многочлен Фурье данной функции, т.е. $\Delta_n = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\left(\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\right)\right)^2 dx}$ минимально тогда, когда $\alpha_0 = a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $\alpha_k = a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx$, $\beta_k = b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $F_n(x) = \frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx$. Рассмотрим $\Delta_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \left(\frac{1}{2}\alpha_0 a_0 + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k + \beta_k b_k\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2+\beta_k^2\right)$. Для вывода этого выражения использовались те же преобразования, что и в теореме 4. Имеем $2\Delta_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \alpha_0 a_0 + \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \left(\frac{1}{2}a_0^2 - \frac{1}{2}a_0^2\right) - \frac{1}{2}a_0^2 - \frac{1}{2}a_0^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k a_k + \beta_k b_k + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2 + b_k^2 - \sum_{k=1}^{n}a_k^2 + b_k^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{1}{2}(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{k=1}^{n}((\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2) - \frac{1}{2}a_0^2 - \sum_{k=1}^{n}a_k^2 + b_k^2 + M$, где $M = \frac{1}{2}(\alpha_0 - a_0)^2 + \sum_{k=1}^{n}((\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2)$. Нетрудно заметить, что $M \geq 0$, при этом $2\Delta_n^2$ будет минимально при минимальном значении M, т.е. тогда, когда $\alpha_0 = a_0, \dots, \alpha_k = a_k$,. Тогда выражение $2\Delta_n^2$ примет вид $2\Delta_n^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{1}{2}a_0^2 - \sum_{k=1}^{n}a_k^2 + b_k^2$.