§3. Знакопеременные ряды

П.1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

<u>Теорема 9 (Признак Лейбница).</u> Пусть есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\,, a_n > 0$. Пусть a_n монотонно убывает до нуля. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится и его сумма $S \leq a_1$ не превосходит первого члена ряда.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим четную сумму $S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$. В силу монотонности каждое из выражений в скобках положительно, отсюда следует, что S_{2m} монотонная возрастает. С другой стороны, если перегруппировать выражение как $S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - a_{2m}$, то каждое выражение в скобках тоже будет положительным, и $S_{2m} \leq a_1$. Получается, что S_{2m} возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$. Теперь рассмотри нечетные суммы $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$. $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$. Значит существует и предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$ нечетных сумм. Получается, что исходная последовательность также имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \leq a_1$.

<u>Пример.</u> Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится (ряд Лейбница).

<u>Замечание.</u> Остаток знакочередующегося ряда обладает всеми его свойствами, например, его сумма по модулю не превосходит первого отброшенного члена $r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \xrightarrow[N\to\infty]{} r\,, r \leq |a_{N+1}|$. С помощью этого признака можно оценивать погрешность.

П.2. Абсолютная и условная сходимость

Пусть есть знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Рассмотрим знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

<u>Теорема 10.</u> Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то тогда сходится и знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

<u>Доказательство.</u> Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится. Тогда по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любого $n > N$ и натурального p выполняется неравенство $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$. Тогда $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots a_{n+p}| < \varepsilon$. Тогда по критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если сходится основной ряд и ряд из абсолютных величин, то такой ряд называется абсолютно сходящимся. Если сходится только основной ряд, а ряд из абсолютных величин расходится, то ряд сходится условно.

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1) В абсолютно сходящемся ряде можно поменять местами члены ряда любым образом, при этом при такой перестановке получается абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.
2) Два абсолютно сходящихся ряда можно почленно складывать и вычитать. В результате получится ряд с суммой, равной сумме или разности сумм исходных рядов соответственно.
3) Рассмотрим абсолютно сходящиеся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Назовем произведение этих рядов другим рядом $\sum_{n=2}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, т.е. $c_2 = a_1b_1; c_3 = a_1b_2 + a_2b_1; \dots; c_n = a_1b_{n-1} + a_2b_{n-1} + \cdots + a_{n-1}b_1$. К тому же, если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, то $\sum_{n=2}^{\infty} c_n = A * B$.

Свойства условно сходящихся рядов

1) Пусть есть условно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Обозначим его положительные члены $\{a_k^+\} = a_1^+; a_2^+; \dots; a_k^+$ и отрицательные $\{a_k^-\} = -a_1^-; -a_2^-; \dots; -a_k^-$. Множества $\{a_k^+\}$ и $\{a_k^-\}$ бесконечны. Для пояснения последнего пойдем от противного: пусть множество $\{a_k^-\}$ конечно. Тогда можно рассмотреть хвост ряда, который содержит только положительные члены. Этот хвост будет хвостом сходящегося ряда, составленного из абсолютных величин, т.е. ряд сходится абсолютно. Противоречие. Значит, множество $\{a_k^-\}$ бесконечно. Аналогичные рассуждения можно провести и для множества $\{a_k^+\}$.
2) Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся.
   <u>Доказательство.</u> Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\widetilde{S_n} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, $S_m^+ = \sum_{k=1}^{m} a_k^+$, $S_p^- = \sum_{k=1}^{p} a_k^-$, $m + p = n$. Получаем, что $S_n = S_m^+ - S_p^- \to S$; $\widetilde{S_n} = S_m^+ + S_p^- \to \infty$. Следовательно, $S_n + \widetilde{S_n} = 2S_m^+ \xrightarrow[m\to\infty]{} +\infty$. Получаем, что ряд из положительных значений расходится. Аналогичные рассуждения можно провести и для ряда с отрицательными членами.
3) <u>Теорема 11 (Римана).</u> Пусть $S \in R$ (или $\pm\infty$). В условно сходящемся ряде можно так переставить члены, что его сумма будет равняться S.
   <u>Идея доказательства.</u> Рассмотрим число S. Так как ряд, составленный из положительных членов, расходится, то выполняется неравенство $a_1^+ + a_2^+ + \dots + a_m^+ > S$. Потом наберем такое количество отрицательных членов, чтобы выполнялось неравенство $a_1^+ + a_2^+ + \dots + a_m^+ - a_1^- - a_2^- - \dots - a_p^- < S$. Так, постепенно набирая то положительные, то отрицательные члены, сумма выражения начинает приближаться к числу S.

§4. Функциональные ряды
П.1. Основные определения

Ряд называется функциональным, если каждый член ряд есть некая функция от x. $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Если при $x = x_0$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, то x_0 – точка сходимости. Множество всех точек сходимости называется областью сходимости ряда. В области сходимости ряда можно определить сумму ряда как функцию $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. При этом $S(x)$ можно записать в виде $S(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) + r_n(x)$, где $r_n(x) \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n(x)$ – хвост ряда. В каждой точке области сходимости стремится к нулю $r_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Пусть x_1 принадлежит области сходимости. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_1, что для любого $n > N_1$ выполняется $|r_n(x_1)| < \varepsilon$.

Пусть x_2 принадлежит области сходимости. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_2, что для любого $n > N_2$ выполняется $|r_n(x_2)| < \varepsilon$.

Можно сказать, что для любого конечного числа точек $x_1, x_2, \dots, x_p$ из области сходимости существует такое $N = \max(N_1, N_2, \dots, N_p)$ такое, что для любого $n > N$ и $x_k, k = 1, \dots, p$ из набора выполняется неравенство $|r_n(x_k)| < \varepsilon$.

Сходящийся функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся в области U, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любого $n > N$ и для любого $x \in U$ выполняется неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$.