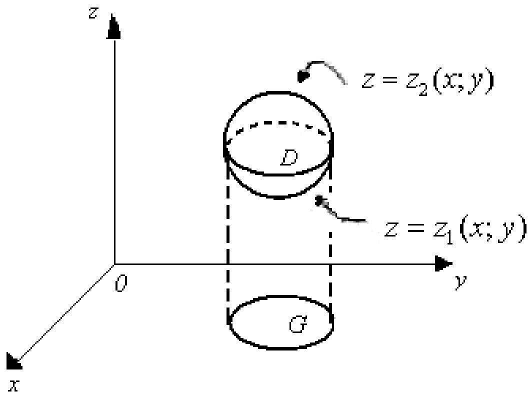
§5. Тройной интеграл и его вычисление

Пусть есть некоторая область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ и пусть в области Ω задана функция $f(x,y,z)$. D – проекция Ω на XoY. Пусть Ω обладает свойством, что любая прямая, параллельная осям координат, пересекает Ω не более, чем в двух точках. L – линия, которая проектируется на область D. Ω разбиваем на элементарные объемы $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$, причем X_j имеет объем μX_j. Тройной интеграл по определению $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \lim\limits_{|\tau|\to 0} \sum_{j=1}^{j_\tau} f(P_j)\mu X_j$, где $P_j \in X_j$. Если предел в правой части существует и не зависит от разбиения τ и выбора точек P_j, то тогда существует тройной интеграл.



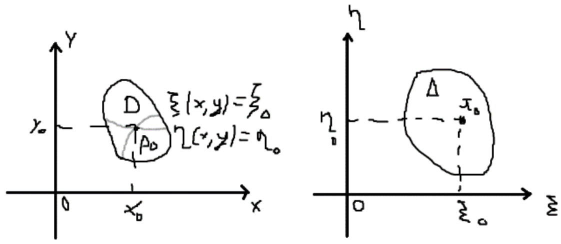
Вычисление тройного интеграла

Для каждой точки $M_j \in D$ считаем $z = \chi_1(x,y)$ – нижняя граница Ω и $z = \chi_2(x,y)$ – верхняя граница Ω. Если ввести функцию $F(x,y) = \int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, то тройной интеграл можно представить в виде $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_D F(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$

<u>Замечание.</u> Если область сложная, то ее всегда можно разбить на области, для которых любая прямая, параллельная осям координат, пересекает границу области не более, чем в 2 точках.

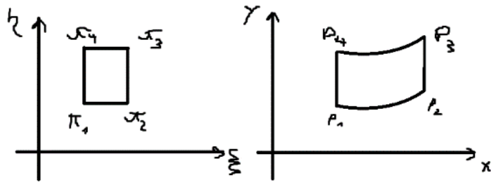
§6. Замена переменных в кратных интегралах
П.1. Преобразование плоских областей

Пусть даны две плоскости XoY и $\xi o\eta$ и две области D и Δ. Область Δ является прообразом D, т.е. каждой точке из одной области ставится в соответствие ровно одна точка из другой области (взаимно-однозначное). Возьмем точки $p_0(x_0,y_0)$ и $\pi_o(\xi_0,\eta_0)$. Если мы зафиксируем значения ξ_0 и η_0, то $\xi(x,y) = \xi_0$ и $\eta(x,y) = \eta_0$ в области D будут отображением прямых $\xi = \xi_0$ и $\eta = \eta_0$ в области Δ, то есть $(*)\begin{cases} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \end{cases}$ – взаимно-однозначное отображение Δ в D, а $\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$ – обратное $(*)$. Линии $\begin{cases} \xi(x,y) = \xi_0 \\ \eta(x,y) = \eta_0 \end{cases}$ носят название координатных линий в D (криволинейные координаты).



П.2. Преобразование разбиений

В плоскости $\xi o \eta$ возьмем прямоугольную область (разбиение) и ее отображение $\begin{cases} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \end{cases}$ в плоскости XoY. Координаты прямоугольника в $\xi o \eta$: $\pi_1(\xi;\eta)$; $\pi_2(\xi + d\xi;\eta)$; $\pi_3(\xi + d\xi;\eta + d\eta)$; $\pi_4(\xi;\eta + d\eta)$. Координаты в XoY: $p_1(x_1;y_1)$; $p_2(x_2;y_2)$; $p_3(x_3;y_3)$; $p_4(x_4;y_4)$. Выразим точки $p_1, \dots p_4$ через точки



$\pi_1, \dots \pi_4$: $\begin{cases} x_1 = x(\xi;\eta) \\ y_1 = y(\xi;\eta) \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = x(\xi + d\xi;\eta) \\ y_2 = y(\xi + d\xi;\eta) \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = x(\xi + d\xi;\eta + d\eta) \\ y_3 = y(\xi + d\xi;\eta + d\eta) \end{cases}$; $\begin{cases} x_4 = x(\xi;\eta + d\eta) \\ y_4 = y(\xi;\eta + d\eta) \end{cases}$.

Пусть $x(\xi,\eta)$ и $y(\xi,\eta)$ – непрерывно-дифференцируемые функции. Тогда $\begin{cases} x_1 = x(\xi;\eta) \\ y_1 = y(\xi;\eta) \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = x(\xi;\eta) + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \alpha_2 \\ y_2 = y(\xi;\eta) + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \beta_2 \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = x(\xi;\eta) + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \alpha_3 \\ y_3 = y(\xi;\eta) + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \beta_3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_4 = x(\xi;\eta) + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \alpha_4 \\ y_4 = y(\xi;\eta) + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \beta_4 \end{cases}$, где α_n и β_n – бесконечно малые более высокого порядка малости, чем $\partial\xi$ и $\partial\eta$.

Рассмотрим проекции сторон $p_1p_2p_3p_4$: $p_1p_{2_{oX}} = x_2 - x_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \alpha_2$; $p_1p_{2_{oY}} = y_2 - y_1 = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \beta_2$. Аналогичным образом вычислим остальные проекции.

Пусть $\Delta\sigma$ – площадь $p_1p_2p_3p_4$. $\Delta\sigma \sim 2S_\Delta p_1p_2p_4 = \left\| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{vmatrix} \right\| = \left\| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \right\| d\xi d\eta$. Последний определитель называется якобианом преобразования $\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$, и обозначается $\mathcal{J}(\xi,\eta;x,y) = \left\| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \right\|$.

Если рассмотреть отношение площадей $\frac{\Delta\sigma}{d\xi d\eta} \xrightarrow[\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4 \to \pi_1]{} \left\| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \right\|$.

Замечание. Определитель положителен, если обход точек сохраняется, и отрицательный, если не сохраняется.

П.3. Формула замены переменной в двойном интеграле

Модель якобиана преобразования характеризует искажение площади. Рассмотрим $\iint_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{|\tau| \to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} f(P_i)\Delta\sigma_i = \lim\limits_{|\tau'| \to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} f\big(x(\pi_i);y(\pi_i)\big) * \left\| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \right\| * d\xi d\eta = \iint_\Delta f\big(x(\xi,\eta);y(\xi,\eta)\big) |\mathcal{J}(\xi,\eta;x,y)| d\xi d\eta$, где τ' - разбиение Δ, которое порождает τ – разбиение D, $\Delta\sigma_i = \mu X_i$.

<u>Пример.</u> Двойной интеграл в полярных координатах. $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ – формула перехода к полярным координатам. Пусть Δ – в полярных координатах, тогда D – в декартовых. Якобиан тогда равен $\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\phi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$. Получаем $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(\rho\cos\varphi\,;\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$.

П.4. Замена переменной в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u,t,w) \\ y = \psi(u,t,w) \\ z = \chi(u,t,w) \end{cases}$. Область Ω' в плоскости (u,t,w) переходит в Ω в плоскости (x,y,z), т.е. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(\varphi(u,t,w);\psi;\chi)|\mathcal{J}|dudtdw$. Цилиндрические координаты отличаются от полярных только добавлением третьего измерения $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = \xi \end{cases}$. Тогда $\mathcal{J}(u,t,w;x,y,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} =$

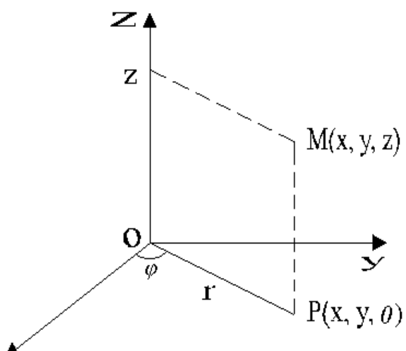


рис.3

$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\phi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$.

Отсюда $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} f\big(x(\rho,\varphi,\xi)\,;y(\rho,\varphi,\xi);z(\rho,\varphi,\xi)\big)\rho d\rho d\varphi d\xi$.

Для сферических координат точке $M(x,y,z)$ будем сопоставлять три переменные (ρ,φ,θ) (см. рисунок): $\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ x = \rho\cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le \rho < +\infty \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$. Обратным преобразованием в данном случае является $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\varphi = \frac{y}{x} \\ \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases}$.

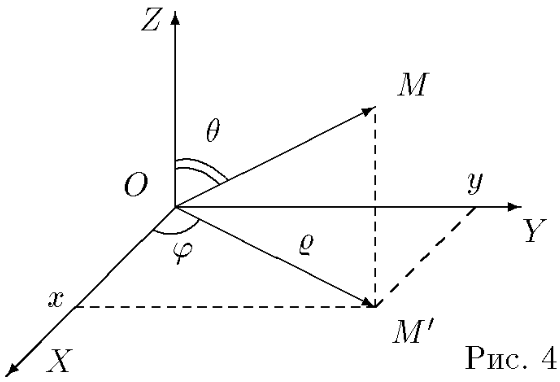


Рис. 4

Якобианом преобразования будет являться $\mathcal{J}(\rho,\varphi,\theta;x,y,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$ $\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta$. Отсюда $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} f\big(x(\rho,\varphi,\theta);y(\rho,\varphi,\theta);z(\rho,\varphi,\theta)\big)\rho^2\sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta$.