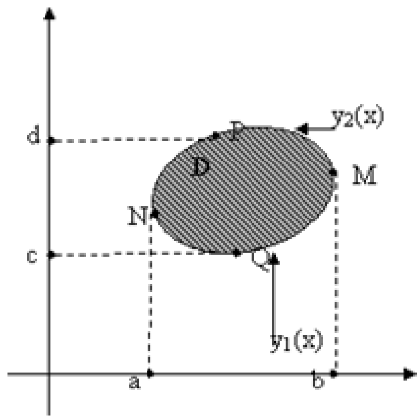
§10. Формула Грина

П.1. Вывод формулы Грина для односвязной области

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана односвязная область D такая, что любая прямая, параллельная осям координат, пересекает границу этой области не более, чем в двух точках. Обозначим как ∂D ее границу. Тогда область D можно определить двумя способами:



$$D = \{(x,y) | a \le x \le b; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$
$$D = \{(x,y) | c \le y \le d; \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x)\}$$

Будем обходить контур в положительном направлении.

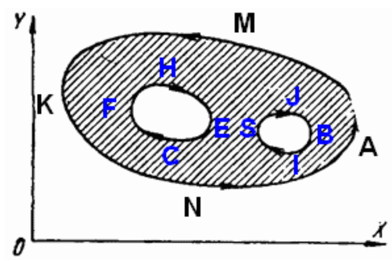
Теорема 7. Пусть D – элементарная область. Функции $P(x,y), Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ на замыкании $\overline{D}$ (область вместе с ее границей). Тогда выполняется равенство $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\partial D} Pdx + Qdy$. Эта формула называется формулой Грина. Она связывает криволинейный интеграл и двойной интеграл.

Доказательство. Рассмотрим $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b \Big(P\big(x,\varphi_2(x)\big) - P\big(x,\varphi_1(x)\big)\Big) dx = \int_{\cup NPM} P(x,y)dx - \int_{\cup NQM} P(x,y)dx = \int_{\cup NPM} P(x,y)dx + \int_{\cup MQN} P(x,y)dx = -\oint_{\partial D} Pdx$. Аналогичным образом выводится и для функции Q.

Замечание. Если область односвязная, но не является элементарной, то ее всегда можно разбить на элементарные области.

П.2. Формула Грина для многосвязной области

Теорема 8. Пусть D – n-связная область. Функции $P(x,y), Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ на замыкании $\overline{D}$. Тогда для этой области выполняется формула Грина на условии $\partial D = \Gamma^+ \cup \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^- \cup \ldots \cup \Gamma_n^-$.



Доказательство. Не умоляя общности, рассмотрим трехсвязную область. Сделаем разрезы AB, SE. Тогда $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\cup KNA} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + \int_{\cup AB} (Pdx + Qdy) + \int_{\cup BIS} (Pdx + Qdy) + \int_{\cup SE} (Pdx + Qdy) + \int_{\cup ECF} (Pdx + Qdy) + \int_{\cup FHE} (Pdx + Qdy) + \int_{\cup ES} (Pdx + Qdy) + \int_{\cup SJB} (Pdx + Qdy) + \int_{\cup BA} (Pdx + Qdy) + \int_{\cup AMK} (Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma^+} (Pdx + Qdy) + \int_{\Gamma_1^-} (Pdx + Qdy) + \int_{\Gamma_2^-} (Pdx + Qdy) = \oint_{\partial D} Pdx + Qdy$

П.3. Следствия формулы Грина

1) Пусть D – односвязная область, ∂D – ее граница. Пусть для нее справедлива формула Грина. Пусть $P = -y, Q = x, \frac{\partial P}{\partial y} = -1, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Тогда $\iint_D 2dxdy = \oint_{\partial D} -ydx + xdy$. Тогда $S_D = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} -ydx + xdy$.

2) Если в D выполняется $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то $\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = 0$.

3) Пусть $Q = \frac{du}{dx}, P = -\frac{du}{dy}$. Тогда $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \Delta U$ – оператор Лапласа (лапласиан). В этом случае формула Грина привет вид $\iint_D \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) dxdy = \oint_{\partial D} -\frac{du}{dy}dx + \frac{du}{dx}dy = \oint_{\partial D} -\frac{du}{dy}\cos(\vec{\tau}; Ox)\, dS + \frac{du}{dx}\cos(\vec{\tau}; Oy)\, dS = \oint_{\partial D} \frac{du}{dy}\sin(\vec{n}; Ox)\, dS + \frac{du}{dx}\cos(\vec{n}; Ox)\, dS = \oint_{\partial D} \frac{\partial U}{\partial n} dS$ – производная по направлению, где $\vec{n}$ – нормаль, $\vec{\tau}$ – касательная. Переходы косинусов к синусам сделаны с помощью $(\vec{\tau}; Ox) = (\vec{n}; Ox) + \frac{\pi}{2}$.

Пример. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Тогда $S = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\sin^2 t + ab\cos^2 t)dt = \pi ab$.

§11. Несобственные двойные интегралы. Интеграл Пуассона

Пусть D – неограниченная область в $\mathbb{R}^2$, пусть $z = f(x, y)$ непрерывна в D. Рассмотри ограниченную область $B \in D$. Составим двойной интеграл по ней: $I(B) = \iint_B f(x, y)dxdy$. Будем произвольно расширять область B до области D.

Если существует $A = \lim\limits_{B \to D} I(B)$, который не зависит от характера расширения, то этот предел и называется несобственным двойным интегралом. Если этот предел конечен, то говорят о сходимости несобственного двойного интеграла. Если не существует или бесконечен – о расходимости, или несуществовании.

Рассмотрим интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Составим двойной несобственный интеграл $J = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\, dy = \lim\limits_{B \to \mathbb{R}^2} \iint_B e^{-x^2-y^2} dxdy$, где B – круг радиуса r. Получаем $\lim\limits_{r\to\infty} \iint_{x^2+y^2 \le r^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim\limits_{r\to\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r e^{-\rho^2} \rho d\rho = \lim\limits_{r\to\infty} -2\pi \frac{1}{2} e^{-\rho^2}\Big|_0^r =$
$\lim\limits_{r\to\infty} \pi\left(-e^{-r^2} + 1\right) = \pi$. Отсюда $J = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \pi$, значит $J = \sqrt{\pi}$.