П.2. Свойства сходящихся рядов

1) Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то для любого $\lambda \in R$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ сходится, и если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda S$.
2) Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ сходятся, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = A + B$.
3) Если у сходящегося ряда отбросить или приписать конечное число членов, то сходимость ряда не изменится.

<u>Замечание.</u> $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ – остаток (хвост) ряда.

П.3. Гармонический ряд

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ – расходящийся, несмотря на то, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Второй замечательный предел: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \uparrow e$. Следовательно, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e, n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1, \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$. Если выписать члены данного ряда, получим: $\ln 2 - \ln 1 < 1, \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}, \ldots, \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$. Если расписать сумму ряда, сократятся многие члены, останется только $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$. Тогда ряд расходится по определению.

<u>Замечание.</u> Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, где $\alpha > 0$, называется обобщенным гармоническим рядом. Он расходится при $0 < \alpha \le 1$ и сходится $\alpha > 1$.

П.4. Критерий Коши сходимости ряда

<u>Теорема 2.</u> Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любого $n > N$ и $p > 0$ справедливо неравенство $|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

<u>Доказательство.</u> Критерий Коши сходимости ряда сводится к критерию Коши сходимости последовательности частичных сумм $\left(a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} = S_{n+p} - S_n\right)$.

§2. Ряды с положительными членами

П.1. Лемма о сходимости ряда с положительными членами

<u>Лемма.</u> Если последовательность S_n ряда ограничена, то ряд сходится.

<u>Доказательство.</u> $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$. Но $a_{n+1} > 0$. Следовательно, $S_n \uparrow$. Также, S_n ограничена сверху. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. А значит ряд сходится по определению.

П.2. Признаки сравнения

<u>Теорема 3 (Первый признак сравнения).</u> Пусть есть ряды с положительными членами $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

1) Если, начиная с некоторого места, $a_n \le b_n$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится.
2) Если, начиная с некоторого места, $a_n \le b_n$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ расходится, то и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ расходится.

__Доказательство.__
1) Не умоляя общности, скажем, что для любого n выполняется $a_n \le b_n$. Пусть $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$; $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Тогда $A_n \le B_n$. Но B_n ограничена. Следовательно, A_n возрастает и ограничена. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$. Следовательно, ряд сходится по определению.
2) От противного.

__Теорема 4 (Второй признак сравнения).__ Пусть есть ряды с положительными членами $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, и, начиная с некоторого места, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$.

1) Если сходится ряд с большим отношением, то сходится и ряд с меньшим.
2) Если расходится ряд с меньшим отношением, то расходится и ряд с большим.

__Доказательство.__ Не умоляя общности, скажем, что для любого n выполняется $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Распишем это для каждого n: $\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1}, \frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Если мы перемножим все полученные неравенства, сократятся почти все члены, останется только $\frac{a_{n+1}}{a_1} \le \frac{b_{n+1}}{b_1}$, откуда можно выразить $a_{n+1} \le \frac{a_1 b_{n+1}}{b_1} = \lambda b_{n+1}$. Применив теорему 3, доказательство очевидно.

__Теорема 5.__ Пусть есть ряды с положительными членами $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, и, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0$, то оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

__Доказательство.__ Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $\left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \varepsilon$. Следовательно, $A - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < A + \varepsilon$, откуда $a_n < (A+\varepsilon) b_n$. Получается, что по теореме 3 эти ряды ведут себя одинаково. Если $A = 1$, то они являются эквивалентными бесконечно малыми.

__Пример.__ $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Второй ряд расходится. Значит, исходный ряд расходится.

П.3. Признаки Даламбера

__Теорема 6.__ Пусть есть ряд с положительными членами $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то при $l > 1$ ряд расходится, при $l < 1$ ряд сходится, при $l = 1$ неизвестно, требуется дополнительное исследование.

__Доказательство.__ Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon$. Тогда $l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$.

Пусть $l < 1$. Тогда $l + \varepsilon = q < 1$. Тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ и $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится. Следовательно, по теореме 4 ряд сходится.

Пусть $l > 1$. Тогда $l - \varepsilon = q > 1$. Тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q$ и $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ расходится. Следовательно, по теореме 4 ряд расходится.

П.4. Радикальный признак Коши

<u>Теорема 7.</u> Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[a]{a_n}=l$, то при $l>1$ ряд расходится, при $l<1$ ряд сходится, при $l=1$ требуется дополнительное исследование.

<u>Доказательство.</u> Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что для любого $n>N$ выполняется неравенство $\left|\sqrt[n]{a_n}-l\right|<\varepsilon$. Тогда $l-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<l+\varepsilon$.

Пусть $l<1$. Тогда $l+\varepsilon=q<1$. Тогда $a_n<q^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ сходится. Следовательно, по теореме 3 ряд сходится.

Пусть $l>1$. Тогда $l-\varepsilon=q>1$. Тогда $a_n>q^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}q^n$ расходится. Следовательно, по теореме 3 ряд расходится.

<u>Пример.</u> $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$. Тогда $\frac{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}}{3}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{3}\uparrow\frac{e}{3}<1$. Следовательно, интеграл сходится.

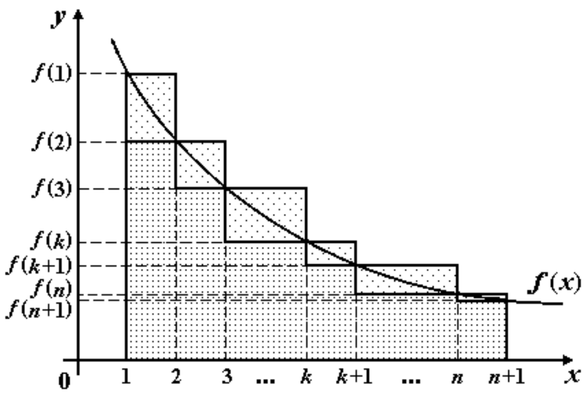
П.4. Интегральный признак Коши

Пусть есть ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и задана монотонно убывающая функция $f(x)$ на $[1;+\infty)$ и $f(1)=a_1, f(n)=a_n$.

<u>Теорема 8.</u>

1) $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится.
2) $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ расходится тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

<u>Доказательство.</u> Площадь ступенчатая фигура – сумма ряда, площадь криволинейной трапеции – несобственный интеграл. Если ряд больше и сходится, то и интеграл тоже. С другой стороны, вписанный ряд (без первого члена) будет меньше криволинейной трапеции, и если сходится интеграл, то сходится и ряд.



$a_2+a_3+\cdots+a_n<\int_1^n f(x)dx<a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$. Это равносильно $S_n-a_1<\int_1^n f(x)dx<S_{n-1}$. Отсюда: если существует предел S_{n-1}, то существует и интеграл, если существует интеграл, то существует и предел $S_{n-1}=S_n-a_1$.