П.3. Свойства степенных рядов

Теорема 19. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ представляет собой непрерывную функцию в интервале сходимости $[-R_1; R_1], R_1 < R$.

Доказательство. Для любого $x \in [-R_1; R_1]$ рассмотрим ряд $|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots$. Для него имеем $|a_0| \le |a_0|, |a_1 x| < |a_1| R, \dots, |a_n x^n| < |a_n| R_1^n, \dots$. Мажорирующий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R_1^n$ сходится абсолютно, следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно, следовательно, $S(x)$ – непрерывная функция в $[-R_1; R_1]$.

Теорема 20. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ можно почленно дифференцировать $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$, интегрировать $\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ на любом отрезке из области сходимости (потому что на нем он сходится равномерно), при этом полученные степенные ряды будут иметь тот же радиус сходимости $R = R_1 = R_2$.

Доказательство. Покажем, что $R_1 = R$. $R_1 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n n}{a_{n+1}(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$. Аналогично $R_2 = R$.

§6. Разложение функций в степенные ряды

Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ сходится к $S(x)$ в области сходимости $(-R + x_0; x_0 + R)$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ является разложением функции $S(x)$ на этом интервале. Обратной задачей является нахождение разложения функции в ряд.

П.1. Ряды Тейлора и Маклорена

Пусть $y = f(x)$ – дифференцируемая бесконечное число раз в точке x_0 и в ее окрестности. Пусть существует ее разложение в ряд такое, что его сумма равна $f(x)$ и $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$. Возьмем производную $f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots$. Возьмем вторую производную $f''(x) = 2a_2 + 3 * 2a_3(x - x_0) + 4 * 3a_4(x - x_0)^2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots$. Можно вывести закономерность: $f^{(n)}(x) = n!\, a_n + (n+1)n * \dots * 2a_{n+1}(x - x_0) + \cdots$. Положим $x = x_0$. Тогда $f(x_0) = a_0, f'(x_0) = a_1, f''(x_0) = 2a_2, f'''(x_0) = 3 * 2a_3, \dots, f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n$. Тогда можно записывать выражения для $f(x) \sim f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. Данное выражение называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.

Замечание. Если функция дифференцируема бесконечное число раз в точке, то ряд Тейлора всегда можно составить. Но этот ряд может и не сойтись к исходной функции.

Ежели мы берем дифференцируемую бесконечно число раз в точке $x_0 = 0$ и в ее окрестности функцию и раскладываем функцию в этой точке в ряд Тейлора, то данный ряд будет являться рядом Маклорена.

Теорема 20. Пусть $f(x)$ дифференцируема бесконечное число раз в точке x_0 и ε – окрестности этой точки. Тогда для того, чтобы ряд Тейлора в этой точке сходился к исходной функции, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Тейлора стремился к нулю.

Доказательство. Запишем n членов ряда Тейлора $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = S_n(x) + R_n(x)$.

Очевидно, что для того, чтобы $S_n(x) \to f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

П.2. Разложение некоторых элементарных функций в степенные ряды

1) $f(x) = e^x$. $f^{(n)}(x) = e^x; f^{(n)}(0) = 1$. $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n; R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$. То есть разложение справедливо на всей числовой оси. $R_n(x) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2) $f(x) = \sin x$. $f^{(4k+1)}(0) = 1; f^{(4k+2)}(0) = 0; f^{(4k+3)}(0) = -1; f^{(4k)}(0) = 0$. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x^{2n+1}|}{|x^{2n+3}|} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \left\{\frac{1}{0}\right\} = \infty$. Можно показать, что $R_n(x) \to 0$.

<u>Замечание.</u> При любом x $\sin x$ – знакочередующийся ряд.

3) $f(x) = \cos x$. Аналогично синусу, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. $R = \infty; R_n(x) \to 0$.

<u>Замечание.</u> В случае комплексной переменной $z = x + iy$ имеем $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Разложив функцию комплексной переменной в ряд, получим два ряда – действительный и мнимый.

4) $f(x) = (1+x)^m, m \in R$. $f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}; f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1)$. $(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$. Можно показать, что $R = 1$, область сходимости $[-1; 1]$.

5) $f(x) = \ln(1+x)$. $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}; f^{(n)}(0) = (n-1)!\,(-1)^{n+1}$. $\ln(1+x) = \frac{1*x}{1!} - \frac{1!x^2}{2!} + \frac{2!x^3}{3!} - \frac{3!x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!x^n}{n!} = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$. При $x = 1$ получим ряд Лейбница. При $x = 1$ получим обобщенный гармонический расходящийся. Можно показать, что $R = 1$, область сходимости $(-1; 1]$.