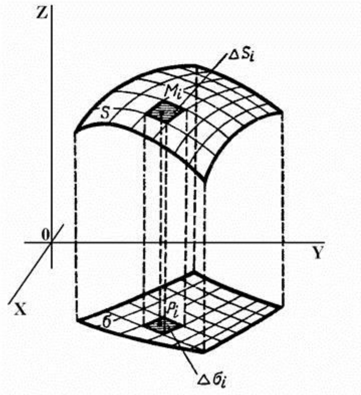
## §12. Поверхностные интегралы
### П.1. Поверхностные интегралы 1 рода (интегралы по площади поверхности)




Пусть на области $D \in \mathbb{R}^2$ определена непрерывная дифференцируемая функция $z = g(x,y)$, задающая поверхность $K$. Пусть задан описанный многогранник $Q = \bigcup_{i=1}^{n} q_i$ и точка $M_i$ касания грани $q_i$ поверхности. Пусть на $K$ задана функция $f(x,y,z)$. Тогда можно составить интегральную сумму $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\mu q_i$. Если устремить количество разбиений к бесконечности и максимальный диаметр каждой грани к нулю, и если существует соответствующий предел, который не зависит от характера разбиения и выбора точек $M_i$, то этот предел будет называться поверхностным интегралом первого рода по поверхности $K$. $\iint_K f(x,y,z)dq = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max diam\, q_i \to 0}} f(M_i)\mu q_i$.

Для вычисления такого интеграла спроектируем на $D$ многогранник $Q$. Тогда $q_i$ спроектируется на $\sigma_i$, $\Delta\sigma_i$ – площадь $\sigma_i$. Тогда $\mu q_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i}$, где $\gamma_i$ – угол между нормалью к поверхности в точке касания и положительным направлением оси $Oz$. Тогда $\mu q_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\sqrt{{g'_x}^2(P_i)+{g'_y}^2(P_i)+1}}$, где $P_i$ – проекция $M_i$ на $D$. Получаем формулу вычисления поверхностного интеграла 1 рода: $\iint_K f(x,y,z)dq = \iint_D f\big(x,y,g(x,y)\big)\sqrt{{g'_x}^2(P_i)+{g'_y}^2(P_i)+1}dxdy$.

### П.2. Поверхностные интегралы 2 рода (интегралы по координатам)

Ориентация поверхности производится с помощью нормали. Поверхностный интеграл называется ориентированным, если указано направление нормали при условии, что направление нормали меняется непрерывно вместе с точкой поверхности, к которой проведена нормаль. Существуют также неориентированные поверхности (лист Мебиуса).

Пусть на области $D \in \mathbb{R}^2$ определена непрерывная дифференцируемая функция $z = g(x,y)$, задающая поверхность $K$. Пусть задан описанный многогранник $Q = \bigcup_{i=1}^{n} q_i$ и точка $M_i$ касания грани $q_i$ поверхности. Спроектируем на $D$ многогранник $Q$. Тогда $q_i$ спроектируется на $\sigma_i$, $\Delta\sigma_i$ – площадь $\sigma_i$. Тогда $\mu q_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i}$, где $\gamma_i$ – угол между нормалью к поверхности в точке касания и положительным направлением оси $Oz$. Если угол острый, то $\Delta\sigma_i = \mu\sigma_i$, если тупой, то $\Delta\sigma_i = -\mu\sigma_i$. Пусть на $K$ задана функция $f(x,y,z)$. Тогда можно составить интегральную сумму $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i$. Если устремить количество разбиений к бесконечности и максимальный диаметр каждой грани к нулю, и если существует соответствующий предел, который не зависит от характера разбиения и выбора точек $M_i$, то этот предел будет называться поверхностным интегралом второго рода по поверхности $K$. $\iint_K f(x,y,z)dxdy \equiv$

$\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max diam\, q_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i$. Если проектировать на другие координатные оси, то получим $\iint_K f(x,y,z)dxdz$, $\iint_K f(x,y,z)dydz$.

### Связь с интегралом первого рода

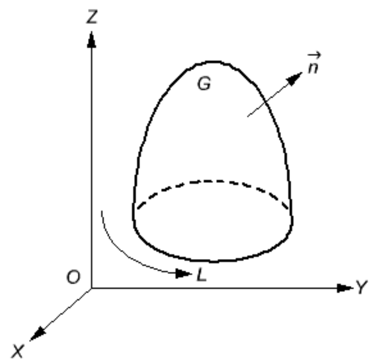
Пусть $\alpha(M), \beta(M), \gamma(M)$ – направляющие косинусы вектора нормали. Тогда $\iint_K f(x,y,z)dxdy = \iint_K f(x,y,z)\cos\gamma\, dq$. Аналогичным образом можно составить и выражения для проектирования на другие координатные оси.

### Свойства интегралов по координатам

1) При смене ориентации поверхностный интеграл меняет знак.
2) Аддитивность.
3) Пусть на $K$ заданы $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z), \vec{a} = (P;Q;R)$. Тогда $d\vec{q} = (\cos\alpha\, dq; \cos\beta\, dq; \cos\gamma\, dq)$, $\iint_K (Pdydz + Qdxdz + Rdxdy) = \iint_K (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) = \iint_K \vec{a}d\vec{q}$.

## П.3. Формула Стокса

Пусть $K$ – поверхность $z = z(x,y)$, $L$ – граница поверхности (кривая в пространстве). Тогда от поверхностного интеграла 2 рода можно перейти к криволинейному интегралу 2 рода: $\iint_K \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdy + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz$ – обобщение формулы Грина, формула Стокса. Обход контура выбирается по правилу правой руки.




__Замечание.__ В случае $\mathbb{R}^2$ формула переходит в формулу Грина.

__Замечание.__ Пусть $K$ – замкнутая ориентированная поверхность. Тогда $\iint_K \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdy + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_{K_1} + \iint_{K_2} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz + \oint_{-L} Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

__Замечание.__ Пусть $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

## П.4. Формула Гаусса-Остроградского

Связывает поверхностный интеграл с тройным. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана область $\Omega$, а $K$ – граница этой области. Тогда $\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint_K Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$, причем интегрирование ведется по внешней нормали.

__Замечание.__ Пусть $P = x, Q = y, R = z$. Тогда $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3$. Тогда объем тела, ограниченного $\Omega$, вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\oiint_K xdydz + ydxdz + zdxdy$.

# §13. Элементы векторного анализа

## П.1. Скалярные и векторные поля. Оператор Набла

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана область $\Omega$, в которой задана непрерывная дифференцируемая функция $U(x,y,z)$. В этом случае будем говорить, что в $\Omega$ задано скалярное поле.

Пусть в $\Omega$ заданы непрерывные дифференцируемые функции $A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z)$. В этом случае будем говорить, что в $\Omega$ задано векторное поле $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$.

Векторная линия $R(t)$ – линия $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, направление которой в каждой точке совпадает с направлением $\vec{A}$, т.е. можно составить дифференциальное уравнение в векторном виде:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} \parallel \vec{A}, \frac{A_x}{x'} = \frac{A_y}{y'} = \frac{A_z}{z'}, \frac{A_x}{dx} = \frac{A_y}{dy} = \frac{A_z}{dz}$$

Если в области $\Omega$ задано скалярное поле $U(x, y, z)$, то $grad\ U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ – задает векторное поле, а $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ – оператор Набла. $\nabla U = grad\ U$.