Свойства криволинейных интегралов 2 рода

1) $\int_{\cup BA} \vec{A}d\vec{r} = -\int_{\cup AB} \vec{A}d\vec{r}$
2) Линейность
   a. $\int_L c\vec{A}d\vec{r} = c\int_L \vec{A}d\vec{r}$.
   b. $\int_L (\overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2})d\vec{r} = \int_L \overrightarrow{A_1}d\vec{r} + \int_L \overrightarrow{A_2}d\vec{r}$.
3) Пусть $L = L_1 \cup L_2$ и L_1, L_2 имеют только одну общую точку. Тогда $\int_L fdS = \int_{L_1} fdS + \int_{L_2} fdS$.
4) Пусть D – область, ∂D – ее граница ($D \in \mathbb{R}^2$). Пусть $D = D_1 \cup D_2, \mu(D_1 \cap D_2) = 0$. Пусть $\vec{A}$ непрерывна в D. Тогда $\oint_{\partial D} \vec{A}d\vec{r} = \oint_{\partial D_1} \vec{A}d\vec{r} + \oint_{\partial D_2} \vec{A}d\vec{r}$.

Доказательство. D_1: $\oint_{\partial D_1} \vec{A}d\vec{r} = \int_{\cup ABC} \vec{A}d\vec{r} + \int_{\cup CA} \vec{A}d\vec{r}$, D_2: $\oint_{\partial D_2} \vec{A}d\vec{r} = \int_{\cup CEA} \vec{A}d\vec{r} + \int_{\cup AC} \vec{A}d\vec{r}$. Тогда $\oint_{\partial D_1} \vec{A}d\vec{r} + \oint_{\partial D_2} \vec{A}d\vec{r} = \int_{\cup ABC} \vec{A}d\vec{r} + \int_{\cup CEA} \vec{A}d\vec{r} = \oint_{\partial D} \vec{A}d\vec{r}$.

Замечание. Это свойство обобщается на любое количество разбиений области D.

Вычисление криволинейных интегралов 2 рода

$\int_L \vec{A}d\vec{r} = \int_L (fdx + gdy + hdz)$. Пусть кривая L задается параметрически: $= \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in [\alpha; \beta]$, x, y, z – дифференцируемые функции. Тогда координаты точек A, B будут $A\big(x(\alpha); y(\alpha); z(\alpha)\big), B\big(x(\beta); y(\beta); z(\beta)\big)$. Обозначим точку $M\big(x(t); y(t); z(t)\big)$, лежащую произвольно на кривой L в промежутке $[\alpha; \beta]$. Обозначим длину дуги AM как $S(t)$. Тогда $dS = S'(t)dt$. Вектор касательной к кривой L будет выражаться как $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$. Длина касательного вектора будет равна $\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| = S'(t)$ (корень квадратный из суммы квадратов). Тогда единичный вектор касательной можно будет выразить как $\frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{S'(t)} = \frac{d\vec{r}(t)}{dS}$. У этого вектора есть направляющие косинусы $\frac{dx}{dS} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha$, $\frac{dy}{dS} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta$, $\frac{dz}{dS} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma$. Отсюда можно выразить $dx = \cos\alpha\, dS, dy = \cos\beta\, dS, dz = \cos\gamma\, dS$. Подставив в исходный интеграл, получим $\int_L \vec{A}d\vec{r} = \int_L (f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz) = \int_L (f(x,y,z)\cos\alpha + g(x,y,z)\cos\beta + h(x,y,z)\cos\gamma)dS$. Тем самым мы свели интеграл второго рода к интегралу первого рода. В параметрическом виде интеграл можно записать в форме $\int_\alpha^\beta \Big(f\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t) + g\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t) + h\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\Big)dt$.

В случае кривой L – график функции $y = y(x), x \in [a; b]$ на плоскости интеграл принимает вид $\int_L (f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy) = \int_a^b \Big(f\big(x, y(x)\big) + g\big(x, y(x)\big)y'(x)\Big)dx$.

§9. Независимость криволинейного интеграла второго рода от контура интегрирования

Пусть дуга $L \in \mathbb{R}^2$. Вычислим интеграл $\int_L (xdy - ydx)$.

1) $L: y = x^2, (0;0) \to (1;1)$. $\int_L (xdy - ydx) = \int_0^1 (2x^2 - x^2)dx = \frac{1}{3}$.

2) $L: y = x^3, (0;0) \to (1;1)$. $\int_L (xdy - ydx) = \int_0^1 (3x^3 - x^3)dx = \frac{1}{2}$.

Если провести те же расчет для интеграла $\int_L (xdy + ydx)$, то выяснится, что в первом и втором случае интегралы равны. Необходимо понять, какие необходимы условия, чтобы криволинейный интеграл 2 рода не зависел от пути интегрирования, а зависел только от начальной и конечной точки.

<u>Теорема 5.</u> Для независимости криволинейного интеграла 2 рода $\int_{(P_0)}^{(P)} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy)$ от контура интегрирования необходимо достаточно, чтобы $Pdx + Qdy = dU$, т.е. $P = \frac{dU}{dx}, Q = \frac{dU}{dy}$, $([P(x,y); Q(x,y)] = grad\ U)$.

<u>Доказательство.</u> Пусть кривая L задается параметрически: $L = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha; \beta]$, x, y – дифференцируемые функции. L связывает точки P_0 и P. $\int_{(P_0)}^{(P)} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int_\alpha^\beta \big(P(x,y)x'(t) + Q(x,y)y'(t)\big)dt = \int_\alpha^\beta \left(\frac{dU}{dx}x'(t) + \frac{dU}{dy}y'(t)\right)dt = \int_\alpha^\beta \left(\frac{dU}{dt}\right)dt = \int_\alpha^\beta U'(t)dt = U(\beta) - U(\alpha) = U(P) - U(P_0)$, откуда следует что интеграл не зависит от пути интегрирования.

<u>Теорема 6.</u> Для выполнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU$ необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

<u>Доказательство.</u> Если $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ – полный дифференциал, то $P = \frac{\partial U}{\partial x}, Q = \frac{\partial U}{\partial y}. \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$, откуда и вытекает требуемое.

<u>Замечание.</u> $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dU$ тогда и только тогда, когда $\oint P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

<u>Замечание.</u> Пусть есть $\vec{A}(P;Q;R)$. Тогда $\int_{(P_0)}^{(P)} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy + R(x,y,z)dz)$ не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда $rot\ \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{\jmath}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial Y}\right) = 0$, т.е. тогда, когда $\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial Y} \end{cases}$.