<u>Лемма.</u> Пусть $\varphi(n)$ – 2π – периодическая функция, тогда $\int_{-\pi+x}^{\pi-x}\varphi(u)du = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)du$.

<u>Доказательство.</u> $\int_{-\pi+x}^{\pi-x}\varphi(u)du = \int_{-\pi+x}^{-\pi}\varphi(u)du + \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)du + \int_{\pi}^{\pi-x}\varphi(u)du = [u = t - 2\pi] = \int_{\pi-x}^{\pi}\varphi(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)du + \int_{\pi}^{\pi-x}\varphi(u)du = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)du.$

Выражение $D_n(u) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}$ называется ядром Дирихле.

Оценим погрешность. Рассмотрим разность $R_n(x) = f(x) - \Phi_n(x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}du\ldots$

<u>Лемма.</u> $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}du = 1.$

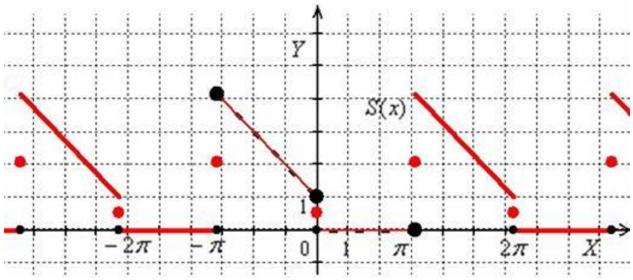
<u>Доказательство.</u> $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}du = 1.$

$\ldots$Тогда имеем $R_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(f(x) - f(x+u)\big)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}du$. По этой формуле очень удобно высчитывать погрешность. А итоговой формулой будет $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx + R_n(x)$ – формула Фурье n – го порядка.

<u>Замечание.</u> Формула имеет более широкое применение, потому что для разложения необходимо лишь существования интегралов, а не производных вплоть до n-й.

П.2. Основные теоремы

<u>Замечание.</u> Ряд $\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ тогда, когда $R_n(x) \to 0$. Будем считать, что $f(x)$ – гладкая на $[a;b]$, если она непрерывна на этом промежутке вместе со своей производной и $f'(a) = f'(a+0)$ и $f'(b) = f'(b-0)$. $f(x)$ – кусочно – гладкая на $[a;b]$, если этот промежуток можно разбить на конечное число промежутков, на которых $f(x)$ гладкая. Можно показать, что у кусочно-гладкой функции особые точки это точки разрыва первого рода.



<u>Теорема 2.</u> Пусть $f(x)$ – кусочно – гладкая в $[-\pi;\pi]$. Тогда в любой точке этого промежутка ряд Фурье сходится к $f(x)$. В точках разрыва ряд сходится к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, а в граничных точках к $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

<u>Теорема 3 (Дирихле).</u> Пусть $f(x)$ имеет конечно число экстремумов на $[-\pi;\pi]$ и непрерывна, за исключением точек, в которых может быть разрыв первого рода. Тогда ряд Фурье сходится к $f(x)$, а в точках разрыва к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, а в граничных точках к $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$. Эта теорема более сильная, чем предыдущая.

П.3. Свойства коэффициентов Фурье

<u>Теорема 4.</u> Пусть $f(x)$ такова, что существуют интегралы $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, причем не обязательно только с разрывами первого рода –

это могут быть и несобственные интегралы. Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0$.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_n^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\Phi_n(x)\right)^2 dx$, где $\Phi_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k \sin kx$. Продолжим раскладывать $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \Phi_n(x)\right)^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\Phi_n(x)dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n^2(x)dx$. Теперь рассмотри члены по отдельности.

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\Phi_n(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx\right)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx + b_k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2$.

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx\right)^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg(\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2\cos^2 kx + b_k^2\sin^2 kx) + 2\Bigg(\frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_k b_j\cos kx\sin jx + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n;j\neq n}\left(a_k a_j\cos kx\cos jx + b_k b_j\sin kx\sin jx\right)\Bigg)\Bigg)dx.$

Красотень, не правда ли? На самом деле, все интегралы на полном периоде для синусов и косинусов в первой степени будут равны нулю, поэтому выражение примет вид $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n^2(x)dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_k^2\frac{1+\cos 2kx}{2} + b_k^2\frac{1-\cos 2kx}{2}\right)dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2$. Так-то лучше.

Подставляем все в исходное выражение: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_n^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 + \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) \geq 0$.

Это значит, что $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$. Получается, что при любом n ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2$ ограничен сверху, а значит он сходится, то есть общий член $a_k^2 + b_k^2$ стремится к нулю, то есть $a_k \to 0, b_k \to 0$ одновременно при $k \to \infty$.

<u>Следствие.</u> Для любых чисел A, B справедливо неравенство Коши $AB \leq \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$. Пусть $A = |a_n|, B = \frac{1}{n}$. Тогда имеем $\frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2}\left(|a_n|^2 + \frac{1}{n^2}\right)$. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходящиеся ряды. Следовательно, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(|a_n|^2 + \frac{1}{n^2}\right)$. По признаку сравнения сойдется и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$. Значит, общий член стремится к нулю, $\frac{|a_n|}{n} \to 0$.

§4. Разложение функций в ряды Фурье

П.1. Разложение 2π – периодических функций

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$ и 2π – периодична. Тогда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$, где $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,;\, a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\,;\, b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$.

<u>Замечание.</u> Можно интегрировать по любому промежутку длиной 2π.

В случае четной функции относительно центра промежутка $b_k = 0; a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx; a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx; f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx$.

В случае нечетной функции относительно центра промежутка $a_0 = a_k = 0$; $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin x\, dx$; $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$.

П.2. Разложение $2l$ – периодических функций

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-l; l]$ и $2l$ – периодична. Преобразуем функцию в 2π – периодическую $x = x'\frac{l}{\pi}, x' \in [-\pi; \pi]$. Тогда $f\left(x'\frac{l}{\pi}\right)$ – непрерывна на $[-\pi; \pi]$ и 2π – периодична. Выполнив все подстановки, получим $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$; $a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx$; $b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx$; $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{\pi kx}{l} + b_k\sin\frac{\pi kx}{l}$.