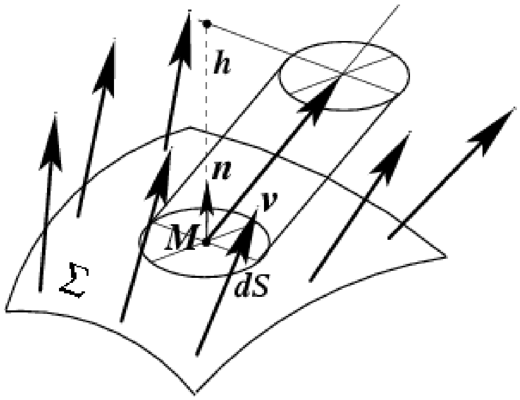
П.2. Поток векторного поля. Дивергенция. Соленоидальные поля



Пусть задано векторное поле $\vec{A}$ в Ω, которое проходит через поверхность $S \in \Omega$. Пусть точка $P \in S$, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности S в точке P. Элемент поверхности обозначим как dS. Тогда $h = \vec{A}\vec{n}$ – высота цилиндра с основанием dS, $\vec{A}\vec{n}dS$ – объем жидкости, прошедшего через dS в единицу времени. Тогда величину $\Pi = \iint_S A_n dS$ называют потоком вектора $\vec{A}$ через поверхность S. Если координаты вектора нормали заданы направляющими косинусами $\vec{n}(\cos\alpha\,; \cos\beta\,; \cos\gamma)$, то интеграл по площади поверхности можно свести к интегралу по координатам $\Pi = \iint_S A_x \cos\alpha\, dS + A_y \cos\beta\, dS + A_z \cos\gamma\, dS = \iint_S A_x dydz + A_y dxdz + A_z dxdy$. Также поток можно выразить через тройной интеграл по теореме Гаусса-Остроградского, если поверхность S замкнутая: $\Pi = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dxdydz$. Величину $div\,\vec{A} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ называют дивергенцией поля $\vec{A}$. Дивергенцию можно также выразить через оператор Набла, как скалярное произведение $div\,\vec{A} = \nabla\vec{A}$. С помощью данной формулы можно переписать формулу Гаусса-Остроградского в дифференциальной форме: $\oiint_S A_n dS = \iiint_\Omega (\nabla\vec{A}) dxdydz = \iiint_\Omega div\,\vec{A}\, dxdydz$. Если поверхность S начать стягивать в точку P, то $\iiint_\Omega div\,\vec{A}\, dxdydz = V\, div\,\vec{A}(P')$, где $P' \in \Omega$. Если будем стягивать S в точку P, то и $P' \to P$. Тогда получим $div\,\vec{A}\,(P) = \lim_{S\to P} \frac{\oiint_S A_n dS}{V}$. V – объем области Ω.

Дивергенция характеризует относительное расширение объема жидкости в окрестности точки P. Если $div\,\vec{A} = 0$, то и поток через поверхность равен нулю. Поля, у которых дивергенция равна нулю, называют соленоидальными, или бездивергентными. Дивергенция характеризует наличие вход/выход жидкости в точке.

П.3. Циркуляция векторного поля. Потенциальные поля

Пусть в Ω задано векторное поле $\vec{A}$ и некая кривая L, заданная параметрически L: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [\alpha; \beta] \\ z = z(t) \end{cases}$. Пусть на кривой есть точка P. Обозначим элемент дуги кривой как dS. Пусть A_τ – проекция $\vec{A}$ на касательную $\vec{\tau}$ к L в каждой точке. Тогда $A_\tau = \vec{A}\vec{\tau}$, если вектор касательной единичный, и $A_\tau = \frac{\vec{A}\frac{d\vec{\tau}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|} = \frac{A_x x' + A_y y' + A_z z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$. Если возьмем величину $d\text{Ц} = A_\tau dS$ – количество жидкости, сосредоточенное на дуге dS. Проинтегрировав, получим циркуляцию вектора $\vec{A}$ по контуру L. $\text{Ц} = \oint_L A_\tau dS$. Циркуляцию можно выразить не только через криволинейный интеграл 1 рода, но и через криволинейный интеграл 2 рода: $\text{Ц} = \oint_L \frac{A_x x' + A_y y' + A_z z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt =$

$\int_\alpha^\beta (A_x x' + A_y y' + A_z z')dt = \oint_L A_x dx + A_y dy + A_z dz$. Также циркуляцию можно выразить через двойной интеграл по формуле Стокса: $Ц = \oint_L A_x dx + A_y dy + A_z dz = \oint_L \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha\, dq + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta\, dq + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\, dq = \oint_L \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dxdy$. Величина, равная $rot\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$ называется ротором вектора $\vec{A}$. Если координаты вектора нормали заданы направляющими косинусами $\vec{n}(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, то $Ц = \oint_L A_x dx + A_y dy + A_z dz = \iint_S (rot\,\vec{A})\vec{n} dq$. При стягивании поверхности S в точку P получим $(rot\,\vec{A})_n = \lim_{S\to P} \frac{Ц}{S}$.

Если $rot\,\vec{A} = 0$ d Ω, то такое поле называется потенциальным, или безвихревым. Следовательно, $\oint_L A_x dx + A_y dy + A_z dz = \oint_L dU = 0, A_x = \frac{\partial U}{\partial x}, A_y = \frac{\partial U}{\partial y}, A_z = \frac{\partial U}{\partial z}$ и $\int_{P_0}^P A_\tau ds = U(P) - U(P_0)$. Тогда $\vec{A} = grad\,U$.

П.4. Соотношения между $\boldsymbol{div, rot, grad}$

$rot\,grad\,U = 0, div\,rot\,\vec{A} = 0, div\,grad\,U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, $grad\,div\,\vec{A} = \nabla(\nabla\vec{A}), rot\,rot\,\vec{A} = grad\,div\,\vec{A} - \Delta\vec{A}$.

Глава 2. Ряды

§1. Числовые ряды

П.1. Основные определения

Бесконечная сумма членов последовательности вида $\{a_n\}_{n=1}^\infty$называется рядом $\sum_{n=1}^\infty a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$. Последовательность вида $\{S_n\}: S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = \cdots$ называется последовательностью частичных сумм. Если эта последовательность не имеет предела, то ряд называется расходящимся, или не имеющим суммы, и сходящимся, если имеет.

<u>Теорема 1.</u> Если ряд сходится $\left(\lim_{n\to\infty} S_n = 0\right)$, то общий член этого ряда стремится к нулю.

<u>Доказательство.</u> $a_n = S_n - S_{n-1}, S_n \to S, S_{n-1} \to S$. Следовательно, $a_n \to 0$.

<u>Замечание.</u> Необходимое условие сходимости ряда является достаточным условием его расходимости.

<u>Замечание.</u> Если общий член ряда стремится к нулю, то это еще не значит, что ряд сходится.