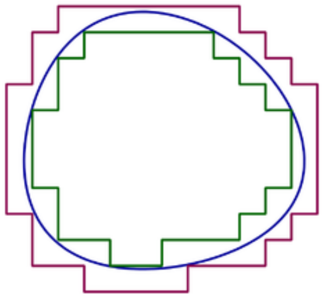
Глава 1.
Интегральное исчисление функции многих переменных
§1. Объем (мера) в $\boldsymbol{n}$-мерном пространстве

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$. Точка в таком пространстве будет характеризоваться набором координат $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Введем понятие n-мерного куба: $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \left|x_i - x_i^{(0)}\right| \le a > 0; i = 1 \dots n \in N\right\}$. Это куб со стороной $2a$. Определим его объем как $\mu Q \stackrel{\text{def}}{=} (2a)^n$.

Разобьем $\mathbb{R}^n$ на кубы ранга k: $Q = Q_{m_1, m_2, \dots, m_n} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \middle| \frac{m_i}{10^k} \le x_i \le \frac{m_i+1}{10^k}; i = 1 \dots n \in N; m_i \in Z\right\}$. Множество всех кубов ранга k обозначим как T_k, т.е. $\mathbb{R}^n = \bigcup_{Q \in T_k} Q$. Тогда, объем каждого такого кубика будет равен $\mu Q \stackrel{\text{def}}{=} 10^{-kn}$.

Пусть есть некое тело, состоящее из кубиков ранга k: $S = \bigcup_j Q_j$. Сложив их, получим $\mu S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_j \mu Q_j$. Отсюда мера $\mu S < +\infty$, если сумма конечна, и $\mu S = +\infty$, если сумма бесконечна. По определению мера пустого множества равна нулю.

<u>Свойство:</u> Пусть $S_1 \subset S_2$, тогда $\mu S_1 \le \mu S_2$.



Пусть X – некое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ (на рисунке синим). Обозначим множество всех кубов ранга k, содержащихся в X (на рисунке зеленым), как $s_k(X)$, т.е. $s_k = \bigcup_{\substack{Q \in T_k \\ Q \subset X}} Q$. А множество всех кубов ранга k, пересекающихся с X (на рисунке сиреневым), обозначим как $S_k(X)$, т.е. $S_k(X) = \bigcup_{\substack{Q \in T_k \\ Q \cap X \neq 0}} Q$. При изменении размеров кубов можно заметить следующие закономерности: $s_{k-1}(X) \subset s_k(X)$ и $S_{k-1}(X) \supset S_k(X)$, причем $s_k(X) \subset X \subset S_k(X)$, а ,точнее говоря, $s_0(X) \subset s_1(X) \subset \dots \subset s_k(X) \subset X \subset S_k(X) \subset \dots \subset S_1(X) \subset S_0(X)$. Для мер этих кубов можно провести аналогичные рассуждения: $\mu s_0(X) \le \mu s_1(X) \le \dots \le \mu s_k(X) \le \mu S_k(X) \le \mu S_1(X) \le \mu S_0(X)$. Левая часть последовательности монотонно убывает и ограничена снизу, аналогично правая часть монотонно возрастает и ограничена сверху, а значит существуют пределы $\lim\limits_{k \to +\infty} \mu s_k(X) = \mu_* X$ и $\lim\limits_{k \to +\infty} \mu S_k(x) = \mu^* X$, которые носят названия нижнем и верхней меры соответственно, причем для них будет всегда выполняться неравенство $0 \le \mu_* X \le \mu^* X$. Множество X называется измеримым ($\mathbb{R}^2$ – квадрируемым, $\mathbb{R}^3$ - кубируемым), если верхняя и нижняя меры в пределе совпадают $\mu_* X = \mu^* X$ и тогда $\mu X \stackrel{\text{def}}{=} \mu_* X = \mu^* X$. Если $\mu X = 0$, то множество X будет являться множеством меры 0.

<u>Замечание:</u> Если $\mu^* X = 0$, то и $\mu_* X = 0$, и множество X измеримо меры 0.

<u>Замечание:</u> Если множество X ограничено, то $\mu^* X < +\infty$ и $\mu_* X < +\infty$, но при этом множество может быть неизмеримым (они могут не совпадать).

<u>Замечание:</u> Если $X \subset \mathbb{R}^{n-1}$ и функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывна в X, тогда мера графика $\Gamma_f\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in X, x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}$ равна нулю.

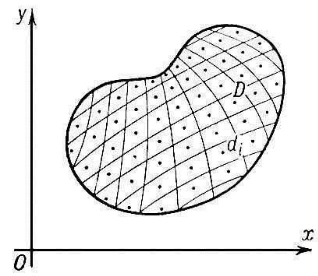
<u>Замечание:</u> Пусть множество X измеримо, а множество $\bar{X} = X \cup \partial X$ будет включать в себя множество X и его границу (являться замкнутым множеством), тогда множество $\bar{X}$ будет также измеримо, и их меры будут совпадать.

§2. Кратные интегралы

Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ измеримо. Введем конечную систему $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{\tau}$ непустых измеримых множеств X_i. Тогда τ будет называться разбиением множества X, если:

1) Мера пересечения двух любых таких множеств $\mu(X_i \cap X_j) = 0$.
2) $\bigcup_{i=1}^{i_\tau} X_i = X$.

Диаметром некоторого множества называется наибольшее расстояние между двумя точками данного множества $diam\, X = \sup \rho(x, y)$, $x, y \in X$. Мелкостью разбиения $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$ называют число $|\tau| \overset{\text{def}}{=} \max_j diam\, X_j$.



Давайте построим кратный интеграл. Внутри каждого разбиения возьмем точку $\xi^{(j)} \in X_j$, вычислим в ней значение функции f (заданной на X), умножим на меру этого множества и просуммируем: $\sigma_\tau = \sigma_\tau(f, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(j_\tau)}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{j_\tau} f(\xi^{(j)}) \mu X_j$. Эта сумма называется суммой Римана функции f, соответствующей разбиению τ.

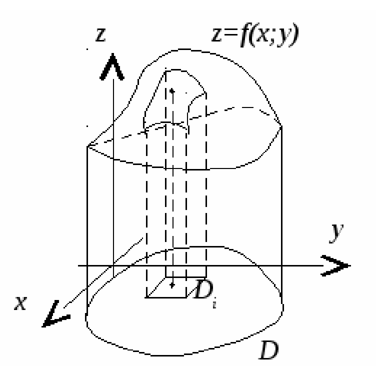
Функция f называется интегрируемой по Риману на множестве X, если существует предел последовательной интегральной суммы Римана при мелкости $|\tau| \to 0$, не зависящей от разбиения τ и от выбора точек i, j.

Интеграл обозначается как $\int_X f dx = \int_X f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$. По определению кратный интеграл есть предел $\int_X f dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau(f, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(j_\tau)})$. Запишем то же самое определение другим образом. Если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такая, что для любого разбиения τ множества X мелкость $|\tau| < \delta$ и при любом выборе $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(j_\tau)}$ предел (интеграл) отличается от суммы Римана по модулю меньше, чем на ε: $\left| \int_X f dx - \sigma_\tau(f, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(j_\tau)}) \right| < \varepsilon$.

§3. Двойной интеграл

П.1. Определения

Пусть есть область $D \in \mathbb{R}^2$ и пусть в этой области определены непрерывная функция $f(x, y) \geq 0$ и разбиение $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$. Тогда существует двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau(f, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(j_\tau)})$. Величина $\sigma_\tau = \sum_{j=1}^{j_\tau} f(\xi^{(j)}) \mu X_j$ будет являться объемом ступенчатого тела, μX_j – площадью основной ступени, а $f(\xi^{(j)})$ – высотой ступени. Тогда величина $V = \lim_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau(f, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(j_\tau)}) = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) d\mu$ буде являться объемом тела, ограниченной функцией f над множеством D.



П.2. Свойства двойного интеграла

1) $\iint_D (f(x, y) + g(x, y)) d\mu = \iint_D f(x, y) d\mu + \iint_D g(x, y) d\mu$ (f и g – непрерывны на D).

2) $\iint_D cf(x,y)d\mu = c\iint_D f(x,y)d\mu$.

3) Если $f \geq 0$ на D, то $\iint_D f(x,y)d\mu \geq 0$.

4) Пусть множество D есть объединение двух измеримых областей, мера пересечения которых равна нулю $D = X_1 \cup X_2, \mu(X_1 \cap X_2) = 0$, тогда $\iint_D f(x,y)d\mu = \iint_{X_1} f(x,y)d\mu + \iint_{X_2} f(x,y)d\mu$.

5) <u>Теорема 1 (об оценке интеграла).</u> Пусть S – площадь компактной области D и пусть функция f задана (и непрерывна) на D. Тогда на этой области функция достигает своего минимума и максимума: $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ и выполняется неравенство $mS \leq \iint_D f(x,y)d\mu \leq MS$.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим $M - f(x,y) \geq 0$ на D. Тогда $\iint_D \big(M - f(x,y)\big)d\mu \geq 0$, а, значит, по первому свойству, $\iint_S Md\mu \geq \iint_D f(x,y)d\mu$. По определению левая часть равна MS, откуда получаем $\iint_D f(x,y)d\mu \leq MS$. Аналогичные рассуждения можно провести и для левой части исходного неравенства. Доказано.

<u>Замечание.</u> Если выполняется неравенство $h(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ для непрерывных функций в D, то $\iint_D h(x,y)d\mu \leq \iint_D f(x,y)d\mu \leq \iint_D g(x,y)d\mu$.