§4. Существование и вычисление двойного интеграла
П.1. Существование двойного интеграла

Для взятия двойного интеграла необходимо разбивать область на части: $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$ – разбиение $D \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y)$ задана на D. Введем $m_j = \inf\limits_{(x,y)\in X_j} f(x,y)$, $M_j = \sup\limits_{(x,y)\in X_j} f(x,y)$. $\inf f(x,y)$ и $\sup f(x,y)$ используются вместо минимума и максимума потому, что множество открытое, и максимум или минимум могут и не достигаться. Можно составить следующие суммы: $s_\tau = \sum_{j=1}^{j_\tau} m_j \mu X_j$, $S_\tau = \sum_{j=1}^{j_\tau} M_j \mu X_j$, которые будут называться нижней и верхней суммой Дарбу соответственно. Очевидно, что $s_\tau \le \sigma_\tau \le S_\tau$.

<u>Теорема 2.</u> Для того, чтобы функция, ограниченная на измеримом множестве D, была интегрируемая по Риману, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{|\tau|\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0$. При этом $\iint_D f d\mu = \lim\limits_{|\tau|\to 0} S_\tau = \lim\limits_{|\tau|\to 0} s_\tau$.

<u>Замечание.</u> Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $\overline{D}$ (ограниченная D), тогда существует $\iint_D f(x,y)d\mu$.

П.2. Вычисление двойного интеграла в случае, когда $\boldsymbol{D}$ – прямоугольная область

Пусть есть область $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b; c \le y \le d\}$. Построим сечение тела плоскостью $x = c$, площадь которого обозначим как $g(x) = \int_c^d f(x,y)dy$.

<u>Теорема 3.</u> Если функция $f(x,y)$ интегрируема на D и для любого $x \in [a;b]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по y, то функция $g(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$.

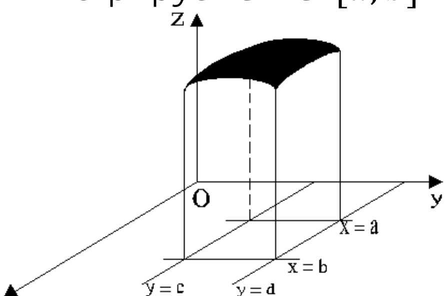

рис.1

<u>Замечание.</u> Для $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$ правый интеграл называется внутренним, а левый – повторным.

<u>Замечание.</u> Аналогичная теорема верна и для случая $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$.

<u>Доказательство.</u> Пусть τ_1 и τ_2 – разбиения отрезков $[a;b]$ и $[c;d]$ соответственно: $\tau_1 = \{[x_{i-1};x_i]\}_{i=1}^{i_{\tau_1}}$; $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i_{\tau_1}} = b$; $\tau_2 = \{[y_{j-1};y_j]\}_{j=1}^{j_{\tau_2}}$; $c = y_0 < y_1 < \dots < y_{j_{\tau_2}} = d$. Возьмем прямые произведения этих отрезков: $\tau = \tau_1 \times \tau_2 = \{X_{ij}\}_{\substack{i=1\\j=1}}^{\substack{i_{\tau_1}\\j_{\tau_2}}} = \{[x_{i-1};x_i] \times [y_{j-1};y_j]\}_{\substack{i=1\\j=1}}^{\substack{i_{\tau_1}\\j_{\tau_2}}}$. Обозначим $m_{ij} = \inf\limits_{(x,y)\in X_{ij}} f(x,y)$; $M_{ij} = \sup\limits_{(x,y)\in X_{ij}} f(x,y)$; $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} g(x)$; $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} g(x)$. Для любой точки $(x,y) \in X_{ij}$ выполняется неравенство $m_{ij} \le f(x,y) \le M_{ij}$. Проинтегрировав от y_{j-1} до y_j, получим неравенство $m_{ij}\Delta y_j \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy \le M_{ij}\Delta y_j$, которое будет выполняться для любого $x \in [x_{i-1};x_i]$. Просуммируем: $\sum_{j=1}^{j_{\tau_2}} m_{ij}\Delta y_j \le \sum_{j=1}^{j_{\tau_2}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy \le \sum_{j=1}^{j_{\tau_2}} M_{ij}\Delta y_j$. Тогда $\sum_{j=1}^{j_{\tau_2}} m_{ij}\Delta y_j \le m_i \le M_i \le \sum_{j=1}^{j_{\tau_2}} M_{ij}\Delta y_j$. Домножим на Δx_i и просуммируем по i: $\sum_{i=1}^{i_{\tau_1}} \sum_{j=1}^{j_{\tau_2}} m_{ij}\Delta y_j \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{i_{\tau_1}} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{i_{\tau_1}} M_i \Delta x_i \le$

$\sum_{i=1}^{i_{\tau_1}} \sum_{j=1}^{j_{\tau_2}} M_{ij} \Delta y_j \, \Delta x_i$. Заметим, что последнее неравенство аналогично другому: $\inf\limits_{(x,y)\in X_{ij}} f(x,y) \le \inf\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} g(x) \le \sup\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} g(x) \le \sup\limits_{(x,y)\in X_{ij}} f(x,y)$ или $s_\tau^f \le s_{\tau_1}^g \le S_{\tau_1}^g \le S_\tau^f$.Пусть $f(x,y)$ интегрируема на D. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого τ: $|\tau| < \delta$; $\left|S_\tau^f - s_\tau^f\right| < \varepsilon$. Возьмем $|\tau_1| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$; $|\tau_2| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$. Тогда $\max\limits_i \Delta x_i < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$; $\max\limits_j \Delta y_j < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, а $|\tau| = \max\limits_{i,j} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + \left(\Delta y_j\right)^2} < \delta$, откуда $\left|S_\tau^f - s_\tau^f\right| < \varepsilon$, и, следовательно, $\left|S_{\tau_1}^g - s_{\tau_1}^g\right| < \varepsilon$,. Тогда $g(x)$ интегрируема на $[c;d]$, и $s_\tau^f \le \int_a^b g(x)dx \le S_\tau^f$. Но $s_\tau^f \le \iint_D f(x,y)dxdy \le S_\tau^f$. Выходит, что $\left|\iint_D f(x,y)dxdy - \int_a^b g(x)dx\right| < \varepsilon$, откуда следует, что они совпадают. Доказано.

П.2. Вычисление двойного интеграла повторным интегрированием по произвольной области

<u>Теорема 4.</u> Пусть $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ на $[a;b]$, задана область $D = \{(x,y) | a \le x \le b; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ – компакт и квадрируемо и пусть $f(x,y)$ интегрируемо по Риману на D. Тогда $g(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ интегрируема на $[a;b]$ и $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$.

<u>Замечание.</u> Аналогичная теорема имеет место и в случае области $D = \{(x,y) | c \le y \le d; \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$. Тогда $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$.

<u>Замечание.</u> Если область имеет сложную форму, то ее можно разбить на области, интегралы которых можно вычислить через повторные.

<u>Замечание.</u> $\iint_D 1dxdy = S_D = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} 1dy = \int_a^b \left(\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right)dx$.

П.4. Формула Дирихле

$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$. Для области $D = \{(x,y) | a \le x \le b; a \le y \le x\}$ справедливо равенство $\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx$.