# Глава 3. Ряды Фурье
## §1. Ортогональная система функций. Ряды Фурье по ортогональной системе функций
### П.1. Ортогональная система функций

Пусть есть последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$ и для любого $n$ $\varphi_n(x)$ – непрерывна на $[a;b]$. Система $\{\varphi_n(x)\}$ называется ортогональной на $[a;b]$, если $\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0, m \neq n$. По аналогии с ортогональными векторами, для которых условием ортогональности является нулевое скалярное произведение, только в нашем случае роль скалярного произведения выполняет интеграл. Интеграл берется, так как функции непрерывны.

Если в дополнение к предыдущему условию $\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1$ для любого натурального $n$, то такая система функций называется ортонормированной. На $[a;b]$.

Пример. Система $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx$ является ортогональной на $[-\pi;\pi]$. $\int_{-\pi}^{\pi} 1 * \sin nx\, dx = -\frac{1}{n}\cos nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$; $\int_{-\pi}^{\pi} 1 * \cos nx\, dx = \frac{1}{n}\sin nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{n}\sin \pi n = 0$; $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx * \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)xdx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)xdx\Big) = 0$.

Пример. Система $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ является ортонормированной на $[-\pi;\pi]$. $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$; $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos^2 nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2nx}{4n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin^2 nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}-\frac{\sin 2nx}{4n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Замечание. Система $\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin nx$ является ортонормированной на $[-l;l]$.

Замечание. Система $\frac{1}{2}, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$ ортогональная на $[0;\pi]$.

Замечание. Система $L_0(x) = 1, \dots, L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ ортогональная на $[-1;1]$.

### П.2. Ряд Фурье по ортогональной системе функций

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $\{\varphi_n(x)\}$ – непрерывная на $[a;b]$ ортогональная система функций. Пусть существуют такие $a_k$, что $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$.

Теорема 1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\varphi_k(x)$ сходится равномерно, то $a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}$.

Доказательство. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ домножим на $\varphi_n(x)$. Получаем $f(x)\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_n(x)\varphi_k(x)$. Так как ряд сходится равномерно, имеем право проинтегрировать. $\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)dx = a_n\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)dx$, откуда следует, что $\frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}$.

$a_n$ называется коэффициентом Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$ на $[a;b]$.

Пример. $\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \dots, \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}$ – ортогональная система функций, для которой $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n x}{l} + b_n\sin\frac{\pi n x}{l}\right)$; $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$; $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx$; $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$. $a_n, b_n$ – формулы Эйлера-Фурье.

## §2. Тригонометрические многочлены и ряды

Ряд вида $a_0 + a_1\cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$ называется тригонометрическим рядом $n$ – го порядка. При $n \to \infty$ получим тригонометрический ряд.

$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sqrt{a_n^2+b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos nx + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin nx\right); \cos\varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}; \sin\varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$, откуда получаем $a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_n \sin(nx+\varphi_n)\,, A_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$. Удобно для сложения двух гармоник в одну со сдвигом фазы.

Получили упрощенную форму тригонометрического ряда $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx+\varphi_n)$.

Пусть есть тригонометрический ряд $P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$. Тогда для его имеем $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)dx\,; a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\cos kx\,dx\,; b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\sin kx\,dx$.

<u>Замечание.</u> Аналогично формулы верны в случае тригонометрического ряда.

## §3. Ряды Фурье

### П.1. Многочлены Фурье. Формула Фурье

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$. По формулам Фурье-Эйлера можно построить коэффициенты $a_0, a_n, b_n$. Тогда $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Будет ли сопоставленный ряд сходиться к $f(x)$?

Выражение вида $\Phi_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ называется многочленом Фурье функции $f(x)$. Тогда для того, чтобы $f(x) = \Phi_n(x) + R_n(x)$ раскладывалась в ряд $\Phi_n(x)$, необходимо, чтобы $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $x$.

Распишем $\varphi_n(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\cos kx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\sin kx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)dt = [t-x=u] = \Phi_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos ku\right)du$. Оказывается, $\varphi_n(x)$ можно посчитать.

<u>Лемма.</u> $c(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}$.

<u>Доказательство.</u>

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{2\sin\frac{1}{2}u}\left(\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu\right) =$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}u + 2\sin\frac{1}{2}u\cos u + 2\sin\frac{1}{2}u\cos 2u + \dots + 2\sin\frac{1}{2}u\cos nu}{2\sin\frac{1}{2}u} =$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}u + \sin\frac{3}{2}u - \sin\frac{1}{2}u + \sin\frac{5}{2}u - \sin\frac{3}{2}u + \dots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}.$$

<u>Следствие.</u> $\Phi_n(x) = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}du$.

<u>Замечание.</u> Можно показать, что $\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}du = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}du$, т.е. можно сдвигать как угодно влево и вправо. $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}$ называется ядром Дирихле.