Оглавление

1. Мера в N – мерном пространстве. Кратный интеграл

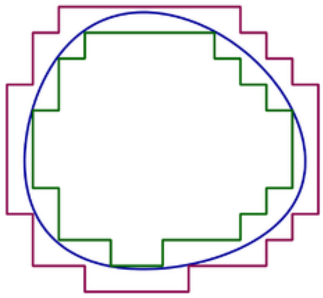
Объем (мера) в $\boldsymbol{n}$-мерном пространстве

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$. Точка в таком пространстве будет характеризоваться набором координат $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Введем понятие n-мерного куба: $Q = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle\|\, \left|x_i - x_i^{(0)}\right| \le a > 0; i = 1 \dots n \in N\right\}$. Это куб со стороной $2a$. Определим его объем как $\mu Q \overset{\text{def}}{=} (2a)^n$.

Разобьем $\mathbb{R}^n$ на кубы ранга k: $Q = Q_{m_1, m_2, \dots, m_n} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{m_i}{10^k} \le x_i \le \frac{m_i + 1}{10^k}; i = 1 \dots n \in N; m_i \in Z\right\}$. Множество всех кубов ранга k обозначим как T_k, т.е. $\mathbb{R}^n = \bigcup_{Q \in T_k} Q$. Тогда, объем каждого такого кубика будет равен $\mu Q \overset{\text{def}}{=} 10^{-kn}$.

Пусть есть некое тело, состоящее из кубиков ранга k: $S = \bigcup_j Q_j$. Сложив их, получим $\mu S \overset{\text{def}}{=} \sum_j \mu Q_j$. Отсюда мера $\mu S < +\infty$, если сумма конечна, и $\mu S = +\infty$, если сумма бесконечна. По определению мера пустого множества равна нулю.

<u>Свойство:</u> Пусть $S_1 \subset S_2$, тогда $\mu S_1 \le \mu S_2$.



Пусть X – некое множество $X \subset \mathbb{R}^n$ (на рисунке синим). Обозначим множество всех кубов ранга k, содержащихся в X (на рисунке зеленым), как $s_k(X)$, т.е. $s_k = \bigcup_{\substack{Q \in T_k \\ Q \subset X}} Q$. А множество всех кубов ранга k, пересекающихся с X (на рисунке сиреневым), обозначим как $S_k(X)$, т.е. $S_k(X) = \bigcup_{\substack{Q \in T_k \\ Q \cap X \neq 0}} Q$. При изменении размеров кубов можно заметить следующие закономерности: $s_{k-1}(X) \subset s_k(X)$ и $S_{k-1}(X) \supset S_k(X)$, причем $s_k(X) \subset X \subset S_k(X)$, а ,точнее говоря, $s_0(X) \subset s_1(X) \subset \dots \subset s_k(X) \subset X \subset S_k(X) \subset \dots \subset S_1(X) \subset S_0(X)$. Для мер этих кубов можно провести аналогичные рассуждения: $\mu s_0(X) \le \mu s_1(X) \le \dots \le \mu s_k(X) \le \mu S_k(X) \le \mu S_1(X) \le \mu S_0(X)$. Левая часть последовательности монотонно убывает и ограничена снизу, аналогично правая часть монотонно возрастает и ограничена сверху, а значит существуют пределы $\lim\limits_{k \to +\infty} \mu s_k(X) = \mu_* X$ и $\lim\limits_{k \to +\infty} \mu S_k(x) = \mu^* X$, которые носят названия нижней и верхней меры соответственно, причем для них будет всегда выполняться неравенство $0 \le \mu_* X \le \mu^* X$. Множество X называется измеримым ($\mathbb{R}^2$ – квадрируемым, $\mathbb{R}^3$ - кубируемым), если верхняя и нижняя меры в пределе совпадают $\mu_* X = \mu^* X$ и тогда $\mu X \overset{\text{def}}{=} \mu_* X = \mu^* X$. Если $\mu X = 0$, то множество X будет являться множеством меры 0.

<u>Замечание:</u> Если $\mu^* X = 0$, то и $\mu_* X = 0$, и множество X измеримо меры 0.

<u>Замечание:</u> Если множество X ограничено, то $\mu^* X < +\infty$ и $\mu_* X < +\infty$, но при этом множество может быть неизмеримым (они могут не совпадать).

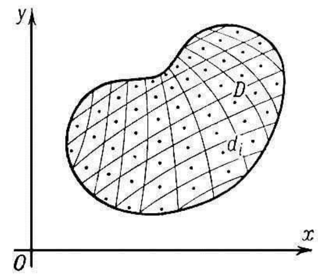
<u>Замечание:</u> Если $X \subset \mathbb{R}^{n-1}$ и функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ непрерывна в X, тогда мера графика $\Gamma_f\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in X, x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\}$ равна нулю.

<u>Замечание:</u> Пусть множество X измеримо, а множество $\bar{X} = X \cup \partial X$ будет включать в себя множество X и его границу (являться замкнутым множеством), тогда множество $\bar{X}$ будет также измеримо, и их меры будут совпадать.

Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ измеримо. Введем конечную систему $\tau = \{X_i\}_{i=1}^{\tau}$ непустых измеримых множеств X_i. Тогда τ будет называться разбиением множества X, если:

1) Мера пересечения двух любых таких множеств $\mu(X_i \cap X_j) = 0$.
2) $\bigcup_{i=1}^{i_\tau} X_i = X$.

Диаметром некоторого множества называется наибольшее расстояние между двумя точками данного множества $diam\, X = \sup \rho(x, y)$, $x, y \in X$. Мелкостью разбиения $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$ называют число $|\tau| \overset{\text{def}}{=} \max\limits_j diam\, X_j$.



Давайте построим кратный интеграл. Внутри каждого разбиения возьмем точку $\xi^{(j)} \in X_j$, вычислим в ней значение функции f (заданной на X), умножим на меру этого множества и просуммируем: $\sigma_\tau = \sigma_\tau\left(f, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(j_\tau)}\right) \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{j_\tau} f\left(\xi^{(j)}\right)\mu X_j$. Эта сумма называется суммой Римана функции f, соответствующей разбиению τ.

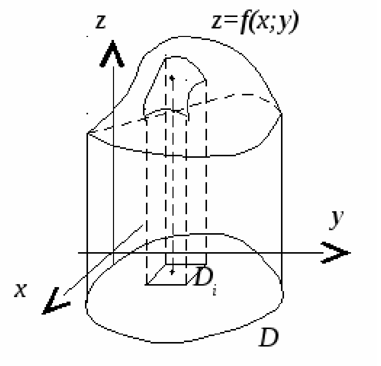
Функция f называется интегрируемой по Риману на множестве X, если существует предел последовательности интегральной суммы Римана при мелкости $|\tau| \to 0$, не зависящей от разбиения τ и от выбора точек i, j.

Интеграл обозначается как $\int_X f dx = \int_X f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$. По определению кратный интеграл есть предел $\int_X f dx \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau\left(f, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(j_\tau)}\right)$. Запишем то же самое определение другим образом. Если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такая, что для любого разбиения τ множества X мелкость $|\tau| < \delta$ и при любом выборе $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(j_\tau)}$ предел (интеграл) отличается от суммы Римана по модулю меньше, чем на ε: $\left|\int_X f dx - \sigma_\tau\left(f, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(j_\tau)}\right)\right| < \varepsilon$.

2. Двойной интеграл и его свойства

Двойной интеграл

Пусть есть область $D \in \mathbb{R}^2$ и пусть в этой области определены непрерывная функция $f(x, y) \geq 0$ и разбиение $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$. Тогда существует двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dxdy = \lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau\left(f, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(j_\tau)}\right)$. Величина $\sigma_\tau = \sum_{j=1}^{j_\tau} f\left(\xi^{(j)}\right)\mu X_j$ будет являться объемом ступенчатого тела, μX_j – площадью основной ступени, а $f\left(\xi^{(j)}\right)$ – высотой ступени. Тогда величина $V = \lim\limits_{|\tau| \to 0} \sigma_\tau\left(f, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(j_\tau)}\right) = \iint_D f(x, y) dxdy = \iint_D f(x, y) d\mu$ будет являться объемом тела, ограниченного функцией f над множеством D.



1) $\iint_D \big(f(x,y)+g(x,y)\big)d\mu = \iint_D f(x,y)d\mu + \iint_D g(x,y)d\mu$ (f и g – непрерывны на D).

2) $\iint_D cf(x,y)d\mu = c\iint_D f(x,y)d\mu$.

3) Если $f \geq 0$ на D, то $\iint_D f(x,y)d\mu \geq 0$.

4) Пусть множество D есть объединение двух измеримых областей, мера пересечения которых равна нулю $D = X_1 \cup X_2, \mu(X_1 \cap X_2) = 0$, тогда $\iint_D f(x,y)d\mu = \iint_{X_1} f(x,y)d\mu + \iint_{X_2} f(x,y)d\mu$.

5) Теорема 1 (об оценке интеграла). Пусть S – площадь компактной области D и пусть функция f задана (и непрерывна) на D. Тогда на этой области функция достигает своего минимума и максимума: $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ и выполняется неравенство $mS \leq \iint_D f(x,y)d\mu \leq MS$.

Доказательство. Рассмотрим $M - f(x,y) \geq 0$ на D. Тогда $\iint_D \big(M - f(x,y)\big)d\mu \geq 0$, а, значит, по первому свойству, $\iint_S Md\mu \geq \iint_D f(x,y)d\mu$. По определению левая часть равна MS, откуда получаем $\iint_D f(x,y)d\mu \leq MS$. Аналогичные рассуждения можно провести и для левой части исходного неравенства. Доказано.

Замечание. Если выполняется неравенство $h(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ для непрерывных функций в D, то $\iint_D h(x,y)d\mu \leq \iint_D f(x,y)d\mu \leq \iint_D g(x,y)d\mu$.

3. Вычисление двойного интеграла. Формула Дирихле

Существование двойного интеграла

Для взятия двойного интеграла необходимо разбивать область на части: $\tau = \{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$ – разбиение $D \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y)$ задана на D. Введем $m_j = \inf\limits_{(x,y)\in X_j} f(x,y)$, $M_j = \sup\limits_{(x,y)\in X_j} f(x,y)$. $\inf f(x,y)$ и $\sup f(x,y)$ используются вместо минимума и максимума потому, что множество открытое, и максимум или минимум могут и не достигаться. Можно составить следующие суммы: $s_\tau = \sum_{j=1}^{j_\tau} m_j \mu X_j$, $S_\tau = \sum_{j=1}^{j_\tau} M_j \mu X_j$, которые будут называться нижней и верхней суммой Дарбу соответственно. Очевидно, что $s_\tau \leq \sigma_\tau \leq S_\tau$.

Теорема 2. Для того, чтобы функция, ограниченная на измеримом множестве D, была интегрируемая по Риману, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{|\tau|\to 0}(S_\tau - s_\tau) = 0$. При этом $\iint_D f d\mu = \lim\limits_{|\tau|\to 0} S_\tau = \lim\limits_{|\tau|\to 0} s_\tau$.

Замечание. Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $\overline{D}$ (ограниченная D), тогда существует $\iint_D f(x,y)d\mu$.

Вычисление двойного интеграла в случае, когда $\boldsymbol{D}$ – прямоугольная область

Пусть есть область $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \le x \le b; c \le y \le d\}$. Построим сечение тела плоскостью $x = c$, площадь которого обозначим как $g(x) = \int_c^d f(x, y)dy$.

<u>Теорема 3.</u> Если функция $f(x, y)$ интегрируема на D и для любого $x \in [a; b]$ функция $f(x, y)$ интегрируема по y, то функция $g(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и $\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$.

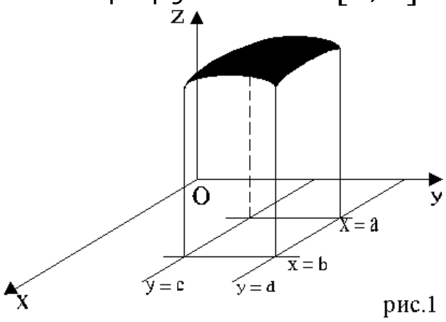


рис.1

<u>Замечание.</u> Для $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$ правый интеграл называется внутренним, а левый – повторным.

<u>Замечание.</u> Аналогичная теорема верна и для случая $\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx$.

<u>Доказательство.</u> Пусть τ_1 и τ_2 – разбиения отрезков $[a; b]$ и $[c; d]$ соответственно: $\tau_1 = \{[x_{i-1}; x_i]\}_{i=1}^{i_{\tau_1}}; a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i_{\tau_1}} = b; \tau_2 = \{[y_{j-1}; y_j]\}_{j=1}^{j_{\tau_2}}; c = y_0 < y_1 < \dots < y_{j_{\tau_2}} = d$. Возьмем прямые произведения этих отрезков: $\tau = \tau_1 \times \tau_2 = \{X_{ij}\}_{\substack{i=1\\j=1}}^{\substack{i_{\tau_1}\\j_{\tau_2}}} = \{[x_{i-1}; x_i] \times [y_{j-1}; y_j]\}_{\substack{i=1\\j=1}}^{\substack{i_{\tau_1}\\j_{\tau_2}}}$. Обозначим $m_{ij} = \inf\limits_{(x,y)\in X_{ij}} f(x, y); M_{ij} = \sup\limits_{(x,y)\in X_{ij}} f(x, y); m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} g(x); M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} g(x)$. Для любой точки $(x, y) \in X_{ij}$ выполняется неравенство $m_{ij} \le f(x, y) \le M_{ij}$. Проинтегрировав от y_{j-1} до y_j, получим неравенство $m_{ij}\Delta y_j \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)dy \le M_{ij}\Delta y_j$, которое будет выполняться для любого $x \in [x_{i-1}; x_i]$. Просуммируем: $\sum_{j=1}^{j_{\tau_2}} m_{ij}\Delta y_j \le \sum_{j=1}^{j_{\tau_2}} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)dy \le \sum_{j=1}^{j_{\tau_2}} M_{ij}\Delta y_j$. Тогда $\sum_{j=1}^{j_{\tau_2}} m_{ij}\Delta y_j \le m_i \le M_i \le \sum_{j=1}^{j_{\tau_2}} M_{ij}\Delta y_j$. Домножим на Δx_i и просуммируем по i: $\sum_{i=1}^{i_{\tau_1}} \sum_{j=1}^{j_{\tau_2}} m_{ij}\Delta y_j \, \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{i_{\tau_1}} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{i_{\tau_1}} M_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{i_{\tau_1}} \sum_{j=1}^{j_{\tau_2}} M_{ij}\Delta y_j \, \Delta x_i$. Заметим, что последнее неравенство аналогично другому: $\inf\limits_{(x,y)\in X_{ij}} f(x, y) \le \inf\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} g(x) \le \sup\limits_{x\in[x_{i-1};x_i]} g(x) \le \sup\limits_{(x,y)\in X_{ij}} f(x, y)$ или $s_\tau^f \le s_{\tau_1}^g \le S_{\tau_1}^g \le S_\tau^f$.Пусть $f(x, y)$ интегрируема на D. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $\tau: |\tau| < \delta; |S_\tau^f - s_\tau^f| < \varepsilon$. Возьмем $|\tau_1| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}; |\tau_2| < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$. Тогда $\max\limits_i \Delta x_i < \frac{\delta}{\sqrt{2}}; \max\limits_j \Delta y_j < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, а $|\tau| = \max\limits_{i,j} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2} < \delta$, откуда $|S_\tau^f - s_\tau^f| < \varepsilon$, и, следовательно, $|S_{\tau_1}^g - s_{\tau_1}^g| < \varepsilon$,. Тогда $g(x)$ интегрируема на $[c; d]$, и $s_\tau^f \le \int_a^b g(x)dx \le S_\tau^f$. Но $s_\tau^f \le \iint_D f(x, y)dxdy \le S_\tau^f$. Выходит, что $\left|\iint_D f(x, y)dxdy - \int_a^b g(x)dx\right| < \varepsilon$, откуда следует, что они совпадают. Доказано.

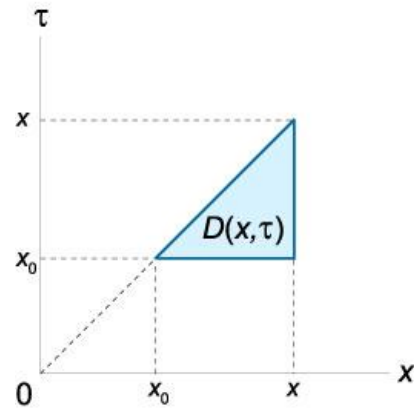
Вычисление двойного интеграла повторным интегрированием по произвольной области

<u>Теорема 4.</u> Пусть $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ на $[a; b]$, задана область $D = \{(x, y) | a \le x \le b; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ – компакт, квадрируема и $f(x, y)$ интегрируема по Риману на

D. Тогда $g(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ интегрируема на $[a;b]$ и $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$.

Замечание. Аналогичная теорема имеет место и в случае области $D=\{(x,y)|c\le y\le d; \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\}$. Тогда $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$.

Замечание. Если область имеет сложную форму, то ее можно разбить на области, интегралы которых можно вычислить через повторные.



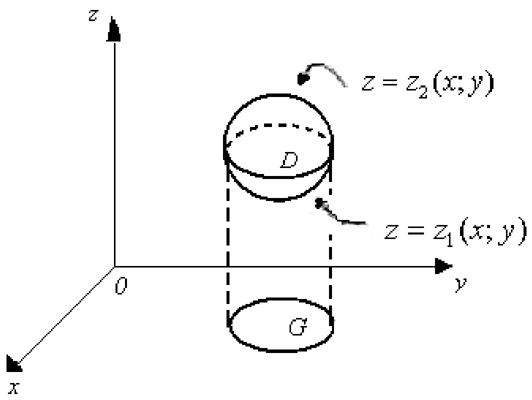
Замечание. $\iint_D 1dxdy = S_D = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} 1dy = \int_a^b (\varphi_2(x)-\varphi_1(x))dx$.

Формула Дирихле

$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$. Для области $D=\{(x,y)|a\le x\le b; a\le y\le x\}$ справедливо равенство $\int_a^b dx \int_a^x f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)dx$.

4. Тройной интеграл и его вычисление

Пусть есть некоторая область $\Omega\in\mathbb{R}^3$ и пусть в области Ω задана функция $f(x,y,z)$. D – проекция Ω на XoY. Пусть Ω обладает свойством, что любая прямая, параллельная осям координат, пересекает Ω не более, чем в двух точках. L – линия, которая проектируется на область D. Ω разбиваем на элементарные объемы $\tau=\{X_j\}_{j=1}^{j_\tau}$, причем X_j имеет объем μX_j. Тройной интеграл по определению $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \lim\limits_{|\tau|\to 0}\sum_{j=1}^{j_\tau} f(P_j)\mu X_j$, где $P_j\in X_j$. Если предел в правой части существует и не зависит от разбиения τ и выбора точек P_j, то тогда существует тройной интеграл.



Вычисление тройного интеграла

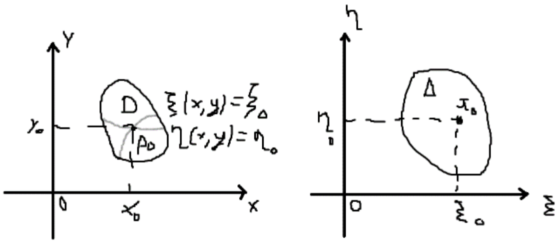
Для каждой точки $M_j\in D$ считаем $z=\chi_1(x,y)$ – нижняя граница Ω и $z=\chi_2(x,y)$ – верхняя граница Ω. Если ввести функцию $F(x,y)=\int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$, то тройной интеграл можно представить в виде $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iint_D F(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\chi_1(x,y)}^{\chi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$.

Замечание. Если область сложная, то ее всегда можно разбить на области, для которых любая прямая, параллельная осям координат, пересекает границу области не более, чем в 2 точках.

5. Замена переменной в двойном интеграле

Преобразование плоских областей

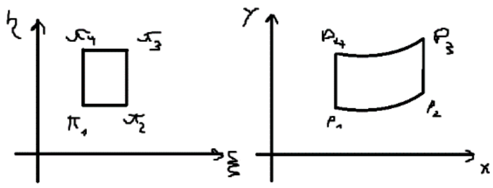
Пусть даны две плоскости XoY и $\xi o\eta$ и две области D и Δ. Область Δ является прообразом D, т.е. каждой точке из одной области ставится в соответствие ровно одна точка из другой области (взаимно-однозначное). Возьмем точки $p_0(x_0, y_0)$ и $\pi_o(\xi_0, \eta_0)$. Если мы зафиксируем значения ξ_0 и η_0, то $\xi(x,y) = \xi_0$ и $\eta(x,y) = \eta_0$ в области D будут отображением прямых $\xi = \xi_0$ и $\eta = \eta_0$ в области Δ, то есть $(*)\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$ – взаимно-однозначное отображение Δ в D, а $\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$ – обратное $(*)$.



Линии $\begin{cases} \xi(x,y) = \xi_0 \\ \eta(x,y) = \eta_0 \end{cases}$ носят название координатных линий в D (криволинейные координаты).

Преобразование разбиений

В плоскости $\xi o\eta$ возьмем прямоугольную область (разбиение) и ее отображение $\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$ в плоскости XoY. Координаты прямоугольника в $\xi o\eta$: $\pi_1(\xi;\eta)$; $\pi_2(\xi + d\xi;\eta)$; $\pi_3(\xi + d\xi;\eta + d\eta)$; $\pi_4(\xi;\eta + d\eta)$. Координаты в XoY: $p_1(x_1;y_1)$; $p_2(x_2;y_2)$; $p_3(x_3;y_3)$; $p_4(x_4;y_4)$. Выразим точки $p_1,\dots p_4$ через точки $\pi_1,\dots\pi_4$: $\begin{cases} x_1 = x(\xi;\eta) \\ y_1 = y(\xi;\eta) \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = x(\xi + d\xi;\eta) \\ y_2 = y(\xi + d\xi;\eta) \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = x(\xi + d\xi;\eta + d\eta) \\ y_3 = y(\xi + d\xi;\eta + d\eta) \end{cases}$; $\begin{cases} x_4 = x(\xi;\eta + d\eta) \\ y_4 = y(\xi;\eta + d\eta) \end{cases}$.



Пусть $x(\xi,\eta)$ и $y(\xi,\eta)$ – непрерывно-дифференцируемые функции. Тогда

$$\begin{cases} x_1 = x(\xi;\eta) \\ y_1 = y(\xi;\eta) \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = x(\xi;\eta) + \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \alpha_2 \\ y_2 = y(\xi;\eta) + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta + \beta_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_3 = x(\xi;\eta) + \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta + \alpha_3 \\ y_3 = y(\xi;\eta) + \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta + \beta_3 \end{cases};$$

$\begin{cases} x_4 = x(\xi;\eta) + \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta + \alpha_4 \\ y_4 = y(\xi;\eta) + \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta + \beta_4 \end{cases}$, где α_n и β_n – бесконечно малые более высокого порядка малости, чем $\partial\xi$ и $\partial\eta$.

Рассмотрим проекции сторон $p_1p_2p_3p_4$: $p_1p_{2_{oX}} = x_2 - x_1 = \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi + \alpha_2$; $p_1p_{2_{oY}} = y_2 - y_1 = \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi + \beta_2$. Аналогичным образом вычислим остальные проекции.

Пусть $\Delta\sigma$ – площадь $p_1p_2p_3p_4$. $\Delta\sigma \sim 2S_{\Delta}p_1p_2p_4 = \left\| \begin{matrix} x_2 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_4 - y_1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{matrix} \right\| d\xi d\eta$. Последний определитель называется якобианом преобразования $\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$, и обозначается $\mathcal{J}(\xi,\eta;x,y) = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{matrix} \right\|$.

Если рассмотреть отношение площадей $\frac{\Delta\sigma}{d\xi d\eta} \xrightarrow[\pi_1\pi_2\pi_3\pi_4 \to \pi_1]{} \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{matrix} \right\|$.

<u>Замечание.</u> Определитель положителен, если обход точек сохраняется, и отрицательный, если не сохраняется.

Формула замены переменной в двойном интеграле

Модель якобиана преобразования характеризует искажение площади. Рассмотрим $\iint_D f(x,y)dxdy = \lim\limits_{|\tau|\to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} f(P_i)\Delta\sigma_i = \lim\limits_{|\tau'|\to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} f\big(x(\pi_i);y(\pi_i)\big) * \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{matrix} \right\| * d\xi d\eta = \iint_\Delta f\big(x(\xi,\eta);y(\xi,\eta)\big)|\mathcal{J}(\xi,\eta;x,y)|d\xi d\eta$, где τ' - разбиение Δ, которое порождает τ – разбиение D, $\Delta\sigma_i = \mu X_i$.

<u>Пример.</u> Двойной интеграл в полярных координатах. $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ – формула перехода к полярным координатам. Пусть Δ – в полярных координатах, тогда D – в декартовых. Якобиан тогда равен $\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\phi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$. Получаем $\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi$.

6. Якобиан в полярных, цилиндрических и сферических координатах

В полярных координатах – смотри конец предыдущего билета.

Замена переменной в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты

Пусть $\begin{cases} x = \varphi(u,t,w) \\ y = \psi(u,t,w) \\ z = \chi(u,t,w) \end{cases}$. Область Ω' в плоскости (u,t,w) переходит в Ω в плоскости (x,y,z), т.е. $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(\varphi(u,t,w);\psi;\chi)|\mathcal{J}|dudtdw$. Цилиндрические координаты отличаются от полярных только добавлением третьего измерения $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = \xi \end{cases}$. Тогда $\mathcal{J}(u,t,w;x,y,z) =$

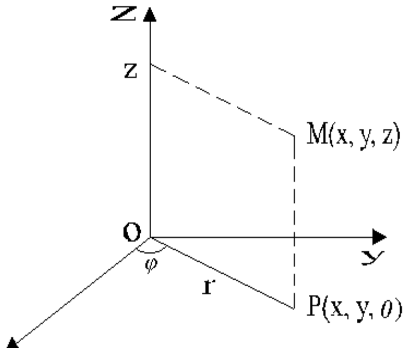


рис.3

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\phi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Отсюда $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega'} f\big(x(\rho,\varphi,\xi)\,;y(\rho,\varphi,\xi);z(\rho,\varphi,\xi)\big)\rho d\rho d\varphi d\xi$.

Для сферических координат точке $M(x,y,z)$ будем сопоставлять три переменные (ρ,φ,θ) (см. рисунок): $\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ x = \rho\cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 \le \rho < +\infty \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$. Обратным преобразованием в

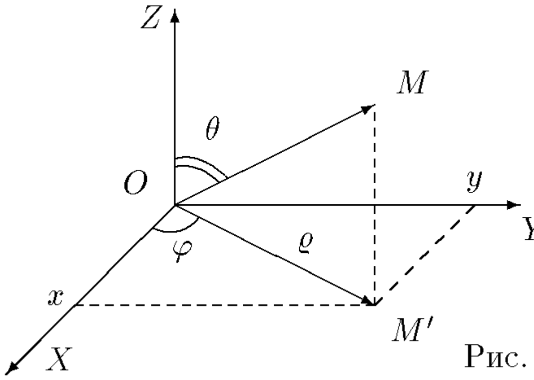


Рис. 4

данном случае является $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \tan\varphi = \frac{y}{x} \\ \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{cases}$.

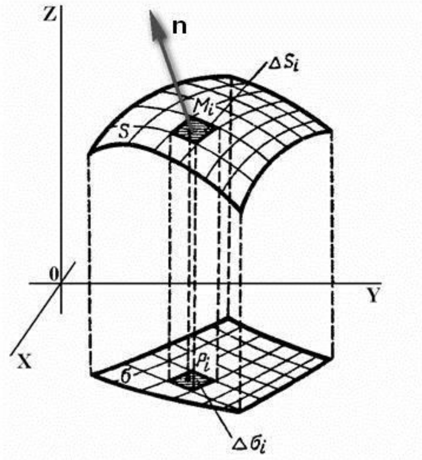
Якобианом преобразования будет являться $\mathcal{J}(\rho,\varphi,\theta;x,y,z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta$. Отсюда $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz =$ $\iiint_{\Omega'} f\big(x(\rho,\varphi,\theta);y(\rho,\varphi,\theta);z(\rho,\varphi,\theta)\big)\rho^2\sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta$.

7. Площадь поверхности

Пусть в $D \in \mathbb{R}^2$ задана непрерывная дифференцируемая функция $z = f(x,y)$. Пусть k – поверхность, которая проектируется на область D.

Площадь поверхности k измеряется пределом, к которому стремится площадь многогранника, описанного около поверхности при неограниченном увеличении числа его граней и при стремлении к нулю наибольшего из диаметров этих граней.



Описанный многогранник задает разбиение области D. Пусть $P_0(x_0, y_0)$ и $M_0\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ – проекция точки M_0 и точка касания $z_0 = f(x_0, y_0)$. Тогда уравнение касательной плоскости будет выглядеть следующим образом: $z - z_0 = f'_x(x, y)(x - x_0) + f'_y(x, y)(y - y_0)$. Обозначим площадь каждой грани как dq, а площадь ее проекции как $d\sigma$. Тогда $d\sigma = dq\cos\gamma$, где γ – угол между нормалью $\vec{n}$ в точке M_0 и осью Oz. Координаты этого вектора нормали будут совпадать с координатами вектора градиента: $\vec{n}\big(-f'_x(x_0, y_0); -f'_y(x_0, y_0); 1\big)$, так как мы рассматриваем внешнюю нормаль. Единичный вектор нормали к поверхности тогда будет равен:

$$\vec{n}\left(-\frac{f'_x(x_0,y_0)}{\sqrt{1+{f'_x}^2(x_0,y_0)+{f'_y}^2(x_0,y_0)}}; -\frac{f'_y(x_0,y_0)}{\sqrt{1+{f'_x}^2(x_0,y_0)+{f'_y}^2(x_0,y_0)}}; \frac{1}{\sqrt{1+{f'_x}^2(x_0,y_0)+{f'_y}^2(x_0,y_0)}}\right)$$

$\cos\gamma$ будет тогда равен $\frac{1}{\sqrt{1+{f'_x}^2(x_0,y_0)+{f'_y}^2(x_0,y_0)}}$. Тогда $dq = \frac{d\sigma}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + {f'_x}^2(x_0, y_0) + {f'_y}^2(x_0, y_0)}\,d\sigma$. Теперь можно выразить площадь поверхности как $S_{\text{пов}} = \lim\limits_{\max diam(q_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta q_k$, где q_k – грань, $\Delta q_k = dq_k$ – ее площадь, n – число разбиений. Подставим в наше выражение dq: $S_{\text{пов}} = \lim\limits_{\max diam(q_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta\sigma_k \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}$. При большом количестве разбиений можно перейти к интегральной сумме $S_{\text{пов}} = \iint_D \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}\,d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + {f'_x}^2 + {f'_y}^2}\,dxdy$.

<u>Замечание:</u> Сложную фигуру можно разбить на части, каждую из которых можно однозначно спроектировать на какую-либо координатную плоскость.

8. Криволинейный интеграл 1 рода и его свойства. Вычисление

Пусть L – кусочно-гладкая кривая, которая представляется как $\vec{r}(t) = \big(x(t); y(t); z(t)\big)$, где $t \in [\alpha; \beta]$, и каждый кусок которой имеет производную. Пусть L является дугой AB. Разобьем ее на n частей $[\alpha; \beta]$ так, что $t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$, $\vec{r}(t_0) = \overrightarrow{OA}, \vec{r}(t_n) = \overrightarrow{OB}$, а $\vec{r}(t_i)$ – точки деления дуги AB. Пусть на L задана функция $f(x, y, z)$. Для каждого промежутка $\Delta S_i = |\vec{r_i}|$ – длина промежутка, или звена ломаной, вписанной в кривую. На каждом промежутке возьмем точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, принадлежащую куску i ломаной. В каждой такой точке

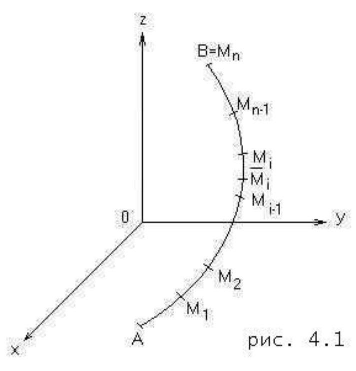


рис. 4.1

посчитаем значение функции, умножим на длину звена i и составим сумму для всех звеньев: $I_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(P_i)\Delta S_i$.

По определению, интегралом первого рода от функции f по кривой L называется предел последовательности интегральных сумм I_n при условии, что $\max \Delta S_i \to 0$ и не зависит от выбора точек P_i на кривой и характера разбиения кривой на отрезки. $\int_L f(x,y,z)dS \equiv \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta S_i \to 0}} \sum_{n=1}^{\infty} f(P_i)\Delta S_i = \int_{\cup AB} f(x,y,z)dS$.

<u>Замечание:</u> Иногда интеграл 1 рода называется интегралом по длине.

Свойства криволинейных интегралов 1 рода

1) Линейность
   a. $\int_L cfdS = c\int_L fdS$.
   b. $\int_L (f+g)dS = \int_L fdS + \int_L gdS$.
2) $\int_L dS = S_n$ – длина дуги L.
3) Интеграл не зависит от ориентации кривой.
4) Пусть $L = L_1 \cup L_2$ и L_1, L_2 имеют только одну общую точку. Тогда $\int_L fdS = \int_{L_1} fdS + \int_{L_2} fdS$.

Вычисление криволинейных интегралов 1 рода

Пусть $L = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [\alpha;\beta], \vec{r}(\alpha) = \overrightarrow{OA}, \vec{r}(\beta) = \overrightarrow{OB}. \\ z = z(t) \end{cases}$ Тогда $dS = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$. Криволинейный интеграл вычисляется как $\int_L f(x,y,z)dS = \int_\alpha^\beta f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$. В случае кривой $y = g(x)$ на плоскости: $dS = \sqrt{1 + g'^2(x)}dx$, $\int_L f(x,y)dS = \int_A^B f\big(x, g(x)\big)\sqrt{1 + g'^2(x)}dx$.

9. Криволинейный интеграл 2 рода и его свойства. Вычисление

Пусть L – кусочно-гладкая кривая, которая представляется как $\vec{r}(t) = \big(x(t); y(t); z(t)\big)$, где $t \in [\alpha;\beta]$, и каждый кусок которой имеет производную. Пусть L является дугой AB. Разобьем кривую на n частей так, что точки деления будут: $A = A_0; A_1; \dots; A_{n-1}; A_n = B$. На каждой дуге выберем точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Для каждой дуги $A_{i-1}A_i$ обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ как ее проекцию на ось Ox. Пусть на L задана функция $f(x,y,z)$. В каждой точке P_i посчитаем значение функции и умножим на проекцию Δx_i длины звена и составим сумму для всех звеньев: $\sum_{n=1}^{\infty} f(P_i)\Delta S_i$.

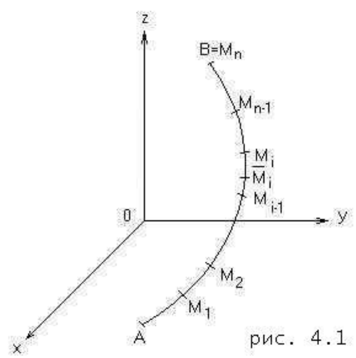


рис. 4.1

По определению, интеграл второго рода от функции f по кривой L по переменной x называется предел последовательности интегральных сумм I_n при условии, что $\max \Delta S_i \to 0$ и не зависит от выбора точек P_i на кривой и характера разбиения кривой на отрезки. $\int_L f(x,y,z)dx \equiv \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta S_i \to 0}} \sum_{n=1}^{\infty} f(P_i)\Delta x_i = \int_{\cup AB} f(x,y,z)dx$. При смене ориентации знак криволинейного интеграла второго рода меняется на противоположный. Аналогичным образом выводятся криволинейные интегралы второго рода по проекции на другую координатную ось.

Пусть на L задана вектор-функция $\vec{A} = (f, g, h)$. Тогда $J = \int_L f(x,y,z)dx + \int_L g(x,y,z)dy + \int_L h(x,y,z)dz = \int_L (fdx + gdy + hdz) = \int_L \vec{A}d\vec{r}$.

<u>Пример:</u> Работа силы по кривой $A = \int_L \vec{F}d\vec{r}$.

Свойства криволинейных интегралов 2 рода

1) $\int_{\cup BA} \vec{A}d\vec{r} = -\int_{\cup AB} \vec{A}d\vec{r}$
2) Линейность
   a. $\int_L c\vec{A}d\vec{r} = c\int_L \vec{A}d\vec{r}$.
   b. $\int_L (\overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{A_2})d\vec{r} = \int_L \overrightarrow{A_1}d\vec{r} + \int_L \overrightarrow{A_2}d\vec{r}$.
3) Пусть $L = L_1 \cup L_2$ и L_1, L_2 имеют только одну общую точку. Тогда $\int_L fdS = \int_{L_1} fdS + \int_{L_2} fdS$.
4) Пусть D – область, ∂D – ее граница ($D \in \mathbb{R}^2$). Пусть $D = D_1 \cup D_2, \mu(D_1 \cap D_2) = 0$. Пусть $\vec{A}$ непрерывна в D. Тогда $\oint_{\partial D} \vec{A}d\vec{r} = \oint_{\partial D_1} \vec{A}d\vec{r} + \oint_{\partial D_2} \vec{A}d\vec{r}$.

<u>Доказательство.</u> $D_1: \oint_{\partial D_1} \vec{A}d\vec{r} = \int_{\cup ABC} \vec{A}d\vec{r} + \int_{\cup CA} \vec{A}d\vec{r}$, $D_2: \oint_{\partial D_2} \vec{A}d\vec{r} = \int_{\cup CEA} \vec{A}d\vec{r} + \int_{\cup AC} \vec{A}d\vec{r}$. Тогда $\oint_{\partial D_1} \vec{A}d\vec{r} + \oint_{\partial D_2} \vec{A}d\vec{r} = \int_{\cup ABC} \vec{A}d\vec{r} + \int_{\cup CEA} \vec{A}d\vec{r} = \oint_{\partial D} \vec{A}d\vec{r}$.

<u>Замечание.</u> Это свойство обобщается на любое количество разбиений области D.

Вычисление криволинейных интегралов 2 рода

$\int_L \vec{A}d\vec{r} = \int_L (fdx + gdy + hdz)$. Пусть кривая L задается параметрически: $= \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha; \beta]$, x, y, z – дифференцируемые функции. Тогда координаты точек A, B будут $A\big(x(\alpha); y(\alpha); z(\alpha)\big), B\big(x(\beta); y(\beta); z(\beta)\big)$. Обозначим точку $M\big(x(t); y(t); z(t)\big)$, лежащую произвольно на кривой L в промежутке $[\alpha; \beta]$. Обозначим длину дуги AM как $S(t)$. Тогда $dS = S'(t)dt$. Вектор касательной к кривой L будет выражаться как $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$. Длина касательного вектора будет равна $\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| = S'(t)$ (корень квадратный из суммы квадратов). Тогда единичный вектор касательной можно будет выразить как $\frac{\frac{d\vec{r}(t)}{dt}}{S'(t)} = \frac{d\vec{r}(t)}{dS}$. У этого вектора есть направляющие косинусы $\frac{dx}{dS} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha, \frac{dy}{dS} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta, \frac{dz}{dS} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma$. Отсюда можно выразить $dx = \cos\alpha\, dS, dy = \cos\beta\, dS, dz = \cos\gamma\, dS$. Подставив в исходный интеграл, получим $\int_L \vec{A}d\vec{r} = \int_L (f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz) = \int_L (f(x,y,z)\cos\alpha + g(x,y,z)\cos\beta + h(x,y,z)\cos\gamma)dS$. Тем самым мы свели интеграл второго рода к интегралу первого рода. В параметрическом виде интеграл можно записать в форме $\int_{\alpha}^{\beta}\Big(f\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)+g\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t)+h\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big)dt$.

В случае кривой L график функции $y=y(x), x\in[a;b]$ на плоскости интеграл принимает вид $\int_L\,(f(x,y,z)dx+g(x,y,z)dy)=\int_a^b\Big(f\big(x,y(x)\big)+g\big(x,y(x)\big)y'(x)\Big)dx$.

10. Независимость криволинейного интегрирования от контура интегрирования

Пусть дуга $L\in\mathbb{R}^2$. Вычислим интеграл $\int_L\,(xdy-ydx)$.

1) $L: y=x^2, (0;0)\to(1;1).\ \int_L\,(xdy-ydx)=\int_0^1(2x^2-x^2)dx=\frac{1}{3}$.
2) $L: y=x^3, (0;0)\to(1;1).\ \int_L\,(xdy-ydx)=\int_0^1(3x^3-x^3)dx=\frac{1}{2}$.

Если провести те же расчет для интеграла $\int_L\,(xdy+ydx)$, то выяснится, что в первом и втором случае интегралы равны. Необходимо понять, какие необходимы условия, чтобы криволинейный интеграл 2 рода не зависел от пути интегрирования, а зависел только от начальной и конечной точки.

Теорема 5. Для независимости криволинейного интеграла 2 рода $\int_{(P_0)}^{(P)}(P(x,y)dx+Q(x,y)dy)$ от контура интегрирования необходимо достаточно, чтобы $Pdx+Qdy=dU$, т.е. $P=\frac{dU}{dx}, Q=\frac{dU}{dy}$, $([P(x,y);Q(x,y)]=grad\ U)$.

Доказательство. Пусть кривая L задается параметрически: $L=\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}, t\in[\alpha;\beta]$, x,y – дифференцируемые функции. L связывает точки P_0 и P. $\int_{(P_0)}^{(P)}(P(x,y)dx+Q(x,y)dy)=\int_{\alpha}^{\beta}\big(P(x,y)x'(t)+Q(x,y)y'(t)\big)dt=\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{dU}{dx}x'(t)+\frac{dU}{dy}y'(t)\right)dt=\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{dU}{dt}\right)dt=\int_{\alpha}^{\beta}U'(t)dt=U(\beta)-U(\alpha)=U(P)-U(P_0)$, откуда следует что интеграл не зависит от пути интегрирования.

Теорема 6. Для выполнения $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dU$ необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

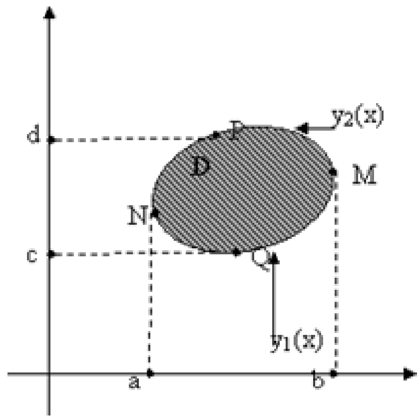
Доказательство. Если $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ – полный дифференциал, то $P=\frac{\partial U}{\partial x}, Q=\frac{\partial U}{\partial y}. \frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$, откуда и вытекает требуемое.

Замечание. $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=dU$ тогда и только тогда, когда $\oint P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$.

Замечание. Пусть есть $\vec{A}(P;Q;R)$. Тогда $\int_{(P_0)}^{(P)}(P(x,y)dx+Q(x,y)dy+R(x,y,z)dz)$ не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда $rot\,\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=\vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial Y}\right)=0$, т.е. тогда, когда $\begin{cases}\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}\\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial Y}\end{cases}$.

11. Формула Грина для односвязной и многосвязной областей

Вывод формулы Грина для односвязной области



Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана односвязная область D такая, что любая прямая, параллельная осям координат, пересекает границу этой области не более, чем в двух точках. Обозначим как ∂D ее границу. Тогда область D можно определить двумя способами:

$$D = \{(x,y)|a \le x \le b; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$
$$D = \{(x,y)|c \le y \le d; \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x)\}$$

Будем обходить контур в положительном направлении.

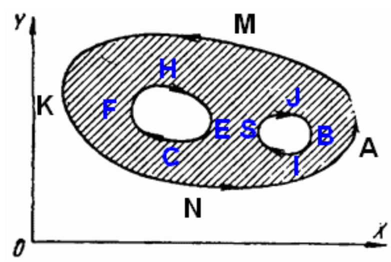
Теорема 7. Пусть D – элементарная область. Функции $P(x,y), Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ на замыкании $\overline{D}$ (область вместе с ее границей). Тогда выполняется равенство $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{\partial D} Pdx + Qdy$. Эта формула называется формулой Грина. Она связывает криволинейный интеграл и двойной интеграл.

Доказательство. Рассмотрим $\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b \Big(P\big(x,\varphi_2(x)\big) - P\big(x,\varphi_1(x)\big)\Big) dx = \int_{\cup NPM} P(x,y)dx - \int_{\cup NQM} P(x,y)dx = \int_{\cup NPM} P(x,y)dx + \int_{\cup MQN} P(x,y)dx = -\oint_{\partial D} Pdx$. Аналогичным образом выводится и для функции Q.

Замечание. Если область односвязная, но не является элементарной, то ее всегда можно разбить на элементарные области.

Формула Грина для многосвязной области

Теорема 8. Пусть $D - n$-связная область. Функции $P(x,y), Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ на замыкании $\overline{D}$. Тогда для этой области выполняется формула Грина на условии $\partial D = \Gamma^+ \cup \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^- \cup \ldots \cup \Gamma_n^-$.



Доказательство. Не умоляя общности, рассмотрим трехсвязную область. Сделаем разрезы AB, SE. Тогда $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\cup KNA} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + \int_{\cup AB}(Pdx + Qdy) + \int_{\cup BIS}(Pdx + Qdy) + \int_{\cup SE}(Pdx + Qdy) + \int_{\cup ECF}(Pdx + Qdy) + \int_{\cup FHE}(Pdx + Qdy) + \int_{\cup ES}(Pdx + Qdy) + \int_{\cup SJB}(Pdx + Qdy) + \int_{\cup BA}(Pdx + Qdy) + \int_{\cup AMK}(Pdx + Qdy) = \int_{\Gamma^+}(Pdx + Qdy) + \int_{\Gamma_1^-}(Pdx + Qdy) + \int_{\Gamma_2^-}(Pdx + Qdy) = \oint_{\partial D} Pdx + Qdy$

12. Следствия из формулы Грина

1) Пусть D – односвязная область, ∂D – ее граница. Пусть для нее справедлива формула Грина. Пусть $P = -y, Q = x, \frac{\partial P}{\partial y} = -1, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Тогда $\iint_D 2dxdy = \oint_{\partial D} -ydx + xdy$. Тогда $S_D = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} -ydx + xdy$.
2) Если в D выполняется $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то $\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = 0$.
3) Пусть $Q = \frac{du}{dx}, P = -\frac{du}{dy}$. Тогда $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \Delta U$ – оператор Лапласа (лапласиан). В этом случае формула Грина привет вид $\iint_D \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) dxdy = \oint_{\partial D} -\frac{du}{dy}dx + \frac{du}{dx}dy = \oint_{\partial D} -\frac{du}{dy}\cos(\vec{\tau}; Ox)\, dS + \frac{du}{dx}\cos(\vec{\tau}; Oy)\, dS = \oint_{\partial D} \frac{du}{dy}\sin(\vec{n}; Ox)\, dS + \frac{du}{dx}\cos(\vec{n}; Ox)\, dS = \oint_{\partial D} \frac{\partial U}{\partial n} dS$ – производная по направлению, где $\vec{n}$ – нормаль, $\vec{\tau}$ – касательная. Переходы косинусов к синусам сделаны с помощью $(\vec{\tau}; Ox) = (\vec{n}; Ox) + \frac{\pi}{2}$.

<u>Пример.</u> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Тогда $S = \frac{1}{2}\oint_{\partial D} -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\sin^2 t + ab\cos^2 t)dt = \pi ab$.

13. Несобственные двойные интегралы. Интеграл Пуассона

Пусть D – неограниченная область в $\mathbb{R}^2$, пусть $z = f(x, y)$ непрерывна в D. Рассмотрим ограниченную область $B \in D$. Составим двойной интеграл по ней: $I(B) = \iint_B f(x, y)dxdy$. Будем произвольно расширять область B до области D.

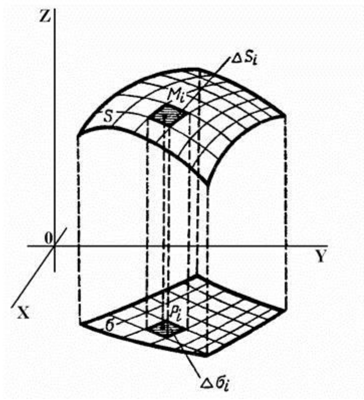
Если существует $A = \lim\limits_{B \to D} I(B)$, который не зависит от характера расширения, то этот предел и называется несобственным двойным интегралом. Если этот предел конечен, то говорят о сходимости несобственного двойного интеграла. Если не существует или бесконечен – о расходимости, или несуществовании.

Рассмотрим интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Составим двойной несобственный интеграл $J = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\, dy = \lim\limits_{B \to \mathbb{R}^2} \iint_B e^{-x^2-y^2} dxdy$, где B – круг радиуса r. Получаем $\lim\limits_{r \to \infty} \iint_{x^2+y^2 \le r^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim\limits_{r \to \infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r e^{-\rho^2} \rho d\rho = \lim\limits_{r \to \infty} -2\pi \frac{1}{2} e^{-\rho^2}\Big|_0^r = \lim\limits_{r \to \infty} \pi\left(-e^{-r^2} + 1\right) = \pi$. Отсюда $J = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \pi$, значит $J = \sqrt{\pi}$.

14. Поверхностные интегралы 1 и 2 рода

Поверхностные интегралы 1 рода

(интегралы по площади поверхности)



Пусть на области $D \in \mathbb{R}^2$ определена непрерывная дифференцируемая функция $z = g(x, y)$, задающая поверхность K. Пусть задан описанный многогранник $Q = \bigcup_{i=1}^{n} q_i$ и точка M_i касания грани q_i поверхности. Пусть на K задана функция $f(x, y, z)$. Тогда можно составить интегральную сумму $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\mu q_i$. Если устремить количество разбиений к бесконечности и максимальный диаметр каждой грани к нулю, и если существует соответствующий предел, который не зависит от характера разбиения и выбора точек M_i, то этот предел будет называться поверхностным интегралом первого рода по поверхности K. $\iint_K f(x, y, z)dq = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max diam\, q_i \to 0}} f(M_i)\mu q_i$.

Для вычисления такого интеграла спроектируем на D многогранник Q. Тогда q_i спроектируется на σ_i, $\Delta\sigma_i$ – площадь σ_i. Тогда $\mu q_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i}$, где γ_i – угол между нормалью к поверхности в точке касания и положительным направлением оси Oz. Тогда $\mu q_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\sqrt{g_x'^2(P_i) + g_y'^2(P_i) + 1}}$, где P_i – проекция M_i на D. Получаем формулу вычисления поверхностного интеграла 1 рода: $\iint_K f(x, y, z)dq = \iint_D f\big(x, y, g(x, y)\big)\sqrt{g_x'^2(P_i) + g_y'^2(P_i) + 1}dxdy$.

Поверхностные интегралы 2 рода

(интегралы по координатам)

Ориентация поверхности производится с помощью нормали. Поверхностный интеграл называется ориентированным, если указано направление нормали при условии, что направление нормали меняется непрерывно вместе с точкой поверхности, к которой проведена нормаль. Существуют также неориентированные поверхности (лист Мебиуса).

Пусть на области $D \in \mathbb{R}^2$ определена непрерывная дифференцируемая функция $z = g(x, y)$, задающая поверхность K. Пусть задан описанный многогранник $Q = \bigcup_{i=1}^{n} q_i$ и точка M_i касания грани q_i поверхности. Спроектируем на D многогранник Q. Тогда q_i спроектируется на σ_i, $\Delta\sigma_i$ – площадь σ_i. Тогда $\mu q_i = \frac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i}$, где γ_i – угол между нормалью к поверхности в точке касания и положительным направлением оси Oz. Если угол острый, то $\Delta\sigma_i = \mu\sigma_i$, если тупой, то $\Delta\sigma_i = -\mu\sigma_i$. Пусть на K задана функция $f(x, y, z)$. Тогда можно составить интегральную сумму $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i$. Если устремить количество разбиений к бесконечности и максимальный диаметр каждой грани к нулю, и если существует соответствующий предел, который не зависит от характера разбиения и выбора точек M_i, то этот предел будет называться поверхностным интегралом второго рода по поверхности K. $\iint_K f(x,y,z)dxdy \equiv \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max diam\, q_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i$. Если проектировать на другие координатные оси, то получим $\iint_K f(x,y,z)dxdz$, $\iint_K f(x,y,z)dydz$.

Связь с интегралом первого рода

Пусть $\alpha(M), \beta(M), \gamma(M)$ – направляющие косинусы вектора нормали. Тогда $\iint_K f(x,y,z)dxdy = \iint_K f(x,y,z)\cos\gamma\, dq$. Аналогичным образом можно составить и выражения для проектирования на другие координатные оси.

Свойства интегралов по координатам

1) При смене ориентации поверхностный интеграл меняет знак.
2) Аддитивность.
3) Пусть на K заданы $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z), \vec{a} = (P;Q;R)$. Тогда $d\vec{q} = (\cos\alpha\, dq; \cos\beta\, dq; \cos\gamma\, dq)$, $\iint_K (Pdydz + Qdxdz + Rdxdy) = \iint_K (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) = \iint_K \vec{a}d\vec{q}$.

15. Скалярные и векторные поля. Свойства дивергенции, ротора, градиента. Оператор Набла

Скалярные и векторные поля. Оператор Набла

Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана область Ω, в которой задана непрерывная дифференцируемая функция $U(x,y,z)$. В этом случае будем говорить, что в Ω задано скалярное поле.

Пусть в Ω заданы непрерывные дифференцируемые функции $A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z)$. В этом случае будем говорить, что в Ω задано векторное поле $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$.

Векторная линия $R(t)$ – линия $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$, направление которой в каждой точке совпадает с направлением $\vec{A}$, т.е. можно составить дифференциальное уравнение в векторном виде:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath} + z'(t)\vec{k} \parallel \vec{A}, \frac{A_x}{x'} = \frac{A_y}{y'} = \frac{A_z}{z'}, \frac{A_x}{dx} = \frac{A_y}{dy} = \frac{A_z}{dz}$$

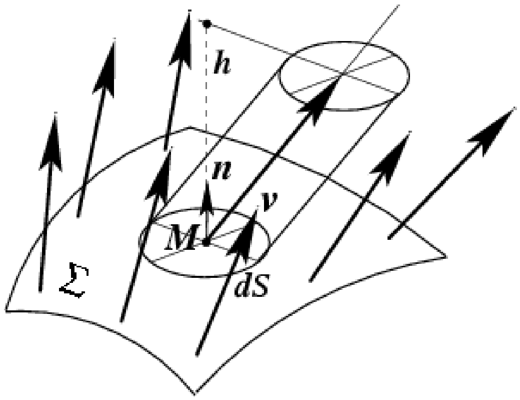
Если в области Ω задано скалярное поле $U(x,y,z)$, то $grad\, U(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ – задает векторное поле, а $\nabla = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ – оператор Набла. $\nabla U = grad\, U$.

Соотношения между $div, rot, grad$

$rot\, grad\, U = 0, div\, rot\, \vec{A} = 0, div\, grad\, U = \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа, $grad\, div\, \vec{A} = \nabla(\nabla\vec{A}), rot\, rot\, \vec{A} = grad\, div\, \vec{A} - \Delta\vec{A}$.

16. Поток векторного поля. Дивергенция. Соленоидальные поля. Формула Гаусса-Остроградского

Поток векторного поля. Дивергенция. Соленоидальные поля



Пусть задано векторное поле $\vec{A}$ в Ω, которое проходит через поверхность $S \in \Omega$. Пусть точка $P \in S$, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности S в точке P. Элемент поверхности обозначим как dS. Тогда $h = \vec{A}\vec{n}$ – высота цилиндра с основанием dS, $\vec{A}\vec{n}dS$ – объем жидкости, прошедшего через dS в единицу времени. Тогда величину $\Pi = \iint_S A_n dS$ называют потоком вектора $\vec{A}$ через поверхность S. Если координаты вектора нормали заданы направляющими косинусами $\vec{n}(\cos\alpha ; \cos\beta ; \cos\gamma)$, то интеграл по площади поверхности можно свести к интегралу по координатам $\Pi = \iint_S A_x \cos\alpha\, dS + A_y \cos\beta\, dS + A_z \cos\gamma\, dS = \iint_S A_x dydz + A_y dxdz + A_z dxdy$. Также поток можно выразить через тройной интеграл по теореме Гаусса-Остроградского, если поверхность S замкнутая: $\Pi = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dxdydz$. Величину $div\,\vec{A} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ называют дивергенцией поля $\vec{A}$. Дивергенцию можно также выразить через оператор Набла, как скалярное произведение $div\,\vec{A} = \nabla\vec{A}$. С помощью данной формулы можно переписать формулу Гаусса-Остроградского в дифференциальной форме: $\oiint_S A_n dS = \iiint_\Omega (\nabla\vec{A}) dxdydz = \iiint_\Omega div\,\vec{A}\, dxdydz$. Если поверхность S начать стягивать в точку P, то $\iiint_\Omega div\,\vec{A}\, dxdydz = V\, div\,\vec{A}(P')$, где $P' \in \Omega$. Если будем стягивать S в точку P, то и $P' \to P$. Тогда получим $div\,\vec{A}\,(P) = \lim\limits_{S \to P} \frac{\oiint_S A_n dS}{V}$. V – объем области Ω.

Дивергенция характеризует относительное расширение объема жидкости в окрестности точки P. Если $div\,\vec{A} = 0$, то и поток через поверхность равен нулю. Поля, у которых дивергенция равна нулю, называют соленоидальными, или бездивергентными. Дивергенция характеризует наличие вход/выход жидкости в точке.

Формула Гаусса-Остроградского

Связывает поверхностный интеграл с тройным. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана область Ω, а K – граница этой области. Тогда $\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint_K P dydz + Q dxdz + R dxdy$, причем интегрирование ведется по внешней нормали.

<u>Замечание.</u> Пусть $P = x, Q = y, R = z$. Тогда $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3$. Тогда объем тела, ограниченного Ω, вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\oiint_K x dydz + y dxdz + z dxdy$.

17. Циркуляция векторного поля. Потенциальные поля. Ротор. Формула Стокса

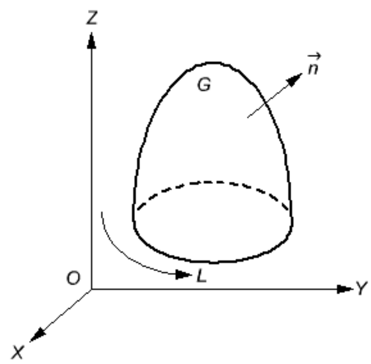
Циркуляция векторного поля. Потенциальные поля

Пусть в Ω задано векторное поле $\vec{A}$ и некая кривая L, заданная параметрически $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [\alpha; \beta] \\ z = z(t) \end{cases}$. Пусть на кривой есть точка P. Обозначим элемент дуги кривой как dS. Пусть A_τ – проекция $\vec{A}$ на касательную $\vec{\tau}$ к L в каждой точке. Тогда $A_\tau = \vec{A}\vec{\tau}$, если вектор касательной единичный, и $A_\tau = \frac{\vec{A}\frac{d\vec{\tau}}{dt}}{\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right|} = \frac{A_x x' + A_y y' + A_z z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$. Если возьмем величину $d\text{Ц} = A_\tau dS$ – количество жидкости, сосредоточенное на дуге dS. Проинтегрировав, получим циркуляцию вектора $\vec{A}$ по контуру L. $\text{Ц} = \oint_L A_\tau dS$. Циркуляцию можно выразить не только через криволинейный интеграл 1 рода, но и через криволинейный интеграл 2 рода: $\text{Ц} = \oint_L \frac{A_x x' + A_y y' + A_z z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \int_\alpha^\beta (A_x x' + A_y y' + A_z z') dt = \oint_L A_x dx + A_y dy + A_z dz$. Также циркуляцию можно выразить через двойной интеграл по формуле Стокса: $\text{Ц} = \oint_L A_x dx + A_y dy + A_z dz = \oint_L \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \cos\alpha \, dq + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \cos\beta \, dq + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \cos\gamma \, dq = \oint_L \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dxdy$.

Величина, равная $rot\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$ называется ротором вектора $\vec{A}$. Если координаты вектора нормали заданы направляющими косинусами $\vec{n}(\cos\alpha\,; \cos\beta\,; \cos\gamma)$, то $\text{Ц} = \oint_L A_x dx + A_y dy + A_z dz = \iint_S (rot\,\vec{A})\vec{n} dq$. При стягивании поверхности S в точку P получим $(rot\,\vec{A})_n = \lim\limits_{S \to P} \frac{\text{Ц}}{S}$.

Если $rot\,\vec{A} = 0$ d Ω, то такое поле называется потенциальным, или безвихревым. Следовательно, $\oint_L A_x dx + A_y dy + A_z dz = \oint_L dU = 0, A_x = \frac{\partial U}{\partial x}, A_y = \frac{\partial U}{\partial y}, A_z = \frac{\partial U}{\partial z}$ и $\int_{P_0}^P A_\tau ds = U(P) - U(P_0)$. Тогда $\vec{A} = grad\,U$.

Формула Стокса



Пусть K – поверхность $z = z(x, y)$, L – граница поверхности (кривая в пространстве). Тогда от поверхностного интеграла 2 рода можно перейти к криволинейному интегралу 2 рода: $\iint_K \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_L \; Pdx + Qdy + Rdz$ – обобщение формулы Грина, формула Стокса. Обход контура выбирается по правилу правой руки.

Замечание. В случае $\mathbb{R}^2$ формула переходит в формулу Грина.

Замечание. Пусть K – замкнутая ориентированная поверхность. Тогда $\iint_K \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_{K_1} \quad + \iint_{K_2} \quad = \oint_L \; Pdx + Qdy + Rdz + \oint_{-L} Pdx + Qdy + Rdz = 0.$

Замечание. Пусть $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда $\oint_L \; Pdx + Qdy + Rdz = 0.$

18. Числовой ряд. Необходимое условие сходимости ряда. Гармонический ряд. Критерий Коши.

Основные определения

Бесконечная сумма членов последовательности вида $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$называется рядом $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$. Последовательность вида $\{S_n\}$: $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = \cdots$ называется последовательностью частичных сумм. Если эта последовательность не имеет предела, то ряд называется расходящимся, или не имеющим суммы, и сходящимся, если имеет.

Теорема 1. Если ряд сходится $\left(\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0\right)$, то общий член этого ряда стремится к нулю.

Доказательство. $a_n = S_n - S_{n-1}, S_n \to S, S_{n-1} \to S$. Следовательно, $a_n \to 0$.

Замечание. Необходимое условие сходимости ряда является достаточным условием его расходимости.

Замечание. Если общий член ряда стремится к нулю, то это еще не значит, что ряд сходится.

Свойства сходящихся рядов

1) Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то для любого $\lambda \in R$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ сходится, и если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$, то $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda S$.
2) Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ сходятся, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = A + B$.
3) Если у сходящегося ряда отбросить или приписать конечное число членов, то сходимость ряда не изменится.

Замечание. $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ – остаток (хвост) ряда.

Гармонический ряд

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ – расходящийся, несмотря на то, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Второй замечательный предел: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\uparrow e$. Следовательно, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e, n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1, \ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$. Если выписать члены данного ряда, получим: $\ln 2-\ln 1<1, \ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}, \dots, \ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$. Если расписать сумму ряда, сократятся многие члены, останется только $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. Но $\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty$. Тогда ряд расходится по определению.

Замечание. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, где $\alpha>0$, называется обобщенным гармоническим рядом. Он расходится при $0<\alpha\le 1$ и сходится $\alpha>1$.

Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что для любого $n>N$ и $p>0$ справедливо неравенство $|a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$.

Доказательство. Критерий Коши сходимости ряда сводится к критерию Коши сходимости последовательности частичных сумм $\left(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}=S_{n+p}-S_n\right)$.

19. Признаки сравнения знакоположительных рядов

Ряды с положительными членами

Лемма о сходимости ряда с положительными членами

Лемма. Если последовательность S_n ряда ограничена, то ряд сходится.

Доказательство. $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$. Но $a_{n+1}>0$. Следовательно, $S_n\uparrow$. Также, S_n ограничена сверху. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. А значит ряд сходится по определению.

Признаки сравнения

Теорема 3 (Первый признак сравнения). Пусть есть ряды с положительными членами $\sum_{n=0}^{\infty}a_n, \sum_{n=0}^{\infty}b_n$.

1) Если, начиная с некоторого места, $a_n\le b_n$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ сходится.
2) Если, начиная с некоторого места, $a_n\le b_n$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ расходится, то и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ расходится.

Доказательство.

1) Не умоляя общности, скажем, что для любого n выполняется $a_n\le b_n$. Пусть $B_n=\sum_{k=0}^{n}b_k; A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$. Тогда $A_n\le B_n$. Но B_n ограничена. Следовательно, A_n возрастает и ограничена. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$. Следовательно, ряд сходится по определению.
2) От противного.

Теорема 4 (Второй признак сравнения). Пусть есть ряды с положительными членами $\sum_{n=0}^{\infty}a_n, \sum_{n=0}^{\infty}b_n$, и, начиная с некоторого места, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$.

1) Если сходится ряд с большим отношением, то сходится и ряд с меньшим.
2) Если расходится ряд с меньшим отношением, то расходится и ряд с большим.

Доказательство. Не умоляя общности, скажем, что для любого n выполняется $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Распишем это для каждого n: $\frac{a_2}{a_1} \le \frac{b_2}{b_1}, \frac{a_3}{a_2} \le \frac{b_3}{b_2}, \dots, \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Если мы перемножим все полученные неравенства, сократятся почти все члены, останется только $\frac{a_{n+1}}{a_1} \le \frac{b_{n+1}}{b_1}$, откуда можно выразить $a_{n+1} \le \frac{a_1 b_{n+1}}{b_1} = \lambda b_{n+1}$. Применив теорему 3, доказательство очевидно.

Теорема 5. Пусть есть ряды с положительными членами $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, и, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0$, то оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Доказательство. Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $\left|\frac{a_n}{b_n} - A\right| < \varepsilon$. Следовательно, $A - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < A + \varepsilon$, откуда $a_n < (A + \varepsilon) b_n$. Получается, что по теореме 3 эти ряды ведут себя одинаково. Если $A = 1$, то они являются эквивалентными бесконечно малыми.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Второй ряд расходится. Значит, исходный ряд расходится.

20. Признак Даламбера

Теорема 6. Пусть есть ряд с положительными членами $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ и если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то при $l > 1$ ряд расходится, при $l < 1$ ряд сходится, при $l = 1$ неизвестно, требуется дополнительное исследование.

Доказательство. Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l\right| < \varepsilon$. Тогда $l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$.

Пусть $l < 1$. Тогда $l + \varepsilon = q < 1$. Тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ и $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится. Следовательно, по теореме 4 ряд сходится.

Пусть $l > 1$. Тогда $l - \varepsilon = q > 1$. Тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} > q$ и $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ расходится. Следовательно, по теореме 4 ряд расходится.

21. Радикальный признак Коши

Теорема 7. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то при $l > 1$ ряд расходится, при $l < 1$ ряд сходится, при $l = 1$ требуется дополнительное исследование.

Доказательство. Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любого $n > N$ выполняется неравенство $\left|\sqrt[n]{a_n} - l\right| < \varepsilon$. Тогда $l - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$.

Пусть $l < 1$. Тогда $l + \varepsilon = q < 1$. Тогда $a_n < q^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится. Следовательно, по теореме 3 ряд сходится.

Пусть $l > 1$. Тогда $l - \varepsilon = q > 1$. Тогда $a_n > q^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ расходится. Следовательно, по теореме 3 ряд расходится.

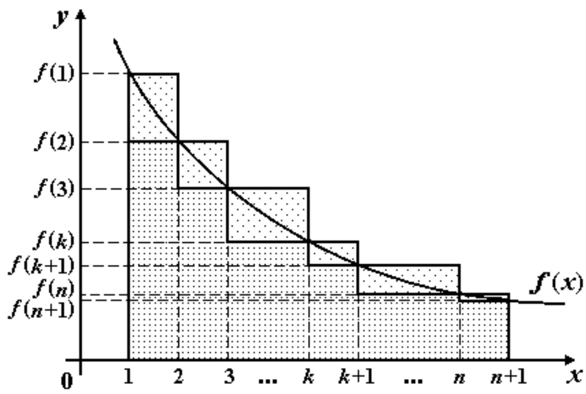
<u>Пример.</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$. Тогда $\frac{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}}{3} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{3} \uparrow \frac{e}{3} < 1$. Следовательно, интеграл сходится.

22. Интегральный признак Коши

Пусть есть ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и задана монотонно убывающая функция $f(x)$ на $[1; +\infty)$ и $f(1) = a_1, f(n) = a_n$.

<u>Теорема 8.</u>

1) $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
2) $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.



<u>Доказательство.</u> Площадь ступенчатой фигуры – сумма ряда, площадь криволинейной трапеции – несобственный интеграл. Если ряд больше и сходится, то и интеграл тоже. С другой стороны, вписанный ряд (без первого члена) будет меньше криволинейной трапеции, и если сходится интеграл, то сходится и ряд.

$a_2 + a_3 + \cdots + a_n < \int_1^n f(x)dx < a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$. Это равносильно $S_n - a_1 < \int_1^n f(x)dx < S_{n-1}$. Отсюда: если существует предел S_{n-1}, то существует и интеграл; если существует интеграл, то существует и предел $S_{n-1} = S_n - a_1$.

23. Признак Лейбница для знакочередующихся рядов

Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

<u>Теорема 9 (Признак Лейбница).</u> Пусть есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, a_n > 0$. Пусть a_n монотонно убывает до нуля. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ сходится и его сумма $S \leq a_1$ не превосходит первого члена ряда.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим четную сумму $S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$. В силу монотонности каждое из выражений в скобках положительно, отсюда следует, что S_{2m} монотонная возрастает. С другой стороны, если перегруппировать выражение как $S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - a_{2m}$, то каждое выражение в скобках тоже будет положительным, и $S_{2m} \leq a_1$. Получается, что S_{2m} возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$. Теперь рассмотрим нечетные суммы $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$. $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m+1} = 0$. Значит существует и предел $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$ нечетных сумм. Получается, что исходная последовательность также имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \leq a_1$.

<u>Пример.</u> Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ сходится (ряд Лейбница).

Замечание. Остаток знакочередующегося ряда обладает всеми его свойствами, например, его сумма по модулю не превосходит первого отброшенного члена $r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \xrightarrow[N\to\infty]{} r\,, r \le |a_{N+1}|$. С помощью этого признака можно оценивать погрешность.

24. Абсолютно и условно сходящиеся ряды и их свойства

Абсолютная и условная сходимость

Пусть есть знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Рассмотрим знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Теорема 10. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится, то тогда сходится и знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ сходится. Тогда по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любого $n > N$ и натурального p выполняется неравенство $|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$. Тогда $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots a_{n+p}| < \varepsilon$. Тогда по критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Если сходится основной ряд и ряд из абсолютных величин, то такой ряд называется абсолютно сходящимся. Если сходится только основной ряд, а ряд из абсолютных величин расходится, то ряд сходится условно.

Свойства абсолютно сходящихся рядов

1) В абсолютно сходящемся ряде можно поменять местами члены ряда любым образом, при этом при такой перестановке получается абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.
2) Два абсолютно сходящихся ряда можно почленно складывать и вычитать. В результате получится ряд с суммой, равной сумме или разности сумм исходных рядов соответственно.
3) Рассмотрим абсолютно сходящиеся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Назовем произведение этих рядов другим рядом $\sum_{n=2}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, т.е. $c_2 = a_1b_1; c_3 = a_1b_2 + a_2b_1; \dots; c_n = a_1b_{n-1} + a_2b_{n-1} + \dots + a_{n-1}b_1$. К тому же, если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, то $\sum_{n=2}^{\infty} c_n = A * B$.

Свойства условно сходящихся рядов

1) Пусть есть условно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Обозначим его положительные члены $\{a_k^+\} = a_1^+; a_2^+; \dots; a_k^+$ и отрицательные $\{a_k^-\} = -a_1^-; -a_2^-; \dots; -a_k^-$. Множества $\{a_k^+\}$ и $\{a_k^-\}$ бесконечны. Для пояснения последнего пойдем от противного: пусть множество $\{a_k^-\}$ конечно. Тогда можно рассмотреть хвост ряда, который содержит только положительные члены. Этот хвост будет хвостом сходящегося ряда, составленного из абсолютных величин, т.е. ряд сходится абсолютно. Противоречие. Значит, множество $\{a_k^-\}$ бесконечно. Аналогичные рассуждения можно провести и для множества $\{a_k^+\}$.
2) Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ расходятся.

   Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\,, \widetilde{S_n} = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\,, S_m^+ = \sum_{k=1}^{m} a_k^+\,, S_p^- = \sum_{k=1}^{p} a_k^-\,, m + p = n$. Получаем, что $S_n = S_m^+ - S_p^- \to S; \widetilde{S_n} = S_m^+ + S_p^- \to \infty$. Следовательно, $S_n + \widetilde{S_n} = 2S_m^+ \xrightarrow[m\to\infty]{} +\infty$. Получаем, что ряд из положительных значений расходится. Аналогичные рассуждения можно провести и для ряда с отрицательными членами.

3) Теорема 11 (Римана). Пусть $S \in R$ (или $\pm\infty$). В условно сходящемся ряде можно так переставить члены, что его сумма будет равняться S.

   Идея доказательства. Рассмотрим число S. Так как ряд, составленный из положительных членов, расходится, то выполняется неравенство $a_1^+ + a_2^+ + \dots + a_m^+ > S$. Потом наберем такое количество отрицательных членов, чтобы выполнялось неравенство $a_1^+ + a_2^+ + \dots + a_m^+ - a_1^- - a_2^- - \dots - a_p^- < S$. Так, постепенно набирая то положительные, то отрицательные члены, сумма выражения начинает приближаться к числу S.

25. Понятие равномерной сходимости ряда. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов

Функциональные ряды

Основные определения

Ряд называется функциональным, если каждый член ряд есть некая функция от x. $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Если при $x = x_0$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, то x_0 – точка сходимости. Множество всех точек сходимости называется областью сходимости ряда. В области сходимости ряда можно определить сумму ряда как функцию $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. При этом $S(x)$ можно записать в виде $S(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) + r_n(x)$, где $r_n(x) \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ – хвост ряда. В каждой точке области сходимости стремится к нулю $r_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Пусть x_1 принадлежит области сходимости. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_1, что для любого $n > N_1$ выполняется $|r_n(x_1)| < \varepsilon$.

Пусть x_2 принадлежит области сходимости. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_2, что для любого $n > N_2$ выполняется $|r_n(x_2)| < \varepsilon$.

Можно сказать, что для любого конечного числа точек $x_1, x_2, \dots, x_p$ из области сходимости существует такое $N = \max(N_1, N_2, \dots, N_p)$ такое, что для любого $n > N$ и $x_k, k = 1, \dots, p$ из набора выполняется неравенство $|r_n(x_k)| < \varepsilon$.

Сходящийся функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся в области U, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любого $n > N$ и для любого $x \in U$ выполняется неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$.

Свойства равномерно сходящихся рядов

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется мажорируемым в некоторой области X, если существует такой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M_n, M_n \geq 0$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $|u_1(x)| \leq M_1; |u_2(x)| \leq M_2; \dots; |u_n(x)| \leq M_n$.

Теорема 12 (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда). Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – мажорируемый в некоторой области E и мажорантный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ – сходящийся, то мажорируемый ряд сходится равномерно в E.

Доказательство. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ сходится, следовательно, по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для любого $n > N$ и для любого натурального p выполняется неравенство $\sum_{k=n+1}^{n+p} M_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $M_{n+1} + \dots + M_{n+p} > |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \dots + |u_{n+p}(x)|$. Получается, что для любого $x \in E$

выполняется $|u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, а при $p \to \infty$ для любого $x \in E$ выполняется $|r_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. А так как $|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \le |u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)|$, то получается, что $|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Следовательно, ряд сходится равномерно по определению.

Замечание. Мажорируемый ряд сходится на E не только равномерно, но и абсолютно.

Теорема 13. Равномерно сходящийся в области E ряд, составленный из непрерывных функций, представляет собой функцию, непрерывную в этой области. Без доказательства.

Пример. $\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\cos nx}{n^2} + \cdots$. Для любого $x \in R$ выполняется $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$, а $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходящийся. Следовательно, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ – непрерывная функция на R.

Теорема 14. Равномерно сходящийся ряд непрерывных функций можно интегрировать почленно. Пусть дано, что ряд $u_1(t) + u_2(t) + \cdots + u_n(t) + \cdots$ равномерно сходится на E и пусть для любого n $u_n(t)$ непрерывна в E и пусть $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Тогда на любом промежутке $[a; x] \in E$ выполняется $\int_a^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)dt$. Без доказательства.

Теорема 15. Пусть ряд дифференцируемых в E функций $u_1(t) + u_2(t) + \cdots + u_n(t) + \cdots$ равномерно сходится в E и $f(x)$ – его сумма, то $f'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots + u_n'(x)$. Без доказательства.

26. Степенные ряды. Теорема Абеля

Степенные ряды

Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ называется степенным рядом. Ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ – тоже степенной, где a – центр ряда.

Теорема Абеля

Теорема 16 (Абеля о сходимости степенного ряда).

1) Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится в точке x_0. Тогда для любого x такого, что $|x| < |x_0|$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится.

2) Пусть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится в точке x_1. Тогда для любого x такого, что $|x| > |x_1|$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится.

Доказательство.

1) Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится. Тогда его общий член стремится к нулю $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$. Тогда существует такое $M > 0$, что для любого n выполняется $|a_n x_0^n| < M$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 \frac{x}{x_0} x_0 + a_2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 x_0^2 + \cdots + a_n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n x_0^n + \cdots$. Теперь рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин $|a_0| + \left|\frac{x}{x_0}\right| |a_1 x_0| + \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 |a_2 x_0^2| + \cdots + \left|\frac{x}{x_0}\right|^n |a_n x_0^n| + \cdots$. Все правые модули, как уже было сказано, меньше M. Тогда этот ряд можно смажорировать так, что для любого n будет выполняться $\left|\frac{x}{x_0}\right|^n |a_n x_0^n| < \left|\frac{x}{x_0}\right|^n M$. $\left|\frac{x}{x_0}\right|^n M$ – геометрическая прогрессия с $q =$

$\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. Тогда, по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n x^n|$ сходится абсолютно и, следовательно, сходится.

2) От противного. Если расходится в точке x_1 и сходится в точках $|x| > |x_1|$, то по первому пункту должен сойтись и в точке x_1. Противоречие. Следовательно, расходится в точках $|x| > |x_1|$.

Радиус сходимости степенного ряда

Рассмотрим сходящийся в точке x_0 степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Тогда он сходится по теореме Абеля в любой точке $|x| < |x_0|$. По второй части теоремы Абеля, пусть ряд расходится в некоторой точке $|x_1| > |x_0|$. Тогда в любой точке $|x| > |x_1|$ ряд будет расходящимся. Теперь проверим на расходимость в точке $x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2}$. Теперь отрезок с неизвестной сходимостью уменьшился в два раза. Так можно продолжать до бесконечности, постоянно уменьшая неизвестный отрезок. Можно перейти к пределу. Пусть существует предел $\lim_{k\to\infty} x_k = R$. Получаем, что для любого $|x| < R$ ряд сходится, а для любого $|x| > R$ ряд расходится. Число R называется радиусом сходимости степенного ряда, интервал $(-R; R)$ – интервалом сходимости. Точки $x = \pm R$ необходимо проверять самостоятельно.

Замечание. Радиус сходимости можно ввести и для степенного ряда вида $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. Его областью сходимости будет $(a - R; a + R)$.

Правило определения радиуса сходимости

1) С использованием признака Даламбера.

<u>Теорема 17.</u> Пусть существует предел $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$. Тогда $R = \frac{1}{q}$ (включая 0, если $q = +\infty$ и ∞, если $q = 0$).

<u>Доказательство.</u> Пусть $u_n = |a_n x^n|$ и $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ – ряд, состоящий из абсолютных величин. Рассмотрим предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right||x| = q|x|$. По признаку Даламбера ряд сходится, если $q|x| < 1$. Получаем, что $|x| < \frac{1}{q}$, т.е. $R = \frac{1}{q}$.

2) С использованием радикального признака Коши.

<u>Теорема 18.</u> Пусть существует предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$. Тогда $R = \frac{1}{q}$ (включая 0, если $q = +\infty$ и ∞, если $q = 0$).

<u>Доказательство.</u> Аналогично предыдущему доказательству, рассмотрим предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q|x|$. По радикальному признаку Коши ряд сходится, если $q|x| < 1$. Получаем, что $|x| < \frac{1}{q}$, т.е. $R = \frac{1}{q}$.

Свойства степенных рядов

<u>Теорема 19.</u> Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ представляет собой непрерывную функцию в интервале сходимости $[-R_1; R_1], R_1 < R$.

<u>Доказательство.</u> Для любого $x \in [-R_1; R_1]$ рассмотрим ряд $|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots$. Для него имеем $|a_0| \le |a_0|, |a_1 x| < |a_1| R, \dots, |a_n x^n| < |a_n| R_1^n, \dots$. Мажорирующий ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| R_1^n$ сходится абсолютно, следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно, следовательно, $S(x)$ – непрерывная функция в $[-R_1; R_1]$.

Теорема 20. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ можно почленно дифференцировать $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$, интегрировать $\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ на любом отрезке из области сходимости (потому что на нем он сходится равномерно), при этом полученные степенные ряды будут иметь тот же радиус сходимости $R = R_1 = R_2$.

Доказательство. Покажем, что $R_1 = R$. $R_1 = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n n}{a_{n+1}(n+1)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$. Аналогично $R_2 = R$.

27. Ряды Тейлора и Маклорена. Остаточный член

Разложение функций в степенные ряды

Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ сходится к $S(x)$ в области сходимости $(-R + x_0; x_0 + R)$. Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ является разложением функции $S(x)$ на этом интервале. Обратной задачей является нахождение разложения функции в ряд.

Ряды Тейлора и Маклорена

Пусть $y = f(x)$ – дифференцируемая бесконечное число раз в точке x_0 и в ее окрестности. Пусть существует ее разложение в ряд такое, что его сумма равна $f(x)$ и $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$. Возьмем производную $f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots$. Возьмем вторую производную $f''(x) = 2a_2 + 3 * 2a_3(x - x_0) + 4 * 3a_4(x - x_0)^2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots$. Можно вывести закономерность: $f^{(n)}(x) = n!\, a_n + (n+1)n * \ldots * 2a_{n+1}(x - x_0) + \cdots$. Положим $x = x_0$. Тогда $f(x_0) = a_0, f'(x_0) = a_1, f''(x_0) = 2a_2, f'''(x_0) = 3 * 2a_3, \ldots, f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n$. Тогда можно записывать выражения для $f(x) \sim f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. Данное выражение называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.

Замечание. Если функция дифференцируема бесконечное число раз в точке, то ряд Тейлора всегда можно составить. Но этот ряд может и не сойтись к исходной функции.

Ежели мы берем дифференцируемую бесконечно число раз в точке $x_0 = 0$ и в ее окрестности функцию и раскладываем функцию в этой точке в ряд Тейлора, то данный ряд будет являться рядом Маклорена.

Теорема 20. Пусть $f(x)$ дифференцируема бесконечное число раз в точке x_0 и ε – окрестности этой точки. Тогда для того, чтобы ряд Тейлора в этой точке сходился к исходной функции, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Тейлора стремился к нулю.

Доказательство. Запишем n членов ряда Тейлора $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = S_n(x) + R_n(x)$. Очевидно, что для того, чтобы $S_n(x) \to f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

28. Разложения элементарных функций

1) $f(x) = e^x$. $f^{(n)}(x) = e^x; f^{(n)}(0) = 1$. $e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n; R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$. То есть разложение справедливо на всей числовой оси. $R_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2) $f(x) = \sin x$. $f^{(4k+1)}(0) = 1; f^{(4k+2)}(0) = 0; f^{(4k+3)}(0) = -1; f^{(4k)}(0) = 0$. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x^{2n+1}|}{|x^{2n+3}|} \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \left\{\frac{1}{0}\right\} = \infty$. Можно показать, что $R_n(x) \to 0$.

<u>Замечание.</u> При любом x $\sin x$ – знакочередующийся ряд.

3) $f(x) = \cos x$. Аналогично синусу, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. $R = \infty; R_n(x) \to 0$.

<u>Замечание.</u> В случае комплексной переменной $z = x + iy$ имеем $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$. Разложив функцию комплексной переменной в ряд, получим два ряда – действительный и мнимый.

4) $f(x) = (1+x)^m, m \in R$. $f^{(n)}(x) = m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}; f^{(n)}(0) = m(m-1)\dots(m-n+1)$. $(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$. Можно показать, что $R = 1$, область сходимости $[-1; 1]$.

5) $f(x) = \ln(1+x)$. $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n}; f^{(n)}(0) = (n-1)!\,(-1)^{n+1}$. $\ln(1+x) = \frac{1*x}{1!} - \frac{1!x^2}{2!} + \frac{2!x^3}{3!} - \frac{3!x^4}{4!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!x^n}{n!} = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$. При $x = 1$ получим ряд Лейбница. При $x = 1$ получим обобщенный гармонический расходящийся. Можно показать, что $R = 1$, область сходимости $(-1; 1]$.

Очень долго сходится, для вычисления $\ln 2$ с точностью до 0.00001 надо вычислить 100000 членов.

Второй способ: $(\ln(1+x))' = \frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \cdots$. Почленно интегрируя, получим $\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$.

6) $f(x) = \operatorname{atan} x$. $(\operatorname{atan} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$. Ряд сходится на интервале $(-1; 1)$. $f(x) - f(0) = \int_0^x (\operatorname{atan} t)'dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Пусть $x = 1$. Тогда $f(x) - f(0) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Отсюда $\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Применение рядов к приближенным вычислениям

Приближенные вычисления функций

Пусть $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки A. Тогда ее можно разложить в ряд Тейлора в данной точке $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$. Очевидно, что для вычисления значения функции с определенной точностью достаточно посчитать частичную сумму данного ряда. При этом погрешность можно оценивать двумя способами:

1) С помощью остаточного члена формулы Тейлора $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^n$.

2) По хвосту ряда $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^k$.

<u>Замечание.</u> Вторая оценка удобна для знакочередующихся рядов.

Пример. $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. $R_n(1) = \frac{e^{\xi}(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}, \xi \in (0;1); r_n(1) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{(n+1)!n} = \frac{1}{n!n}$. Для вычисления e с точностью до 0.01, то $r_n(1) < 0.01$, т.е. $n = 5$.

Как ускорить сходимость логарифма: рассмотрим разложение в ряд выражения $\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Тогда $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Для вычисления $\ln 2$ поимеем $x = \frac{1}{3}$. Для достижения точности 0.00001 необходимо вычислить всего 5 членов.

Приближенные вычисления интегралов

Пусть надо найти $\int_a^x f(t)dt = F(x)$. Изначально разложим $f(x)$ в ряд Тейлора, при этом промежуток $[a;x]$ должен попасть в область его сходимости. Тогда на этом промежутке мы можем его интегрировать, и посчитать частичную сумму проинтегрированного ряда. Для вычисления понадобится:

1) Разложить $f(x)$ в ряд Тейлора
2) Ограничиться конечным числом членов.
3) Проинтегрировать почленно, оценить погрешность.

Пример. $six = \int_0^x \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^x \left(\frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x}\right)dx = \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right)dx = x - \frac{x^3}{3!3} + \frac{x^5}{5!5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$.

29. Ряды с комплексными членами. Теорема Абеля

Ряды с комплексными членами

Числовые ряды

Рядом с комплексными членами называется выражение вида $u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$, где $u_n = a_n + ib_n$. Этот ряд сходится, если существует конечный предел частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Тогда $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + i\sum_{k=1}^{n} b_k = \sigma_n + i\tau_n$. Условия о конечном пределе частичных сумм необходимо и достаточно для того, чтобы существовали пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n ; \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n$. Таким образом, сходимость ряда с комплексными членами эквивалентна сходимости двух вещественных рядов.

<u>Теорема 22.</u> Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то сходится и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

<u>Доказательство.</u> $|u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Получаем, что $|a_n| \le |u_n|; |b_n| \le |u_n|$. По признаку сходимости получаем, что если сходится $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то сходятся абсолютно и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n ; \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. То есть сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Замечание. Все свойства действительных абсолютно сходящихся рядов переносятся на комплексные абсолютно сходящиеся ряды.

Рассмотрим степенной комплексный ряд $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$, $z = x + iy$, или в другой форме $c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots$.

Теорема 23 (Абеля). Если степенной комплексный ряд сходится при $z = z_0$, то он абсолютно сходится и при любом z таком, что $|z| < |z_0|$. Если этот же ряд расходится в точке $z = z_1$, то он будет расходиться и в любой точке z такой, что $|z| > |z_0|$.

Доказательство.

1) Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ сходится. Тогда его общий член стремится к нулю $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. Тогда существует такое $M > 0$, что для любого n выполняется $|c_n z_0^n| < M$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 \frac{z}{z_0} z_0 + c_2 \left(\frac{z}{z_0}\right)^2 z_0^2 + \cdots + c_n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n z_0^n + \cdots$. Теперь рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин $|c_0| + \left|\frac{z}{z_0}\right| |c_1 z_0| + \left|\frac{z}{z_0}\right|^2 |c_2 z_0^2| + \cdots + \left|\frac{z}{z_0}\right|^n |c_n z_0^n| + \cdots$. Все правые модули, как уже было сказано, меньше M. Тогда этот ряд можно смажорировать так, что для любого n будет выполняться $\left|\frac{z}{z_0}\right|^n |c_n z_0^n| < \left|\frac{z}{z_0}\right|^n M$. $\left|\frac{z}{z_0}\right|^n M$ – геометрическая прогрессия с $q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$. Тогда, по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n z^n|$ сходится абсолютно и, следовательно, сходится.

2) От противного. Если расходится в при $z = z_1$ и сходится в при $|z| > |z_1|$, то по первому пункту должен сойтись и при $z = z_1$. Противоречие. Следовательно, расходится при $|z| > |z_1|$.

Замечание. Существует радиус сходимости степенного комплексного ряда такой, что при $|z| < R$ ряд сходится, при $|z| > R$ расходится, точки на окружности требуют дополнительной проверки. Радиус сходимости можно искать так же, как и для вещественных рядов: по признаку Даламбера.

Замечание. Можно вводить функции комплексной переменной через степенные ряды.

30. Ряд Фурье по ортогональной системе функций. Многочлен Фурье

Ортогональная система функций

Пусть есть последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$ и для любого n $\varphi_n(x)$ – непрерывна на $[a; b]$. Система $\{\varphi_n(x)\}$ называется ортогональной на $[a; b]$, если $\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0, m \neq n$. По аналогии с ортогональными векторами, для которых условием ортогональности является нулевое скалярное произведение, только в нашем случае роль скалярного произведения выполняет интеграл. Интеграл берется, так как функции непрерывны.

Если в дополнение к предыдущему условию $\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = 1$ для любого натурального n, то такая система функций называется ортонормированной. На $[a; b]$.

Пример. Система $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx$ является ортогональной на $[-\pi; \pi]$. $\int_{-\pi}^{\pi} 1 * \sin nx\, dx = -\frac{1}{n}\cos nx \big|_{-\pi}^{\pi} = 0$; $\int_{-\pi}^{\pi} 1 * \cos nx\, dx = \frac{1}{n}\sin nx \big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{n}\sin \pi n = 0$; $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx * \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m+n)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m-n)x dx\right) = 0$.

Пример. Система $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$ является ортонормированной на $[-\pi; \pi]$. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos^2 nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2nx}{4n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1$; $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2nx}{4n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Замечание. Система $\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin nx$ является ортонормированной на $[-l; l]$.

Замечание. Система $\frac{1}{2}, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx$ ортогональная на $[0; \pi]$.

Замечание. Система $L_0(x) = 1, \ldots, L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ ортогональная на $[-1; 1]$.

Ряд Фурье по ортогональной системе функций

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $\{\varphi_n(x)\}$ – непрерывная на $[a; b]$ ортогональная система функций. Пусть существуют такие a_k, что $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$.

Теорема 1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, \varphi_k(x)$ сходится равномерно, то $a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}$.

Доказательство. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ домножим на $\varphi_n(x)$. Получаем $f(x)\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_n(x)\varphi_k(x)$. Так как ряд сходится равномерно, имеем право проинтегрировать. $\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)dx = a_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)dx$, откуда следует, что $\frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}$.

a_n называется коэффициентом Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$ на $[a; b]$.

Пример. $\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}$ – ортогональная система функций, для которой $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right)$; $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$; $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l} dx$; $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l} dx$. a_n, b_n – формулы Эйлера-Фурье.

Многочлен Фурье смотри в следующем билете.

31. Тригонометрические многочлены и ряды. Формула Фурье-Эйлера. Ядро Дирихле

Ряд вида $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$ называется тригонометрическим многочленом n – го порядка. При $n \to \infty$ получим тригонометрический ряд.

$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos nx + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin nx\right)$; $\cos\varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$; $\sin\varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$, откуда получаем $a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_n \sin(nx + \varphi_n)$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Удобно для сложения двух гармоник в одну со сдвигом фазы.

Получили упрощенную форму тригонометрического ряда $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n)$.

Пусть есть тригонометрический ряд $P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$. Тогда для его имеем $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)dx\,; a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\cos kx\,dx\,; b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\sin kx\,dx$.

Замечание. Аналогично формулы верны в случае тригонометрического ряда.

Многочлены Фурье. Формула Фурье-Эйлера

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$. По формулам Фурье-Эйлера можно построить коэффициенты a_0, a_n, b_n. Тогда $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Будет ли сопоставленный ряд сходиться к $f(x)$?

Выражение вида $\Phi_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ называется многочленом Фурье функции $f(x)$. Тогда для того, чтобы $f(x) = \Phi_n(x) + R_n(x)$ раскладывалась в ряд $\Phi_n(x)$, необходимо, чтобы $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого x.

Распишем $\varphi_n(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\cos kx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\sin kx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right)dt = [t - x = u] = \Phi_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku\right)du$. Оказывается, $\varphi_n(x)$ можно посчитать.

Лемма. $c(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}$.

Доказательство.

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}u}{2\sin\frac{1}{2}u}\left(\frac{1}{2} + \cos u + \cos 2u + \dots + \cos nu\right) =$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}u + 2\sin\frac{1}{2}u\cos u + 2\sin\frac{1}{2}u\cos 2u + \dots + 2\sin\frac{1}{2}u\cos nu}{2\sin\frac{1}{2}u} =$$
$$\frac{\sin\frac{1}{2}u + \sin\frac{3}{2}u - \sin\frac{1}{2}u + \sin\frac{5}{2}u - \sin\frac{3}{2}u + \dots + \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}.$$

Следствие. $\Phi_n(x) = \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}du$.

Замечание. Можно показать, что $\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}du = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}du$, т.е. можно сдвигать как угодно влево и вправо. $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}$ называется ядром Дирихле.

Лемма. Пусть $\varphi(n)$ – 2π – периодическая функция, тогда $\int_{-\pi+x}^{\pi-x}\varphi(u)du = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)du$.

Доказательство. $\int_{-\pi+x}^{\pi-x}\varphi(u)du = \int_{-\pi+x}^{-\pi}\varphi(u)du + \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)du + \int_{\pi}^{\pi-x}\varphi(u)du = [u = t - 2\pi] = \int_{\pi-x}^{\pi}\varphi(t)dt + \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)du + \int_{\pi}^{\pi-x}\varphi(u)du = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(u)du$.

Выражение $D_n(u) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}$ называется ядром Дирихле.

Оценим погрешность. Рассмотрим разность $R_n(x) = f(x) - \Phi_n(x) = f(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}du\ldots$

<u>Лемма.</u> $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}du = 1.$

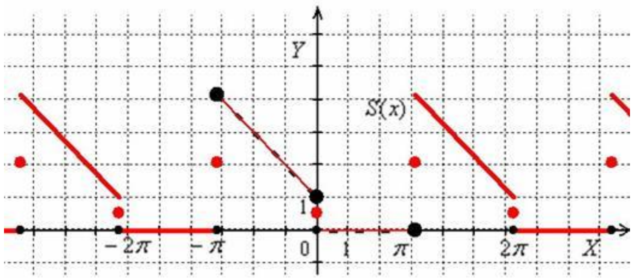
<u>Доказательство.</u> $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos ku\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}du = 1.$

…Тогда имеем $R_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - f(x+u)\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}du$. По этой формуле очень удобно высчитывать погрешность. А итоговой формулой будет $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx + R_n(x)$ – формула Фурье n – го порядка.

<u>Замечание.</u> Формула имеет более широкое применение, потому что для разложения необходимо лишь существования интегралов, а не производных вплоть до n-й.

32. Основные теоремы о сходимости рядов Фурье

<u>Замечание.</u> Ряд $\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ тогда, когда $R_n(x) \to 0$. Будем считать, что $f(x)$ – гладкая на $[a;b]$, если она непрерывна на этом промежутке вместе со своей производной и $f'(a) = f'(a+0)$ и $f'(b) = f'(b-0)$. $f(x)$ – кусочно – гладкая на $[a;b]$, если этот промежуток можно разбить на конечное число промежутков, на которых $f(x)$ гладкая. Можно показать, что у кусочно-гладкой функции особые точки это точки разрыва первого рода.



<u>Теорема 2.</u> Пусть $f(x)$ – кусочно – гладкая в $[-\pi;\pi]$. Тогда в любой точке этого промежутка ряд Фурье сходится к $f(x)$. В точках разрыва ряд сходится к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, а в граничных точках к $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

<u>Теорема 3 (Дирихле).</u> Пусть $f(x)$ имеет конечно число экстремумов на $[-\pi;\pi]$ и непрерывна, за исключением точек, в которых может быть разрыв первого рода. Тогда ряд Фурье сходится к $f(x)$, а в точках разрыва к $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, а в граничных точках к $\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$. Эта теорема более сильная, чем предыдущая.

33. Свойства коэффициентов Фурье

<u>Теорема 4.</u> Пусть $f(x)$ такова, что существуют интегралы $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, причем не обязательно только с разрывами первого рода – это могут быть и несобственные интегралы. Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0.$

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_n^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x) - \Phi_n(x)\right)^2 dx$, где $\Phi_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx$. Продолжим раскладывать $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) -$

$\Phi_n(x))^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\Phi_n(x)dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n^2(x)dx.$ Теперь рассмотрим члены по-отдельности.

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\Phi_n(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx\right)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx + b_k\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2.$

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx\right)^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg(\left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2\cos^2 kx + b_k^2\sin^2 kx) + 2\Big(\frac{a_0}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_k b_j\cos kx\sin jx + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n;j\neq n}(a_k a_j\cos kx\cos jx + b_k b_j\sin kx\sin jx)\Big)\Bigg)dx.$

Красотень, не правда ли? На самом деле, все интегралы на полном периоде для синусов и косинусов в первой степени будут равны нулю, поэтому выражение примет вид $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n^2(x)dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_k^2\frac{1+\cos 2kx}{2} + b_k^2\frac{1-\cos 2kx}{2}\right)dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2$. Так-то лучше.

Подставляем все в исходное выражение: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R_n^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 + \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) \geq 0.$

Это значит, что $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$. Получается, что при любом n ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2$ ограничен сверху, а значит он сходится, то есть общий член $a_k^2 + b_k^2$ стремится к нулю, то есть $a_k \to 0, b_k \to 0$ одновременно при $k \to \infty$.

<u>Следствие.</u> Для любых чисел A, B справедливо неравенство Коши $AB \leq \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$. Пусть $A = |a_n|, B = \frac{1}{n}$. Тогда имеем $\frac{|a_n|}{n} \leq \frac{1}{2}\left(|a_n|^2 + \frac{1}{n^2}\right)$. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – сходящиеся ряды. Следовательно, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(|a_n|^2 + \frac{1}{n^2}\right)$. По признаку сравнения сойдется и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$. Значит, общий член стремится к нулю, $\frac{|a_n|}{n} \to 0$.

Разложение 2π – периодических функций

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$ и 2π – периодична. Тогда $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx$, где $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,;\, a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx\,;\, b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$

<u>Замечание.</u> Можно интегрировать по любому промежутку длиной 2π.

В случае четной функции относительно центра промежутка $b_k = 0; a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx; a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx; f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx.$

В случае нечетной функции относительно центра промежутка $a_0 = a_k = 0; b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx; f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin kx.$

Разложение $2l$ – периодических функций

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-l;l]$ и $2l$ – периодична. Преобразуем функцию в 2π – периодическую $x = x'\frac{l}{\pi}, x' \in [-\pi;\pi]$. Тогда $f\left(x'\frac{l}{\pi}\right)$ – непрерывна на $[-\pi;\pi]$ и 2π

– периодична. Выполнив все подстановки, получим $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx\,; a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx\,; b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx\,; f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi kx}{l} + b_k \sin\frac{\pi kx}{l}$.

Разложение произвольных функций

Пусть $f(x)$ удовлетворяет а $[-\pi;\pi]$ теореме Дирихле. Тогда в точках непрерывности $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$. Но тогда вне заданного промежутка функция $f(x)$ не будет определяться рядом, она будет повторяться периодически.

Замечание. Аналогично ведет себя и разложение на промежутке $[0;2\pi]$.

34. Ряды Фурье в комплексной форме

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$. Для действительной переменной справедливо разложение $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$. Рассмотрим комплексный случай $c_n = a_n - ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos nx - i\sin nx)f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}f(x)dx$. Тогда для $a_n \cos kx + b_n \sin kx = Re\big((a_n - ib_n)(\cos nx + i\sin nx)\big) = Re\big(c_n e^{inx}\big) = \frac{1}{2}\big(c_n e^{inx} + \overline{c_n}e^{-inx}\big)$. Откуда получаем ряд Фурье в комплексной форме $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\big(c_n e^{inx} + \overline{c_n}e^{-inx}\big)\,; \overline{c_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos nx + i\sin nx)f(x)dx = c_{-n}$. В результате имеем ряд Фурье в комплексной форме $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$.

35. Равномерная сходимость рядов Фурье. Сходимость рядов Фурье «в среднем»

Теорема 5. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[-\pi;\pi]$ и имеет кусочно-гладкую производную, и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда ряд Фурье сходится к $f(x)$ равномерно.

Доказательство. Рассмотрим $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = [u = f(x); dv = \cos nx\,dx] = \frac{1}{\pi n}f(x)\sin nx\,\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx = -\frac{b_n'}{n}$, где b_n' – коэффициент Фурье для $f'(x)$. Аналогично можно вывести $b_n = \frac{a_n'}{n}$. По следствию из теоремы 4 ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n'|}{n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n'|}{n}$ сходятся, а следовательно сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|, \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$, а вместе с ними и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| + |b_n|$.Тогда для разложения Фурье имеем $|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n| + |b_n|$. По признаку Вейерштрасса ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно.

Сходимость «в среднем»

Пусть $F(x), F_1(x)$ – функции, заданные на $[a;b]$ и интегрируемы на нем вместе со своими квадратами. Рассмотрим $F_1(x)$ как приближение $F(x)$, при этом отклонением будет $R(x) = F(x) - F_1(x)$. Охарактеризовать это отклонение можно следующими способами:

1) $\max\limits_{[a;b]}|R(x)|$

2) по порядку малости $R(x)$ при $x \to a(b)$.

3) $\Delta=\sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b R^2(x)dx}$ – среднеквадратичное отклонение (квадраты площадей отклонений). Оно обобщает и дискретный случай $\Delta=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y(x_i)-y_1(x_i))^2}$.

Задача приближения в среднем: для $F(x)$ – найти такое $F_1(x)$ в некотором классе функций, чтобы среднеквадратичное отклонение было минимальным.

Теорема 6. Среди тригонометрических многочленов n – го порядка наилучшим приближением данной функции в смысле среднего квадратичного на $[-\pi;\pi]$ является многочлен Фурье данной функции, т.е. $\Delta_n=\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\left(\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\right)\right)^2dx}$ минимально тогда, когда $\alpha_0=a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\,,\alpha_k=a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx\,,\beta_k=b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$.

Доказательство. Пусть $F_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx$. Рассмотрим $\Delta_n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\left(\frac{1}{2}\alpha_0a_0+\sum_{k=1}^{n}\alpha_ka_k+\beta_kb_k\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2+\beta_k^2\right)$. Для вывода этого выражения использовались те же преобразования, что и в теореме 4. Имеем $2\Delta_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\alpha_0a_0+\frac{1}{2}\alpha_0^2+\left(\frac{1}{2}a_0^2-\frac{1}{2}a_0^2\right)-\frac{1}{2}a_0^2-\frac{1}{2}a_0^2-2\sum_{k=1}^{n}\alpha_ka_k+\beta_kb_k+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2+\beta_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\frac{1}{2}(\alpha_0-a_0)^2+\sum_{k=1}^{n}((\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2)-\frac{1}{2}a_0^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2+M$, где $M=\frac{1}{2}(\alpha_0-a_0)^2+\sum_{k=1}^{n}((\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2)$. Нетрудно заметить, что $M\geq 0$, при этом $2\Delta_n^2$ будет минимально при минимальном значении M, т.е. тогда, когда $\alpha_0=a_0,\dots,\alpha_k=a_k,$. Тогда выражение $2\Delta_n^2$ примет вид $2\Delta_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{1}{2}a_0^2-\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2$.

36. Равенство Парсеваля

Теорема 7 (Парсеваля). Пусть $f(x)$ – непрерывна и имеет кусочно-гладкую производную на $[-\pi;\pi]$ и $f(\pi)=f(-\pi)$. Тогда имеет место равенство $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)$.

Доказательство. Рассмотрим выведенное выражение $\Delta n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}R_n^2(x)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\right)$. Мы знаем, что $\Phi_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x)$ равномерно. Это значит, что для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что для любого $n>N$ и для любого $x\in[-\pi;\pi]$ выполняется $|R_n(x)|<\varepsilon$. Тогда выражение Δn^2 представить в виде $\Delta n^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}R_n^2(x)dx\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varepsilon^2dx=\varepsilon^2$, откуда следует $\Delta n<\varepsilon$, что соответствует $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_n=0$. Тогда имеем $\frac{1}{2}\left(-\frac{a_0^2}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx\right)=0$ при $n\to\infty$, откуда и следует требуемое равенство.

37. Преобразования Фурье

Пусть $f(x)$ определена на $(-\infty;+\infty)$ и абсолютно интегрируема на этом интервале, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx<Q<+\infty$. И пусть она раскладывается в ряд Фурье на любом промежутке $[-l;l]$ (удовлетворяет теореме Дирихле или предшествующей ей), т.е. в точках непрерывности $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{\pi k}{l}x+b_k\sin\frac{\pi k}{l}x\,,\frac{a_0}{2}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)dt\,,a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi k}{l}t\,dt\,,b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi k}{l}t\,dt$. Тогда $f(x)$ можно представить в виде $f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\left(\cos\frac{\pi k}{l}t\cos\frac{\pi k}{l}x+\cos\frac{\pi k}{l}t\sin\frac{\pi k}{l}x\right)dt=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi k}{l}(x-t)\,dt$. Узнаем, к чему сойдется ряд при $l\to\infty$. Для этого рассмотрим $\frac{1}{2l}\left|\int_{-l}^{l}f(t)dt\right|\le\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<\frac{Q}{2l}\xrightarrow[l\to\infty]{}0$ и $\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi k}{l}(x-t)\,dt=\left[\alpha_k=\frac{\pi k}{l}\right]=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}\frac{f(t)\pi}{l}\cos\alpha_k(x-t)\,dt=\left[\Delta\alpha_k=\frac{\pi}{l}\right]=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\Delta\alpha_k\cos\alpha_k(x-t)\,dt$. Без доказательства скажем, что последнее выражение стремится к $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt$ при $l\to\infty$. Последний интеграл называется двойным интегралом Фурье. В результате имеем, что в точках непрерывности при $l\to\infty$ $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt$, а в точках разрыва выражение $\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha(t-x)\,dt$ стремится к $\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big)$. Используя коитус разности, получим другую формулу интеграла Фурье: $f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\alpha(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt\cos\alpha x+\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt\sin\alpha x)$. Ее также записывают в виде $\int_{0}^{\infty}d\alpha(A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x)$. Таким образом, мы получили удобный вид формулы для разложения функции любого вида в ряд Фурье, где $A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt\,,B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt$. Для четной функции поимеем разложение по косинусам: $B(\alpha)=0,A(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt$, для нечетной поимеем разложение по синусам: $A(\alpha)=0,B(\alpha)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt$.

Рассмотрим также функцию, которую будем называть производящей $F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt$ – косинус – преобразование Фурье, аналог $A(\alpha)$. Обратно восстанавливается как $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}F(\alpha)\cos\alpha t\,d\alpha$. Аналогичным образом определяется синус – преобразование $F(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt\ \big(B(\alpha)\big),f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}F(\alpha)\sin\alpha t\,d\alpha$.

38. Комплексная форма интеграла Фурье

Рассмотрим $A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x=A(\alpha)\frac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}+B(\alpha)\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2}=\frac{(A(\alpha)-iB(\alpha))}{2}e^{i\alpha x}+\frac{(A(\alpha)+iB(\alpha))}{2}e^{-i\alpha x}=C(\alpha)e^{i\alpha x}+\overline{C(\alpha)}e^{-i\alpha x}$, где $C(\alpha)=\frac{(A(\alpha)-iB(\alpha))}{2}$, причем $\overline{C(\alpha)}=C(-\alpha)$. Применим это к любому интегралу, например: $\int_{0}^{\lambda}(A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x)d\alpha=\int_{0}^{\lambda}\left(c(\alpha)e^{i\alpha x}+c(-\alpha)e^{i(-\alpha x)}\right)=\int_{-\lambda}^{\lambda}c(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$, откуда имеем $f(x)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}(A(\alpha)\cos\alpha x+B(\alpha)\sin\alpha x)d\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}c(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$, где $C(\alpha)=\frac{(A(\alpha)-iB(\alpha))}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt$. Мы получили интеграл Фурье в комплексной форме.