Очень долго сходится, для вычисления $\ln 2$ с точностью до 0.00001 надо вычислить 100000 членов.

Второй способ: $(\ln(1+x))' = \frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$. Почленно интегрируя, получим $\ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$.

6) $f(x) = \operatorname{atan} x$. $(\operatorname{atan} x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$. Ряд сходится на интервале $(-1; 1)$. $f(x) - f(0) = \int_0^x (\operatorname{atan} t)' dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Пусть $x = 1$. Тогда $f(x) - f(0) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Отсюда $\pi = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

§7. Применение рядов к приближенным вычислениям

П.1. Приближенные вычисления функций

Пусть $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки A. Тогда ее можно разложить в ряд Тейлора в данной точке $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$. Очевидно, что для вычисления значения функции с определенной точностью достаточно посчитать частичную сумму данного ряда. При этом погрешность можно оценивать двумя способами:

1) С помощью остаточного члена формулы Тейлора $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^n$.

2) По хвосту ряда $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^k$.

<u>Замечание.</u> Вторая оценка удобна для знакочередующихся рядов.

Пример. $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. $R_n(1) = \frac{e^{\xi}(1-0)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}, \xi \in (0;1); r_n(1) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{(n+1)!n} = \frac{1}{n!n}$. Для вычисления e с точностью до 0.01, то $r_n(1) < 0.01$, т.е. $n = 5$.

Как ускорить сходимость логарифма: рассмотрим разложение в ряд выражения $\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Тогда $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Для вычисления $\ln 2$ поимеем $x = \frac{1}{3}$. Для достижения точности 0.00001 необходимо вычислить всего 5 членов.

П.1. Приближенные вычисления интегралов

Пусть надо найти $\int_a^x f(t)dt = F(x)$. Изначально разложим $f(x)$ в ряд Тейлора, при этом промежуток $[a; x]$ должен попасть в область его сходимости. Тогда на этом промежутке мы можем его интегрировать, и посчитать частичную сумму проинтегрированного ряда. Для вычисления понадобится:

1) Разложить $f(x)$ в ряд Тейлора
2) Ограничиться конечным числом членов.
3) Проинтегрировать почленно, оценить погрешность.

Пример. $six=\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx=\int_0^x\left(\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x}\right)dx=\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right)dx=x-\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$.

§8. Ряды с комплексными членами

П.1. Числовые ряды

Рядом с комплексными членами называется выражение вида $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$, где $u_n=a_n+ib_n$. Этот ряд сходится, если существует конечный предел частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Тогда $S_n=\sum_{k=1}^n a_k+i\sum_{k=1}^n b_k=\sigma_n+i\tau_n$. Условия о конечном пределе частичных сумм необходимо и достаточно для того, чтобы существовали пределы $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$; $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n$. Таким образом, сходимость ряда с комплексными членами эквивалентна сходимости двух вещественных рядов.

Теорема 22. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то сходится и $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Доказательство. $|u_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$. Получаем, что $|a_n|\le|u_n|$; $|b_n|\le|u_n|$. По признаку сходимости получаем, что если сходится $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$, то сходятся абсолютно и ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$; $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. То есть сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$.

Замечание. Все свойства действительных абсолютно сходящихся рядов переносятся на комплексные абсолютно сходящиеся ряды.

Рассмотрим степенной комплексный ряд $c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots$, $z=x+iy$, или в другой форме $c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots+c_n(z-z_0)^n+\cdots$.

Теорема 23 (Абеля). Если степенной комплексный ряд сходится при $z=z_0$, то он абсолютно сходится и при любом z таком, что $|z|<|z_0|$. Если этот же ряд расходится в точке $z=z_1$, то он будет расходиться и в любой точке z такой, что $|z|>|z_0|$.

Доказательство.

1) Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz_0^n$ сходится. Тогда его общий член стремится к нулю $\lim\limits_{n\to\infty}c_nz_0^n=0$. Тогда существует такое $M>0$, что для любого n выполняется $|c_nz_0^n|<M$. Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=c_0+c_1\frac{z}{z_0}z_0+c_2\left(\frac{z}{z_0}\right)^2z_0^2+\cdots+c_n\left(\frac{z}{z_0}\right)^nz_0^n+\cdots$. Теперь рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин $|c_0|+\left|\frac{z}{z_0}\right||c_1z_0|+\left|\frac{z}{z_0}\right|^2|c_2z_0^2|+\cdots+\left|\frac{z}{z_0}\right|^n|c_nz_0^n|+\cdots$. Все правые модули, как уже было сказано, меньше M. Тогда этот ряд можно смажорировать так, что для любого n будет выполняться $\left|\frac{z}{z_0}\right|^n|c_nz_0^n|<\left|\frac{z}{z_0}\right|^nM$. $\left|\frac{z}{z_0}\right|^nM$ – геометрическая прогрессия с $q=\left|\frac{z}{z_0}\right|<1$. Тогда, по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|c_nz^n|$ сходится абсолютно и, следовательно, сходится.

2) От противного. Если расходится в при $z=z_1$ и сходится в при $|z|>|z_1|$, то по первому пункту должен сойтись и при $z=z_1$. Противоречие. Следовательно, расходится при $|z|>|z_1|$.

Замечание. Существует радиус сходимости степенного комплексного ряда такой, что при $|z|<R$ ряд сходится, при $|z|>R$ расходится, точки на окружности требуют дополнительной проверки. Радиус сходимости можно искать так же, как и для вещественных рядов: по признаку Даламбера.

Замечание. Можно вводить функции комплексной переменной через степенные ряды.