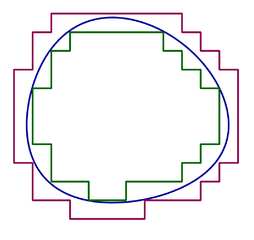
# Глава 1. Интегральное исчисление функции многих переменных

# §1. Объем (мера) в -мерном пространстве

Рассмотрим пространство . Точка в таком пространстве будет характеризоваться набором координат . Введем понятие -мерного куба: . Это куб со стороной . Определим его объем как .

Разобьем на кубы ранга : . Множество всех кубов ранга обозначим как , т.е. . Тогда, объем каждого такого кубика будет равен .

Пусть есть некое тело, состоящее из кубиков ранга : . Сложив их, получим . Отсюда мера , если сумма конечна, и , если сумма бесконечна. По определению мера пустого множества равна нулю.

**Свойство:** Пусть , тогда .

Пусть – некое множество (на рисунке синим). Обозначим множество всех кубов ранга , содержащихся в (на рисунке зеленым), как , т.е. . А множество всех кубов ранга , пересекающихся с (на рисунке сиреневым), обозначим как , т.е. . При изменении размеров кубов можно заметить следующие закономерности: и , причем , а ,точнее говоря, . Для мер этих кубов можно провести аналогичные рассуждения: . Левая часть последовательности монотонно убывает и ограничена снизу, аналогично правая часть монотонно возрастает и ограничена сверху, а значит существуют пределы и , которые носят названия нижнем и верхней меры соответственно, причем для них будет всегда выполняться неравенство . Множество называется измеримым ( – квадрируемым, - кубируемым), если верхняя и нижняя меры в пределе совпадают и тогда . Если , то множество будет являться множеством меры 0.

**Замечание:** Если , то и , и множество измеримо меры 0.

**Замечание:** Если множество ограничено, то и , но при этом множество может быть неизмеримым (они могут не совпадать).

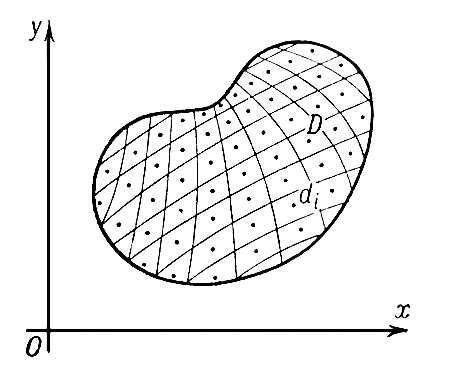
**Замечание:** Если и функция непрерывна в , тогда мера графика равна нулю.

**Замечание:** Пусть множество измеримо, а множество будет включать в себя множество и его границу (являться замкнутым множеством), тогда множество будет также измеримо, и их меры будут совпадать.

# §2. Кратные интегралы

Пусть множество измеримо. Введем конечную систему непустых измеримых множеств . Тогда будет называться разбиением множества , если:

1. Мера пересечения двух любых таких множеств .
2. .

Диаметром некоторого множества называется наибольшее расстояние между двумя точками данного множества , . Мелкостью разбиения называют число .

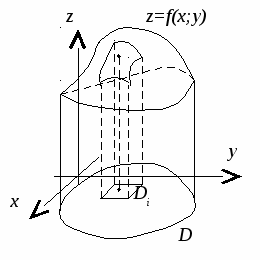
Давайте построим кратный интеграл. Внутри каждого разбиения возьмем точку , вычислим в ней значение функции (заданной на ), умножим на меру этого множества и просуммируем: . Эта сумма называется суммой Римана функции , соответствующей разбиению .

Функция называется интегрируемой по Риману на множестве , если существует предел последовательной интегральной суммы Римана при мелкости , не зависящей от разбиения и от выбора точек .

Интеграл обозначается как . По определению кратный интеграл есть предел . Запишем то же самое определение другим образом. Если для любого сколь угодно малого числа существует такая, что для любого разбиения множества мелкость и при любом выборе предел (интеграл) отличается от суммы Римана по модулю меньше, чем на : .

# §3. Двойной интеграл

# П.1. Определения

Пусть есть область и пусть в этой области определены непрерывная функция и разбиение . Тогда существует двойной интеграл . Величина будет являться объемом ступенчатого тела, – площадью основной ступени, а – высотой ступени. Тогда величина буде являться объемом тела, ограниченной функцией над множеством .

# П.2. Свойства двойного интеграла

1. + ( и – непрерывны на ).
2. .
3. Если на , то .
4. Пусть множество есть объединение двух измеримых областей, мера пересечения которых равна нулю , тогда .
5. **Теорема 1 (об оценке интеграла).** Пусть – площадь компактной области и пусть функция задана (и непрерывна) на . Тогда на этой области функция достигает своего минимума и максимума: , и выполняется неравенство .

**Доказательство.** Рассмотрим на . Тогда , а, значит, по первому свойству, . По определению левая часть равна , откуда получаем . Аналогичные рассуждения можно провести и для левой части исходного неравенства. Доказано.

**Замечание.** Если выполняется неравенство для непрерывных функций в , то .