# §4. Существование и вычисление двойного интеграла

# П.1. Существование двойного интеграла

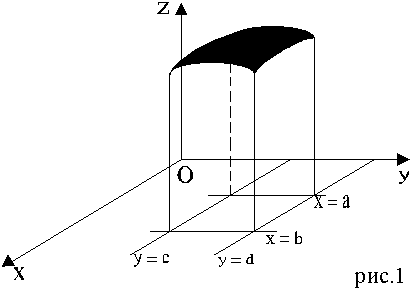
Для взятия двойного интеграла необходимо разбивать область на части: – разбиение , задана на . Введем . и используются вместо минимума и максимума потому, что множество открытое, и максимум или минимум могут и не достигаться. Можно составить следующие суммы: , которые будут называться нижней и верхней суммой Дарбу соответственно. Очевидно, что .

**Теорема 2.** Для того, чтобы функция, ограниченная на измеримом множестве , была интегрируемая по Риману, необходимо и достаточно, чтобы . При этом .

**Замечание.** Пусть непрерывна на (ограниченная ), тогда существует .

# П.2. Вычисление двойного интеграла в случае, когда – прямоугольная область

Пусть есть область . Построим сечение тела плоскостью , площадь которого обозначим как .

**Теорема 3.** Если функция интегрируема на и для любого функция интегрируема по , то функция интегрируема на и .

**Замечание.** Для правый интеграл называется внутренним, а левый – повторным.

**Замечание.** Аналогичная теорема верна и для случая .

**Доказательство.** Пусть и – разбиения отрезков и соответственно: . Возьмем прямые произведения этих отрезков: . Обозначим . Для любой точки выполняется неравенство . Проинтегрировав от до , получим неравенство , которое будет выполняться для любого . Просуммируем: . Тогда . Домножим на и просуммируем по : . Заметим, что последнее неравенство аналогично другому: или .Пусть интегрируема на . Тогда для любого существует такое, что для любого . Возьмем . Тогда , а , откуда , и, следовательно, ,. Тогда интегрируема на , и . Но . Выходит, что , откуда следует, что они совпадают. Доказано.

# П.2. Вычисление двойного интеграла повторным интегрированием по произвольной области

**Теорема 4.** Пусть на , задана область – компакт и квадрируемо и пусть интегрируемо по Риману на . Тогда интегрируема на и .

**Замечание.** Аналогичная теорема имеет место и в случае области . Тогда .

**Замечание.** Если область имеет сложную форму, то ее можно разбить на области, интегралы которых можно вычислить через повторные.

**Замечание.** .

# http://www.math24.ru/images/integration-in-quadratures1.jpgП.4. Формула Дирихле

. Для области справедливо равенство .