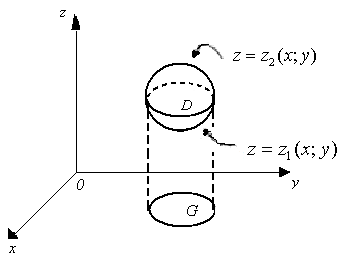
# §5. Тройной интеграл и его вычисление

Пусть есть некоторая область и пусть в области задана функция . – проекция на . Пусть обладает свойством, что любая прямая, параллельная осям координат, пересекает не более, чем в двух точках. – линия, которая проектируется на область . разбиваем на элементарные объемы , причем имеет объем . Тройной интеграл по определению , где . Если предел в правой части существует и не зависит от разбиения и выбора точек , то тогда существует тройной интеграл.

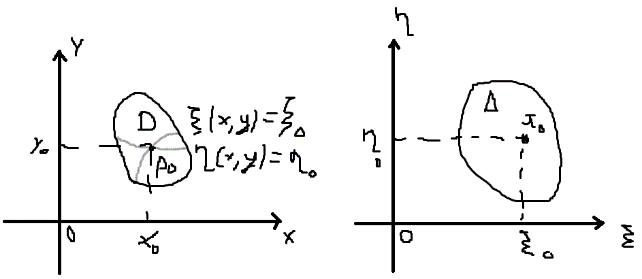
# Вычисление тройного интеграла

Для каждой точки считаем – нижняя граница и – верхняя граница . Если ввести функцию , то тройной интеграл можно представить в виде .

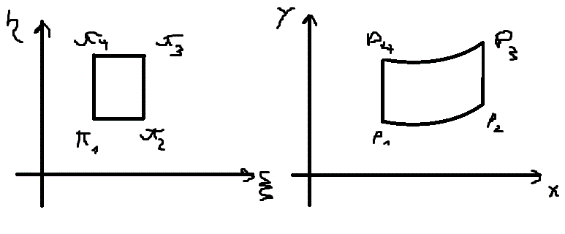
**Замечание.** Если область сложная, то ее всегда можно разбить на области, для которых любая прямая, параллельная осям координат, пересекает границу области не более, чем в 2 точках.

# §6. Замена переменных в кратных интегралах

# П.1. Преобразование плоских областей

Пусть даны две плоскости и и две области и . Область является прообразом , т.е. каждой точке из одной области ставится в соответствие ровно одна точка из другой области (взаимно-однозначное). Возьмем точки и . Если мы зафиксируем значения и , то и в области будут отображением прямых и в области , то есть – взаимно-однозначное отображение в , а – обратное . Линии носят название координатных линий в (криволинейные координаты).

# П.2. Преобразование разбиений

В плоскости возьмем прямоугольную область (разбиение) и ее отображение в плоскости . Координаты прямоугольника в : . Координаты в : . Выразим точки через точки :.

Пусть и – непрерывно-дифференцируемые функции. Тогда , где и – бесконечно малые более высокого порядка малости, чем и .

Рассмотрим проекции сторон : ; . Аналогичным образом вычислим остальные проекции.

Пусть – площадь . . Последний определитель называется якобианом преобразования , и обозначается .

Если рассмотреть отношение площадей .

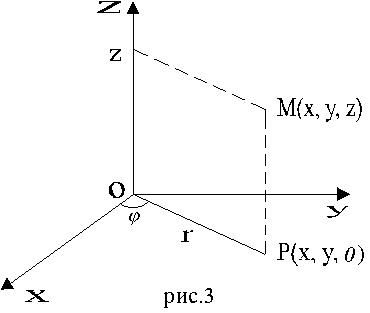
**Замечание.** Определитель положителен, если обход точек сохраняется, и отрицательный, если не сохраняется.

# П.3. Формула замены переменной в двойном интеграле

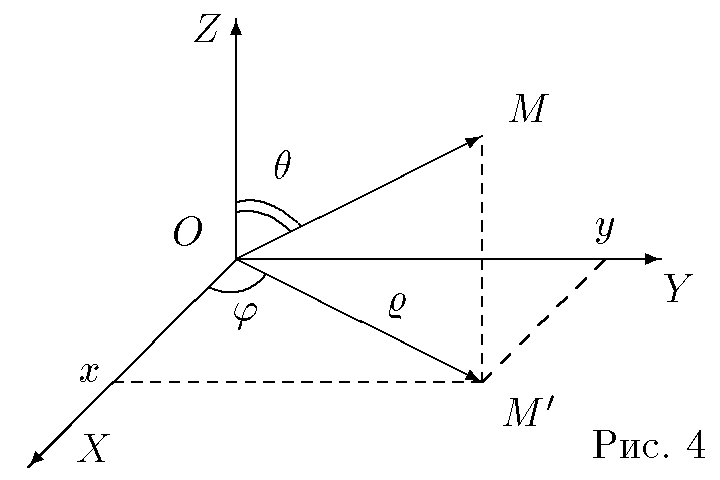
Модель якобиана преобразования характеризует искажение площади. Рассмотрим , где - разбиение , которое порождает – разбиение , .

**Пример.** Двойной интеграл в полярных координатах. – формула перехода к полярным координатам. Пусть – в полярных координатах, тогда – в декартовых. Якобиан тогда равен . Получаем .

# П.4. Замена переменной в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты

Пусть . Область в плоскости переходит в в плоскости , т.е. . Цилиндрические координаты отличаются от полярных только добавлением третьего измерения . Тогда .

Отсюда .

Для сферических координат точке будем сопоставлять три переменные (см. рисунок): , . Обратным преобразованием в данном случае является .

Якобианом преобразования будет являться . Отсюда .