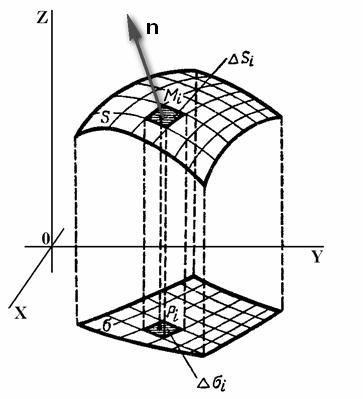
# §7. Площадь поверхности

Пусть в задана непрерывная дифференцируемая функция . Пусть – поверхность, которая проектируется на область .

Площадь поверхности измеряется пределом, к которому стремится площадь многогранника, описанного около поверхности при неограниченном увеличении числа его граней и при стремлении к нулю наибольшего из диаметров этих граней.

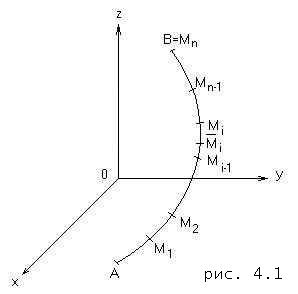
Описанный многогранник задает разбиение области . Пусть и – проекция точки и точка касания . Тогда уравнение касательной плоскости будет выглядеть следующим образом: . Обозначим площадь каждой грани как , а площадь ее проекции как . Тогда , где – угол между нормалью в точке и осью . Координаты этого вектора нормали будут совпадать с координатами вектора градиента: , так как мы рассматриваем внешнюю нормаль. Единичный вектор нормали к поверхности тогда будет равен:

будет тогда равен . Тогда . Теперь можно выразить площадь поверхности как , где – грань, – ее площадь, – число разбиений. Подставим в наше выражение : . При большой количестве разбиений можно перейти к интегральной сумме .

**Замечание:** Cложную фигуру можно разбить на части, каждую из которых можно однозначно спроектировать на какую-либо координатную плоскость.

# §8. Криволинейные интегралы

# П.1. Криволинейные интегралы 1 рода

Пусть – кусочно-гладкая кривая, которая представляется как , где , и каждый кусок которой имеет производную. Пусть является дугой . Разобьем ее на частей так, что , , а – точки деления дуги . Пусть на задана функция . Для каждого промежутка – длина промежутка, или звена ломаной, вписанной в кривую. На каждом промежутке возьмем точку , принадлежащую куску ломаной. В каждой такой точке посчитаем значение функции, умножим на длину звена и составим сумму для всех звеньев: .

По определению, интеграл первого рода от функции по кривой называется предел последовательности интегральных сумм при условии, что и не зависит от выбора точек на кривой и характера разбиения кривой на отрезки. .

**Замечание:** Иногда интеграл 1 рода называется интегралом по длине.

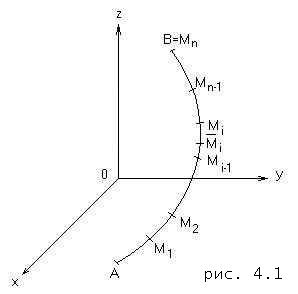
## Свойства криволинейных интегралов 1 рода

1. Линейность
   1. .
   2. .
2. – длина дуги .
3. Интеграл не зависит от ориентации кривой.
4. Пусть и имеют только одну общую точку. Тогда .

## Вычисление криволинейных интегралов 1 рода

Пусть . Тогда . Криволинейный интеграл вычисляется как . В случае кривой на плоскости: .

# П.2. Криволинейные интегралы 2 рода

Пусть – кусочно-гладкая кривая, которая представляется как , где , и каждый кусок которой имеет производную. Пусть является дугой . Разобьем кривую на частей так, что точки деления будут: . На каждой дуге выберем точку . Для каждой дуги обозначим как ее проекцию на ось . Пусть на задана функция . В каждой точке посчитаем значение функции и умножим на проекцию длины звена и составим сумму для всех звеньев: .

По определению, интеграл второго рода от функции по кривой по переменной называется предел последовательности интегральных сумм при условии, что и не зависит от выбора точек на кривой и характера разбиения кривой на отрезки. . При смене ориентации знак криволинейного интеграла второго рода меняется на противоположный. Аналогичным образом выводятся криволинейные интегралы второго рода по проекции на другую координатную ось.

Пусть на задана вектор-функция . Тогда .

**Пример:** Работа силы по кривой .