# §10. Формула Грина

# C:\Users\Borsch\Desktop\Безымянный.pngП.1. Вывод формулы Грина для односвязной области

Пусть на плоскости задана односвязная область такая, что любая прямая, параллельная осям координат, пересекает границу этой области не более, чем в двух точках. Обозначим как ее границу. Тогда область можно определить двумя способами:

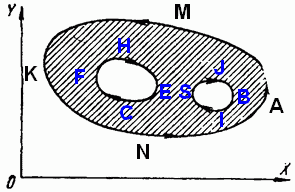
Будем обходить контур в положительном направлении.

**Теорема 7.** Пусть – элементарная область. Функции непрерывны вместе со своими производными на замыкании (область вместе с ее границей). Тогда выполняется равенство . Эта формула называется формулой Грина. Она связывает криволинейный интеграл и двойной интеграл.

**Доказательство.** Рассмотрим . Аналогичным образом выводится и для функции .

**Замечание.** Если область односвязная, но не является элементарной, то ее всегда можно разбить на элементарные области.

# П.2. Формула Грина для многосвязной области

**Теорема 8.** Пусть – -связная область. Функции непрерывны вместе со своими производными на замыкании . Тогда для этой области выполняется формула Грина на условии .

**Доказательство.** Не умоляя общности, рассмотрим трехсвязную область. Сделаем разрезы . Тогда

# П.3. Следствия формулы Грина

1. Пусть – односвязная область, – ее граница. Пусть для нее справедлива формула Грина. Пусть . Тогда . Тогда .
2. Если в выполняется , то .
3. Пусть . Тогда – оператор Лапласа (лапласиан). В этом случае формула Грина привет вид – производная по направлению, где – нормаль, – касательная. Переходы косинусов к синусам сделаны с помощью .

**Пример.** . Тогда .

# §11. Несобственные двойные интегралы. Интеграл Пуассона

Пусть – неограниченная область в , пусть непрерывна в . Рассмотри ограниченную область . Составим двойной интеграл по ней: . Будем произвольно расширять область до области .

Если существует , который не зависит от характера расширения, то этот предел и называется несобственным двойным интегралом. Если этот предел конечен, то говорят о сходимости несобственного двойного интеграла. Если не существует или бесконечен – о расходимости, или несуществовании.

Рассмотрим интеграл . Составим двойной несобственный интеграл , где – круг радиуса . Получаем . Отсюда , значит .