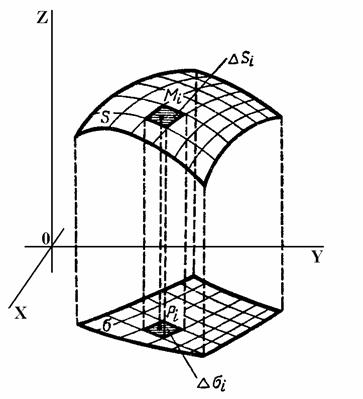
# §12. Поверхностные интегралы

# П.1. Поверхностные интегралы 1 рода (интегралы по площади поверхности)

Пусть на области определена непрерывная дифференцируемая функция , задающая поверхность . Пусть задан описанный многогранник и точка касания грани поверхности. Пусть на задана функция . Тогда можно составить интегральную сумму . Если устремить количество разбиений к бесконечности и максимальный диаметр каждой грани к нулю, и если существует соответствующий предел, который не зависит от характера разбиения и выбора точек , то этот предел будет называться поверхностным интегралом первого рода по поверхности . .

Для вычисления такого интеграла спроектируем на многогранник . Тогда спроектируется на , – площадь . Тогда , где – угол между нормалью к поверхности в точке касания и положительным направлением оси . Тогда , где – проекция на . Получаем формулу вычисления поверхностного интеграла 1 рода: .

# П.2. Поверхностные интегралы 2 рода (интегралы по координатам)

Ориентация поверхности производится с помощью нормали. Поверхностный интеграл называется ориентированным, если указано направление нормали при условии, что направление нормали меняется непрерывно вместе с точкой поверхности, к которой проведена нормаль. Существуют также неориентированные поверхности (лист Мебиуса).

Пусть на области определена непрерывная дифференцируемая функция , задающая поверхность . Пусть задан описанный многогранник и точка касания грани поверхности. Спроектируем на многогранник . Тогда спроектируется на , – площадь . Тогда , где – угол между нормалью к поверхности в точке касания и положительным направлением оси . Если угол острый, то , если тупой, то . Пусть на задана функция . Тогда можно составить интегральную сумму . Если устремить количество разбиений к бесконечности и максимальный диаметр каждой грани к нулю, и если существует соответствующий предел, который не зависит от характера разбиения и выбора точек , то этот предел будет называться поверхностным интегралом второго рода по поверхности . . Если проектировать на другие координатные оси, то получим .

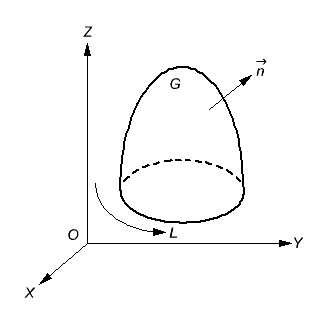
## Связь с интегралом первого рода

Пусть – направляющие косинусы вектора нормали. Тогда . Аналогичным образом можно составить и выражения для проектирования на другие координатные оси.

## Свойства интегралов по координатам

1. При смене ориентации поверхностный интеграл меняет знак.
2. Аддитивность.
3. Пусть на заданы . Тогда .

# П.3. Формула Стокса

Пусть – поверхность , – граница поверхности (кривая в пространстве). Тогда от поверхностного интеграла 2 рода можно перейти к криволинейному интегралу 2 рода: – обобщение формулы Грина, формула Стокса. Обход контура выбирается по правилу правой руки.

**Замечание.** В случае формула переходит в формулу Грина.

**Замечание.** Пусть – замкнутая ориентированная поверхность. Тогда .

**Замечание.** Пусть . Тогда .

# П.4. Формула Гаусса-Остроградского

Связывает поверхностный интеграл с тройным. Пусть в задана область , а – граница этой области. Тогда , причем интегрирование ведется по внешней нормали.

**Замечание.** Пусть . Тогда . Тогда объем тела, ограниченного , вычисляется по формуле .

# §13. Элементы векторного анализа

# П.1. Скалярные и векторные поля. Оператор Набла

Пусть в задана область , в которой задана непрерывная дифференцируемая функция . В этом случае будем говорить, что в задано скалярное поле.

Пусть в заданы непрерывные дифференцируемые функции . В этом случае будем говорить, что в задано векторное поле .

Векторная линия – линия , направление которой в каждой точке совпадает с направлением , т.е. можно составить дифференциальное уравнение в векторном виде:

Если в области задано скалярное поле , то – задает векторное поле, а – оператор Набла. .