# П.2. Свойства сходящихся рядов

1. Если сходится, то для любого ряд сходится, и если , то .
2. Если и сходятся, то сходится и ряд .
3. Если у сходящегося ряда отбросить или приписать конечное число членов, то сходимость ряда не изменится.

**Замечание.** – остаток (хвост) ряда.

# П.3. Гармонический ряд

Гармонический ряд – расходящийся, несмотря на то, что . Второй замечательный предел: . Следовательно, . Если выписать члены данного ряда, получим: . Если расписать сумму ряда, сократятся многие члены, останется только . Но . Тогда ряд расходится по определению.

**Замечание.** Ряд , где , называется обобщенным гармоническим рядом. Он расходится при и сходится .

# П.4. Критерий Коши сходимости ряда

**Теорема 2.** Ряд сходится тогда и только тогда, когда для любого существует такое , что для любого и справедливо неравенство .

**Доказательство.** Критерий Коши сходимости ряда сводится к критерию Коши сходимости последовательности частичных сумм .

# §2. Ряды с положительными членами

# П.1. Лемма о сходимости ряда с положительными членами

**Лемма.** Если последовательность ряда ограничена, то ряд сходится.

**Доказательство.** . Но . Следовательно, . Также, ограничена сверху. Следовательно, существует предел . А значит ряд сходится по определению.

# П.2. Признаки сравнения

**Теорема 3 (Первый признак сравнения).** Пусть есть ряды с положительными членами .

1. Если, начиная с некоторого места, и ряд сходится, то и ряд сходится.
2. Если, начиная с некоторого места, и ряд расходится, то и ряд расходится.

**Доказательство.**

1. Не умоляя общности, скажем, что для любого выполняется . Пусть . Тогда . Но ограничена. Следовательно, возрастает и ограничена. Следовательно, существует предел . Следовательно, ряд сходится по определению.
2. От противного.

**Теорема 4 (Второй признак сравнения).** Пусть есть ряды с положительными членами , и, начиная с некоторого места, .

1. Если сходится ряд с большим отношением, то сходится и ряд с меньшим.
2. Если расходится ряд с меньшим отношением, то расходится и ряд с большим.

**Доказательство.** Не умоляя общности, скажем, что для любого выполняется . Распишем это для каждого : . Если мы перемножим все полученные неравенства, сократятся почти все члены, останется только , откуда можно выразить . Применив теорему 3, доказательство очевидно.

**Теорема 5.** Пусть есть ряды с положительными членами , и, если существует предел , то оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

**Доказательство.** Пусть существует предел , то для любого существует такое , что для любого выполняется неравенство . Следовательно, , откуда . Получается, что по теореме 3 эти ряды ведут себя одинаково. Если , то они являются эквивалентными бесконечно малыми.

**Пример.** . Второй ряд расходится. Значит, исходный ряд расходится.

# П.3. Признаки Даламбера

**Теорема 6.** Пусть есть ряд с положительными членами и если существует предел , то при ряд расходится, при ряд сходится, при неизвестно, требуется дополнительное исследование.

**Доказательство.** Пусть существует предел . Тогда для любого существует такое , что для любого выполняется неравенство . Тогда .

Пусть . Тогда . Тогда и сходится. Следовательно, по теореме 4 ряд сходится.

Пусть . Тогда . Тогда и расходится. Следовательно, по теореме 4 ряд расходится.

# П.4. Радикальный признак Коши

**Теорема 7.** Если существует предел , то при ряд расходится, при ряд сходится, при требуется дополнительное исследование.

**Доказательство.** Пусть существует предел . Тогда для любого существует такое , что для любого выполняется неравенство . Тогда .

Пусть . Тогда . Тогда и сходится. Следовательно, по теореме 3 ряд сходится.

Пусть . Тогда . Тогда и расходится. Следовательно, по теореме 3 ряд расходится.

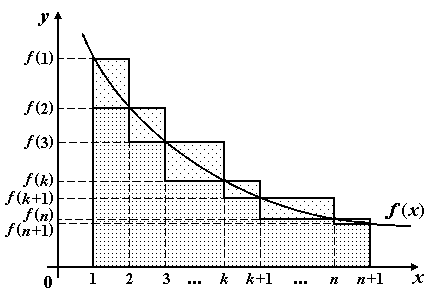
**Пример.** . Тогда . Следовательно, интеграл сходится.

# П.4. Интегральный признак Коши

Пусть есть ряд с положительными членами и задана монотонно убывающая функция на и .

**Теорема 8.**

1. сходится тогда и только тогда, когда сходится.
2. расходится тогда и только тогда, когда расходится.

**Доказательство.** Площадь ступенчатая фигура – сумма ряда, площадь криволинейной трапеции – несобственный интеграл. Если ряд больше и сходится, то и интеграл тоже. С другой стороны, вписанный ряд (без первого члена) будет меньше криволинейной трапеции, и если сходится интеграл, то сходится и ряд.

. Это равносильно . Отсюда: если существует предел , то существует и интеграл, если существует интеграл, то существует и предел .