# §3. Знакопеременные ряды

# П.1. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

**Теорема 9 (Признак Лейбница).** Пусть есть ряд . Пусть монотонно убывает до нуля. Тогда ряд сходится и его сумма не превосходит первого члена ряда.

**Доказательство.** Рассмотрим четную сумму . В силу монотонности каждое из выражений в скобках положительно, отсюда следует, что монотонная возрастает. С другой стороны, если перегруппировать выражение как , то каждое выражение в скобках тоже будет положительным, и . Получается, что возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она имеет предел . Теперь рассмотри нечетные суммы . . Значит существует и предел нечетных сумм. Получается, что исходная последовательность также имеет предел .

**Пример.** Ряд сходится (ряд Лейбница).

**Замечание.** Остаток знакочередующегося ряда обладает всеми его свойствами, например, его сумма по модулю не превосходит первого отброшенного члена . С помощью этого признака можно оценивать погрешность.

# П.2. Абсолютная и условная сходимость

Пусть есть знакопеременный ряд . Рассмотрим знакоположительный ряд .

**Теорема 10.** Если ряд сходится, то тогда сходится и знакочередующийся ряд .

**Доказательство.** Пусть ряд сходится. Тогда по критерию Коши для любого существует такое , что для любого и натурального выполняется неравенство . Тогда . Тогда по критерию Коши ряд сходится.

Если сходится основной ряд и ряд из абсолютных величин, то такой ряд называется абсолютно сходящимся. Если сходится только основной ряд, а ряд из абсолютных величин расходится, то ряд сходится условно.

## Свойства абсолютно сходящихся рядов

1. В абсолютно сходящемся ряде можно поменять местами члены ряда любым образом, при этом при такой перестановке получается абсолютно сходящийся ряд с той же суммой.
2. Два абсолютно сходящихся ряда можно почленно складывать и вычитать. В результате получится ряд с суммой, равной сумме или разности сумм исходных рядов соответственно.
3. Рассмотрим абсолютно сходящиеся ряды . Назовем произведение этих рядов другим рядом , т.е. . К тому же, если , то .

## Свойства условно сходящихся рядов

1. Пусть есть условно сходящийся ряд . Обозначим его положительные члены и отрицательные . Множества и бесконечны. Для пояснения последнего пойдем от противного: пусть множество конечно. Тогда можно рассмотреть хвост ряда, который содержит только положительные члены. Этот хвост будет хвостом сходящегося ряда, составленного из абсолютных величин, т.е. ряд сходится абсолютно. Противоречие. Значит, множество бесконечно. Аналогичные рассуждения можно провести и для множества .
2. Ряды и расходятся.

**Доказательство.** Пусть . Получаем, что . Следовательно, . Получаем, что ряд из положительных значений расходится. Аналогичные рассуждения можно провести и для ряда с отрицательными членами.

1. **Теорема 11 (Римана).** Пусть (или ). В условно сходящемся ряде можно так переставить члены, что его сумма будет равняться .

**Идея доказательства.** Рассмотрим число . Так как ряд, составленный из положительных членов, расходится, то выполняется неравенство . Потом наберем такое количество отрицательных членов, чтобы выполнялось неравенство . Так, постепенно набирая то положительные, то отрицательные члены, сумма выражения начинает приближаться к числу .

# §4. Функциональные ряды

# П.1. Основные определения

Ряд называется функциональным, если каждый член ряд есть некая функция от . .

Если при числовой ряд сходится, то – точка сходимости. Множество всех точек сходимости называется областью сходимости ряда. В области сходимости ряда можно определить сумму ряда как функцию . При этом можно записать в виде , где – хвост ряда. В каждой точке области сходимости стремится к нулю .

Пусть принадлежит области сходимости. Тогда для любого существует такое , что для любого выполняется .

Пусть принадлежит области сходимости. Тогда для любого существует такое , что для любого выполняется .

Можно сказать, что для любого конечного числа точек из области сходимости существует такое такое, что для любого и из набора выполняется неравенство .

Сходящийся функциональный ряд называется равномерно сходящимся в области , если для любого существует такое , что для любого и для любого выполняется неравенство .