# П.2. Свойства равномерно сходящихся рядов

Ряд называется мажорируемым в некоторой области , если существует такой ряд , что для любого выполняется неравенство .

**Теорема 12 (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда).** Пусть ряд – мажорируемый в некоторой области и мажорантный ряд – сходящийся, то мажорируемый ряд сходится равномерно в .

**Доказательство.** Ряд сходится, следовательно, по критерию Коши для любого существует такое , что для любого и для любого натурального выполняется неравенство . Следовательно, . Получается, что для любого выполняется , а при для любого выполняется . А так как , то получается, что . Следовательно, ряд сходится равномерно по определению.

**Замечание.** Мажорируемый ряд сходится на не только равномерно, но и абсолютно.

**Теорема 13.** Равномерно сходящийся в области ряд, составленный из непрерывных функций, представляет собой функцию, непрерывную в этой области. Без доказательства.

**Пример.** . Для любого выполняется , а сходящийся. Следовательно, – непрерывная функция на .

**Теорема 14.** Равномерно сходящийся ряд непрерывных функций можно интегрировать почленно. Пусть дано, что ряд равномерно сходится на и пусть для любого непрерывна в и пусть . Тогда на любом промежутке выполняется . Без доказательства.

**Теорема 15.** Пусть ряд дифференцируемых в функций равномерно сходится в и – его сумма, то . Без доказательства.

# §5. Степенные ряды

Ряд вида называется степенным рядом. Ряд вида – тоже степенной, где – центр ряда.

# П.1. Теорема Абеля

**Теорема 16 (Абеля о сходимости степенного ряда).**

1) Пусть степенной ряд сходится в точке . Тогда для любого такого, что ряд сходится.

2) Пусть степенной ряд расходится в точке . Тогда для любого такого, что ряд расходится.

**Доказательство.**

1) Пусть ряд сходится. Тогда его общий член стремится к нулю . Тогда существует такое , что для любого выполняется . Рассмотрим ряд . Теперь рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин . Все правые модули, как уже было сказано, меньше . Тогда этот ряд можно смажорировать так, что для любого будет выполняться . – геометрическая прогрессия с . Тогда, по признаку сравнения ряд сходится абсолютно и, следовательно, сходится.

2) От противного. Если расходится в точке и сходится в точках , то по первому пункту должен сойтись и в точке . Противоречие. Следовательно, расходится в точках .

# П.2. Радиус сходимости степенного ряда

Рассмотрим сходящийся в точке степенной ряд . Тогда он сходится по теореме Абеля в любой точке . По второй части теоремы Абеля, пусть ряд расходится в некоторой точке . Тогда в любой точке ряд будет расходящимся. Теперь проверим на расходимость в точке . Теперь отрезок с неизвестной сходимостью уменьшился в два раза. Так можно продолжать до бесконечности, постоянно уменьшая неизвестный отрезок. Можно перейти к пределу. Пусть существует предел . Получаем, что для любого ряд сходится, а для любого ряд расходится. Число называется радиусом сходимости степенного ряда, интервал – интервалом сходимости. Точки необходимо проверять самостоятельно.

Замечание. Радиус сходимости можно ввести и для степенного ряда вида . Его областью сходимости будет .

## Правило определения радиуса сходимости

1) С использованием признака Даламбера.

**Теорема 17.** Пусть существует предел . Тогда (включая , если и , если ).

**Доказательство.** Пусть и – ряд, состоящий из абсолютных величин. Рассмотрим предел . По признаку Даламбера ряд сходится, если . Получаем, что , т.е. .

2) С использованием радикального признака Коши.

**Теорема 18.** Пусть существует предел . Тогда (включая , если и , если ).

**Доказательство.** Аналогично предыдущему доказательству, рассмотрим предел . По радикальному признаку Коши ряд сходится, если . Получаем, что , т.е. .