# П.3. Свойства степенных рядов

**Теорема 19.** Степенной ряд представляет собой непрерывную функцию в интервале сходимости .

**Доказательство.** Для любого рассмотрим ряд . Для него имеем . Мажорирующий ряд сходится абсолютно, следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно, следовательно, – непрерывная функция в .

**Теорема 20.** Для степенного ряда можно почленно дифференцировать , интегрировать на любом отрезке из области сходимости (потому что на нем он сходится равномерно), при этом полученные степенные ряды будут иметь тот же радиус сходимости .

**Доказательство.** Покажем, что . . Аналогично .

# §6. Разложение функций в степенные ряды

Пусть ряд сходится к в области сходимости . Тогда ряд является разложением функции на этом интервале. Обратной задачей является нахождение разложения функции в ряд.

# П.1. Ряды Тейлора и Маклорена

Пусть – дифференцируемая бесконечное число раз в точке и в ее окрестности. Пусть существует ее разложение в ряд такое, что его сумма равна и . Возьмем производную . Возьмем вторую производную . Можно вывести закономерность: . Положим . Тогда . Тогда можно записывать выражения для . Данное выражение называется рядом Тейлора функции в точке .

**Замечание.** Если функция дифференцируема бесконечное число раз в точке, то ряд Тейлора всегда можно составить. Но этот ряд может и не сойтись к исходной функции.

Ежели мы берем дифференцируемую бесконечно число раз в точке и в ее окрестности функцию и раскладываем функцию в этой точке в ряд Тейлора, то данный ряд будет являться рядом Маклорена.

**Теорема 20.** Пусть дифференцируема бесконечное число раз в точке и – окрестности этой точки. Тогда для того, чтобы ряд Тейлора в этой точке сходился к исходной функции, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Тейлора стремился к нулю.

**Доказательство.** Запишем членов ряда Тейлора . Очевидно, что для того, чтобы , необходимо и достаточно, чтобы .

# П.2. Разложение некоторых элементарных функций в степенные ряды

1) . . . То есть разложение справедливо на всей числовой оси. .

2) . . . Можно показать, что .

**Замечание.** При любом – знакочередующийся ряд.

3) . Аналогично синусу, . .

**Замечание.** В случае комплексной переменной имеем . Разложив функцию комплексной переменной в ряд, получим два ряда – действительный и мнимый.

4) . . . Можно показать, что , область сходимости .

5) . . . При получим ряд Лейбница. При получим обобщенный гармонический расходящийся. Можно показать, что , область сходимости .