Очень долго сходится, для вычисления с точностью до надо вычислить членов.

Второй способ: . Почленно интегрируя, получим .

6) . . Ряд сходится на интервале . . Пусть . Тогда . Отсюда .

# §7. Применение рядов к приближенным вычислениям

# П.1. Приближенные вычисления функций

Пусть бесконечно дифференцируема в окрестности точки . Тогда ее можно разложить в ряд Тейлора в данной точке . Очевидно, что для вычисления значения функции с определенной точностью достаточно посчитать частичную сумму данного ряда. При этом погрешность можно оценивать двумя способами:

1) С помощью остаточного члена формулы Тейлора .

2) По хвосту ряда .

**Замечание.** Вторая оценка удобна для знакочередующихся рядов.

Пример. . . Для вычисления с точностью до , то , т.е. .

Как ускорить сходимость логарифма: рассмотрим разложение в ряд выражения . Тогда . Для вычисления поимеем . Для достижения точности необходимо вычислить всего 5 членов.

# П.1. Приближенные вычисления интегралов

Пусть надо найти . Изначально разложим в ряд Тейлора, при этом промежуток должен попасть в область его сходимости. Тогда на этом промежутке мы можем его интегрировать, и посчитать частичную сумму проинтегрированного ряда. Для вычисления понадобится:

1) Разложить в ряд Тейлора

2) Ограничиться конечным числом членов.

3) Проинтегрировать почленно, оценить погрешность.

**Пример.** .

# §8. Ряды с комплексными членами

# П.1. Числовые ряды

Рядом с комплексными членами называется выражение вида , где . Этот ряд сходится, если существует конечный предел частичных сумм . Тогда . Условия о конечном пределе частичных сумм необходимо и достаточно для того, чтобы существовали пределы . Таким образом, сходимость ряда с комплексными членами эквивалентна сходимости двух вещественных рядов.

**Теорема 22.** Если сходится ряд , то сходится и .

**Доказательство.** . Получаем, что . По признаку сходимости получаем, что если сходится , то сходятся абсолютно и ряды . То есть сходится и ряд .

**Замечание.** Все свойства действительных абсолютно сходящихся рядов переносятся на комплексные абсолютно сходящиеся ряды.

Рассмотрим степенной комплексный ряд , , или в другой форме .

**Теорема 23 (Абеля).** Если степенной комплексный ряд сходится при , то он абсолютно сходится и при любом таком, что . Если этот же ряд расходится в точке , то он будет расходиться и в любой точке такой, что .

**Доказательство.**

1) Пусть ряд сходится. Тогда его общий член стремится к нулю . Тогда существует такое , что для любого выполняется . Рассмотрим ряд . Теперь рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин . Все правые модули, как уже было сказано, меньше . Тогда этот ряд можно смажорировать так, что для любого будет выполняться . – геометрическая прогрессия с . Тогда, по признаку сравнения ряд сходится абсолютно и, следовательно, сходится.

2) От противного. Если расходится в при и сходится в при , то по первому пункту должен сойтись и при . Противоречие. Следовательно, расходится при .

**Замечание.** Существует радиус сходимости степенного комплексного ряда такой, что при ряд сходится, при расходится, точки на окружности требуют дополнительной проверки. Радиус сходимости можно искать так же, как и для вещественных рядов: по признаку Даламбера.

**Замечание.** Можно вводить функции комплексной переменной через степенные ряды.