# Глава 3. Ряды Фурье

# §1. Ортогональная система функций. Ряды Фурье по ортогональной системе функций

# П.1. Ортогональная система функций

Пусть есть последовательность функций и для любого – непрерывна на . Система называется ортогональной на , если . По аналогии с ортогональными векторами, для которых условием ортогональности является нулевое скалярное произведение, только в нашем случае роль скалярного произведения выполняет интеграл. Интеграл берется, так как функции непрерывны.

Если в дополнение к предыдущему условию для любого натурального , то такая система функций называется ортонормированной. На .

**Пример.** Система является ортогональной на . .

**Пример.** Система является ортонормированной на . .

**Замечание.** Система является ортонормированной на .

**Замечание.** Система ортогональная на .

**Замечание.** Система ортогональная на .

# П.2. Ряд Фурье по ортогональной системе функций

Пусть непрерывна на и – непрерывная на ортогональная система функций. Пусть существуют такие , что .

**Теорема 1.** Если ряд сходится равномерно, то .

**Доказательство.** домножим на . Получаем . Так как ряд сходится равномерно, имеем право проинтегрировать. , откуда следует, что .

называется коэффициентом Фурье функции по ортогональной системе на .

**Пример.** – ортогональная система функций, для которой . – формулы Эйлера-Фурье.

# §2. Тригонометрические многочлены и ряды

Ряд вида называется тригонометрическим рядом – го порядка. При получим тригонометрический ряд.

, откуда получаем . Удобно для сложения двух гармоник в одну со сдвигом фазы.

Получили упрощенную форму тригонометрического ряда .

Пусть есть тригонометрический ряд . Тогда для его имеем .

**Замечание.** Аналогично формулы верны в случае тригонометрического ряда.

# §3. Ряды Фурье

# П.1. Многочлены Фурье. Формула Фурье

Пусть непрерывна на . По формулам Фурье-Эйлера можно построить коэффициенты . Тогда . Будет ли сопоставленный ряд сходиться к ?

Выражение вида называется многочленом Фурье функции . Тогда для того, чтобы раскладывалась в ряд , необходимо, чтобы при для любого .

Распишем . Оказывается, можно посчитать.

**Лемма.** .

**Доказательство.**

.

**Следствие.** .

**Замечание.** Можно показать, что , т.е. можно сдвигать как угодно влево и вправо. называется ядром Дирихле.