**Лемма.** Пусть – – периодическая функция, тогда .

**Доказательство.** .

Выражение называется ядром Дирихле.

Оценим погрешность. Рассмотрим разность …

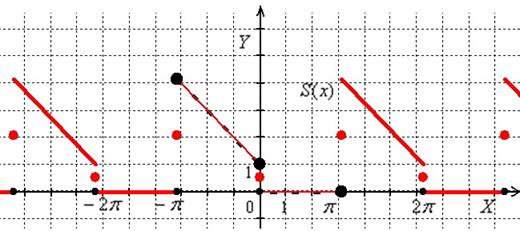
**Лемма.** .

**Доказательство.** .

…Тогда имеем . По этой формуле очень удобно высчитывать погрешность. А итоговой формулой будет – формула Фурье – го порядка.

**Замечание.** Формула имеет более широкое применение, потому что для разложения необходимо лишь существования интегралов, а не производных вплоть до -й.

# П.2. Основные теоремы

**Замечание.** Ряд тогда, когда . Будем считать, что – гладкая на , если она непрерывна на этом промежутке вместе со своей производной и и . – кусочно – гладкая на , если этот промежуток можно разбить на конечное число промежутков, на которых гладкая. Можно показать, что у кусочно-гладкой функции особые точки это точки разрыва первого рода.

**Теорема 2.** Пусть – кусочно – гладкая в . Тогда в любой точке этого промежутка ряд Фурье сходится к . В точках разрыва ряд сходится к , а в граничных точках к .

**Теорема 3 (Дирихле).** Пусть имеет конечно число экстремумов на и непрерывна, за исключением точек, в которых может быть разрыв первого рода. Тогда ряд Фурье сходится к , а в точках разрыва к , а в граничных точках к . Эта теорема более сильная, чем предыдущая.

# П.3. Свойства коэффициентов Фурье

**Теорема 4.** Пусть такова, что существуют интегралы , причем не обязательно только с разрывами первого рода – это могут быть и несобственные интегралы. Тогда предел и .

**Доказательство.** Рассмотрим , где . Продолжим раскладывать . Теперь рассмотри члены по отдельности.

*.*

. Красотень, не правда ли? На самом деле, все интегралы на полном периоде для синусов и косинусов в первой степени будут равны нулю, поэтому выражение примет вид . Так-то лучше.

Подставляем все в исходное выражение: . Это значит, что . Получается, что при любом ряд ограничен сверху, а значит он сходится, то есть общий член стремится к нулю, то есть одновременно при .

**Следствие.** Для любых чисел справедливо неравенство Коши . Пусть . Тогда имеем . – сходящиеся ряды. Следовательно, сходится и ряд . По признаку сравнения сойдется и ряд . Значит, общий член стремится к нулю, .

# §4. Разложение функций в ряды Фурье

# П.1. Разложение – периодических функций

Пусть непрерывна на и – периодична. Тогда , где .

**Замечание.** Можно интегрировать по любому промежутку длиной .

В случае четной функции относительно центра промежутка .

В случае нечетной функции относительно центра промежутка .

# П.2. Разложение – периодических функций

Пусть непрерывна на и – периодична. Преобразуем функцию в – периодическую . Тогда – непрерывна на и – периодична. Выполнив все подстановки, получим .