# П.3. Разложение произвольных функций

Пусть удовлетворяет а теореме Дирихле. Тогда в точках непрерывности . Но тогда вне заданного промежутка функция не будет определяться рядом, она будет повторяться периодически.

**Замечание.** Аналогично ведет себя и разложение на промежутке .

# П.4. Ряды Фурье в комплексной форме

Пусть непрерывна на . Для действительной переменной справедливо разложение . Рассмотрим комплексный случай . Тогда для . Откуда получаем ряд Фурье в комплексной форме . В результате имеем ряд Фурье в комплексной форме .

# §5. Равномерная сходимость ряда Фурье. Сходимость ряда Фурье «в среднем»

**Теорема 5.** Пусть непрерывна на и имеет кусочно-гладкую производную, и . Тогда ряд Фурье сходится к равномерно.

**Доказательство.** Рассмотрим , где – коэффициент Фурье для . Аналогично можно вывести . По следствию из теоремы 4 ряды сходятся, а следовательно сходятся и ряды , а вместе с ними и ряд .Тогда для разложения Фурье имеем . По признаку Вейерштрасса ряд Фурье сходится абсолютно и равномерно.

## Сходимость «в среднем»

Пусть – функции, заданные на и интегрируемы на нем вместе со своими квадратами. Рассмотрим как приближение , при этом отклонением будет . Охарактеризовать это отклонение можно следующими способами:

1)

2) по порядку малости при .

3) – среднеквадратичное отклонение (квадраты площадей отклонений). Оно обобщает и дискретный случай .

Задача приближения в среднем: для – найти такое в некотором классе функций, чтобы среднеквадратичное отклонение было минимальным.

**Теорема 6.** Среди тригонометрических многочленов – го порядка наилучшим приближением данной функции в смысле среднего квадратичного на является многочлен Фурье данной функции, т.е. минимально тогда, когда .

**Доказательство.** Пусть . Рассмотрим . Для вывода этого выражения использовались те же преобразования, что и в теореме 4. Имеем , где . Нетрудно заметить, что , при этом будет минимально при минимальном значении , т.е. тогда, когда . Тогда выражение примет вид .