**Теорема 7 (Парсеваля).** Пусть – непрерывна и имеет кусочно-гладкую производную на и . Тогда имеет место равенство .

**Доказательство.** Рассмотрим выведенное выражение . Мы знаем, что равномерно. Это значит, что для любого существует такое , что для любого и для любого выполняется . Тогда выражение представить в виде , откуда следует , что соответствует . Тогда имеем при , откуда и следует требуемое равенство.

# §6. Интеграл Фурье

# П.1. Преобразование Фурье. и преобразование Фурье

Пусть определена на и абсолютно интегрируема на этом интервале, т.е. . И пусть она раскладывается в ряд Фурье на любом промежутке (удовлетворяет теореме Дирихле или предшествующей ей), т.е. в точках непрерывности . Тогда можно представить в виде . Узнаем, к чему сойдется ряд при . Для этого рассмотрим и . Без доказательства скажем, что последнее выражение стремится к при . Последний интеграл называется двойным интегралом Фурье. В результате имеем, что в точках непрерывности при , а в точках разрыва выражение стремится к . Используя коитус разности, получим другую формулу интеграла Фурье: . Ее также записывают в виде . Таким образом, мы получили удобный вид формулы для разложения функции любого вида в ряд Фурье, где . Для четной функции поимеем разложение по косинусам: , для нечетной поимеем разложение по синусам: .

Рассмотрим также функцию, которую будем называть производящей – косинус – преобразование Фурье, аналог . Обратно восстанавливается как . Аналогичным образом определяется синус – преобразование .

# П.2. Комплексная форма интеграла Фурье

Рассмотрим , где , причем . Применим это к любому интегралу, например: , откуда имеем , где . Мы получили интеграл Фурье в комплексной форме.