ЛЕКЦИЯ 5

КОДИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ И НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Известно, что многие аналоговые источники, такие как речевой сигнал и изображения, характеризуются высокой корреляцией или зависимостью между отсчетами. В литературе по теории информации такие источники принято называть *источниками с памятью*. Использование скалярного квантования для таких источников дает функции $R(\varepsilon)$, которые существенно отличаются от эпсилон-энтропии. Векторное квантование учитывает зависимость между отсчетами и имеет лучшую кривую скорость-ошибка, но его практическое использование ограничено из-за высокой вычислительной сложности.

Альтернативой векторному квантованию служит подход, основанный на предварительной линейной обработке с последующим скалярным квантованием. Два наиболее известных метода этого типа получили название кодирование с предсказанием и кодирование на основе преобразования. Идея этих методов состоит в том, чтобы повысить эффективность скалярного квантования, как говорят, “удалив избыточность” из данных на стадии предварительной обработки.

КОДИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ

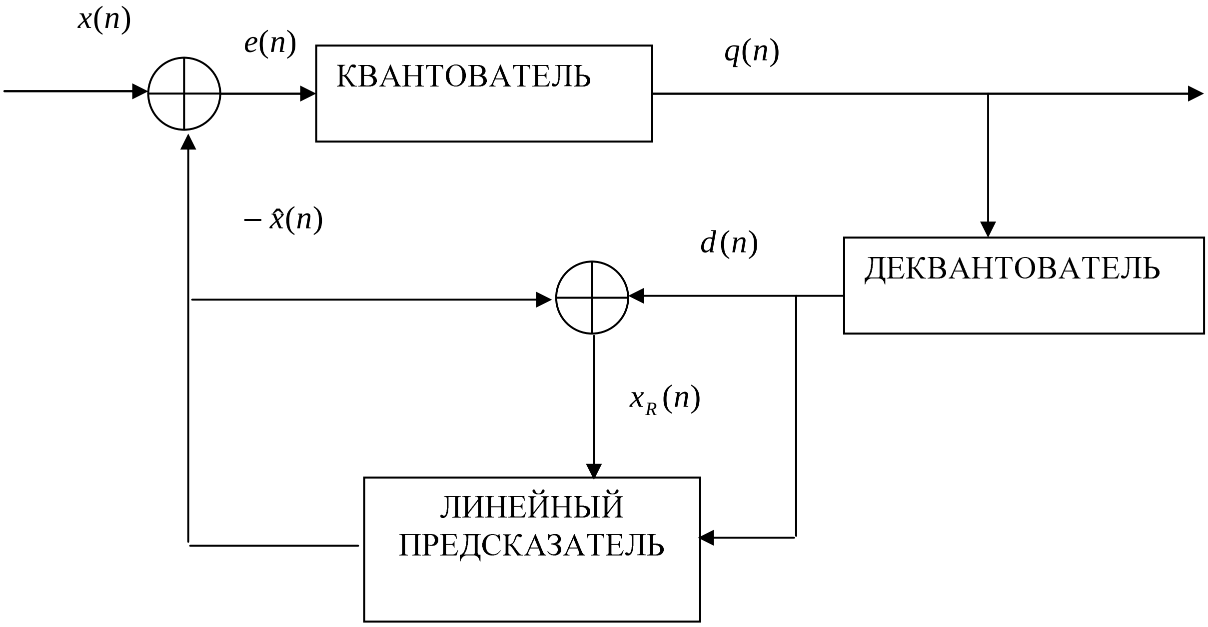
Основной принцип метода линейного предсказания состоит в том, что текущий отсчет (например, речевого сигнала) можно аппроксимировать линейной комбинацией предшествующих отсчетов. Коэффициенты предсказания – это весовые коэффициенты, используемые в линейной комбинации. Коэффициенты предсказания определяются однозначно из условия минимизации среднего квадрата разности между отсчетами входного сигнала и их предсказанными значениями (на некотором конечном интервале).

Пусть $x_1, x_2, \ldots$ - последовательность отсчетов на входе квантователя. Тогда в кодере на основе линейного предсказания каждый из входных отсчетов x_i предсказывается по предыдущим отсчетам по формуле

$$\hat{x}_i = \sum_{k=1}^{m} a_k x_{i-k} , \qquad (3.1)$$

где $\hat{x}_i$ - предсказанное значение $i-$го отсчета, a_k - коэффициенты предсказания, m - порядок предсказания. Погрешность предсказания определяется по формуле $e_i = x_i - \hat{x}_i$.

Пример кодера на основе линейного предсказания приведен на Рис. Этот квантователь вместо точного значения ошибки e использует восстановленные в деквантователе значения d, кроме того он использует неоптимальные значения коэффициентов предсказания.



В современных речевых кодерах используются оптимальные коэффициенты предсказания и предсказание выполняется по истинным предыдущим отсчетам сигнала.

Коэффициенты предсказания определяются из условия минимизации суммы квадратов ошибок предсказания на некотором конечном интервале, называемом интервалом квазистационарности.

Пусть $[i_0, i_1]$- некоторый интервал. Сумма квадратов погрешностей линейного предсказания определяется следующим образом :

$$E = \sum_{i=i_0}^{i_1} e_i^2 \ .$$

Подставим (3.1) в выражение для E и приравняем нулю производные $\partial E / \partial a_k$, $k = 1,2,...,m$. Получаем

$$E = \sum_{i=i_0}^{i_1} (x_i - a_1 x_{i-1} - ... - a_m x_{i-m})^2 = \sum_{i=i_0}^{i_1} x_i^2 - 2\sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{i=i_0}^{i_1} x_i x_{i-j} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_j a_k \sum_{i=i_0}^{i_1} x_{i-j} x_{i-k} \ . \quad (3.2)$$

Дифференцируя (3.2) по a_k, $k = 1,2,...,m$, получаем

$$\partial E / \partial a_k = \sum_{i=i_0}^{i_1} x_i x_{i-k} - \sum_{j=1}^{m} a_j \sum_{i-i_0}^{i_1} x_{i-k} x_{i-j} = 0 \ .$$

В результате получаем систему m линейных уравнений относительно m неизвестных $a_1, a_2, ..., a_m$

$$\sum_{j=1}^{m} a_j c_{jk} = c_{ok} \ , \ k = 1,2,...,m \ , \qquad (3.3а)$$

где $c_{jk} = c_{kj} = \sum_{i=i_0}^{i_1} x_{i-j} x_{i-k}$. (3.3б)

Данная система уравнений называется системой уравнений Юла-Уокера. Имея решение этой системы, нетрудно оценить и минимальную достижимую погрешность предсказания. Для этого подставим (3б) в (3.2)

$$E = c_{00} - 2\sum_{k=1}^{m} a_k c_{0k} + \sum_{k=1}^{m} a_k \sum_{j=1}^{m} a_j c_{jk} \ ,$$

и, используя (3.3а), упростим это выражение. В результате получим

$$E = c_{00} - \sum_{k=1}^{m} a_k c_{0k} \ .$$

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ.

Из методов, используемых при цифровой обработке сигналов, одним из наиболее важных является цифровая фильтрация. Термин *цифровой фильтр* относится к процессу вычислений по алгоритму, с помощью которого дискретный сигнал или последовательность чисел (представляющих вход) преобразуется во вторую последовательность чисел, выражающих выходной сигнал. Процесс вычислений может представлять собой фильтрацию нижних частот (сглаживание), полосовую фильтрацию, интерполяцию и.т.д. Мы будем рассматривать только линейные фильтры, т.е. полагать, что линейной комбинации входных последовательностей всегда соответствует линейная комбинация выходных последовательностей фильтра.

ОПИСАНИЕ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ С ПОМОЩЬЮ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цифровой фильтр (ЦФ) N-го порядка описывается линейным разностным уравнением вида

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(nT_s - iT_s) + \sum_{j=1}^{N} b_j y(nT_s - jT_s), \qquad (5.1)$$

где $x(nT_s)$ и $y(nT_s)$ - это отсчеты входного и выходного сигналов, соответственно, в моменты времени nT_s, где T_s - интервал дискретизации, a_i и b_j - константы, не зависящие от $x(nT_s)$.

Линейные ЦФ делятся на два больших класса: фильтры с постоянными параметрами (a_i и b_j не зависят от n) и с переменными параметрами (a_i и b_j зависят от n).

ЦФ, описываемый уравнением (5.1) называется рекурсивным. Если $b_i = 0$ при $k = 1,..., N$, то цифровой фильтр называется нерекурсивным.

Импульсной характеристикой ЦФ ($h(nT_s)$) называют реакцию (выходной сигнал фильтра) на входное воздействие (входной сигнал) вида

$$\delta(nT_s) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}.$$

Это воздействие называют единичным импульсом или дискретным дельта-импульсом.

ЦФ с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтр) – это ЦФ, у которого ИХ принимает отличные от нуля значения только при $n = 0,..., N$, где N - это порядок фильтра.

Фильтр с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтр) – это ЦФ, у которого ИХ может принимать отличные от нуля значения на бесконечном множестве $n = 0,1,\dots$.

Любой нерекурсивный ЦФ представляет собой КИХ-фильтр. Рекурсивные ЦФ, как правило, представляют собой БИХ-фильтры, однако возможны структуры, представляющие собой КИХ-фильтры.

Последовательность на выходе фильтра $y(nT_s)$ выражается через последовательность на входе $x(nT_s)$ и импульсную характеристику фильтра $h(nT)$ следующим образом

$$y(nT_s) = \sum_{m=0}^{n} x(mT_s)h(nT_s - mT_s) = \sum_{m=0}^{n} h(mT_s)x(nT_s - mT_s)\,.$$

В случае КИХ фильтра суммирование выполняется до длины (числа ненулевых отсчетов) импульсной характеристики.

Структурная схема ЦФ (5.1), реализованная в прямой форме приведена на Рис.5.1

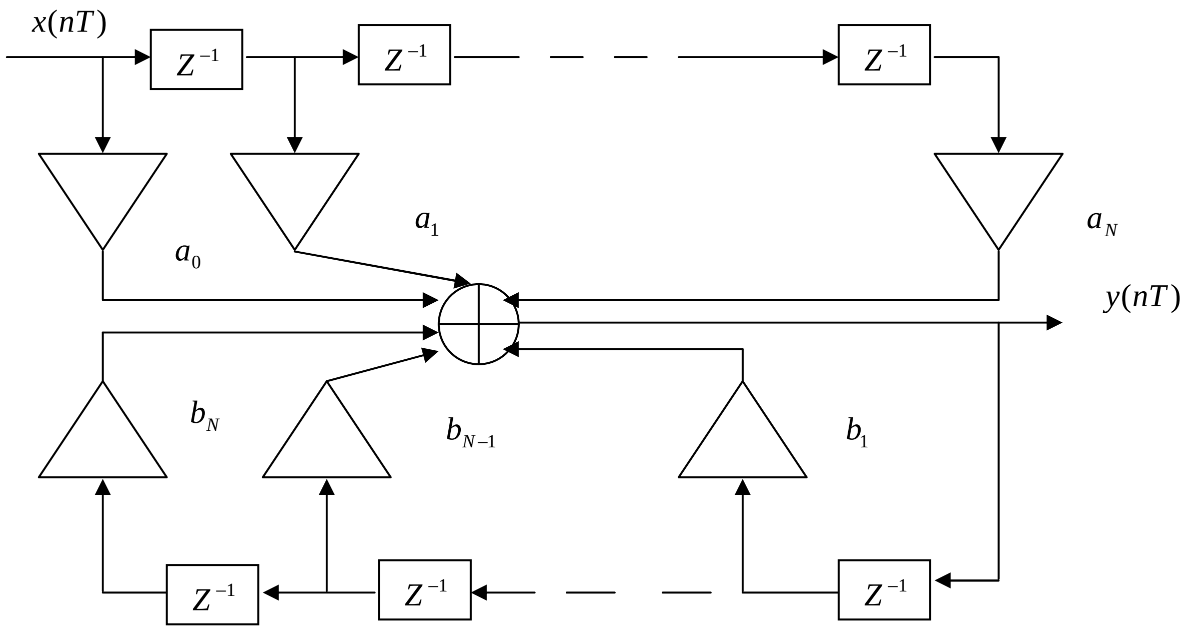


Рис.5.1

Структурная схема ЦФ

В качестве примера рассмотрим уравнение первого порядка

$$y(nT_s) = ax(nT_s) + by(nT_s - T_s)\,. \quad (5.2)$$

Очевидно, что

$$y(0) = ax(0) + by(-T_s)$$

$$y(T_s) = b^2 y(-T_s) + abx(0) + ax(T_s)$$

и по индукции можно определить общий результат

$$y(nT_s) = b^{n+1} y(-T_s) + \sum_{i=0}^{n} b^i a x(nT_s - iT_s) .$$

При воздействии в виде единичного импульса и нулевом начальном условии, т.е. $y(-T_s) = 0$ получаем $y(nT_s) = b^n a$. Вид импульсной характеристики ЦФ первого порядка для различных параметров a, b показан на Рис5.2.

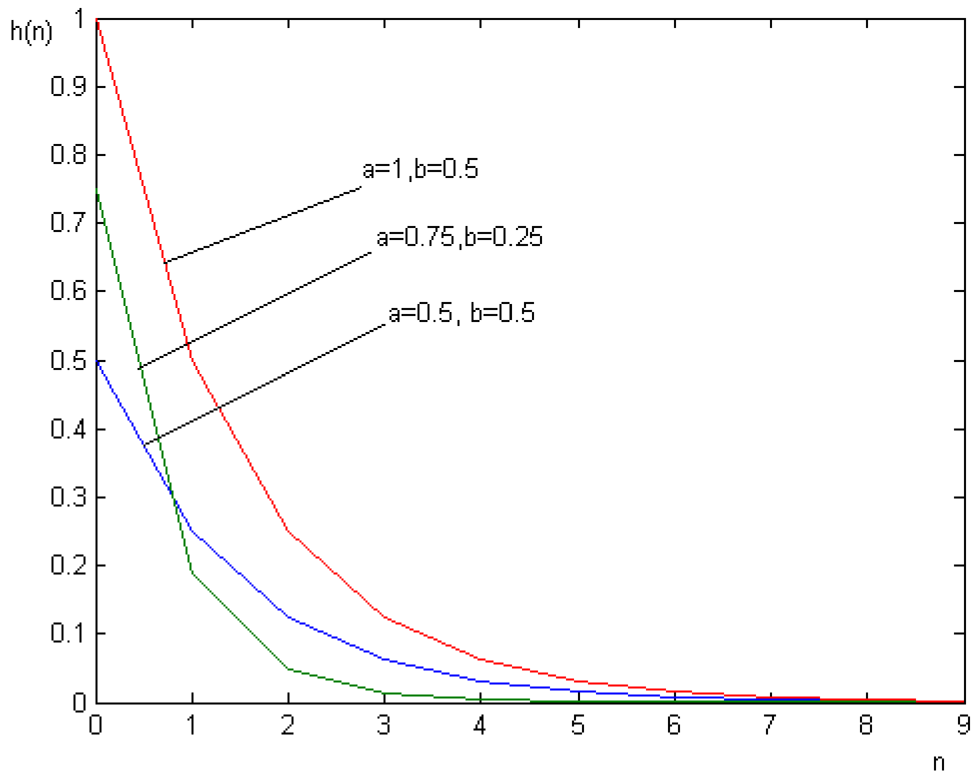


Рис.5.2. Импульсная характеристика ЦФ первого порядка

ОПИСАНИЕ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА С ПОМОЩЬЮ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Для анализа ЦФ может быть использован аппарат z-преобразования. Это преобразование допускает над разностными уравнениями такие же алгебраические действия, какие допускает преобразование Лапласа над дифференциальными уравнениями.

z-преобразование последовательности чисел $x(0), x(T_s), ..., x(nT_s)$ определяется следующим образом

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT_s) z^{-n} , \qquad (5.3)$$

где z - комплексная переменная, а $X(z)$ -функция этой комплексной переменной.

Рассмотрим некоторые свойства $z-$преобразования. Пусть $X(z)$ есть $z-$преобразование от $x(nT_s)$, а $Y(z)$ есть $z-$преобразование от $y(nT_s)$. Тогда покажем, что если $R(z)=X(z)Y(z)$, то $R(z)$ есть $z-$преобразование от $r(nT_s)$, где

$$r(nT_s)=\sum_{m=0}^{n}x(mT_s)y(nT_s-mT_s)=\sum_{m=0}^{n}x(nT_s-mT_s)y(mT_s),$$

т.е. представляет собой свертку исходных последовательностей. Простой путь доказательства этого соотношения заключается в применении метода индукции при исследовании произведения

$$X(z)Y(z)=[x(0)+x(T_s)z^{-1}+x(2T_s)z^{-2}+...]\times[y(0)+y(T_s)z^{-1}+y(2T_s)z^{-2}+...]=$$
$$x(0)y(0)+z^{-1}[x(0)y(T_s)+x(T_s)y(0)]+z^{-2}[x(0)y(2T_s)+x(T_s)y(T_s)+x(2T_s)y(0)]+...=$$
$$r(0)+z^{-1}r(T_s)+z^{-2}r(2T_s)+z^{-3}r(3T_s)+...$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получаем, что $r(nT_s)$ представляет собой свертку последовательностей $x(nT_s)$ и $y(nT_s)$.

Пусть $X(z)$ есть $z-$преобразование от $x(nT_s)$. Рассмотрим как выражается $z-$преобразование от $x(nT-mT)$. Используя определение (5.3) и подстановку $l=n-m$, получаем $\sum_{l=-m}^{\infty}x(lT)z^{-l}z^{-m}=X(z)z^{-m}+\sum_{i=-m}^{-1}x(iT_s)$. Таким образом при нулевых начальных условиях $z-$преобразование от $x(nT-mT)$ равно $X(z)z^{-m}$.

В табл.1 приведен вид z-преобразования для некоторых типичных последовательностей.

ОБРАТНОЕ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Рассмотрим как вычисляется обратное z-преобразование. По определению $x(nT_s)$ есть обратное z-преобразование от $X(z)$. Оно может быть найдено из (5.3) с помощью интегральной схемы Коши. Сначала умножим обе части (5.3) на z^{k-1}, затем произведем интегрирование по замкнутому контуру обеих частей равенства. Если контур интегрирования лежит внутри областей сходимости бесконечного ряда (5.3), то операции суммирования и интегрирования можно поменять местами, что даст

$$\oint X(z)z^{k-1}dz=\sum_{n=0}^{\infty}x(nT_s)\oint z^{k-n-1}dz. \qquad (5.4)$$

Теорема Коши гласит, что если контур интегрирования охватывает начало координат, то $\oint z^{k-n-1}dz=0$ для всех k, за исключением $k=n$. Для $k=n$ интеграл становится равным $2\pi j$. Применяя это к выражению (5.4), получаем теорему об обратном z-преобразовании:

$$x(kT_s)=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{k-1}dz. \qquad (5.5)$$

Пусть $x(nT_s)=a^n$, где a- константа. Тогда $X(z)=1/(1-az^{-1})=z/(z-a)$. Для подтверждения того факта, что $x(nT)$ есть обратное преобразование от $X(z)$, применим (5.5), выполняя интегрирование вдоль окружности радиуса, большего, чем a. Это дает :

$$x(nT_s)=\frac{1}{2\pi j}\oint\frac{z^n dz}{z-a}. \qquad (5.6)$$

Уравнение (5.6) решается с помощью теоремы о вычетах. Эта теорема гласит:

Пусть функция $f(z)$ *является однозначной и аналитической (дифференцируемой) всюду на контуре* L *и внутри него, за исключением некоторого числа особых точек* z_k $(k=1,...,N)$, *лежащих внутри контура* L. *Тогда* $\oint\limits_{(L)} f(z)dz = 2\pi j \sum\limits_{k=1}^{N} Выч\left[f(z), z_k\right]$. *Т.е. интеграл по контуру* L *равен произведению* $2\pi j$ *на сумму вычетов подынтегральной функции во всех особых точках, расположенных внутри контура интегрирования.*

Формула вычисления вычета в полюсе z_0 *порядка* m *имеет вид*

$$Выч\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right].$$

Покажем как вычисляется вычет для наиболее важного случая полюса первого порядка. Такой полюс имеет место, если подынтегральная функция $f(z)$ *представляет собой отношение двух конечных функций*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

причем в некоторой точке $z=a$ *числитель отличен от нуля, а знаменатель имеет нуль первого порядка. Можно показать, что в этом случае*

$$Выч\left[f(z), a\right] = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Для нашего примера теорема о вычетах дает $x(nT) = a^n$, если контур интегрирования охватывает полюс при $z=a$.

Решим уравнение (5.2) с использованием z-преобразования.

$$Y(z) = bY(z)z^{-1} + aX(z),$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a}{1-bz^{-1}},$$

где $H(z)$ - это системная функция цифрового фильтра, $X(z)$ и $Y(z)$ - z-преобразование входной и выходной последовательности, соответственно. Системная функция ЦФ представляет собой z-преобразование от его импульсной характеристики или другими словами

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT_s) z^{-n}.$$

Очевидно, что $Y(z) = X(z)H(z)$, отсюда при известном входном воздействии можно определить z-преобразование выходной последовательности. Например, при воздействии в виде единичного импульса $Y(z) = \dfrac{a}{1-bz^{-1}}$.

При $Y(z) = \dfrac{a}{1-bz^{-1}} = \dfrac{az}{z-b}$, по теореме об обратном z-преобразовании, находим, что $y(nT) = ab^n$.

Таблица 1

Название последова-тельности	Последовательность	z-преобразование
Единичный импульс	$x(nT_s)=\begin{cases}1, \mathrm{n}=0\\ 0, \mathrm{n}\neq 0\end{cases}$	$X(z)=1$
Единичный скачок	$x(nT_s)=\begin{cases}1, \mathrm{n}\geq 0\\ 0, \mathrm{n}<0\end{cases}$	$X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
Экспонента	$x(nT_s)=Ae^{-anT_s}$	$X(z)=\dfrac{A}{1-e^{-aT_s}z^{-1}}$
Затухающая синусоида	$x(nT_s)=e^{-anT_s}\sin(\omega nT_s)$	$X(z)=\dfrac{z^{-1}e^{-aT_s}\sin(\omega T_s)}{1-z^{-1}2e^{-aT_s}\cos(\omega T_s)+e^{-2aT_s}z^{-2}}$
Затухающая косинусоида	$x(nT_s)=e^{-anT_s}\cos(\omega nT_s)$	$X(z)=\dfrac{1-e^{-aT_s}z^{-1}\cos(\omega T_s)}{1-z^{-1}2e^{-aT_s}\cos(\omega T)_s+e^{-2aT_s}z^{-2}}$
	$x(nT_s)=(\gamma_1^{(n+1)T_s}-\gamma_2^{(n+1)T_s})$, $\gamma_{1,2}=a/2\pm\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+b}$ вещественные	$X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}a-z^{-2}b}=\dfrac{1}{(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)}$
Комплексная экспонента	$x(nT_s)=\begin{cases}e^{j\omega nT_s}, \mathrm{n}\geq 0\\ 0, \mathrm{n}<0\end{cases}$	$X(z)=\dfrac{1}{1-e^{j\omega T_s}z^{-1}}$

СВЯЗЬ Z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Свяжем дискретную последовательность чисел $x(nT_s)$ с временной функцией вида

$$x^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT),$$

где $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)dt=\begin{cases}1, t=a\\ 0, t\neq a\end{cases}$.

Преобразование Фурье для функции $x^*(t)$ имеет вид

$$X^*(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)e^{-j\omega t}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)e^{-j\omega nT}\ . \quad (5.7)$$

Если последовательность есть 0 при $n<0$, то она имеет z-преобразование (5.3). Сравнивая (5.7) и (5.3), получаем, что $X^*(\omega)=X(e^{j\omega T_s})$, $\omega=2\pi f$. При выполнении дискретного преобразования Фурье мы полагаем, что спектр $X^*(\omega)$ представлен как $X^*(k\Omega)$, $0\leq k\leq N-1$. Другими словами ДПФ может пониматься как оценка $z-$преобразования конечной последовательности $x(nT_s)$ в N точках на $z-$плоскости равномерно расположенных вдоль единичной окружности под углами $k\Omega$ радиан.

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

Комплексная частотная характеристика ЦФ представляет собой результат подстановки $z = e^{j\omega T_s}$ в системную функцию $H(z)$. Функция $H(e^{j\omega T_s})$ имеет следующий физический смысл. Если на вход ЦФ подан комплексный гармонический сигнал $x(nT) = e^{j\omega n T_s}$, то выходной сигнал ЦФ в установившемся режиме (при $n \to \infty$) имеет вид

$$y(nT_s) = H(e^{j\omega T_s})e^{j\omega n T_s}. \quad (5.8)$$

Действительно по теореме о свертке, получаем

$$y(nT_s) = \sum_{m=0}^{n} h(mT_s)x(nT_s - mT_s) = \sum_{m=0}^{n} h(mT_s)e^{j\omega(n-m)T_s} = e^{j\omega n T_s}\sum_{m=0}^{n} h(mT_s)e^{-j\omega m T_s}.$$

При $n \to \infty$ получаем (5.8), где $H(e^{j\omega T_s}) = \sum_{m=0}^{\infty} h(mT_s)e^{-j\omega m T_s}$.

Комплексная частотная характеристика может быть представлена в виде

$$H(e^{j\omega T_s}) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)T_s} = \mathrm{Re}(H(e^{j\omega T_s})) + j\,\mathrm{Im}(H(e^{j\omega T_s})),$$

где

$$A(\omega) = \sqrt{\left\{\mathrm{Re}(H(e^{j\omega T_s})\right\}^2 + \left\{\mathrm{Im}(H(e^{j\omega T_s})\right\}^2}$$

называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) ЦФ и

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{\mathrm{Im}(H(e^{j\omega T_s}))}{\mathrm{Re}(H(e^{j\omega T_s}))}$$

называется фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) ЦФ. Физический смысл АЧХ и ФЧХ фильтра заключается в том, что если на вход фильтра подана дискретная синусоида $x(nT_s) = \sin(n\omega T_s)$, то АЧХ определяет амплитуду, а ФЧХ – фазу синусоидального сигнала той же частоты на выходе фильтра.

Основные свойства частотной характеристики:

- ЧХ является непрерывной функцией частоты
- ЧХ представляет собой периодическую функцию частоты с периодом равным частоте дискретизации
- Для ЦФ с вещественными коэффициентами a_i, b_i АЧХ является четной функцией частоты, а ФЧХ – нечетной функцией частоты.
- ИХ и ЧХ ЦФ связаны между собой преобразованием Фурье

$$H(e^{j\omega T_s}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT_s)e^{-j\omega n T_s} = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT_s)e^{-j2\pi n f T_s} = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT_s)(\cos(2\pi n f T_s) - j\sin(2\pi n f T_s).$$

Для удобства сравнения ЧХ различных ЦФ часто в качестве аргумента используется нормированная частота $\alpha = \omega/\omega_s$, где $\omega_s = 2\pi/T_s$ — частота дискретизации. Тогда

$$H(e^{j\omega T_s}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT_s)e^{-j2\pi n\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT_s)(\cos(2\pi n\alpha) - j\sin(2\pi n\alpha).$$

Рассмотрим ЦФ 1-го порядка, который описывается уравнением (5.2). Его системная функция имеет вид $H(z) = \dfrac{a}{1 - bz^{-1}}$. Частотную характеристику фильтра получаем подставляя $z = e^{j\omega T_s}$. Она имеет вид

$$H(e^{j\omega T_s}) = \frac{a}{1 - be^{-j\omega T_s}} = \frac{a}{1 - b\cos(\omega T_s) + j\sin(\omega T_s)}.$$

АЧХ представляет собой модуль ЧХ и определяется по формуле

$$A(\omega)=\frac{a}{\sqrt{(1-b\cos(\omega T_s))^2+b^2\sin^2(\omega T_s)}}=\frac{a}{\sqrt{1-2b\cos(\omega T_s)+b^2}}.$$

ФЧХ представляет собой фазу ЧХ и определяется по формуле

$$\varphi(\omega)=-arctg\frac{b\sin(\omega T_s)}{1-b\cos(\omega T_s)}.$$

Нормируя частоту, получаем следующие выражения для АЧХ и ФЧХ

$$A(\alpha)=\frac{a}{\sqrt{1-2b\cos(2\pi\alpha)+b^2}},\ \varphi(\alpha)=-arctg\frac{b\sin(2\pi\alpha)}{1-b\cos(2\pi\alpha)}.$$

На Рис.5.3 приведен график $A(\alpha)$ при $a=1,\ b=0.5$.

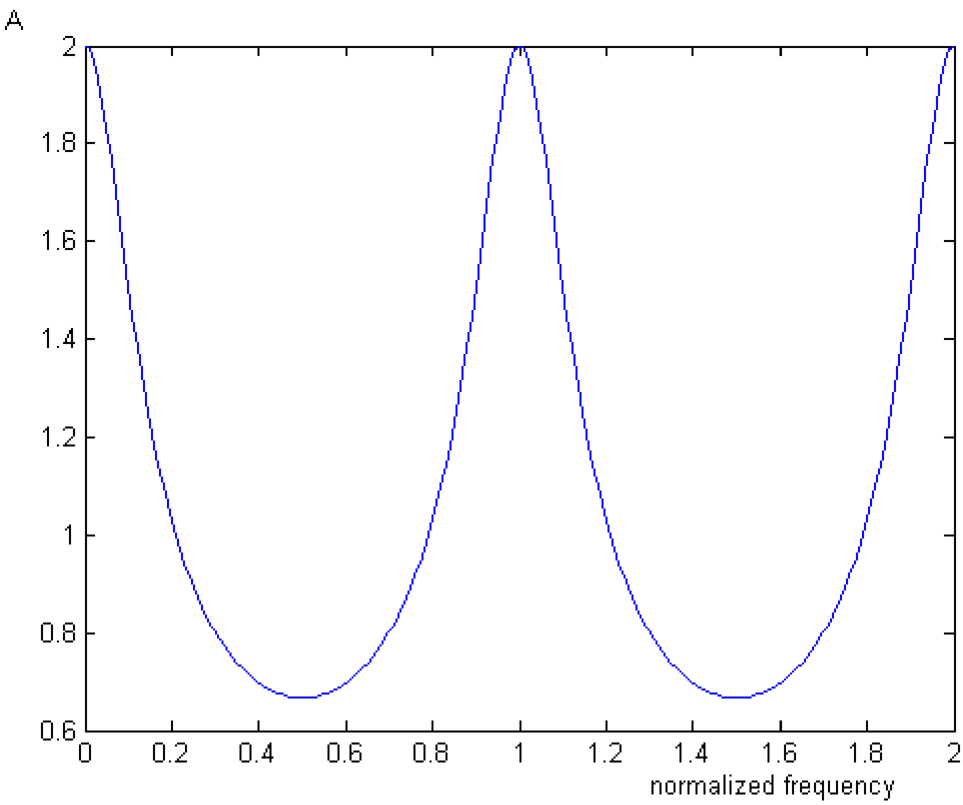


Рис.5.3 Амплитудно-частотная характеристика