ЛЕКЦИЯ 8
КОДИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Вторым широко используемым на практике методом квантования источников с памятью, использующим линейную предобработку и скалярное квантование, является кодирование на основе преобразования (transform coding). Суть метода состоит в том, что вектор из отсчетов входного сигнала подвергается некоторому линейному преобразованию (обычно ортонормированному) и результаты преобразования (коэффициенты преобразования) подвергаются скалярному квантованию. Этот метод очень широко используется при обработке видеосигналов и изображений. Типичным преобразованием является разложение по некоторой системе базисных функций. Часто в качестве базисных используют гармонические функции и коэффициенты разложения интерпретируют как интенсивности соответствующих гармоник. Такого рода преобразования называют переходом в частотную область. .

Пусть $\mathbf{x}$ - входной вектор-столбец размерности N, тогда линейное преобразование $\mathbf{x}$ можно записать в виде

$$\mathbf{y} = T\mathbf{x},$$

где T - матрица размерности $N \times N$, называемая матрицей преобразования. Строки матрицы $T = \{\mathbf{t}_i\}$, $i = 1,2,..., N$ являются базисными векторами линейного преобразования.

Требуют, чтобы преобразование обладало следующими свойствами:

- Локализация большой части энергии в небольшом числе коэффициентов преобразования, что позволило бы при дальнейшем квантовании исключить из рассмотрения наиболее неинформативные коэффициенты;
- Некоррелированность коэффициентов преобразования;
- Ортонормированность преобразования. Если это свойство выполняется, то сумма среднеквадратических ошибок аппроксимации коэффициентов преобразования в точности равна ошибке аппроксимации входного вектора в целом. При неортонормированном преобразовании ничтожно малая ошибка преобразования какого-либо коэффициента, вообще говоря, могла бы привести к значительному искажению входного сигнала;
- Низкая сложность вычисления коэффициентов преобразования. В частности, желательно использовать так называемые сепарабельные преобразования, для которых вычисление коэффициентов преобразования матрицы X (например, описывающей изображение) размера $N \times N$ может быть выполнено поэтапно. Сначала вычисляется преобразование каждой из N строк матрицы X, а затем поочередно вычисляется преобразование каждого из N полученных на первом этапе векторов коэффициентов преобразования. Другими словами матрица коэффициентов преобразования вычисляется по формуле

$$Y = TXT^T.$$

Рассмотрим подробнее важнейшие свойства преобразования.

1. Преобразование называется *ортонормированным*, если $T^{-1} = T^*$ в случае, если матрица T - комплексная, что сводится к $T^{-1} = T^T$, если T - вещественная. Приведенное условие эквивалентно тому, что для строк матрицы $T = \{\mathbf{t}_i\}$ выполняется соотношение

$$\mathbf{t}_i \mathbf{t}_j^T = \delta_{ij}, \text{ где } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Вектора $\mathbf{t}_i$ называются ортонормированными базисными векторами для линейного преобразования T. Для ортонормированного преобразования справедлива следующая последовательность равенств

$$\mathbf{y} = T\mathbf{x} \quad , \ \mathbf{x} = T^{-1}\mathbf{y} = T^{T}\mathbf{y}, \ \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{t}_i^{T},$$

т.е. входной вектор $\mathbf{x}$ представляется как взвешенная сумма базисных векторов, y_i — коэффициенты преобразования.

Ортонормированное преобразование сохраняет энергию сигнала, т.е. $\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{j=1}^{N} \left| y_j \right|^2$.

2. Некоррелированность коэффициентов преобразования.

Это свойство означает, что коэффициенты преобразования y_j, $j = 1,2,..., N$ удовлетворяют условию

$$\mathrm{E}\{(y_i - \mathrm{E}\{y_i\})(y_j - \mathrm{E}\{y_j\})\} = \lambda_i \delta_{ij}, \ \forall i, j, \qquad (3.4)$$

где λ_i - дисперсия коэффициента y_i, $\mathrm{E}\{\cdot\}$-символ математического ожидания. Далее для простоты будем полагать, что $\mathrm{E}\{\mathbf{x}\} = \mathrm{E}\{\mathbf{y}\} = \mathbf{0}$.

3. Локализация большой части энергии в небольшом числе коэффициентов преобразования. Предположим, что коэффициенты преобразования $y_1..., y_N$ упорядочены в соответствии с убыванием дисперсий, т.е. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_N$. Так же представим, что из соображений экономии мы передаем только pN, $0 < p < 1$ коэффициентов. Приемник использует усеченный вектор-столбец $\hat{\mathbf{y}} = (y_1,..., y_{pN}, 0,...,0)^T$, чтобы сформировать восстановленные значения $\hat{\mathbf{x}} = T^{-1}\hat{\mathbf{y}}$. Будем рассматривать только ортонормированные преобразования, т.е. $\hat{\mathbf{x}} = T^T\hat{\mathbf{y}}$. Среднеквадратическая ошибка при замене оригинала $\mathbf{x}$ на восстановленное значение $\hat{\mathbf{x}}$ определяется следующим образом

$$\mathrm{E}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{x}_i)^2\right\} = \frac{1}{N}\mathrm{E}\{(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}})^T(\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}})\} = \frac{1}{N}\mathrm{E}\{(\mathbf{y}^T T - \hat{\mathbf{y}}^T T)(T^T\mathbf{y} - T^T\hat{\mathbf{y}})\} = \frac{1}{N}\mathrm{E}\left\{|\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}}|^2\right\} =$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j=pN+1}^{N}\lambda_j. \qquad (3.5)$$

Таким образом, нас интересует ортонормированное преобразование, минимизирующее ошибку (3.5).

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КАРУНЕНА-ЛОЭВА.

Наиболее эффективным в смысле перечисленных свойств является преобразование Карунена-Лоэва. Это ортонормированное преобразование, коэффициенты которого удовлетворяют условию (3.4), т.е. некоррелированы. Кроме того, как будет показано ниже, преобразование Карунена-Лоэва минимизирует (среди всех ортонормированных преобразований) среднеквадратическую ошибку, возникающую за счет отбрасывания коэффициентов с малыми дисперсиями. Другими словами это преобразование наилучшим образом локализует энергию сигнала, максимизируя число коэффициентов, которые достаточно малы и при последующем квантовании будут квантоваться в 0.

Рассмотрим, что представляет собой матрица преобразования Карунена-Лоэва. Пусть $\mathbf{x}$ - входной вектор-столбец размерности n. Его корреляционная матрица выражается через корреляционную матрицу вектора коэффициентов преобразования $\mathbf{y}$ следующим образом

$$R = \mathrm{E}\{\mathbf{x}\mathbf{x}^T\} = T^T\mathrm{E}\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\}T. \qquad (3.6)$$

Домножая правую и левую часть (3.6) на T^T, получаем

$$RT^T = T^T\mathrm{E}\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\}. \qquad (3.7)$$

В силу некоррелированности коэффициентов преобразования, получаем, что матрица $\mathrm{E}\{\mathbf{y}\mathbf{y}^T\}$ представляет собой диагональную матрицу с дисперсиями λ_i, $i=1,...,n$ вдоль главной диагонали. С учетом этого обстоятельства из (3.7) следует

$$R\mathbf{t}_i = \lambda_i \mathbf{t}_i \ , \ i = 1,...,N \ .$$

Таким образом мы видим, что базисные векторы преобразования Карунена-Лоэва есть собственные векторы корреляционной матрицы R, нормированные, чтобы обеспечить $\mathbf{t}_m \mathbf{t}_n{}^T = \delta_{mn}$. Дисперсии $\{\lambda_i\}$коэффициентов преобразования есть собственные значения матрицы R. Так как матрица R— симметрическая и положительно определенная (т.е. $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T > 0$ для любого ненулевого вектора $\mathbf{x}$), то собственные числа этой матрицы вещественные и положительные. В результате базисные вектора и коэффициенты преобразования Карунена-Лоэва – вещественны.

Покажем теперь, что среди всех возможных ортонормированных преобразований, применяемых к стационарным векторам длины n, преобразование Карунена-Лоэва минимизирует среднеквадратическую ошибку из-за усечения (3.5).

Пусть $U = \{\mathbf{u}_k\}$ — матрица некоторого ортонормированного преобразования. Тогда вектор $\mathbf{x}$ может быть разложен по базисным векторам этого преобразования $\mathbf{u}_k$, $k = 1,...,N$, т.е.

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{u}_k^T \ ,$$

где c_k - коэффициенты преобразования. В силу ортонормированности преобразования каждый коэффициент c_k может быть представлен в виде

$$c_k = \mathbf{u}_k \mathbf{x} \, , \ k = 1,...,N \ .$$

Среднеквадратическая ошибка из-за усечения вектора $\mathbf{y}$ для этого преобразования определяется как

$$\frac{1}{N}\sum_{k>pN} \mathrm{E}\{|c_k|^2\} = \frac{1}{N}\sum_{k>pN} \mathbf{u}_k R \mathbf{u}_k^T \qquad (3.8).$$

Теперь разложим базисные вектора $\{\mathbf{u}_k\}$по базисным векторам преобразования Карунена-Лоэва $\{\mathbf{t}_i\}$. Получаем

$$\mathbf{u}_k = \sum_{i=1}^{N} w_{ik} \mathbf{t}_i^T \ ,$$

где

$$w_{ik} = \mathbf{t}_i \mathbf{u}_k \qquad (3.9а)$$

и

$$|\mathbf{u}_k|^2 = \sum_{i=1}^{N} |w_{ik}|^2 = 1 \quad (3.9б).$$

С другой стороны базисные вектора преобразования Карунена-Лоэва $\{\mathbf{t}_i\}$в свою очередь могут быть разложены по базисным векторам $\{\mathbf{u}_k\}$. Как следует из (3.9а) $w_{ik}^T = \mathbf{u}_k^T \mathbf{t}_i$ и следовательно

$$\mathbf{t}_i = \sum_{k=1}^{N} w_{ik}^T \mathbf{u}_k^T \qquad (3.10).$$

Теперь мы можем записать следующую цепочку равенств

$$\mathbf{u}_k R \mathbf{u}_k^T = \mathbf{u}_k R \sum_{i=1}^{N} w_{ik} \mathbf{t}_i = \mathbf{u}_k \sum_{i=1}^{N} w_{ik} \lambda_i \mathbf{t}_i = \sum_{i=1}^{N} |w_{ik}|^2 \lambda_i =$$

$$\lambda_{pN}+\sum_{i=1}^{N}\left|w_{ik}\right|^{2}(\lambda_i-\lambda_{pN})=\lambda_{pN}+\sum_{i=1}^{pN}\left|w_{ik}\right|^{2}(\lambda_i-\lambda_{pN})+\sum_{i>pN}\left|w_{ik}\right|^{2}(\lambda_i-\lambda_{pN}) \quad (3.11).$$

Учитывая что, $\lambda_i \geq \lambda_{pN}$ для $i \leq pN$, из (3.11) следует

$$\mathbf{u}_k R\mathbf{u}_k^T \geq \lambda_{pN}+\sum_{i>pN}\left|w_{ik}\right|^{2}(\lambda_i-\lambda_{pN}).$$

Из (3.8) следует, что среднеквадратическая ошибка из-за усечения вектора коэффициентов для преобразования U больше или равна

$$\frac{1}{N}\sum_{k>pN}^{N}\left(\lambda_{pN}-\sum_{i>pN}\left|w_{ik}\right|^{2}\left(\lambda_{pN}-\lambda_i\right)\right)=\frac{(N-pN)}{N}\lambda_{pN}-\frac{1}{N}\sum_{i>pN}(\lambda_{pN}-\lambda_i)\sum_{k>pN}\left|w_{ik}\right|^{2}.$$

Из (3.9б) следует, что

$$\sum_{k>pN}\left|w_{ik}\right|^{2}\leq 1$$

и так как $\lambda_{pN}-\lambda_i \geq 0$ для $i > pN$, то среднеквадратическая ошибка для преобразования U больше или равна

$$(1-p)\lambda_{pN}-\frac{1}{N}\sum_{i>pN}\left(\lambda_{pN}-\lambda_i\right)=\frac{1}{N}\sum_{i>pN}\lambda_i .$$

Сравнивая с (3.5), получаем, что среднеквадратическая ошибка из-за усечения для преобразования U всегда больше или равна среднеквадратической ошибке из-за усечения при использовании преобразования Карунена-Лоэва.

Недостаток преобразования Карунена-Лоэва состоит в том, что базисные функции этого преобразования зависят от преобразуемого сигнала. В результате вместе с квантованными коэффициентами преобразования необходимо хранить или передавать и описание системы базисных функций. Кроме того, использование заранее известных базисных функций позволяет использовать их алгебраические свойства для уменьшения вычислительной сложности преобразования.

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

По многим причинам желательно вычислять преобразование Фурье на ЭВМ. Это означает, что необходимо рассматривать только дискретные отсчеты как временной функции, так и спектра и только конечное число отсчетов каждой из них.

Если $x(nT)$ - последовательность отсчетов с периодом дискретизации T $(0 \leq n \leq N-1)$, то дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) называют пару взаимнооднозначных преобразований

$$X(k\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)e^{-jkn\Omega T},\ 0\leq k\leq N-1 \qquad (4.1)$$

$$x(nT)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega)e^{jkn\Omega T},\ 0\leq n\leq N-1, \qquad (4.2)$$

где $\Omega = \dfrac{2\pi}{NT}$ — основная частота преобразования или расстояние между отсчетами спектра в частотной области. Другими словами $X(k\Omega)$ представляет собой N дискретных отсчетов спектра последовательности $x(nT)$, взятых с периодом дискретизации по частоте, равным Ω. Формула (4.1) определяет прямое ДПФ, а формула (4.2)- обратное ДПФ (ОДПФ). Формула (4.1) определяет периодическую последовательность чисел с периодом N. ДПФ является ортонормированным преобразованием. Двумерное ДПФ может быть разделено на два одномерных ДПФ, т.е. оно — сепарабельно.

Свойства ДПФ похожи на свойства непрерывного преобразования Фурье.

Свойства линейности ДПФ:

$$DFT\{x(nT)+y(nT)\} = DFT\{x(nT)\} + DFT\{y(nT)\}$$

и

$$DFT\{cx(nT)\} = cDFT\{x(nT)\}.$$

Рассмотрим теперь обратное ДПФ от произведения ДПФ, для которого соответствующим аналоговым результатом является свертка. Таким образом, рассмотрим

$$v(lT) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega)Y(k\Omega)e^{jlTk\Omega}, \qquad (4.3)$$

где $X(k\Omega)$, $Y(k\Omega)$ являются ДПФ последовательностей $x(nT)$ и $y(nT)$, соответственно. Для того, чтобы оценить (4.3), подставим определения $X(k\Omega)$ и $Y(k\Omega)$:

$$v(lT) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-j\Omega Tnk}\right]\times\left[\sum_{m=0}^{N-1} y(mT)e^{-j\Omega Tmk}\right]e^{j\Omega Tlk}.$$

Изменяя порядок суммирования, получаем

$$v(lT) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)y(mT)\left[\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\Omega T(l-m-n)k}\right].$$

Сумма в скобках равна 0 для всех m и n, за исключением комбинации m и n, удовлетворяющей условию $m=(l-n)\bmod N$, для которой сумма в скобках равна N. Таким образом, (4.3) сводится к выражению

$$v(lT) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)y(T(l-n)\bmod N) = \sum_{n=0}^{N-1} y(nT)x(T(l-n)\bmod N).$$

Другими словами произведение дискретных преобразований Фурье есть дискретное преобразование Фурье от *круговой свертки*.

Пример.

Пусть $x(nT) = 2,1,1,2,1,1,2,1,1,2,1,1$, а $y(nT) = 1,1,4$ тогда $v(lT)$ определяется следующим образом

$$v(0) = y(0)x(0) + y(1)x(2) + y(2)x(1) = 7$$

$$v(1) = y(0)x(1) + y(1)x(0) + y(2)x(2) = 7$$

$$v(2) = y(0)x(2) + y(1)x(1) + y(2)x(0) = 10.$$

Вычисление круговой свертки можно представить себе следующим образом. Периодическая последовательность $x(nT)$ перевернута во времени и умножается на соответствующий член последовательности $y(nT)$. Затем перевернутая последовательность $x(nT)$ сдвигается на один отсчет влево и снова умножается на $y(nT)$, порождая очередное значение $v(lT)$. Круговая свертка еще иногда называется *периодической*. В противоположность этому соответствующее свойство непрерывного преобразования Фурье называется *апериодической* сверткой. В большинстве задач, где используется свертка, имеется в виду апериодическая свертка.

Естественным следствием из теоремы о круговой свертке является теорема кругового смещения:

$$DFT(x(T(n-l) \bmod N)) = X(k\Omega)e^{-j\Omega Tlk},$$

которая устанавливает, что перемещение l отсчетов из конца последовательности в ее начало эквивалентно умножению ДПФ этой последовательности на $e^{-j\Omega Tlk}$.

Вводя обозначения $e^{-j\Omega T} = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = W_N$ выражения (4.1), (4.2) можно представить в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \ 0 \le k \le N-1 \qquad (4.4)$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, \ 0 \le n \le N-1. \qquad (4.5)$$

ДПФ и ОДПФ в общем случае требуют примерно N^2 сложений и N^2 умножений комплексных чисел, что затрудняет их использование при больших N в реальном масштабе времени. Существуют алгоритмы, позволяющие сократить объем вычислений при выполнении ДПФ.

БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Основная идея БПФ по алгоритму Кули-Тьюки заключается в разбиении исходной последовательности длины N на подпоследовательности, применении к каждой из них ДПФ и формировании из результатов преобразований конечного ДПФ. Если этот алгоритм применять поэтапно к каждой из последовательностей, то при $N = 2^l$ требуемое число операций сложения и умножения комплексных чисел не превышает $N\log_2 N$, т.е. выигрыш по числу указанных операций имеет порядок

$$\gamma = \frac{N}{\log_2 N}.$$

Для последовательностей длины $N = 2^p$ алгоритм БПФ наиболее часто реализуется в формах прореживания по времени или прореживания по частоте.

БПФ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

Исходная N-точечная последовательность $x(nT)$, $0 \le n \le N-1$, $N = 2^p$, разбивается на две $N/2$-точечные подпоследовательности $g(nT)$ и $h(nT)$, составленные соответственно из четных и нечетных отсчетов

$$g(lT) = x(2lT), \quad 0 \le l \le N/2-1$$

$$h(lT) = x((2l+1)T), 0 \le l \le N/2-1.$$

ДПФ для этих последовательностей являются последовательностями, состоящими из $N/2$ точек и могут быть записаны в виде

$$G(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} g(l)(W^2)^{lk},$$

$$H(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} h(l)(W^2)^{lk}.$$

Для нас представляет интерес ДПФ от полной последовательности, которое может быть выражено через $g(l)$ и $h(l)$ следующим образом

$$X(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} g(l)W^{2lk} + h(l)W^{(2l+1)k}. \qquad (4.6)$$

Простая манипуляция с выражением (4.6) дает

$$X(k) = \sum_{l=0}^{N/2-1} g(l)(W^2)^k + W^k \sum_{l=0}^{N/2-1} h(l)(W^2)^k = G(k) + W^k H(k).$$

При прямом методе вычисления $G(k)$ и $H(k)$ могут быть вычислены с помощью $(N/2)^2$ операций каждая, а соединение их, дающее $X(k)$, требует дополнительно проведения только N операций, что в сумме составляет $N + N^2/2$ операций (под операцией здесь подразумевается комплексное умножение и сложение). Но прямое вычисление $X(k)$ требует N^2 операций, и поэтому (4.6) экономит вычисления почти в два раза для больших N.

В (4.6) индекс k изменяется от 0 до $N-1$. Однако $G(k)$ и $H(k)$ имеют период $N/2$ и вычисляются только в диапазоне от 0 до $N/2-1$.

Можно показать, что

$$X(k)=\begin{cases} G(k)+W^k H(k), 0\le k\le N/2-1 \\ G(k-N/2)+W^k H(k-N/2), N/2\le k\le N-1 \end{cases}$$

или

$$X(k)=\begin{cases} G(k)+W^k H(k), 0\le k\le N/2-1 \\ G(k-N/2)-W^{k-N/2} H(k-N/2), N/2\le k\le N-1 \end{cases} \quad (4.7).$$

Каждую из $N/2$-точечных последовательностей можно разделить на 2 $N/4$-точечных и использовать для вычисления ДПФ этих последовательностей алгоритм, аналогичный (4.7). Процесс деления подпоследовательностей продолжается до тех пор, пока на p-м шаге $(p=\log_2 N)$ ни получатся 2-точечные последовательности. На каждом шаге используется одна и та же базовая операция (“бабочка”), граф которой представлен на Рис.4.1. На Рис.4.2 показано восьмиточечное ДПФ, приведенное к двум четырехточечным ДПФ с помощью прореживания по времени. На Рис. 4.3 изображен полный граф 8-точечного ДПФ с прореживанием по времени. Из Рис. 4.3 видно, что в графе имеется 8×3 узлов и 2×8×3 стрелок, соответствующих $N\log_2 N$ сложениям и $2N\log_2 N$ умножениям. Половина умножений может быть опущена, поскольку линии, обозначенные стрелкой без надписи, имеют коэффициент умножения, равный 1. Половину оставшихся умножений также легко исключить, если учесть, что $W^{(N/2)}=-1$. Поэтому, если N - степень двойки, то для вычисления ДПФ требуется $N\log_2 N$ сложений и самое большее $(1/2)N\log_2 N$ умножений.

БПФ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ЧАСТОТЕ

Рассмотрим теперь другую форму алгоритма БПФ – прореживание по частоте. Эту форму алгоритма независимо друг от друга нашли Санди, Кули, Стокхем и др. Пусть N – точечная последовательность $x(l)$ разделена на две последовательности по $N/2$ точек каждая, например, $g(l)$ и $h(l)$, где $g(l)$ образована из первых $N/2$ точек $x(l)$, а $h(l)$ образована из последних $N/2$ точек $x(l)$. Формально можно записать

$$g(l)=x(l),\ h(l)=x(l+N/2),\ l=0,1,...,N/2-1.$$

N – точечное ДПФ, обозначенное $X(k)$, теперь может быть записано в значениях $g(l)$ и $h(l)$:

$$X(k)=\sum_{l=0}^{N/2-1} g(l)W^{lk}+h(l)W^{(l+N/2)k} = \sum_{l=0}^{N/2-1}(g(l)+e^{-j\pi k}h(l))W^{lk}. \quad (4.8)$$

Теперь рассмотрим четные и нечетные отсчеты $X(k)$, раздельно (отсюда и название – прореживание по частоте). Заменив в (4.8) k на $2k$, получим

$$X(2k)=\sum_{l=0}^{N/2-1}(g(l)+h(l))(W^2)^{lk}, \quad (4.9)$$

а заменив k на $2k+1$, получим

$$X(2k+1)=\sum_{l=0}^{N/2-1}[(g(l)-h(l))W^l](W^2)^{lk}\ . \qquad (4.10)$$

Выражения (4.9) и (4.10) представляют собой $N/2-$ точечные ДПФ от функций $(g(l)+h(l))$ и $(g(l)-h(l))W^l$. Таким образом, найден другой путь для того, чтобы выразить вычисления $N-$ точечного ДПФ через результаты двух $(N/2)-$точечных ДПФ. На Рис.4.4 показано 8-точечное преобразование, сведенное к 2-м 4-точечным методом прореживания по частоте. Затем выполняются последующие деления на подпоследовательности до тех пор пока число точек в подпоследовательностях ни станет равно 2. Как и прежде число вычислений оказывается пропорциональным $N\log_2 N$.

Любой метод вычисления ДПФ может быть легко модифицирован для вычисления обратного ДПФ. Особенность состоит лишь в том, что W заменяется на W^* (сопряженное W), а результат вычислений умножается на $1/N$.

ДИСКРЕТНОЕ КОСИНУСНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Кодирование, основанное на ДКП, представляет собой основу всех стандартов сжатия изображений. Выбор ДКП в качестве стандартного решения диктуется следующими причинами:

- Для изображений с сильно коррелированными отсчетами (коэффициент корреляции>0.7) эффективность ДКП в смысле компактности представления данных близка к преобразованию Карунена-Лоэва,
- ДКП представляет собой ортогональное сепарабельное преобразование, не зависящее от изображения, поэтому его вычислительная сложность относительно невелика.

ДКП использует гармонические базисные функции (косинусы). При этом различают несколько видов ДКП, отличающихся сложностью реализации. Так называемое ДКП-II составляет основу стандартов JPEG, MPEG. Оно задается следующим образом

$$X(k)=\frac{c(k)}{2}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\left(\frac{(n+1/2)k\pi}{N}\right),$$

$$\text{где } c(k)=\begin{cases}1/\sqrt{2}, & \mathrm{k}=0\\ 1, & \mathrm{k}\neq 0\end{cases}.$$

Обратное ДКП может быть записано как

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{c(k)}{2}\cos\left(\frac{(n+1/2)k\pi}{N}\right).$$

Отметим, что коэффициент $c(k)$ вводится для обеспечения нормированности преобразования.

Преобразование ДКП-IV используется в стандарте MPEG-audio, оно задается следующим образом

$$X(k)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\left(\frac{(n+1/2)(k+1/2)\pi}{N}\right).$$

Обратное преобразование имеет вид

$$x(n)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\cos\left(\frac{(n+1/2)(k+1/2)\pi}{N}\right).$$

Одним из достоинств ДКП-IV является симметричность матрицы преобразования. Оно не требует вычисления дополнительных коэффициентов $c(k)$. Оба преобразования могут быть сведены к ДПФ, и следовательно, выполнены с использованием БПФ. Рассмотрим способ сведения ДКП-IV к ДПФ длины $N/2$. По входной последовательности $x(n)$,

$n = 0,1,\ldots,N$ вычисляется вспомогательная последовательность из $N/2$ комплексных чисел

$$v(n) = (x(2n) + jx(N-1-2n)\exp\left(-j\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{4}\right)\right).$$

Для полученной последовательности вычисляем ДПФ длины $N/2$, т.е.

$$V(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} v(n)e^{-4jnk\pi/N} .$$

По последовательности $C(k) = \sqrt{\frac{2}{N}}V(k)$ компоненты ДКП-IV для последовательности $x(n)$, $n = 0,1,\ldots,N$ получаем по формулам

$$X(2k) = \mathrm{Re}\left\{C(k)\exp\left(-jk\frac{\pi}{N}\right)\right\} \text{ и } X(N-1-2k) = -\mathrm{Im}\left\{C(k)\exp\left(-jk\frac{\pi}{N}\right)\right\}.$$