

Занятие № 13. “Определение оптимальных маршрутов в сетях связи”

План распределения нагрузки (ПРН) – это заданная совокупность путей (маршрутов) установления соединений между каждой парой пользователей сети и очередность их выбора, или заданная очередность выбора исходящих направлений из каждого узла коммутации сети ко всем остальным узлам. ПРН часто называют планом распределения информации или планом распределения потоков информации.

План распределения, как правило, строится оптимальным по тому или иному критерию. В качестве критерия оптимальности плана могут быть выбраны различные параметры: минимальная длина устанавливаемых соединений (по числу транзитных узлов), максимальная вероятность доведения информации, минимальное время доведения сообщения, максимальное качество тракта передачи и др. Выбор конкретного показателя оптимальности зависит от возможности измерения этого показателя, степени влияния этого показателя на характеристики сети, сложности технической реализации процесса корректировки плана.

Под **маршрутизацией** следует понимать процесс принятия решения о выборе маршрута доставки информации от отправителя к получателю. При этом содержанием способа маршрутизации являются конкретные правила преобразования адресов точек доступа к сети в маршрут, соединяющий эти точки.

1. Принцип определения оптимальных путей

Практическая реализация принципа оптимальности основана на последовательном применении к матрице весов тернарной операции. С помощью этой операции элемент матрицы весов w_{ij} заменяется на элемент w'_{ij} , вычисляемый в соответствии с выражением:

$$w'_{ij} = \text{opt} [w_{ij}, \mathfrak{R}(w_{ik}, w_{kj})], \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Символом \mathfrak{R} здесь обозначена некоторая обобщенная операция, выполняемая над характеристиками (весами) двух смежных ребер, в результате чего должна получиться характеристика пути, состоящего из этих ребер.

Символ opt характеризует критерий оптимальности, используемый при упорядочении путей. В результате применения операции opt к двум величинам выбирается одна из них – оптимальная.

Конкретное содержание операций opt и \mathfrak{R} определяется, в основном, используемым критерием оптимальности. Ниже приведены наиболее часто используемые варианты содержания тернарной операции.

1. Поиск наиболее короткого (по протяженности) пути.

В данном случае тернарная операция имеет вид $l'_{ij} = \min [l_{ij}, l_{ik} + l_{kj}]$.

Таким образом, операция opt есть операция \min , а операция \mathfrak{R} – это операция сложения.

2. Поиск наиболее протяженного (критического) пути.

Для определения такого пути должна использоваться тернарная операция вида

$$l'_{ij} = \max [l_{ij}, l_{ik} + l_{kj}].$$

3. Поиск наиболее надежного пути.

Если элементами матрицы весов являются вероятности того, что соответствующие ребра существуют, т.е. $w_{ij} = q_{ij}$ то надежность пути между парой вершин будет определяться произведением весов входящих в данный путь ребер (при условии независимости выходов из строя данных ребер). Тогда содержанием операции opt будет определение максимума, а операция \mathfrak{R} представляет собой операцию произведения двух чисел. Таким образом, тернарная операция имеет вид $q'_{ij} = \max [q_{ij}, q_{ik} \cdot q_{kj}]$.

4. Поиск пути с наибольшей пропускной способностью.

Как известно, пропускная способность пути C равна наименьшей из пропускных способностей ребер, его составляющих. Тернарная операция, реализующая необходимый в данном случае максиминный критерий, имеет вид:

$$C'_{ij} = \max[C_{ij}, \min(C_{ik}, C_{kj})]. \text{ Здесь } opt = \max, \text{ а } \mathfrak{R} = \min.$$

К наиболее эффективным (с точки зрения вычислительной сложности) алгоритмам поиска оптимальных путей доставки информации в сети следует в первую очередь отнести такие алгоритмы, как алгоритм Дейкстры, алгоритм Данцига, алгоритм Флойда, матричный алгоритм и некоторые другие.

Для всех перечисленных алгоритмов исходными данными являются в первую очередь матрица весов $W = \|w_{ij}\|$ и выбранный критерий оптимальности $\{opt, \mathfrak{R}\}$. При этом результатом работы алгоритмов является модификация матрицы весов (элементами матрицы являются веса всех оптимальных путей в графе).

2. Алгоритмы маршрутизации с коммутацией каналов (на примере матричного алгоритма)

Наиболее распространенными алгоритмами маршрутизации в автоматизированных сетях телефонной связи являются различные модификации матричного алгоритма. Матричный метод относится к детерминированным методам динамического управления потоками и может быть как централизованным, так и децентрализованным.

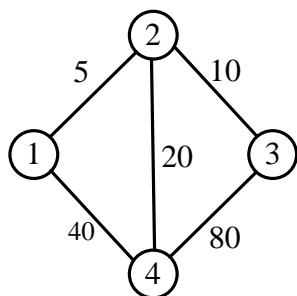
Матричный алгоритм эффективен в случаях, когда при поиске оптимальных путей вводятся ограничения на максимальное число транзитных вершин в пути, что и определяет его практическое применение в сетях с коммутацией каналов.

Данный алгоритм получил свое название потому, что его можно описать, используя вместо тернарной операции операцию возведения матриц в степень. В матричном алгоритме при заданных i и j , когда k принимает все возможные значения, выполнение операции последовательного возведения в степень r приводит к определению веса оптимального пути между крайними вершинами графа при условии, что этот путь содержит не более одной, двух, ..., $(r-1)$ транзитной вершины.

Алгоритм осуществляет поиск оптимальных путей (по критерию минимальной длины) при ограничениях на максимальное число транзитных центров коммутации в пути. В его основе лежит матричный метод определения длин кратчайших путей между всеми узлами сети, основанный на применении операций над матрицами расстояний.

Структуру сети с указанием длин ветвей можно описать в виде матрицы расстояний L , в которой элемент l_{ij} – длина ветви между КЦ i и КЦ j , причем $l_{ij} = \infty$ при отсутствии ветви, а $l_{ii} = 0$. Длина ветви l_{ij} определяется расстоянием между узлами сети или другим параметром (например, стоимостью), пропорциональным длине. Матричный алгоритм позволяет сформировать ПРН, оптимальный по критерию минимума длины ветвей в устанавливаемом соединении.

Рассмотрим алгоритм для сети, структура которой показана на рис. 1.



$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & 40 \\ 5 & 0 & 10 & 20 \\ \infty & 10 & 0 & 80 \\ 40 & 20 & 80 & 0 \end{bmatrix}$$

Рис. 1. Структура сети и матрица расстояний L

Если всем элементам матрицы L присвоить значение единицы ($l_{ij} = 1$), то можно построить план, оптимальный по минимуму числа транзитных ЦК в пути.

Для определения длин кратчайших путей между всеми узлами сети матрица расстояний L возводится в степень $r \leq N - 1$, где N – число узлов сети. Вычисление более высокой степени прекращается, если в процессе вычисления будет иметь равенство $L^r = L^{r-1}$.

Это равенство означает, что кратчайшие пути между каждой парой узлов находятся среди одно, двух, ..., $(r - 1)$ – транзитных путей, а любой путь с числом транзитов, больше чем r , не является кратчайшим.

Матрица $D = L^{r-1} = L^r$ называется **дистанционной**. Ее элементы равны длинам кратчайших путей между соответствующими узлами сети.

При возведении матрицы L в степень r используются следующие правила:

1. Операция умножения элементов матрицы l_{ik} и l_{kj} соответствует их алгебраической сумме: $l_{ik} \cdot l_{kj} = l_{ik} + l_{kj}$.

2. Основные правила сложения элементов матрицы:

$$0 + 0 = 0; \quad \infty + \infty = \infty; \quad \infty + 0 = \infty; \quad l_{ij} + l_{ji} = 0; \quad l_{ij} + \infty = \infty.$$

3. Значение элемента новой матрицы принимается по критерию минимума длины ветвей.

Используя данные правила, возведем матрицу L в квадрат ($L^2 = L^1 \cdot L^1$), при этом получим элементы l_{ij}^2 матрицы L^2 , которые равны длине кратчайшего пути от ЦК_i к ЦК_j среди всех путей с одним транзитным узлом:

$$l_{ij}^2 = \min_{k=1,2,\dots,N} (l_{ik}^1 + l_{kj}^1) = \min (l_{i1}^1 + l_{1j}^1; l_{i2}^1 + l_{2j}^1; \dots; l_{iN}^1 + l_{Nj}^1).$$

Это означает, что для получения 1-го элемента 1-й строки матрицы L^2 складываются почленно элементы 1-й строки с элементами 1-го столбца матрицы L .

Для получения 2-го элемента 1-й строки матрицы L^2 складываются почленно элементы 1-й строки с элементами 2-го столбца матрицы L .

Для получения 3-го элемента 1-й строки матрицы L^2 складываются почленно элементы 1-й строки с элементами 3-го столбца матрицы L и т.д.

Так, например, при возведении матрицы L , для сети показанной на рис. 1, в квадрат, получим элементы 1-й строки:

$$\begin{aligned} l_{11}^2 &= \min (l_{11}^1 + l_{11}^1; l_{12}^1 + l_{21}^1; l_{13}^1 + l_{31}^1; l_{14}^1 + l_{41}^1) = \min (0 + 0; 6 + 5; 6 + \infty; 40 + 40) = 0; \\ l_{12}^2 &= \min (l_{11}^1 + l_{12}^1; l_{12}^1 + l_{22}^1; l_{13}^1 + l_{32}^1; l_{14}^1 + l_{42}^1) = \min (0 + 5; 6 + 0; 6 + 10; 40 + 20) = 5; \\ l_{13}^2 &= \min (l_{11}^1 + l_{13}^1; l_{12}^1 + l_{23}^1; l_{13}^1 + l_{33}^1; l_{14}^1 + l_{43}^1) = \min (0 + \infty; 6 + 10; 6 + 0; 40 + 80) = 15; \\ l_{14}^2 &= \min (l_{11}^1 + l_{14}^1; l_{12}^1 + l_{24}^1; l_{13}^1 + l_{34}^1; l_{14}^1 + l_{44}^1) = \min (0 + 40; 6 + 20; 6 + 80; 40 + 0) = 25. \end{aligned}$$

Аналогичным образом находятся элементы 2-й, 3-й и 4-й строк. Матрица L^2 имеет вид:

$$L^2 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 15 & 25 \\ 5 & 0 & 10 & 20 \\ 15 & 10 & 0 & 30 \\ 25 & 20 & 30 & 0 \end{vmatrix}.$$

При возведении матрицы L в степень $r = 3$ получим матрицу $L^3 = L^2 \cdot L$, элементы которой равны длине кратчайшего пути между ЦК_i и ЦК_j среди всех путей с одним и двумя транзитными ЦК: $l_{ij}^3 = \min_{k=1,2,\dots,N} (l_{ik}^2 + l_{kj}^1)$. Так, при возведении матрицы L , показанной на рис. 1, в степень $r = 3$, получим следующие элементы 1-й строки:

$$l_{11}^3 = 0; \quad l_{12}^3 = \min [(l_{11}^2 + l_{12}^1); (l_{12}^2 + l_{22}^1); (l_{13}^2 + l_{32}^1); (l_{14}^2 + l_{42}^1)] = 5 \text{ и т.д.}$$

В результате матрица L^3 имеет вид:

$$D = L^3 = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 15 & 25 \\ 5 & 0 & 10 & 20 \\ 15 & 10 & 0 & 30 \\ 25 & 20 & 30 & 0 \end{vmatrix}.$$

Элементами этой матрицы являются длины кратчайших путей между любыми центрами коммутации, в состав которых входят одна, две или три ветви (один или два транзитных ЦК). Матрица L^3 является дистанционной: $D = L^2 = L^3$. Элементы дистанционной матрицы d_{ij} определяются по матрице L^3 . Однако в дистанционной матрице D не заложено дополнительных сведений о составе путей. Поэтому при матричном методе дополнительно используются следующие операции:

1. Формирование матриц очередности выбора исходящих ветвей (статических детерминированных таблиц маршрутов) для каждого центра коммутации.
2. Проверка и исключение наличия петель в путях первого, второго, третьего выбора.

3. Алгоритмы маршрутизации в сетях с коммутацией пакетов (на примере алгоритма Дейкстры)

Характерной особенностью алгоритма Дейкстры является то, что в процессе выполнения операций кроме определения искомого оптимального пути между заданной парой вершин графа определяются также оптимальные пути от начальной вершины до любых других вершин.

Исходными данными для реализации алгоритма являются матрица весов $W = \|w_{ij}\|$, начальная вершина V_H , критерий оптимальности opt и операция над весами двух смежных ребер \Re . Конечной целью является нахождение веса оптимального пути из начальной вершины V_H в конечную вершину V_K графа.

Алгоритм включает в себя четыре шага, выполняемых последовательно.

Шаг 1. Формирование начальных условий.

Все множество вершин разбивается на два подмножества. Первое из них содержит только начальную вершину V_H , а второе (T) – все остальные вершины: $T = V_1, V_2, \dots, V_n \setminus V_H$.

Шаг 2. Определение очередной вершины, исключаемой из множества T .

Определяется такая вершина $V_i \in T$, для которой выполняется равенство $w_{ni} = \text{opt}_{V_j \in T} [w_{nj}]$.

Если найдется несколько вершин, удовлетворяющих этому условию, то выбирается любая из них.

Шаг 3. Корректировка матрицы весов W и вектора путей D_H .

Исключить из множества T вершину V_i и для всех вершин $V_j \in T$ выполнить тернарную операцию вида $w_{nj} = \text{opt} [w_{nj}, \Re(w_{ni}, w_{ij})]$.

Если w_{nj} изменит свое значение, то есть если $w_{nj} = \Re(w_{ni}, w_{ij})$, то $d(j) = i$. В противном случае соответствующий элемент вектора D_H не изменяется.

Шаг 4. Определение конца процесса.

Если мощность множества T равна единице, то все оптимальные пути найдены. В противном случае осуществляется переход к выполнению шага 2.

Рассмотрим пример определения оптимальных путей от вершины V_1 ко всем остальным вершинам графа (рис. 1).

Исходные данные:

- матрица расстояний L ;
- начальная вершина графа V_1 ;
- критерий оптимальности – $\{\min\}$.

На шаге 1 осуществляется формирование начальных условий: вектор путей $D_1 = |1,1,1,1|$, множество вершин $T = \{3,4\}$, так как вершина 1 – начальная ($V_H = V_1$).

Первая итерация.

На шаге 2 первой итерации определяется вершина, исключаемая из множества T . При этом $l_{1i} = \min_{V_j \in T} \{l_{1j} + l_{ji}\} = \min \{6, \infty, 40\} = 5$, то есть выбирается ребро w_{12} . Следовательно, $i = 2$. Вершина V_2 , соответствующая пути оптимального веса, исключается из множества T ($V_2 \notin T$) и присоединяется к множеству, содержащему начальную вершину V_1 . Множество $T = \{4\}$.

На шаге 3 первой итерации для множества вершин $3,4$ выполняются тернарные операции с целью корректировки матрицы весов W и вектора D_H . При этом:

$l'_{13} = \min \{l_{13}, l_{12} + l_{23}\} = \min \{6, 6 + 10\} = 15$, то есть вес $l'_{13} \neq l_{13}$ изменил своё значение, при этом $d(1,3) = i$ имеет значение $d(1,3) = 2$;

$l'_{14} = \min \{l_{14}, l_{12} + l_{24}\} = \min \{10, 6 + 20\} = 25$. В данном случае вес $l'_{14} \neq l_{14}$ так же изменил своё значение, поэтому $d(1,4) = 2$;

Таким образом, первая строка матрицы весов W приобретает вид $l_{1j} = |0 \ 5 \ 15 \ 25|$, а вектор путей $D_1 = |1,1,2,2|$.

На шаге четвёртом первой итерации определяется мощность множества T , которая равна 2, следовательно, осуществляется переход к шагу 2 второй итерации.

Вторая итерация.

На шаге 2 второй итерации определяется очередная вершина, исключаемая из множества T . При этом $l_{1i} = \min_{V_j \in T} \{l_{1j} + l_{ji}\} = \min \{5, 25\} = 5$. Следовательно, $i = 3$, исключается вершина 3 ($V_3 \notin T$) и остается множество вершин $T = T \setminus 3 = \{4\}$.

На шаге 3 второй итерации корректируются W и D_H . При этом:

$l'_{14} = \min \{l_{14}, l_{13} + l_{34}\} = \min \{5, 5 + 80\} = 5$. Таким образом, $l'_{14} = l_{14}$, $d(1,4) = 2$.

Тогда первая строка матрицы весов W остается в прежнем виде $l_{1j} = |0 \ 5 \ 15 \ 25|$, так же как и вектор путей $D_1 = |1,1,2,2|$.

Поскольку мощность множества T на шаге 4 второй итерации определяется как 1, поэтому процесс определения оптимальных путей завершается. Пути содержатся в модифицированном векторе D_1 , а их веса – в первой строке модифицированной матрицы W .