Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Компьютерный практикум по учебному курсу

«Введение в численные методы»
Задание 2

Числнные методы решения дифференцальных уравнений

ОТЧЕТ

о выполненном задании

студента 206 учебной группы факультета ВМК МГУ
Николайчука Артёма Константиновича

гор. Москва
2020 г.

Содержание

Постановка задачи

Задача 1

Рассматривается ОДУ первого порядка, разрешённое относительно производной, с дополнительным начальным условием в точке а и имеющее вид:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) & a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases} (1)$$

Необходимо найти решение данной задачи Коши в предположении, что правая часть уравнения $f = f(x, y)$ гарантирует существование и единственность решения задачи Коши.

Рассматривается система линейных ОДУ первого порядка, разрешённых относительно производной, с дополнительными условиями в точке а:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2) & a \le x \le b \ (2) \\ y_1(a) = y_1^0, y_2(a) = y_2^0 \end{cases}$$

Необходимо найти решение данной задачи Коши в предположении, что правые части уравнений гарантируют существование и единственность решения задачи Коши для системы.

Задача 2

Рассматривается краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с дополнительными условиями в граничных точках:

$$\begin{cases} y" + p(x)y' + q(x)y = f(x) \\ \sigma_1 y(a) + \gamma_1 y'(a) = \delta_1 & a \le x \le b \ (3) \\ \sigma_2 y(b) + \gamma_2 y'(b) = \delta_2 \end{cases}$$

Необходимо найти решение данной краевой задачи.

Цели

- Часть 1

  Изучить методы Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности, применяемые для численного решения задач Коши для дифференциального уравнения (или системы) первого порядка:

  - Решить задачу Коши (1) или (2) наиболее известными и широко используемыми на практике методами Рунге-Кутта второго и четвертого порядка точности, аппроксимировав дифференциальную задачу соответствующей разностной схемой (на равномерной сетке); полученное конечно-разностное уравнение (или уравнения в случае системы), представляющее фактически некоторую рекуррентную формулу, просчитать численно;
  - Найти численное решение задачи и построить его график;
  - Найденное численное решение сравнить с точным решением дифференциального уравнения

- Часть 2

  Изучить метод прогонки решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка:

  - Решить краевую задачу (3) методом конечных разностей, аппроксимировав ее разностной схемой второго порядка точности (на равномерной сетке); полученную систему конечно-разностных уравнений решить методом прогонки;
  - Найти разностное решение задачи и построить его график;
  - Найденное разностное решение сравнить с точным решением дифференциального уравнения

Описание алгоритмов

Метод Рунге-Кутты

Будем использовать следующие формулы для численного решения задачи Коши, приближающие точное решение с четвёртым порядком точности относительно диаметра разбиения отрезка, на котором решается поставленная задача.
Положим:

- n - число точек разбиения отрезка
- $h = \frac{a-b}{n}$ - диаметр разбиения отрезка
- $x_i = a + h * i, y_i = y(x_i), 0 \leq i \leq n$ - сетка и сеточная функция

Метод Рунге-Кутты 2 порядка точности для рекуррентного вычисления сеточной функции примет следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h * f(x_i, y_i)))$$

Метод Рунге-Кутты 4 порядка точности для рекуррентного вычисления сеточной функции примет следующий вид:

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2 \cdot (k_2 + k_3) + k_4) \end{cases}$$

Для задачи (2) метод Рунге-Кутты 4 порядка для рекуррентного вычисления сеточной функции примет следующий вид:

$$\begin{cases} k_{11} = f_1(x_i, y_1^i, y_2^i) \\ k_{21} = f_2(x_i, y_1^i, y_2^i) \\ k_{12} = f_1(x_i + \frac{h}{2}, y_1^i + \frac{h}{2}k_{11}, y_2^i + \frac{h}{2}k_{21}) \\ k_{22} = f_2(x_i + \frac{h}{2}, y_2^i + \frac{h}{2}k_{11}, y_2^i + \frac{h}{2}k_{21}) \\ k_{13} = f_1(x_i + \frac{h}{2}, y_1^i + \frac{h}{2}k_{12}, y_2^i + \frac{h}{2}k_{22}) \\ k_{23} = f_2(x_i + \frac{h}{2}, y_2^i + \frac{h}{2}k_{12}, y_2^i + \frac{h}{2}k_{22}) \\ k_{14} = f_1(x_i + h, y_1^i + hk_{13}, y_2^i + hk_{23}) \\ k_{24} = f_2(x_i + h, y_1^i + hk_{13}, y_2^i + hk_{23}) \\ y_1^{i+1} = y_1^i + \frac{h}{6}(k_{11} + 2 \cdot (k_{12} + k_{13}) + k_{14}) \\ y_2^{i+1} = y_2^i + \frac{h}{6}(k_{21} + 2 \cdot (k_{22} + k_{23}) + k_{24}) \end{cases}$$

Краевая задача

Для решения данной задачи запишем заданное дифференциальное уравнение в узлах сетки и краевые условия:

$$\begin{cases} y_i'' + p_i y_i' + q_i y_i = f_x, x_i = a + i\frac{b-a}{n} \quad 0 \le i \le n \\ \sigma_1 y_0 + \gamma_1 y_0' = \delta_1 \\ \sigma_2 y_n + \gamma_2 y_n' = \delta_2 \end{cases}$$

Для $1 \le i \le n-1$ существует следующее разностное приближение для первой и второй производной и самой сеточной функции:

$$\begin{cases} y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \\ y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \end{cases}$$

В результате подстановки этих разностных отношений в начальное уравнение в виде сеточной функции получим линейную систему из n+1 уравнений с n+1 неизвестными $y_0, y_1, ..., y_n$:

$$\begin{cases} y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i \quad 1 \le i \le n-1 \\ \sigma_1 y_0 + \gamma_1 \frac{y_0 - y_0}{h} = \delta_1 \\ \sigma_2 y_1 + \gamma_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \delta_2 \end{cases}$$

Решим полученную систему, используется метод прогонки.
После преобразований получим:

$$\begin{cases} C_0 y_0 + B_0 y_1 = F_0 \\ A_i y_{i-1} + C_i y_i + B_i y_{i+1} = F_i \quad 1 \le i \le n-1 \\ A_n y_{n-1} + C_n y_n = F_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = -\frac{B_0}{C_0} \\ \beta_0 = \frac{F_0}{C_0} \\ \alpha_i = -\frac{B_i}{C_i + A_i \alpha_{i-1}} & \\ & 1 \le i \le n-1 \\ \beta_i = \frac{F_i - A_i \beta_{i-1}}{C_i + A_i \alpha_{i-1}} & \\ \\ y_n = \frac{F_n - A_n \beta_{n-1}}{C_n + A_n \alpha_{n-1}} \\ y_i = \beta_i + \alpha_i * y_{i+1} & 0 \le i \le n-1 \end{cases}$$

Откуда и находим все y_i

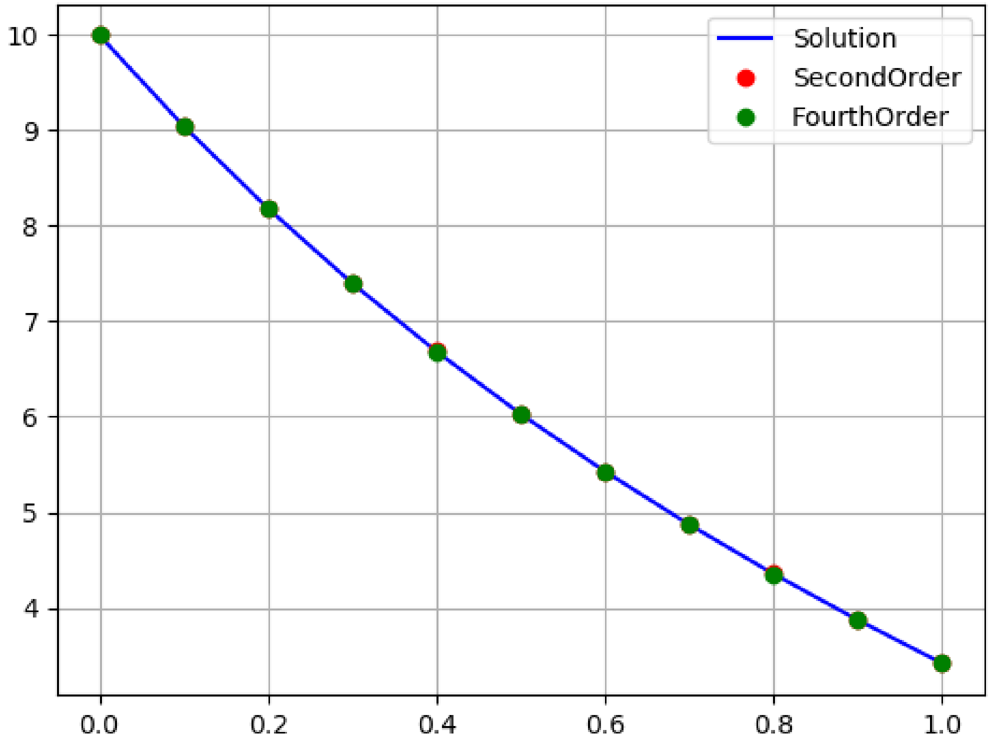
Тестировние функций

Тест1

$$\begin{cases} y' = -y - x^2 \\ x_0 = 0 \\ y_0 = 10 \end{cases}$$

Точное решение: $y = -x^2 + 2x - 2 + 12e^{-x}$

Ошибка метода второго порядка при 10 шагах $z_2 = 10^{-3}$, метода четвёртого порядка $z_4 = 4 \cdot 10^{-6}$

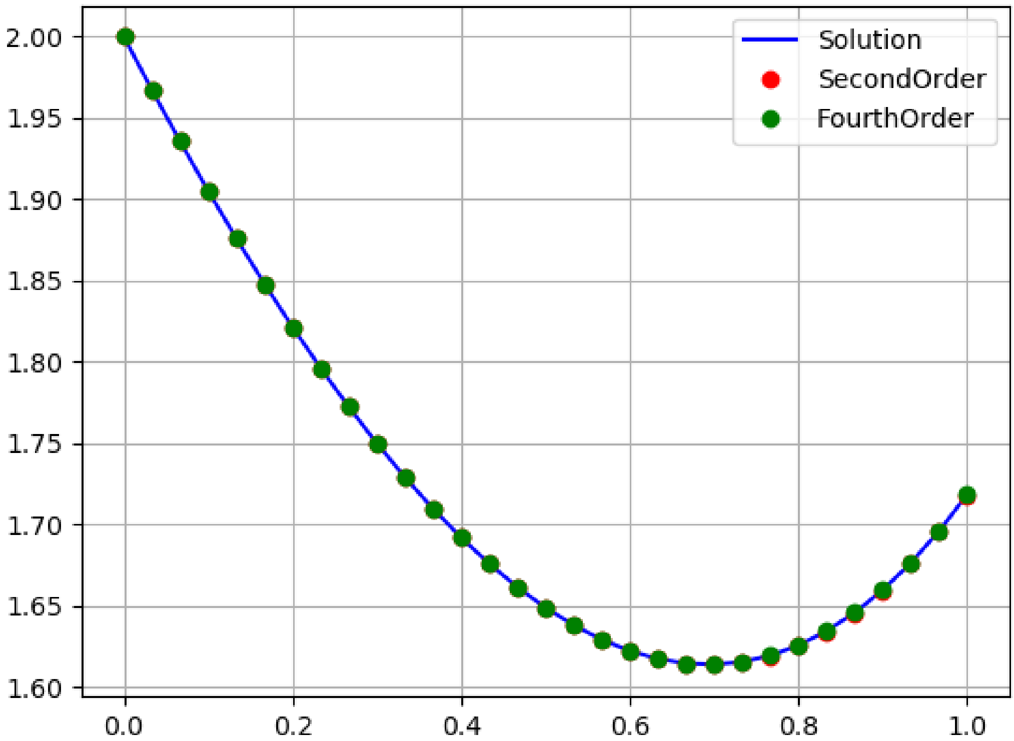


Тест2

$$\begin{cases} y' = y + 2x - 3 \\ x_0 = 0 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

Точное решение: $y = 1 + e^x - 2x$

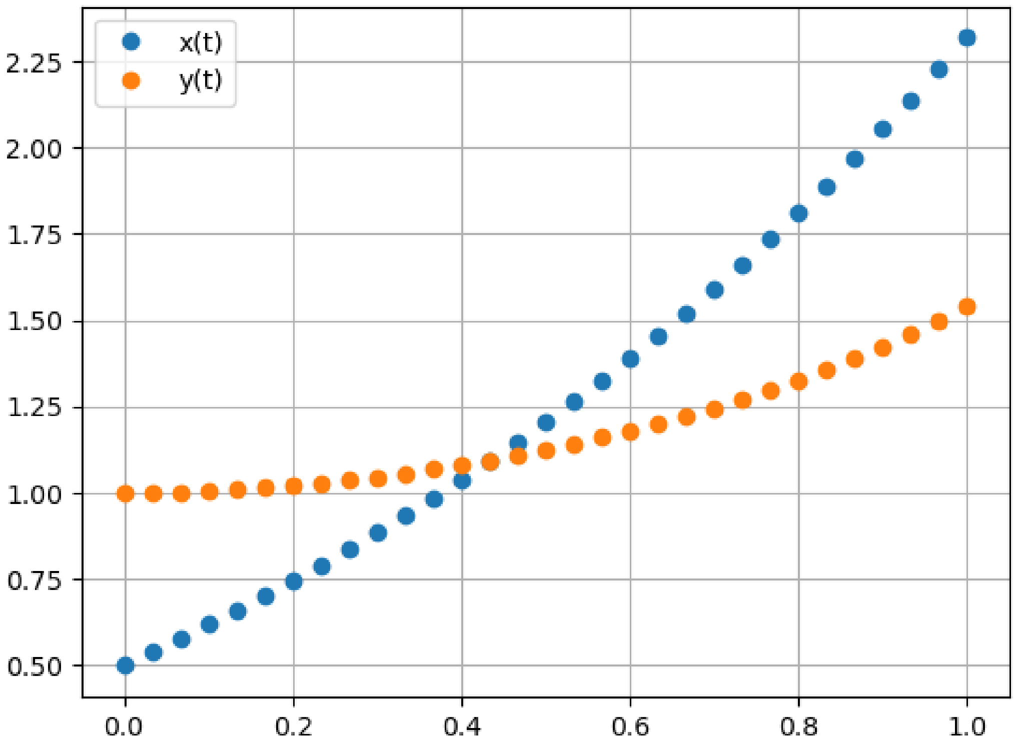
Ошибка метода второго порядка при 30 шагах $z_2 = 10^{-4}$, метода четвёртого порядка $z_4 = 10^{-8}$



Тест3

$$\begin{cases} x' = \sqrt{t^2 + 0.1x^2} + y \\ y' = \cos(2.1y) + x \\ x_0 = 0.5 \\ y_0 = 1 \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

Аналитического решения не существует



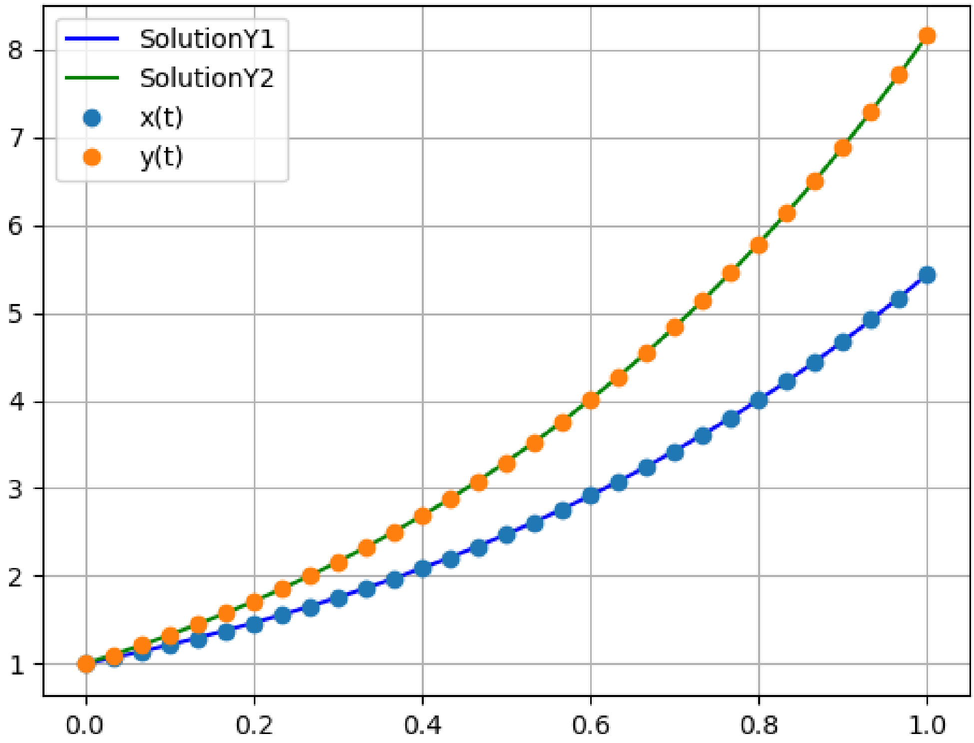
Тест4

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 4x - y \\ x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

Аналитического решение:

$$\begin{cases} x = (1 + t) \cdot e^t \\ y = (1 + 2t) \cdot e^t \end{cases}$$

Ошибка метода при 30 шагах у функции $x(t) z_x = 10^{-8}$, у функции $y(t) z_y = 10^{-7}$

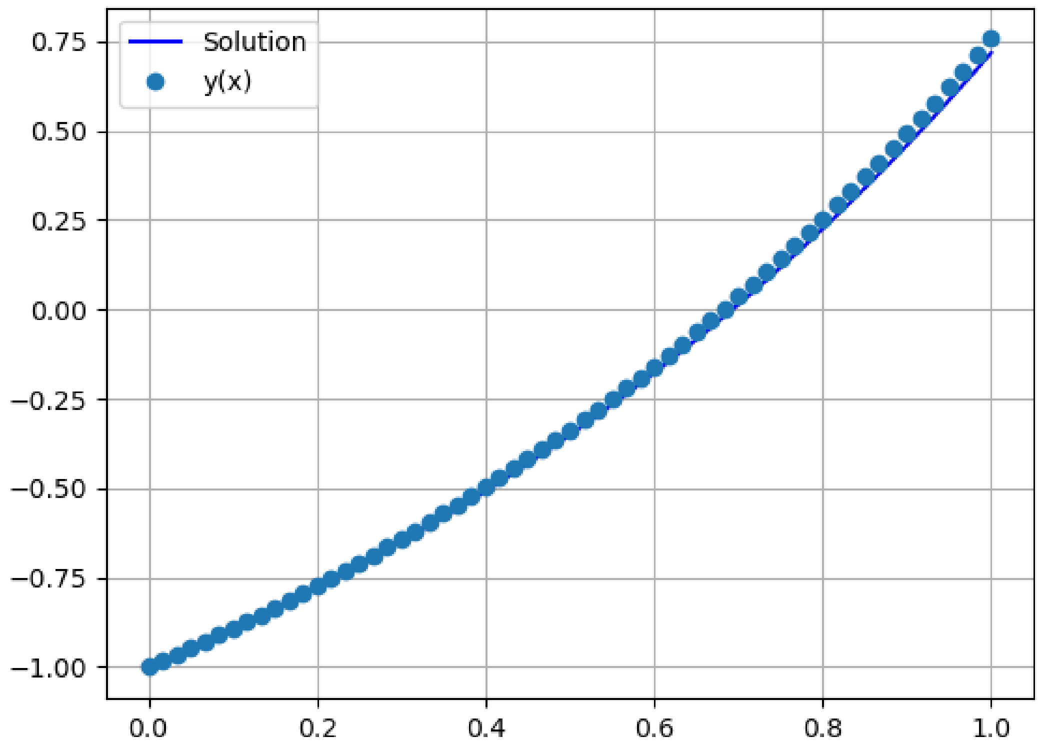


Тест5

$$\begin{cases} y'' - y' = 0 \\ y(0) = -1 \\ -y(1) + y'(1) = 2 \end{cases}$$

Аналитического решение: $y = -2 + e^x$

Ошибка метода при 60 шагах $z = 0.01658$

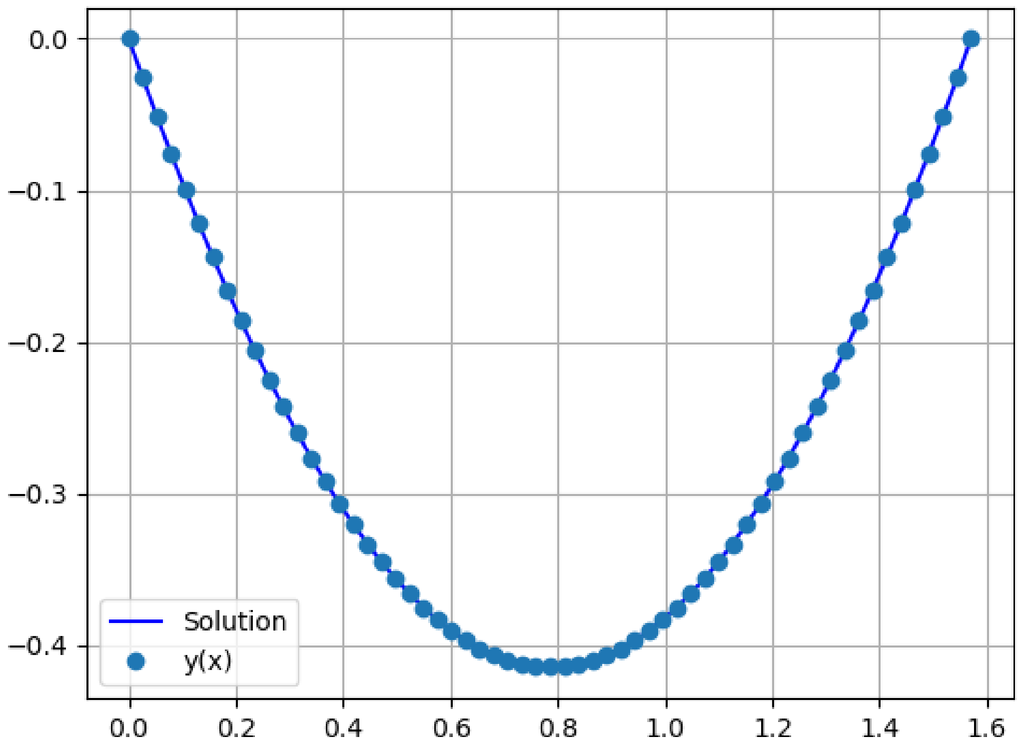


Тест6

$$\begin{cases} y'' + y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

Аналитического решение: $y = 1 - \sin x - \cos x$

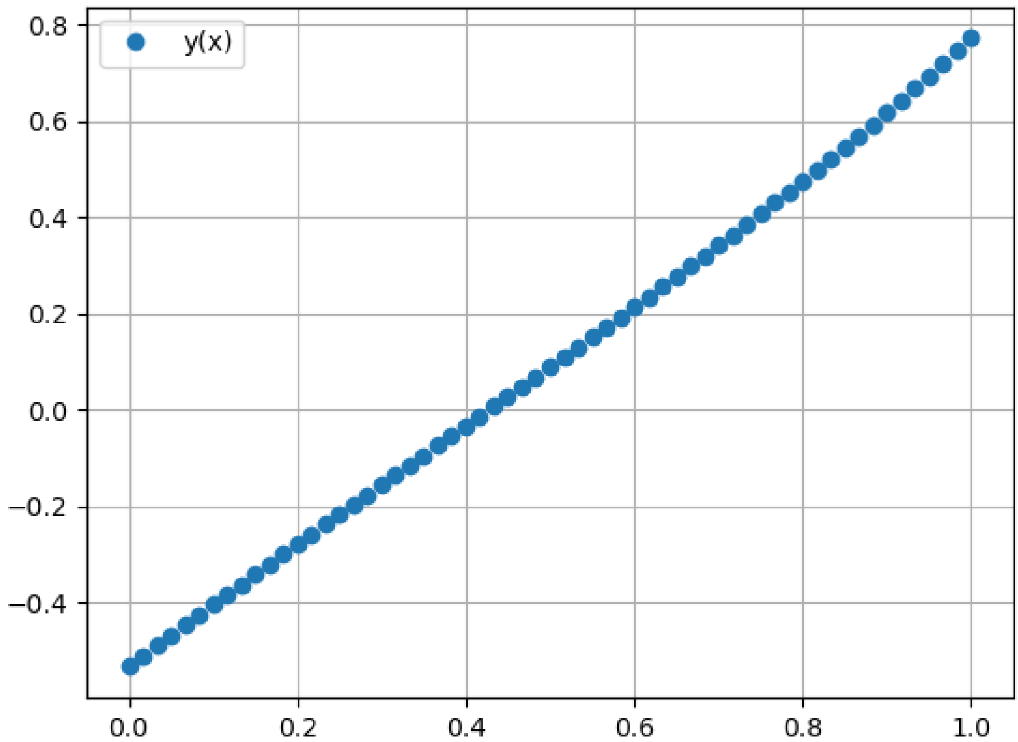
Ошибка метода при 30 шагах $z = 5 \cdot 10^{-5}$



Тест7

$$\begin{cases} y'' - 3xy + 2y = 1.5 \\ y'(0.7) = 1.3 \\ 0.5 \cdot y(1) + y'(1) = 2 \end{cases}$$

Аналитического решения не существует



Исходный код

Исходный код проекта размещён на гитхабе https://github.com/Strannik2001/Computing_Methods