

L'effet Ramsauer-Townsend

Physique moderne
Boumiz Abdelaziz

Pré-ing 2
MI-4

- ✿ BRUYANT Florian
- MIKOLAJEWSKI Alex
- ATAGAN Axel
- ◆

Sommaire

- 01.- Introduction effet Ramsauer-Townsend
- 02.- Modélisation du problème
- 03.- Etude analytique des états stationnaires
- 04.- Etude dans le cas du paquet d'ondes
- 05.- Comparaison aux observations expérimentales

Effet Ramsauer-Townsend

Nommé après:



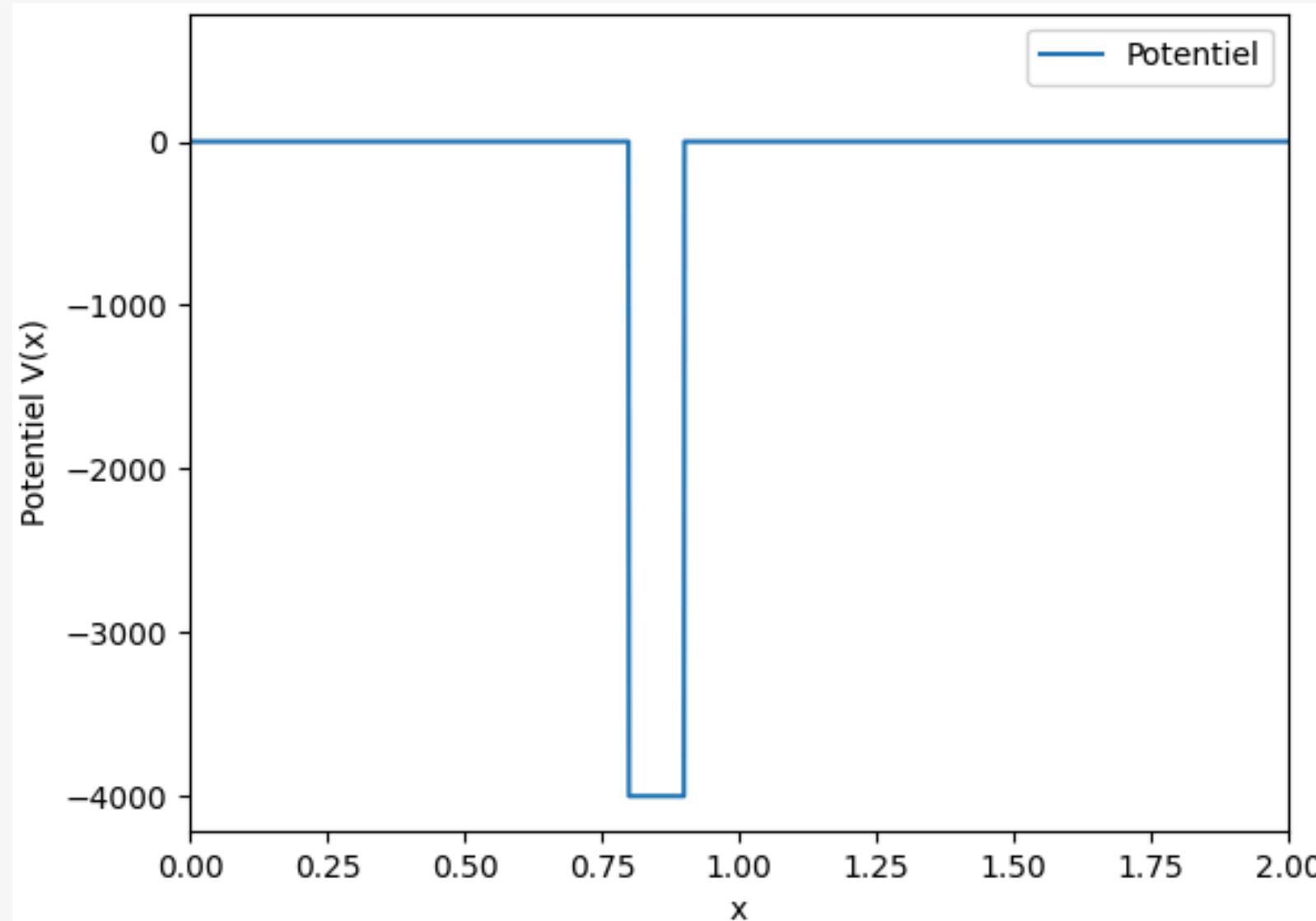
Carl Ramsauer



John Townsend

Situation étudiée

Puits de potentiel de profondeur finie $-V_0$



$\text{Énergie} > 0$

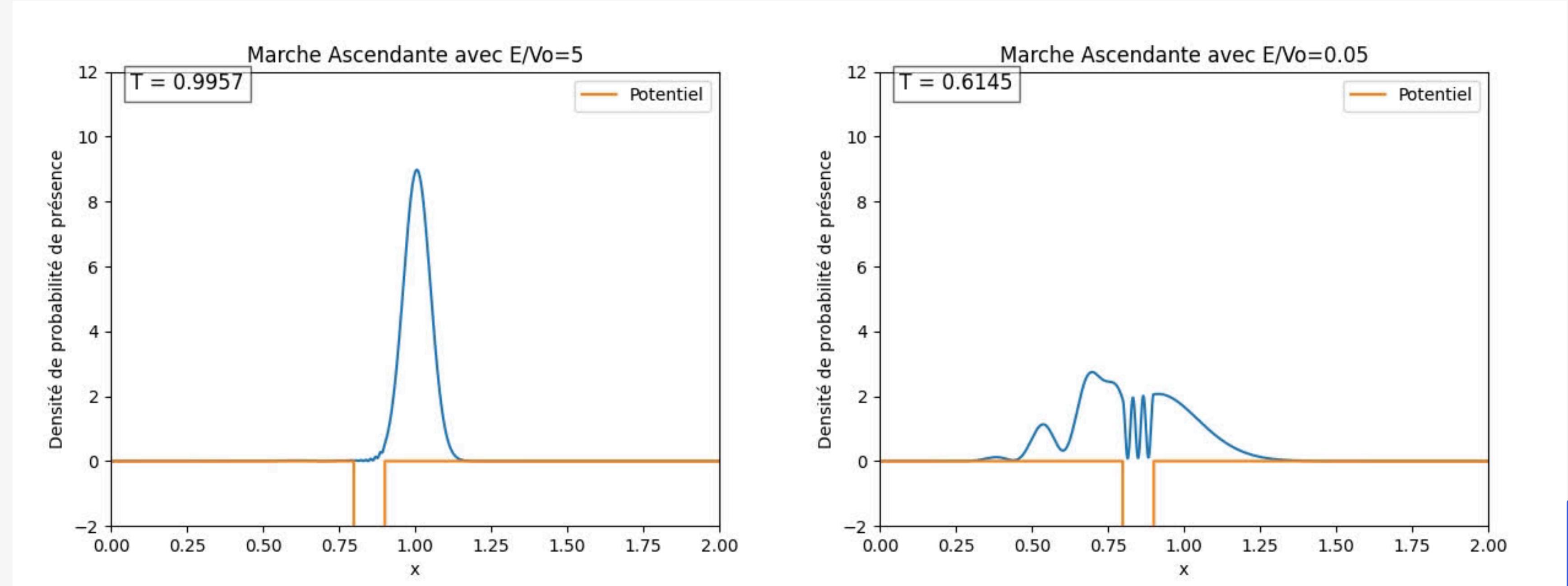
1 Dimension

$V_0 > 0$

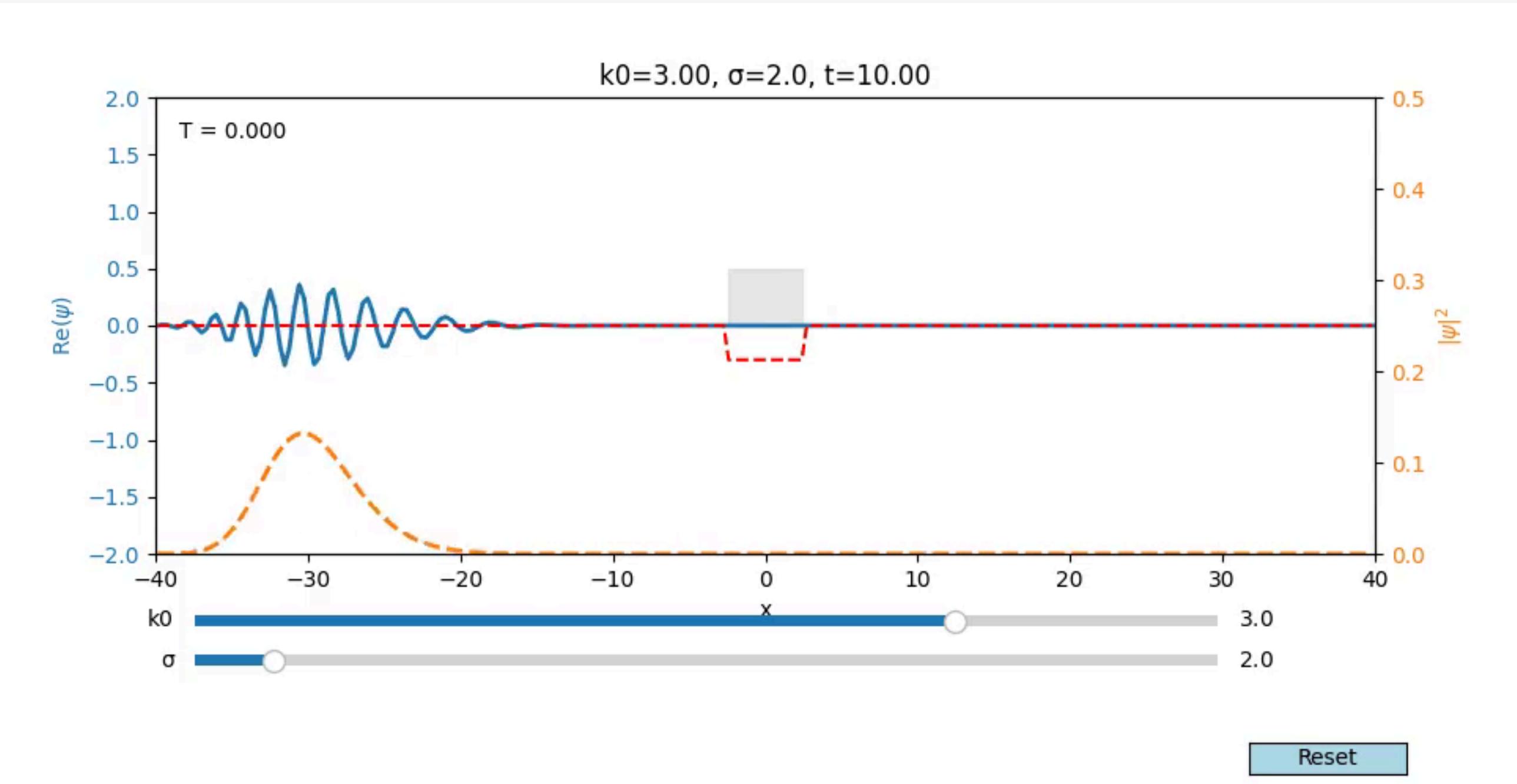
V_0 et largeur du puits variable

Modélisation d'un paquet d'ondes

$$\sigma = 0.05$$



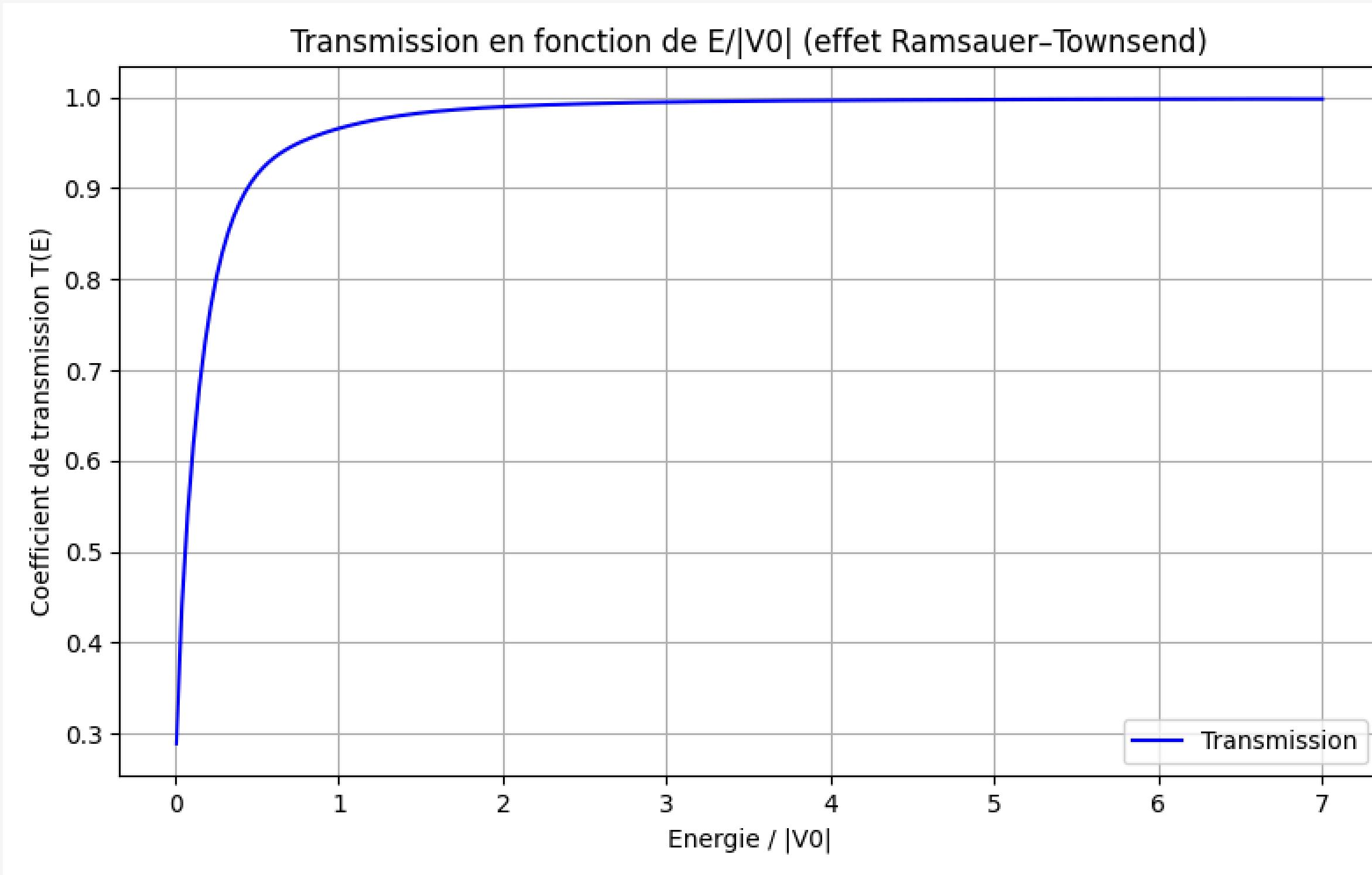
Modélisation d'un paquet d'ondes



Fonction d'onde

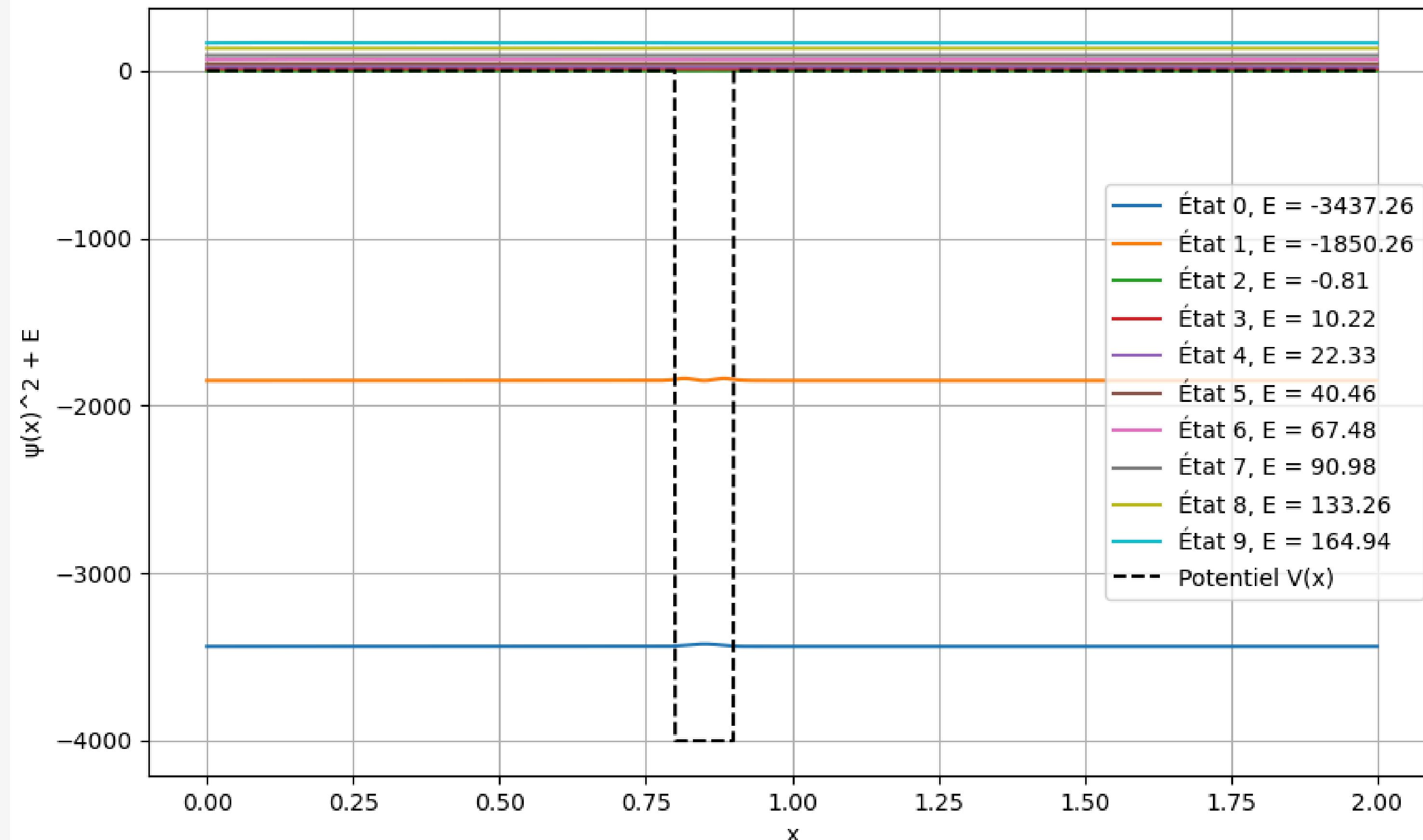
Densité de probabilité

Modélisation d'un paquet d'ondes

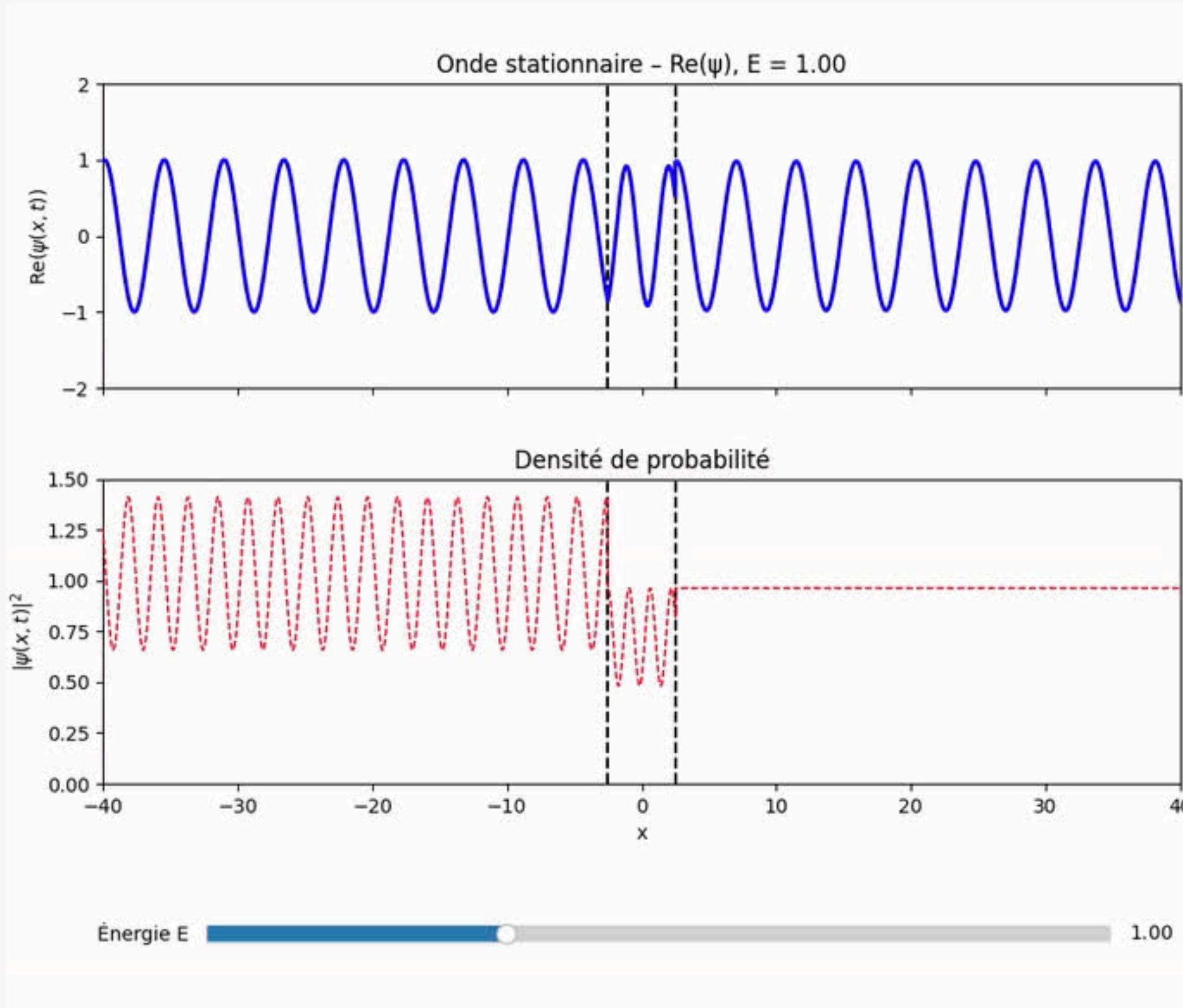


Etats stationnaires

États stationnaires et densités de probabilité



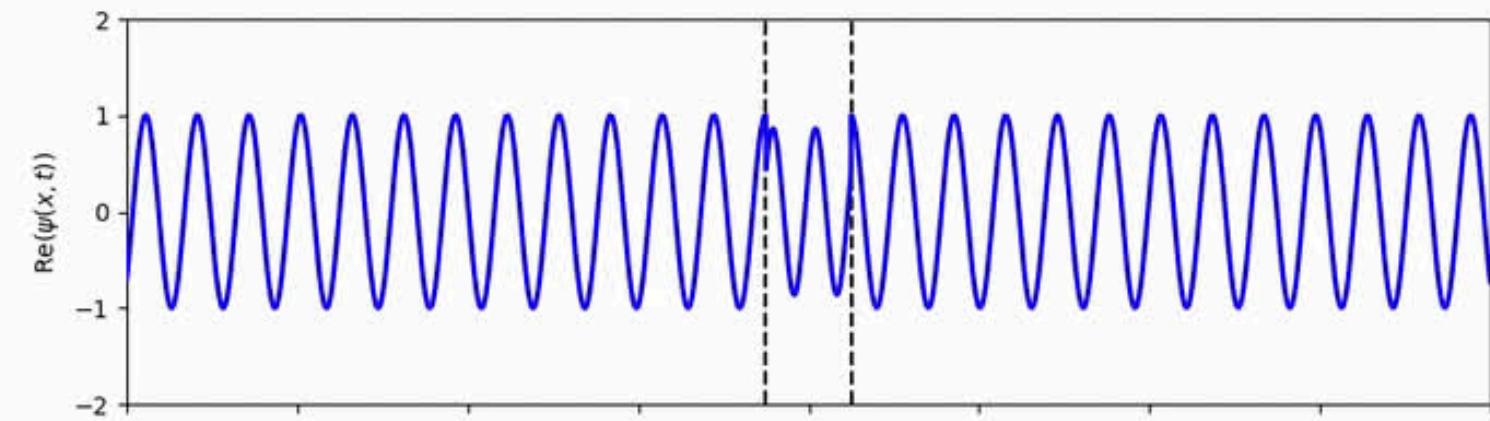
Ondes stationnaires



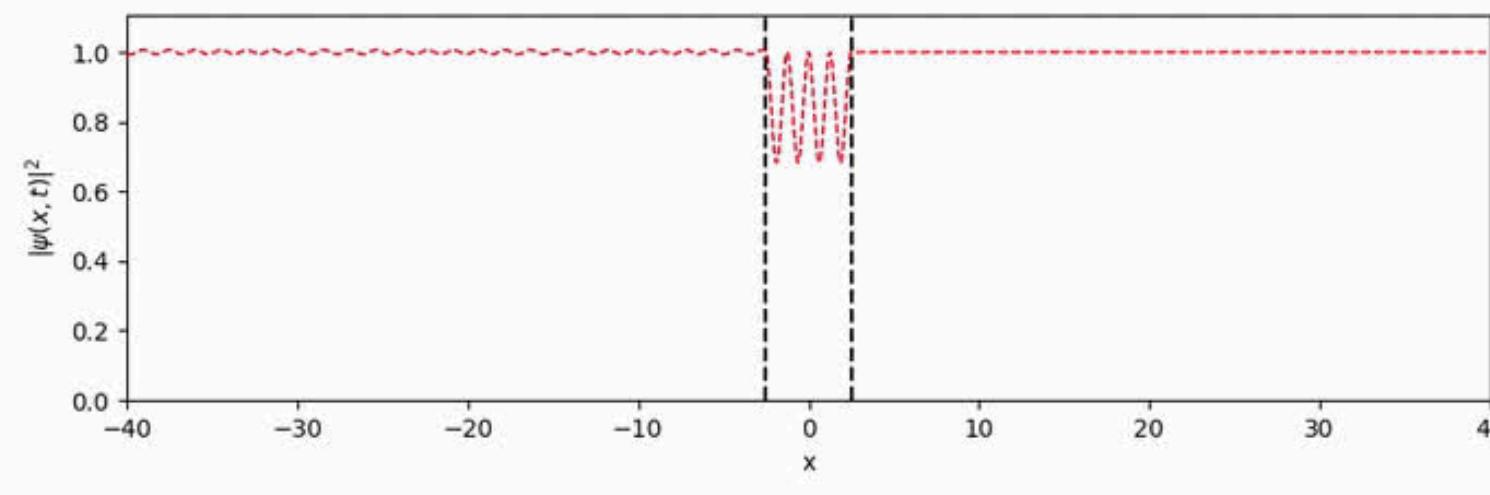
Pour $E = 1$

Coefficient de transmission $T = 0.9$
L'onde réfléchie oscille

Ondes stationnaires



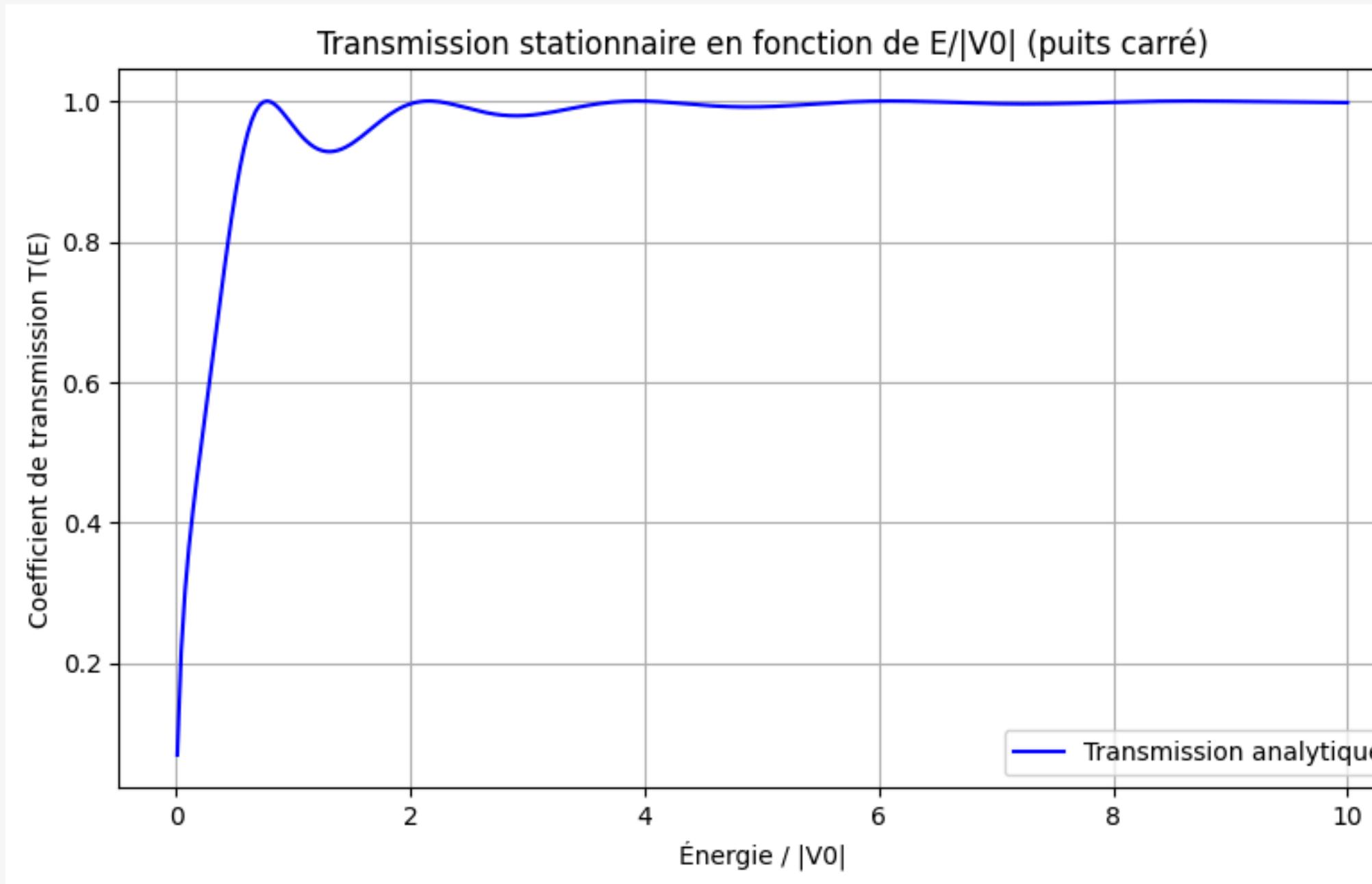
Pour $E = 2.15$



Coefficient de transmission $T = 1$
L'onde réfléchie n'oscille pas

Énergie E  2.15

États stationnaires



Oscillation du facteur de transmission lorsqu'il converge vers 1

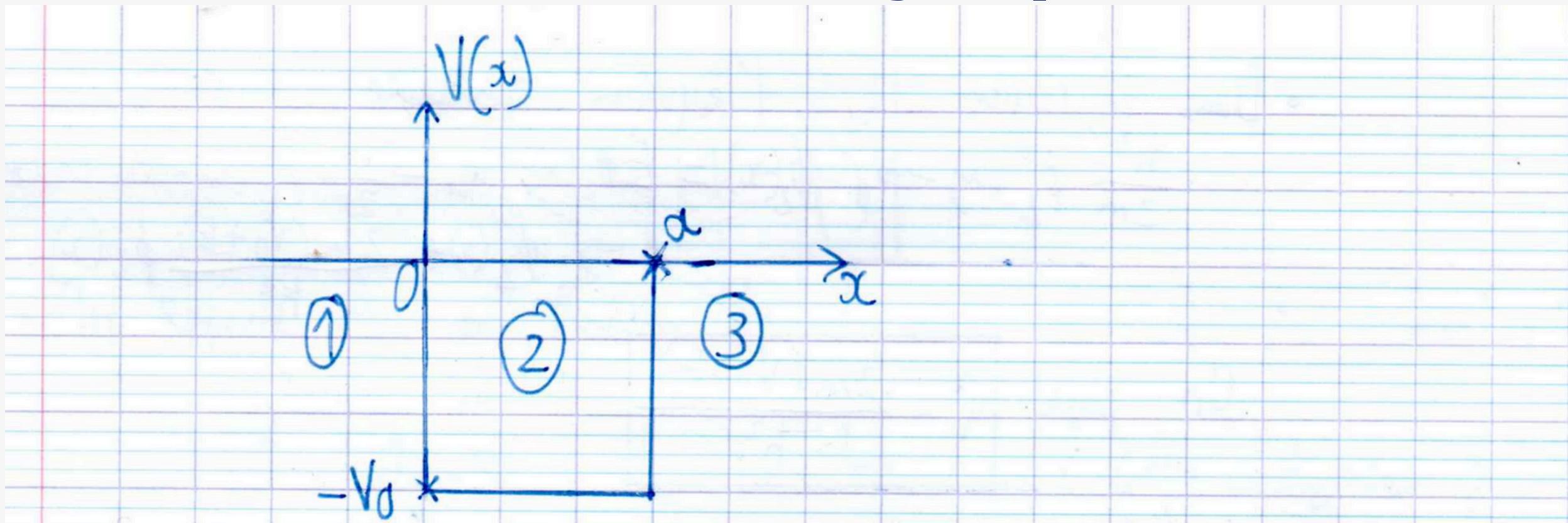


Effet Ramsauer-Townsend

Problème

**Pourquoi n'observe t'on pas l'effet Ramsauer-Townsend
pour un paquet d'onde avec $\sigma = 0.05$?**

Étude analytique



- Une particule de masse m et d'énergie $E > 0$ rencontre en $x=0$ un puits de potentiel de profondeur finie $-V_0$ et de largeur a , avec $a > 0, V_0 > 0$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ (région 1)} \\ -V_0 & \text{si } x \in [0, a] \text{ (région 2)} \\ 0 & \text{si } x > a \text{ (région 3)} \end{cases}$$

- L'équation de Schrödinger indépendante du temps à 1 dimension s'écrit :
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \phi''(x) + V(x) \phi(x) = E \phi(x)$$

- Dans les régions 1 et 3 ($x < 0$ et $x > a$) on a $V(x) = 0$.
D'où l'équation devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \phi''_{1/3}(x) = E \phi_{1/3}(x) \Rightarrow \phi''_{1/3} + \frac{2mE}{\hbar^2} \phi_{1/3}(x) = 0$$

On pose $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow \boxed{k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}$

et on obtient $\phi''_{1/3}(x) + k^2 \phi_{1/3}(x) = 0$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$\boxed{\phi_{1/3}(x) = A_{1/3} e^{ikx} + B_{1/3} e^{-ikx}}$$

De plus, la particule provient de gauche et est libre à droite du puits de potentiel. Elle ne peut pas rentrer de $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = 0$
 $\Rightarrow \boxed{B_3 = 0}$

• Dans la région 2, l'équation devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \phi_2''(x) - V_0 \phi_2(x) = E \phi_2(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \phi_2''(x) - (V_0 + E) \phi_2(x) = 0$$
$$\Rightarrow \phi_2''(x) + \frac{2m(V_0 + E)}{\hbar^2} \phi_2(x) = 0$$

On pose $\boxed{q^2 = \frac{2m(V_0 + E)}{\hbar^2}}$ et on obtient :

$$\phi_2''(x) + q^2 \phi_2(x) = 0$$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$\boxed{\phi_2(x) = A_2 e^{iqx} + B_2 e^{-iqx}}$$

- Le puissance de potentiel est de profondeur finie
 $\Rightarrow \phi$ et ϕ' sont continues aux frontières

En $x=0$:

$$\begin{cases} \phi_1(0) = \phi_2(0) \\ \phi'_1(0) = \phi'_2(0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ ik(A_1 - B_1) = iq(A_2 - B_2) \end{cases}}$$

En $x=a$:

$$\begin{cases} \phi_2(a) = \phi_3(a) \\ \phi'_2(a) = \phi'_3(a) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} A_2 e^{ika} + B_2 e^{-ika} = A_3 e^{ika} \\ iq(A_2 e^{ika} - B_2 e^{-ika}) = ika A_3 e^{ika} \end{cases}}$$

- On calcule ensuite le coefficient de transmission $T = \left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2$
On exprime A_1 en fonction de A_3 :
- On exprime d'abord A_2 et B_2 en fonction de A_3 :

$$\begin{cases} A_2 e^{iq\alpha} + B_2 e^{-iq\alpha} = A_3 e^{ika} \\ iq(A_2 e^{iqu} - B_2 e^{-iqu}) = ikA_3 e^{ika} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_2 = \frac{A_3}{2} e^{i(k-q)\alpha} \left(1 + \frac{k}{q}\right) \\ B_2 = \frac{A_3}{2} e^{i(k+q)\alpha} \left(1 - \frac{k}{q}\right) \end{cases}$$

- On exprime A_1 en fonction de A_2 et B_2 à l'aide du premier système :

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(A_2 \left(1 + \frac{q}{k} \right) + B_2 \left(1 - \frac{q}{k} \right) \right)$$

- Puis on insère les expressions de A_2 et B_2 dans l'expression de A_1 :

$$A_1 = \frac{A_3}{4} \left[e^{i(k-q)a} \left(1 + \frac{k}{q} \right) \left(1 + \frac{q}{k} \right) + e^{i(k+q)a} \left(1 - \frac{k}{q} \right) \left(1 - \frac{q}{k} \right) \right]$$

...

$$A_1 = \frac{A_3 e^{ika}}{4ka} \left[(k^2 + q^2) (-2i \sin(qa)) + 2kq (2 \cos(qa)) \right]$$

$$|A_1|^2 = A_3^2 \left[\frac{4k^2 q^2 + \sin^2(qa) (k^2 - q^2)^2}{4k^2 q^2} \right]$$

D'où $T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{4k^2q^2}{4k^2q^2 + \sin^2(qa) (k^2 - q^2)^2}$

$$= \frac{1}{1 + \sin^2(qa) \frac{(k^2 - q^2)^2}{4k^2q^2}}$$

• • •

$$T = \frac{1}{1 + \sin^2(qa) \frac{V_0^2}{4E(V_0 + E)}}$$

• Conditions pour que la transmission soit totale ($T=1$) :

$$T=1 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \sin^2(qa) \frac{\sqrt{3}}{4E(V_0+E)}} = 1$$

...

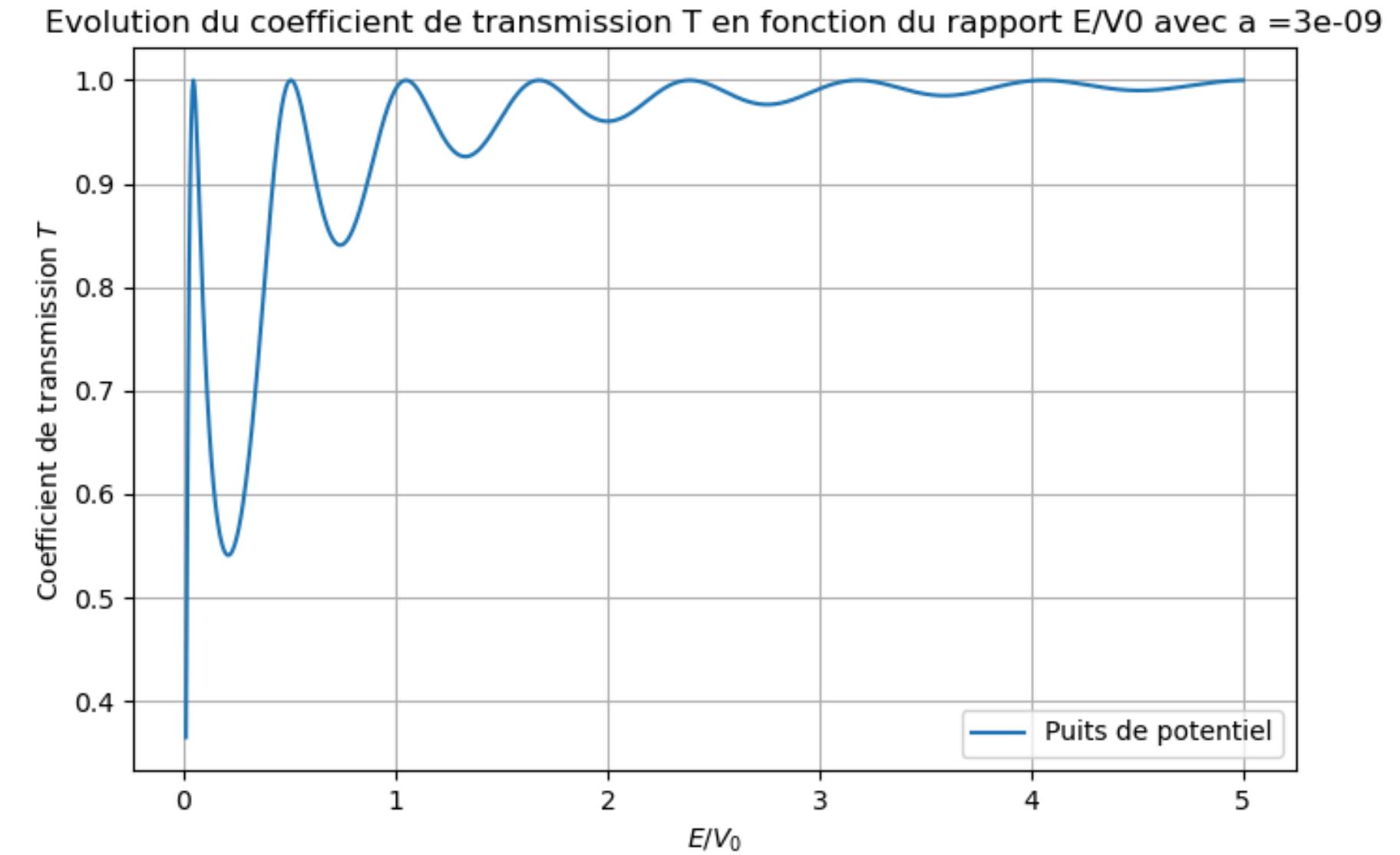
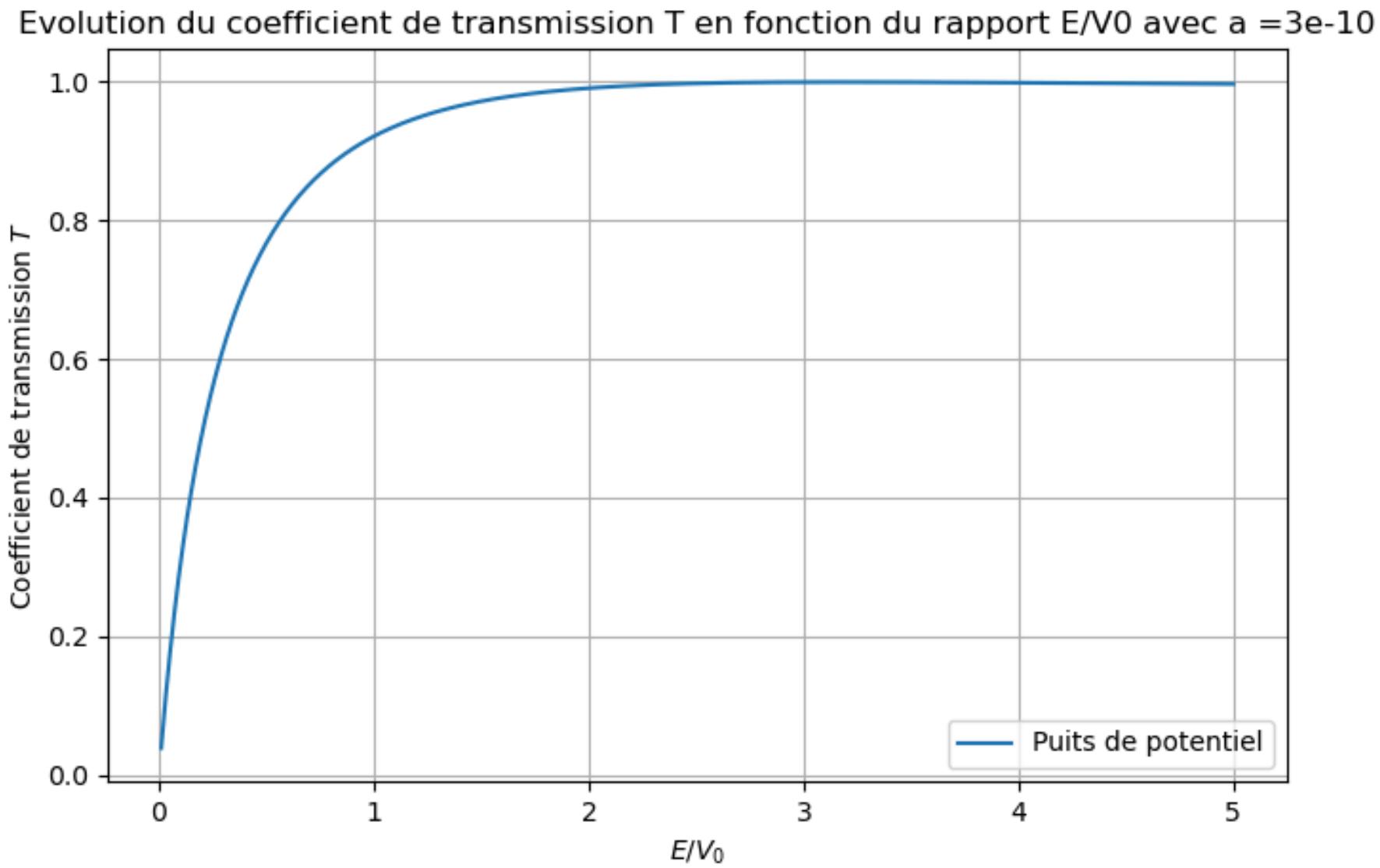
$$\Leftrightarrow \sin(qa) = 0$$

...

$$\Rightarrow E_n = \frac{(n\pi)^2 \hbar^2}{2m a^2} - V_0 , n \in \mathbb{N}$$

États stationnaires

On modifie la largeur du puits



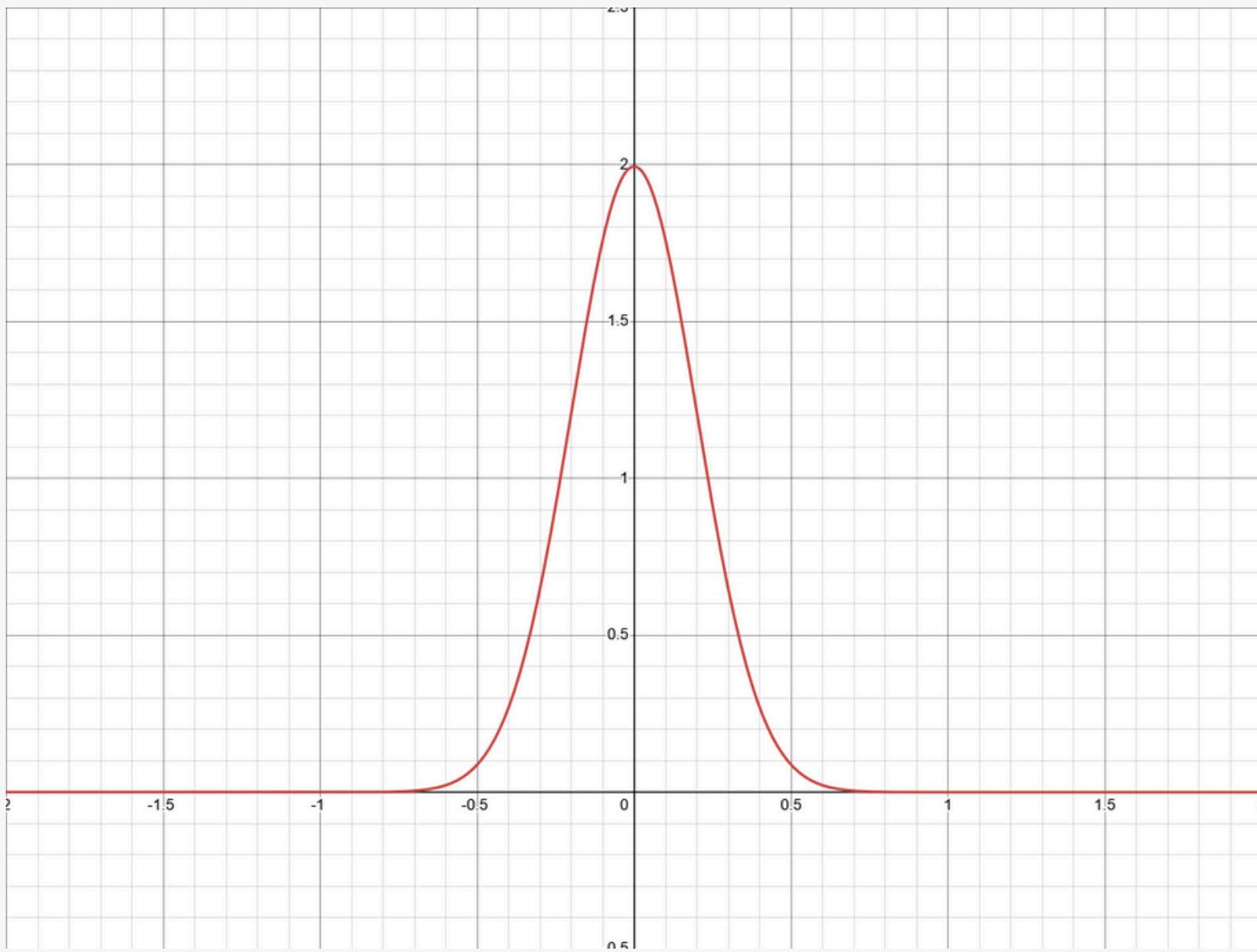
Modélisation avec un paquet d'ondes

Densité de probabilité d'un paquet d'onde

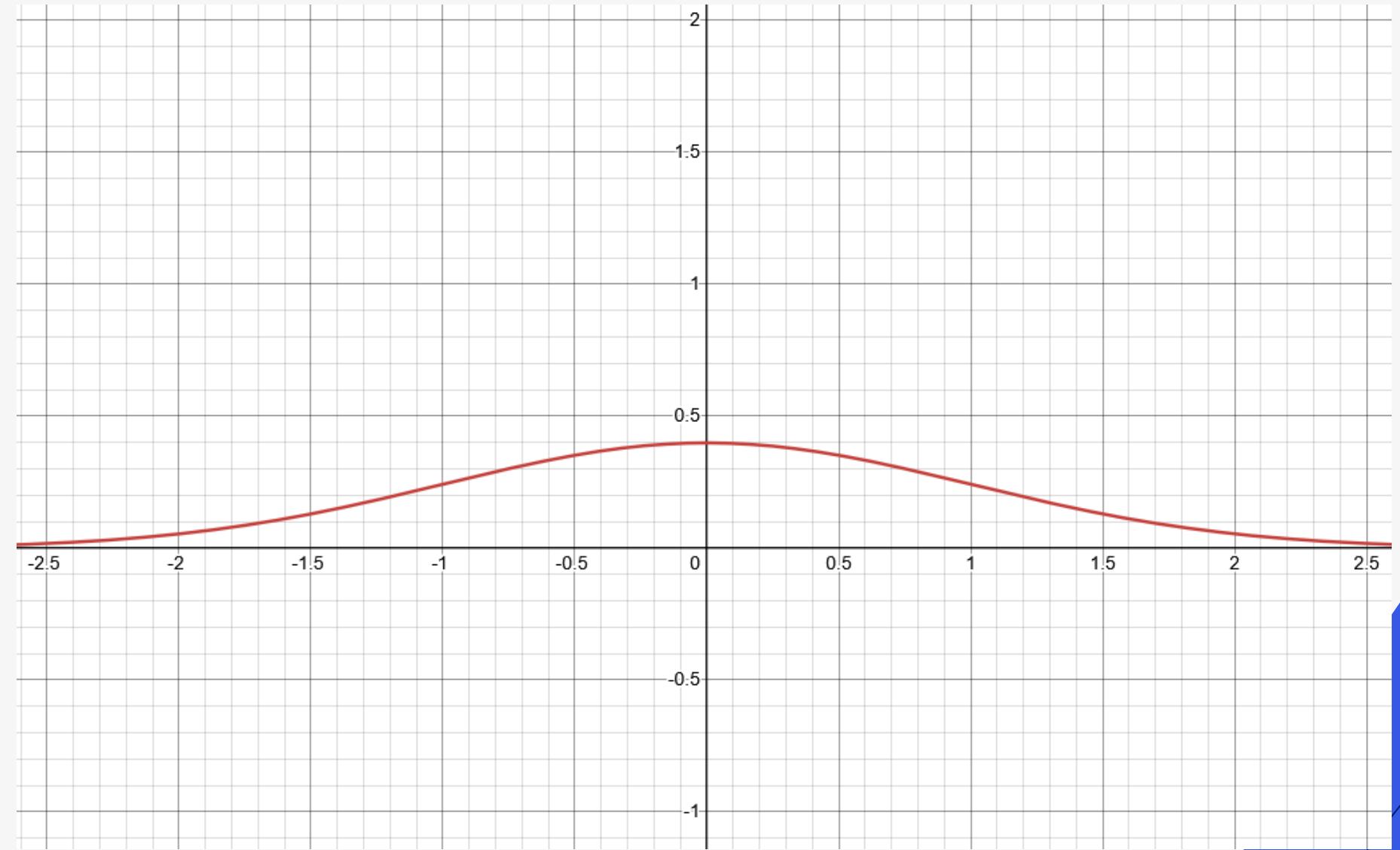
$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}}$$

Problème avec la modélisation

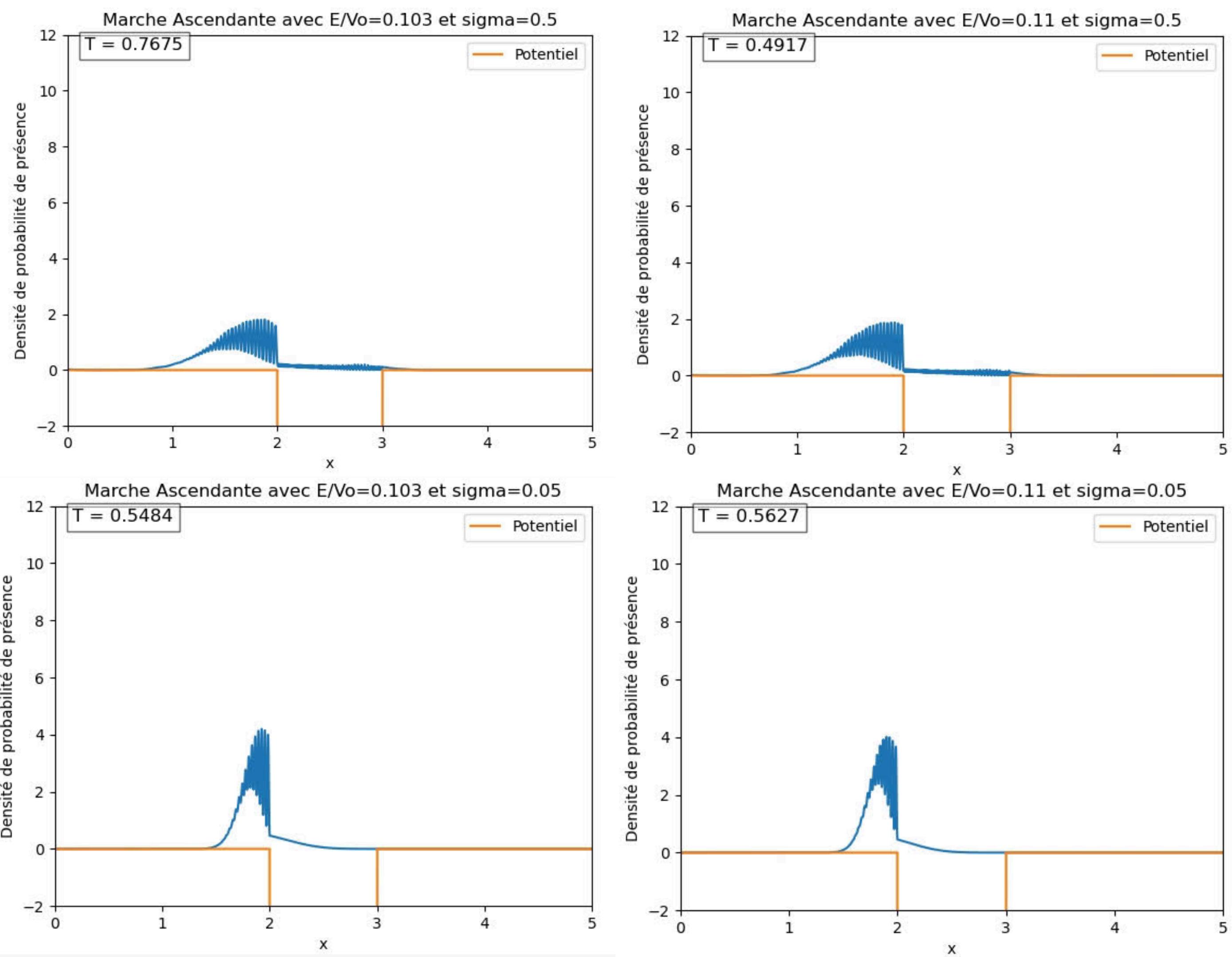
$\sigma = 0.2$



$\sigma = 1$



Importance de σ



Importance de σ

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}.$$

**Principe
d'incertitude de
Heisenberg**

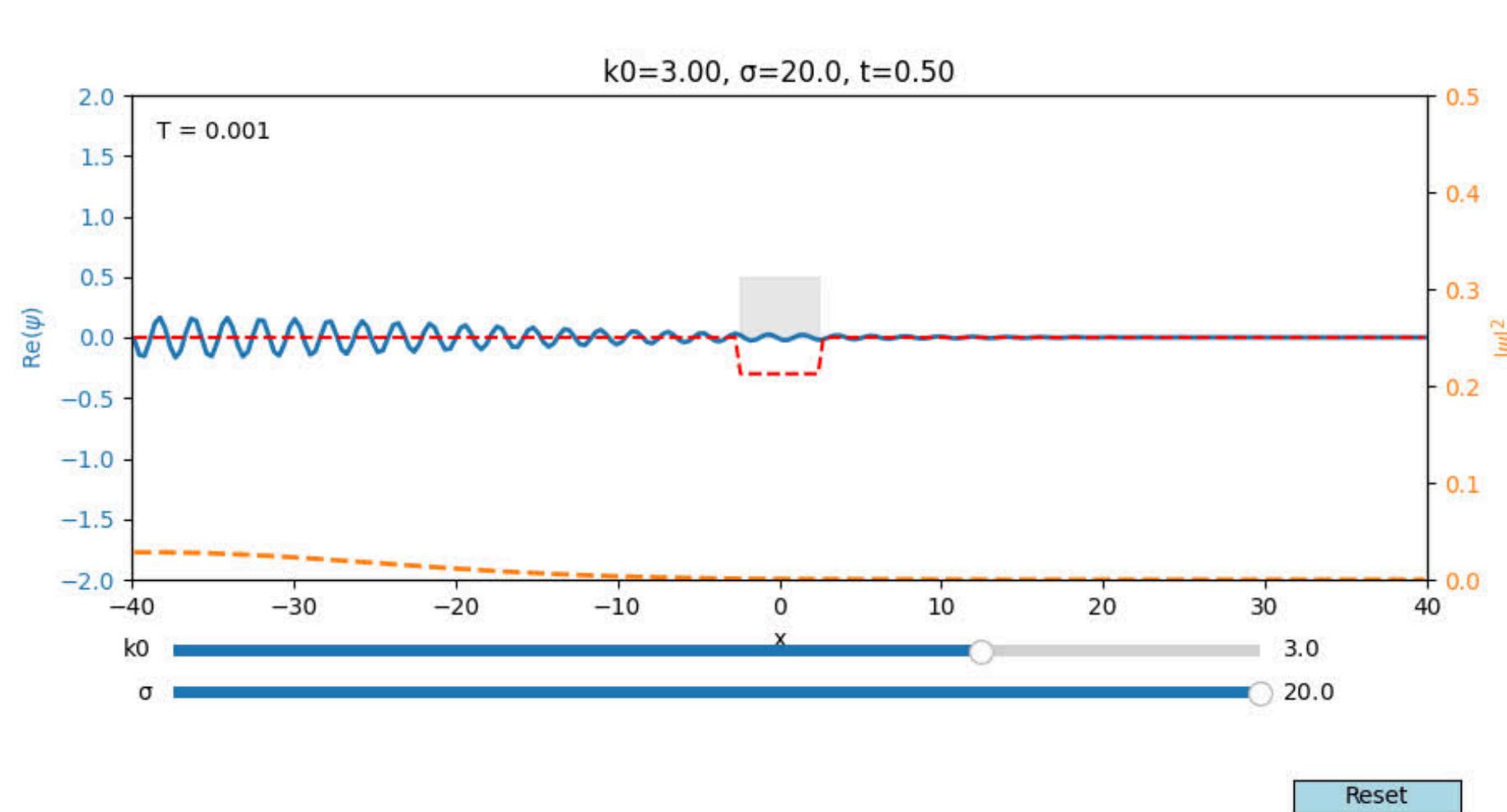
σ grand => on ne connaît pas précisément sa position mais précisément sa quantité de mouvement et son énergie



Le paquet d'onde se comporte comme une onde stationnaire pour σ grand

Importance de σ

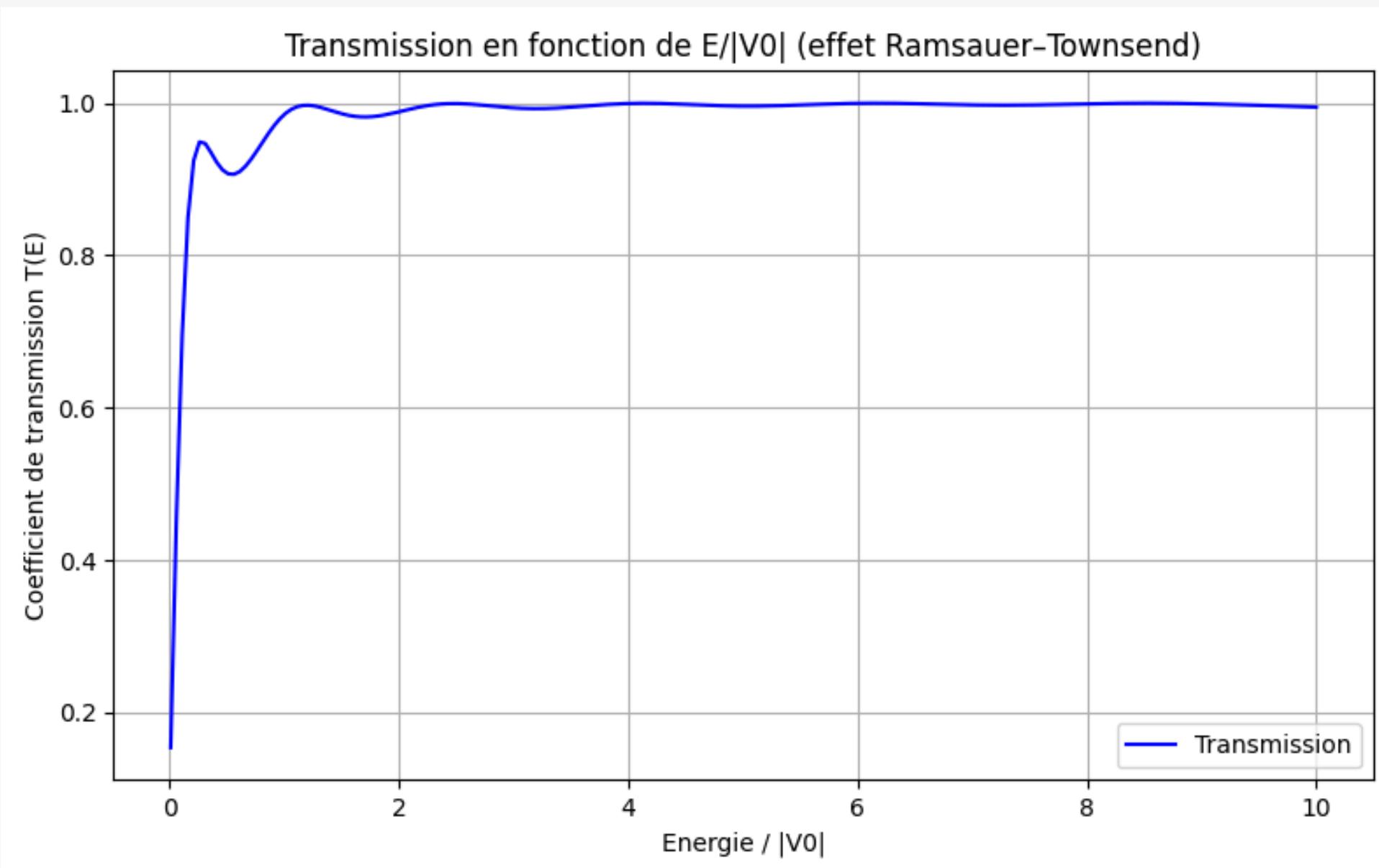
Paquet d'onde avec $\sigma = 20$



Le paquet d'onde tend à se comporter comme une onde stationnaire

Importance de σ

Graphique du paquet d'onde pour σ grand



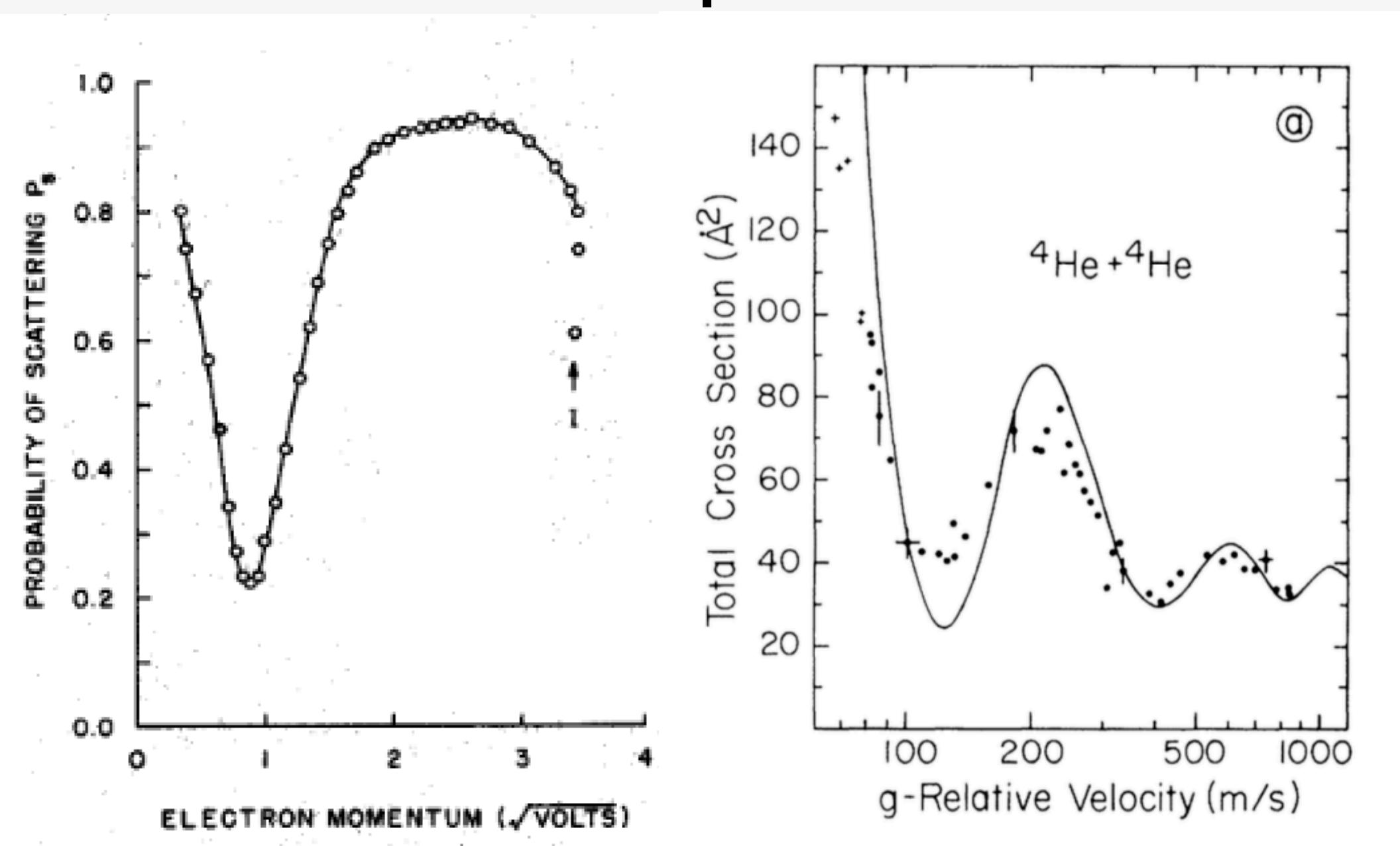
Oscillation lors de la convergence vers 1



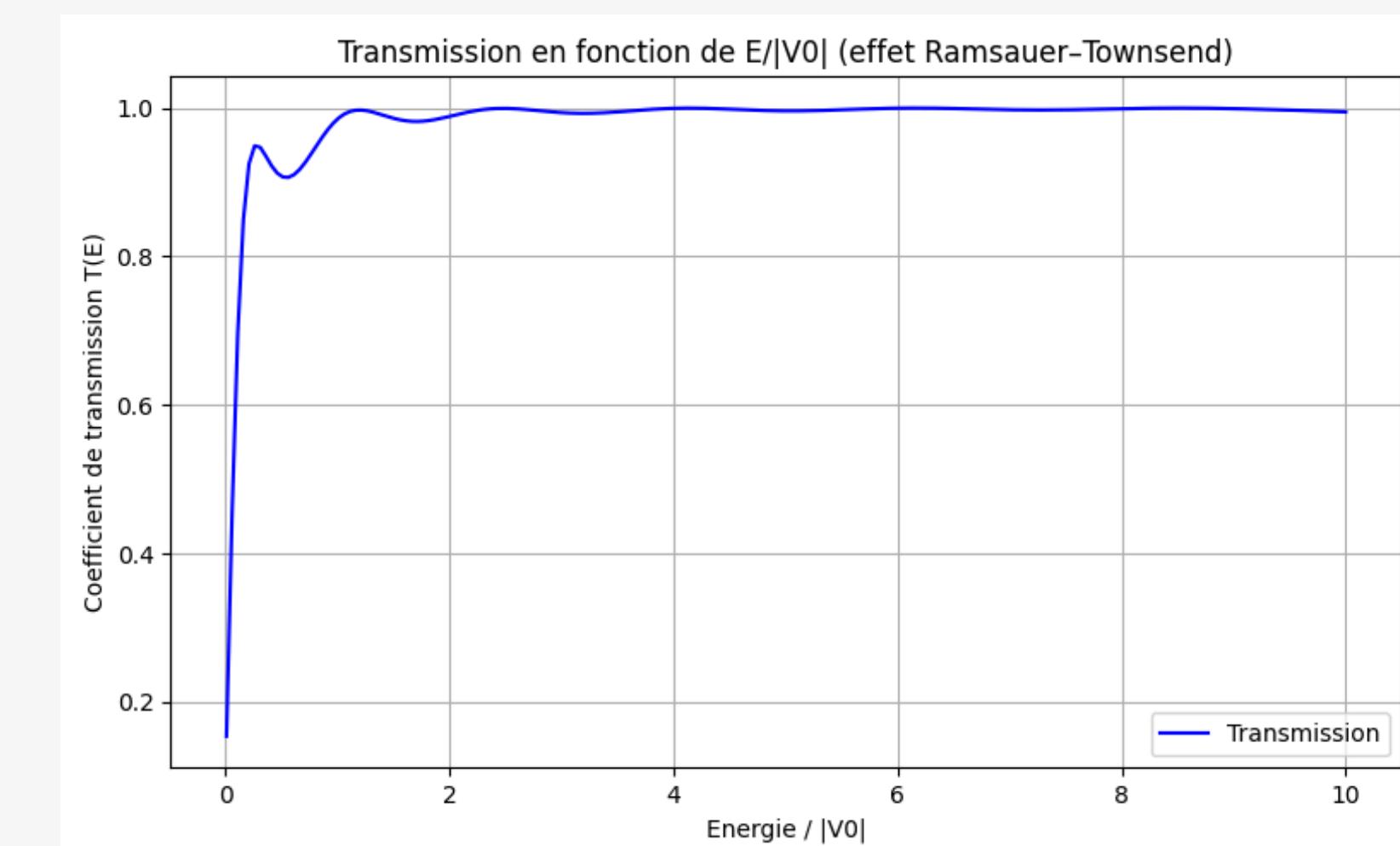
Effet Ramsauer-Townsend

Comparaison des prédictions avec les mesures expérimentales

Mesures expérimentales



Prédictions



Pertinence du modèle du puits de potentiel

Permet d'observer l'effet Ramsauer–Townsend

Modélise la résonance

Réflexion, transmission, interférence

Limites du modèle expérimentales

Potentiel 1D et non en 3D

Puits rectangulaire ce qui n'est pas le cas dans la réalité

Conclusion

L'effet Ramsauer–Townsend s'observe pour :

Une onde stationnaire

Un paquets d'ondes avec un sigma élevée