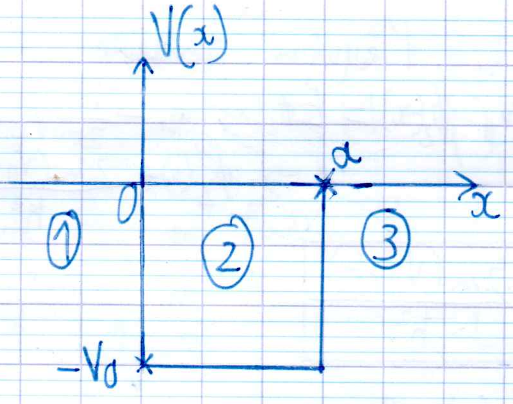

- Une particule de masse m et d'énergie $E>0$ rencontre en $x=0$ un puits de potentiel de profondeur finie $-V_0$ et de largeur a, avec $a>0$, $V_0>0$

$$V(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<0 & (\text{région } 1) \\ -V_0 \text{ si } x\in[0,a] & (\text{région } 2) \\ 0 \text{ si } x>a & (\text{région } 3)\end{cases}$$

- L'équation de Schrödinger indépendante du temps à 1 dimension s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''(x)+V(x)\,\phi(x)=E\,\phi(x)$$

- Dans les régions 1 et 3 ($x<0$ et $x>a$) on a $V(x)=0$.

D'où l'équation devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''_{1/3}(x)=E\,\phi_{1/3}(x) \Rightarrow \phi''_{1/3}+\frac{2mE}{\hbar^2}\phi_{1/3}(x)=0$$

On pose $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow \boxed{k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}$

et on obtient $\phi''_{1/3}(x)+k^2\phi_{1/3}(x)=0$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$\boxed{\phi_{1/3}(x)=A_{1/3}\,e^{ikx}+B_{1/3}\,e^{-ikx}}$$

De plus, la particule provient de gauche et est libre à droite du puits de potentiel. Elle ne peut pas revenir de $+\infty$: $\lim_{x\to-\infty}\phi(x)=0$

$\Rightarrow \boxed{B_3=0}$

- Dans la région 2, l'équation devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\phi_2''(x) - V_0\,\phi_2(x) = E\phi_2(x) \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\phi_2''(x) - (V_0+E)\phi_2(x) = 0$$

$$\Rightarrow \phi_2''(x) + \frac{2m(V_0+E)}{\hbar^2}\phi_2(x) = 0$$

On pose $\boxed{q^2 = \frac{2m(V_0+E)}{\hbar^2}}$ et on obtient :

$$\phi_2''(x) + q^2\phi_2(x) = 0$$

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$\boxed{\phi_2(x) = A_2 e^{iqx} + B_2 e^{-iqx}}$$

- Le puits de potentiel est de profondeur fini
  $\Rightarrow$ ϕ et ϕ' sont continues aux frontières

En $x=0$:

$$\begin{cases} \phi_1(0) = \phi_2(0) \\ \phi_1'(0) = \phi_2'(0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ ik(A_1 - B_1) = iq(A_2 - B_2) \end{cases}}$$

En $x = a$:

$$\begin{cases} \phi_2(a) = \phi_3(a) \\ \phi_2'(a) = \phi_3'(a) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} A_2 e^{iqa} + B_2 e^{-iqa} = A_3 e^{ika} \\ iq(A_2 e^{iqa} - B_2 e^{-iqa}) = ikA_3 e^{ika} \end{cases}}$$

- On calcule ensuite le coefficient de transmission $T = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2$
  On exprime A_1 en fonction de A_3 :

- On exprime d'abord A_2 et B_2 en fonction de A_3 :

$$\begin{cases} A_2 e^{iqa} + B_2 e^{-iqa} = A_3 e^{ika} \\ iq(A_2 e^{iqa} - B_2 e^{-iqa}) = ikA_3 e^{ika} \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{L_2}{iq} \\ L_2 \leftarrow L_1 - \frac{L_2}{iq} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A_2 e^{iqa} = A_3 e^{ika}\left(1 + \frac{k}{q}\right) \\ 2B_2 e^{-iqa} = A_3 e^{ika}\left(1 - \frac{k}{q}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} A_2 = \dfrac{A_3}{2}\, e^{i(k-q)a} \left(1+\dfrac{k}{q}\right) \\ B_2 = \dfrac{A_3}{2}\, e^{i(k+q)a} \left(1-\dfrac{k}{q}\right) \end{cases}}$$

- On exprime A_1 en fonction de A_2 et B_2 à l'aide du premier système :

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \\ ik(A_1 - B_1) = iq(A_2 - B_2) \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 + \frac{L_2}{ik} \Rightarrow \begin{cases} 2A_1 = A_2 + B_2 + \frac{q}{k}(A_2 - B_2) \\ ik(A_1 - B_1) = iq(A_2 - B_2) \end{cases}$$

D'où $A_1 = \frac{1}{2}\left(A_2 + B_2 + \frac{q}{k}(A_2 - B_2)\right) = \boxed{\frac{1}{2}\left(A_2\left(1+\frac{q}{k}\right) + B_2\left(1-\frac{q}{k}\right)\right)}$

- Puis on insère les expressions de A_2 et B_2 dans l'expression de A_1 :

$$A_1 = \frac{A_3}{4}\left[e^{i(k-q)a}\left(1+\frac{k}{q}\right)\left(1+\frac{q}{k}\right) + e^{i(k+q)a}\left(1-\frac{k}{q}\right)\left(1-\frac{q}{k}\right)\right]$$

$$= \frac{A_3}{4kq}\left[e^{i(k-q)a}(k+q)^2 - e^{i(k+q)a}(k-q)^2\right]$$

$$= \frac{A_3 e^{ika}}{4kq}\left[e^{-iqa}(k+q)^2 - e^{iqa}(k-q)^2\right]$$

$$= \frac{A_3 e^{ika}}{4kq}\left[(\cos(qa) - i\sin(qa))(k+q)^2 - (\cos(qa) + i\sin(qa))(k-q)^2\right]$$

$$= \frac{A_3 e^{ika}}{4kq}\left[(\cos(qa) - i\sin(qa))(k^2+q^2+2kq) + (-\cos(qa) - i\sin(qa))(k^2+q^2-2kq)\right]$$

$$\boxed{A_1 = \frac{A_3 e^{ika}}{4kq}\left[(k^2+q^2)(-2i\sin(qa)) + 2kq\,(2\cos(qa))\right]}$$

D'où $|A_1|^2 = \left(\dfrac{A_3}{4kq}\right)^2 \left[(4kq\cos(qa))^2 + (k^2+q^2)^2(-2\sin(qa))^2\right]$

$$= A_3^2 \left[\cos^2(qa) + \frac{(k^2+q^2)^2}{(4kq)^2}\left(4\sin^2(qa)\right)\right]$$

$$= A_3^2 \left[1 - \sin^2(qa) + \frac{(k^2+q^2)^2}{4k^2q^2}\left(\sin^2(qa)\right)\right]$$

$$= A_3^2 \left[\frac{4k^2q^2 + \sin^2(qa)\left((k^2+q^2)^2 - (4k^2q^2)\right)}{4k^2q^2}\right]$$

$$= A_3^2 \left[\frac{4k^2q^2 + \sin^2(qa)\left(k^4+q^4-2k^2q^2\right)}{4k^2q^2} \right]$$

$$\boxed{|A_1|^2 = A_3^2 \left[\frac{4k^2q^2 + \sin^2(qa)\left(k^2-q^2\right)^2}{4k^2q^2} \right]}$$

- D'où $T = \dfrac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \dfrac{4k^2q^2}{4k^2q^2 + \sin^2(qa)(k^2-q^2)^2}$

$$= \frac{1}{1 + \sin^2(qa)\,\dfrac{(k^2-q^2)^2}{4k^2q^2}}$$

En développant les expressions de k^2 et q^2, on obtient :

$$k^2q^2 = \frac{4m^2\,E(V_0+E)}{\hbar^4} \quad \text{et} \quad k^2-q^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

D'où $\dfrac{(k^2-q^2)^2}{4k^2q^2} = \dfrac{4m^2V_0^2}{\hbar^4}\,\dfrac{\hbar^4}{16m^2E(V_0+E)}$

$$= \frac{V_0^2}{4E(V_0+E)}$$

Donc $$\boxed{T = \frac{1}{1 + \sin^2(qa)\,\dfrac{V_0^2}{4E(V_0+E)}}}$$

- Conditions pour que la transmission soit totale $(T=1)$:

$$T = 1 \iff \frac{1}{1+\sin^2(qa)\,\dfrac{V_0^2}{4E(V_0+E)}} = 1$$

$$\iff \sin^2(qa)\,\frac{V_0^2}{4E(V_0+E)} = 0$$

$$\iff \sin^2(qa) = 0 \quad (\text{car } V_0 > 0)$$

$$\iff \sin(qa) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad qa = n\pi \,,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \quad q^2 a^2 = (n\pi)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2m(V_0+E)}{\hbar^2}\, a^2 = (n\pi)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad V_0 + E = \frac{(n\pi)^2\,\hbar^2}{2ma^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{E_n = \frac{(n\pi)^2\,\hbar^2}{2ma^2} - V_0 \,,\ n \in \mathbb{N}}$$

- Interprétation :

Pour certaines valeurs de l'énergie E_n, la probabilité que la particule soit transmise vaut 1. Autrement dit, la probabilité que la particule soit déviée est nulle. Cela correspond bien aux observations de l'effet Ramsauer-Townsend.