



IEL – protokol k projektu

Lukáš, Baštýř
xbasty00

21. prosince 2019

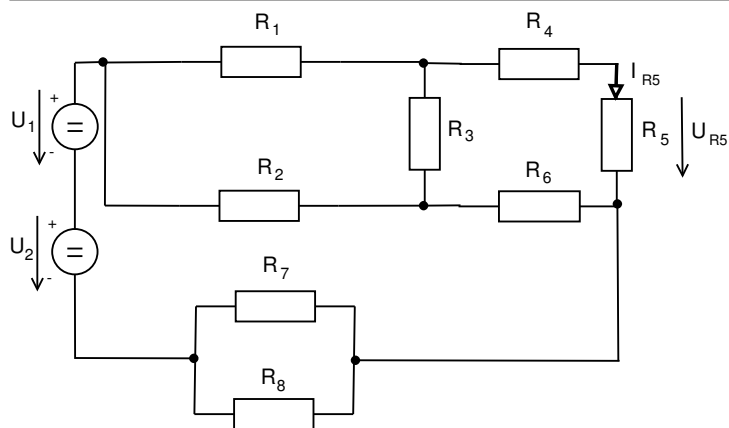
Obsah

1	Příklad 1	2
2	Příklad 2	4
3	Příklad 3	6
4	Příklad 4	8
5	Příklad 5	10
6	Shrnutí výsledků	13

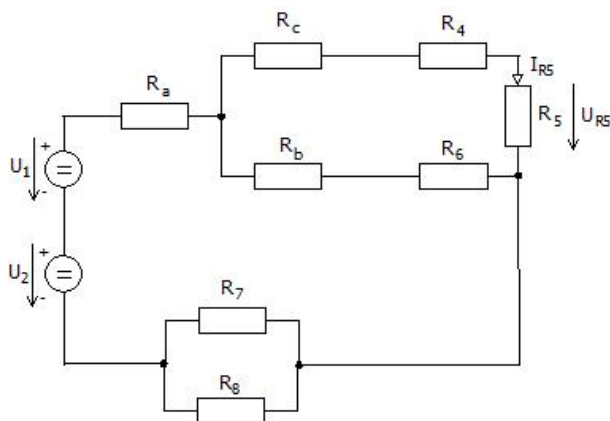
Příklad 1

Stanovte napětí U_{R5} a proud I_{R5} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
C	100	80	450	810	190	220	220	720	260	180



Převédeme trojúhelník na hvězdu:



$$\begin{aligned}
 R_a &= \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{450 * 810}{450 + 810 + 190} = 251.3793\Omega \\
 R_b &= \frac{R_2 * R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{810 * 190}{450 + 810 + 190} = 106.1379\Omega \\
 R_c &= \frac{R_3 * R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{190 * 450}{450 + 810 + 190} = 58.9655\Omega
 \end{aligned}$$

Zjednodušíme zapojení:

$$\begin{aligned}
 U_{12} &= U_1 + U_2 = 100 + 80 = 180V \\
 R_{78} &= \frac{R_7 * R_8}{R_7 + R_8} = \frac{260 * 180}{260 + 180} = 106.3634\Omega \\
 R_{45c} &= R_4 + R_5 + R_c = 220 + 220 + 58.9655 = 498.9655\Omega \\
 R_{6b} &= R_6 + R_b = 720 + 106.1379 = 826.1379\Omega \\
 R_{456cb} &= \frac{R_{45c} * R_{6b}}{R_{45c} + R_{6b}} = \frac{498.9655 * 826.1379}{498.9655 + 826.1379} = 311.0809\Omega \\
 R_{45678abc} &= R_a + R_{456cb} + R_{78} = 251.3793 + 311.0809 + 106.3634 = 668.8236\Omega
 \end{aligned}$$

Vypočítáme proud:

$$I = \frac{U_{12}}{R_{45678abc}} = \frac{180}{668.8236} = 0.2691A$$

Vypočítáme hledané hodnoty:

$$\begin{aligned}
 U_{456bc} &= I * R_{456bc} = 0.2691 * 311.0809 = 83.7119V \\
 I_{R5} &= \frac{U_{456bc}}{R_{45c}} = \frac{83.7119}{498.9655} = 0.1678A \\
 U_{R5} &= I_{R5} * R_{R5} = 0.1678 * 220 = 36.9160V
 \end{aligned}$$

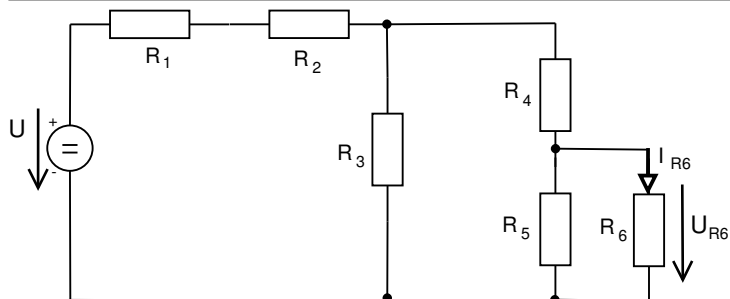
Hledané hodnoty U_{R5} a I_{R5} jsou:

$$\begin{aligned}
 U_{R5} &= 36.9160V \\
 I_{R5} &= 0.1678A
 \end{aligned}$$

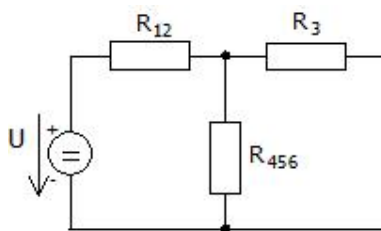
Příklad 2

Stanovte napětí U_{R6} a proud I_{R6} . Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]
E	250	150	335	625	245	600	150

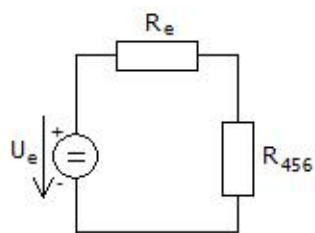


Upravíme zapojení:



$$R_{12} = R_1 + R_2 = 150 + 335 = 485\Omega$$

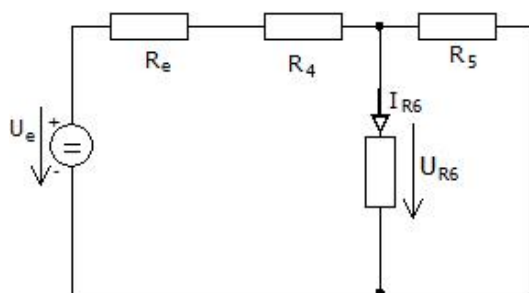
Vypočítáme nové konstanty:



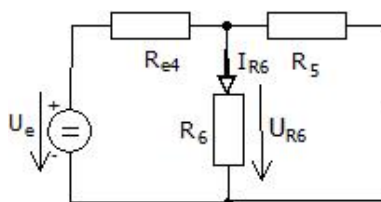
$$R_e = \frac{R_{12} * R_3}{R_{12} + R_3} = \frac{485 * 625}{485 + 625} = 273.0856\Omega$$

$$U_e = U * \frac{R_3}{R_{12} + R_3} = 250 * \frac{625}{485 + 625} = 140.7658V$$

Zpětně upravíme zapojení:

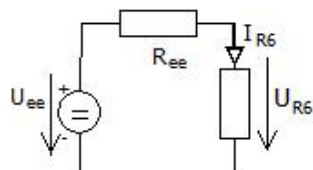


Zjednodušíme zapojení:



$$R_{e4} = R_e + R_4 = 273.0856 + 245 = 518.0856\Omega$$

Opět vypočítáme nové konstanty:



$$\begin{aligned} R_{ee} &= \frac{R_{e4} * R_5}{R_{e4} + R_5} = \frac{518.0856 * 600}{518.0856 + 600} = 278.0211\Omega \\ R_{ee6} &= R_{ee} + R_6 = 278.0211 + 150 = 428.0211\Omega \\ U_{ee} &= U_e * \frac{R_5}{R_{e4} + R_5} = 140.4658 * \frac{600}{518.0856 + 600} = 75.5394V \\ I_{ee} &= \frac{U_{ee}}{R_{ee6}} = \frac{75.5394}{428.0211} = 0.1765A \end{aligned}$$

Výpočítáme hledané hodnoty:

$$\begin{aligned} U_{R6} &= U_{ee} - R_{ee} * I_{ee} = 75.5394 - 278.0211 * 0.1765 = 26.4687V \\ I_{R6} &= \frac{U_{R6}}{R_6} = \frac{26.4687}{150} = 0.1765A \end{aligned}$$

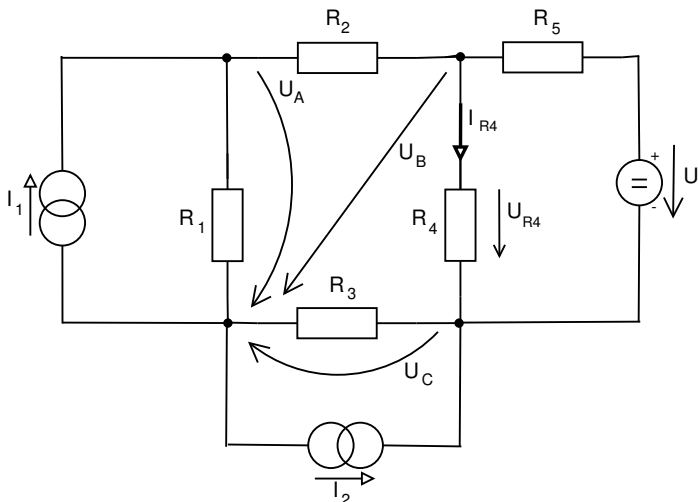
Hledané hodnoty U_{R6} a I_{R6} jsou:

$$\begin{aligned} U_{R6} &= 26.4687V \\ I_{R6} &= 0.1765A \end{aligned}$$

Příklad 3

Stanovte napětí U_{R4} a proud I_{R4} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
A	120	0.9	0.7	53	49	65	39	32



I. Kirchhoffův zákon použijeme na uzly v obvodu:

$$A : 0 = I_{R1} + I_{R2} - I_1$$

$$B : 0 = I_{R4} - I_{R2} - I_{R5}$$

$$C : 0 = I_{R3} + I_{R5} - I_{R4} - I_2$$

Vyjádříme proudy pomocí úzlových napětí:

$$\text{Substituce } G_x = \frac{1}{R_x}$$

$$I_{R1} = \frac{U_A}{R_1} = G_1 * U_A$$

$$I_{R2} = \frac{U_A - U_B}{R_2} = G_2(U_A - U_B)$$

$$I_{R3} = \frac{U_C}{R_3} = G_3 * U_C$$

$$I_{R4} = \frac{U_A - U_B}{R_4} = G_4(U_A - U_B)$$

$$I_{R5} = \frac{U + U_C - U_B}{R_5} = G_5(U + U_C - U_B)$$

Dosadíme proudy do rovnic:

$$0 = G_1 U_A + G_2(U_A - U_B) - I_1$$

$$0 = G_4(U_B - U_C) - G_2(U_A - U_B) - G_5(U + U_C - U_B)$$

$$0 = G_3 U_C + G_5(U + U_C - U_B) - G_4(U_B - U_C) - I_2$$

Upravíme rovnice:

$$\begin{aligned} I_3 &= G_5 U \\ I_1 &= U_A(G_1 + G_2) - U_B(G_2) \\ I_3 &= U_B(G_2 + G_4 + G_5) - U_A(G_2) - U_C(G_4 + G_5) \\ I_2 - I_3 &= U_C(G_3 + G_4 + G_5) - U_B(G_4 + G_5) \end{aligned}$$

Dosadíme hodnoty:

$$\begin{aligned} 0.9 &= 0.0393U_A - 0.0204U_B + 0U_C \\ 3.75 &= -0.0204U_A + 0.0773U_B - 0.0569U_C \\ -3.05 &= 0U_A - 0.0569U_B + 0.0723U_C \end{aligned}$$

Zapišeme jako matici a vypočítáme determinant:

$$\begin{aligned} A &= \left(\begin{array}{ccc|c} 0.0393 & -0.0204 & 0 & 0.9 \\ -0.0204 & 0.0773 & -0.0569 & 3.75 \\ 0 & -0.0569 & 0.0723 & -3.05 \end{array} \right) \\ DetA &= \begin{vmatrix} 0.0393 & -0.0204 & 0 \\ -0.0204 & 0.0773 & -0.0569 \\ 0 & -0.0569 & 0.0723 \end{vmatrix} = 6.2313 * 10^{-5} \end{aligned}$$

Vypočítáme z matice U_B a U_C :

$$\begin{aligned} U_B &= \begin{vmatrix} 0.0393 & 0.9 & 0 \\ -0.0204 & 3.75 & -0.0569 \\ 0 & -3.05 & 0.0723 \end{vmatrix} / DetA = 82.845V \\ U_C &= \begin{vmatrix} 0.0393 & -0.0204 & 0.9 \\ -0.0204 & 0.0773 & 3.75 \\ 0 & -0.0569 & -3.05 \end{vmatrix} / DetA = 23.0136V \end{aligned}$$

Dopočítáme hledané hodnoty:

$$\begin{aligned} U_{R4} &= U_B - U_C = 82.845 - 23.0136 = 59.8314V \\ I_{R4} &= \frac{U_{R4}}{R_4} = \frac{59.8314}{39} = 1.5341A \end{aligned}$$

Hledané hodnoty U_{R4} a I_{R4} jsou:

$$\begin{aligned} U_{R4} &= 59.8314V \\ I_{R4} &= 1.5341A \end{aligned}$$

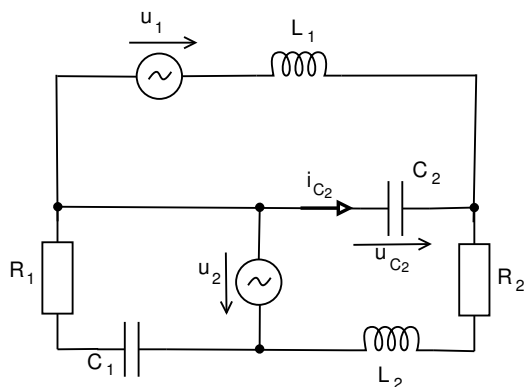
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{C_2} = U_{C_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{C_2})$ určete $|U_{C_2}|$ a φ_{C_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
C	35	45	10	13	220	70	230	85	75



Vypočítáme kapacitanci:

$$\begin{aligned}
 X_C &= \frac{-i}{2\pi f C} = -\frac{1}{2\pi f C} i \\
 X_{C1} &= -\frac{1}{2\pi * 75 * 230 * 10^{-6}} i = -9.2264 i \Omega \\
 X_{C2} &= -\frac{1}{2\pi * 75 * 85 * 10^{-6}} i = -24.9655 i \Omega
 \end{aligned}$$

Vypočítáme indukanci:

$$\begin{aligned}
 X_L &= 2\pi f L i \\
 X_{L1} &= 2\pi * 75 * 220 * 10^{-3} = 103.6726 i \Omega \\
 X_{L2} &= 2\pi * 75 * 70 * 10^{-3} = 32.9867 i \Omega
 \end{aligned}$$

Sestavíme rovnice pro smyčková napětí v obvodu:

$$\begin{aligned}
 A : 0 &= U_1 + I_A X_{L1} + I_A X_{C2} - I_C X_{C2} \\
 B : 0 &= U_2 + I_B X_{C1} + I_B R_1 \\
 C : 0 &= -U_2 + I_C X_{C2} + I_C R_2 + I_C X_{L2} - I_A X_{C2}
 \end{aligned}$$

Upravíme rovnice:

$$\begin{aligned}
 -U_1 &= I_A (X_{L1} + X_{C2}) + 0 I_B - I_C X_{C2} \\
 -U_2 &= 0 I_A + I_B (X_{C1} + R_1) + 0 I_C \\
 U_2 &= -I_A X_{C2} + 0 I_B + I_C (X_{L2} + X_{C2} + R_2)
 \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnic:

$$\begin{aligned}-35 &= 78.7071iI_A + 0I_B + 24.9655iI_C \\ -45 &= 0I_A + (10 - 9.2264i)I_B + 0I_C \\ 45 &= 24.9655iI_A + 0I_B + (13 + 8.0212i)I_C\end{aligned}$$

Zapišeme jako matici a vypočítáme determinant:

$$A = \begin{pmatrix} 78.7071i & 0 & 24.9655i \\ 0 & 10 - 9.2264i & 0 \\ 24.9655i & 0 & 13 + 8.0212i \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -35 \\ -45 \\ 45 \end{vmatrix}$$

$$DetA = \begin{vmatrix} 78.7071i & 0 & 24.9655i \\ 0 & 10 - 9.2264i & 0 \\ 24.9655i & 0 & 13 + 8.0212i \end{vmatrix} = 9359.8894 + 10306.1881i$$

Vypočítáme z matice I_A a I_C :

$$I_A = \begin{vmatrix} -35 & 0 & 24.9655i \\ -45 & 10 - 9.2264i & 0 \\ 45 & 0 & 13 + 8.0212i \end{vmatrix} / DetA = -1.3688 + 0.4555iA$$

$$I_C = \begin{vmatrix} 78.7071i & 0 & -35 \\ 0 & 10 - 9.2264i & -45 \\ 24.9655i & 0 & 45 \end{vmatrix} / DetA = 4.3153 - 0.0339iA$$

Vypočítáme hledané hodnoty:

$$\begin{aligned}I_{C2} &= I_C - I_A = (4.3153 - 0.0339i) - (-1.3688 + 0.4555i) = 5.6841 - 0.4894i \\ U_{C2} &= I_{C2} * X_{C2} = (5.6841 - 0.4894i) * -24.9655i = -12.2181 - 141.9064i \\ |U_{C2}| &= \sqrt{RealU_{C2}^2 + ImgU_{C2}^2} = \sqrt{(-12.2181)^2 + (-141.9064)^2} = 142.4314V\end{aligned}$$

3. kvadrant

$$\begin{aligned}\varphi_{C2} &= \pi + \tan^{-1}\left(\frac{ImgU_{C2}}{RealU_{C2}}\right) \\ \varphi_{C2} &= \pi + \tan^{-1}\left(\frac{-141.9064}{-12.2181}\right) = 4.6265rad \\ \varphi_{C2} &= \frac{180}{\pi} * 4.6265rad = 265.07899^\circ\end{aligned}$$

Hledané hodnoty $|U_{C2}|$ a ϕ_{C2} jsou:

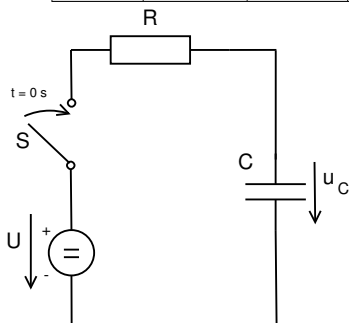
$$\begin{aligned}|U_{C2}| &= 142.4314V \\ \varphi_{C2} &= 265.07899^\circ\end{aligned}$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0[\text{s}]$ sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $u_C = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U [V]	C [F]	R [Ω]	$u_C(0)$ [V]
E	40	30	40	11



Sestavíme rovnice pro smyčková napětí v obvodu a vyjádříme proud:

$$\begin{aligned} U &= U_C + U_R \\ U_R &= R * I \\ U &= U_C + R * I \\ I &= \frac{U - U_C}{R} \end{aligned}$$

Hodnoty dosadíme do rovnice (axiomu) pro tento obvod a upravíme:

$$\begin{aligned} U'_C &= \frac{1}{C} I \\ U'_C &= \frac{1}{C} * \frac{U - U_C}{R} \\ U'_C &= \frac{U - U_C}{RC} \\ U'_C &= \frac{40 - U_C}{40 * 30} = \frac{1}{30} - U_C \frac{1}{1200} \\ U'_C + U_C \frac{1}{1200} &= \frac{1}{30} \end{aligned}$$

Obecný tvar rovnice a výpočet λ :

$$\begin{aligned} U_C(t) &= K(t)e^{\lambda t} \\ 0 &= \lambda + \frac{1}{1200} \\ \lambda &= -\frac{1}{1200} \end{aligned}$$

Dosadíme do obecného a zderivovaného tvaru:

$$\begin{aligned}U_C(t) &= K(t)e^{-\frac{1}{1200}t} \\U'_C(t) &= K'(t)e^{-\frac{1}{1200}t} - \frac{1}{1200}K(t)e^{-\frac{1}{1200}t}\end{aligned}$$

Dále dosadíme do rovnice obvodu:

$$\begin{aligned}U'_C + U_C \frac{1}{1200} &= \frac{1}{30} \\K'(t)e^{-\frac{1}{1200}t} - \frac{1}{1200}K(t)e^{-\frac{1}{1200}t} + \frac{1}{1200}K(t)e^{-\frac{1}{1200}t} &= \frac{1}{30} \\K'(t)e^{-\frac{1}{1200}t} &= \frac{1}{30}\end{aligned}$$

Zjistíme $K(t)$ (integrováním):

$$\begin{aligned}K'(t)e^{-\frac{1}{1200}t} &= \frac{1}{30} \\K'(t) &= \frac{e^{\frac{1}{1200}t}}{30} \\K(t) = \int K'(t)dt &= \frac{e^{\frac{1}{1200}t}}{30} \\K(t) &= 40e^{\frac{1}{1200}t} + X\end{aligned}$$

Dosadíme do obecného tvaru:

$$U_C(t) = K(t)e^{\lambda t} = (40e^{\frac{1}{1200}} + X)e^{-\frac{1}{1200}t} = 40 + Xe^{-\frac{1}{1200}t}$$

Zjistíme C pomocí počáteční podmínky:

$$\begin{aligned}U_C(0) &= 40 + Xe^{-\frac{1}{1200}t} \\U_C(0) &= 40 + Xe^{-\frac{1}{1200} \cdot 0} \\11 &= 40 + X \\X &= -29\end{aligned}$$

Naposledy dosadíme:

$$\begin{aligned}U_C(t) &= 40 + Xe^{-\frac{1}{1200}t} \\U_C(t) &= 40 + 29e^{-\frac{1}{1200}t}\end{aligned}$$

Hledaná hodnota $U_C(t)$ je:

$$U_C(t) = 40 - 29e^{-\frac{1}{1200}t}$$

Kontrola:

$$\begin{aligned}U'_C + U_C \frac{1}{1200} &= \frac{1}{30} \\U_C(t) &= 40 - 29e^{-\frac{1}{1200}t} \\U'_C(t) &= \frac{29}{1200}e^{-\frac{1}{1200}t} \\\frac{29}{1200}e^{-\frac{1}{1200}t} + \frac{1}{1200}(40 - 29e^{-\frac{1}{1200}t}) &= \frac{1}{30} \\\frac{29}{1200}e^{-\frac{1}{1200}t} - \frac{29}{1200}e^{-\frac{1}{1200}t} + \frac{1}{30} &= \frac{1}{30} \\\frac{29}{1200}e^{-\frac{1}{1200}t} + \frac{1}{30} &= \frac{1}{30} + \frac{29}{1200}e^{-\frac{1}{1200}t} \\0 &= 0\end{aligned}$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky
1	C	$U_{R5} = 36.9160V$ $I_{R5} = 0.1678A$
2	E	$U_{R6} = 26.4687V$ $I_{R6} = 0.1765A$
3	A	$U_{R4} = 59.8314V$ $I_{R4} = 1.5341A$
4	C	$ U_{C_2} = 142.4314V$ $\varphi_{C_2} = 265.078\ 99^\circ$
5	E	$u_C = 40 - 29e^{-\frac{1}{1200}t}$