

# 1 拟合红移-距离关系

## (a) 拟合近处的红移-距离线性关系

根据 Hubble's Law, 在近处距离和红移成线性关系

$$D = \frac{cz}{H_0}$$

由于这是一个近似公式, 仅对近处成立, 所以这里仅用 206 个数据点中的前 30 个进行拟合。前 30 个数据点大多分布在  $z \leq 0.25$  的区域内, 而且 30 个点的数量对于拟合一元线性曲线应当是足够的。

拟合用到的函数是 `scipy.optimize.curve_fit()`, 距离的误差 `y_err` 项也作为拟合参数输入了函数中。预设曲线的截距为 0. 最后得到的直线斜率为

$$\frac{c}{H_0} = 4698.83$$

对应的 Hubble 常数为

$$H_0 = 63.845 \text{ km/s/Mpc}$$

## (b) 用二次函数拟合

考虑到 Hubble 参数随时间的变化, 使用以下二次近似函数进行拟合:

$$D = \frac{c[z + 0.5(1 - q)z^2]}{H_0}$$

其中  $q$  是减速参数

$$q = \frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_\Lambda$$

仍使用 `scipy.optimize.curve_fit()` 函数进行拟合, 本次用到了所有的数据点。在拟合时仍然预设  $D(z = 0) = 0$  的初始条件, 这样二次函数曲线仅剩两个参数待拟合。

最后得到的二次项系数  $a$  和一次项系数  $b$  分别为

$$a = \frac{c(1 - q)}{2H_0} = 2393.07$$

$$b = \frac{c}{H_0} = 4831.39$$

据此可以计算出  $H_0$  和  $q$  的值, 进一步可以得到  $\Omega_M$  和  $\Omega_\Lambda$  的值。

$$H_0 = 62.094 \text{ km/s/Mpc}$$

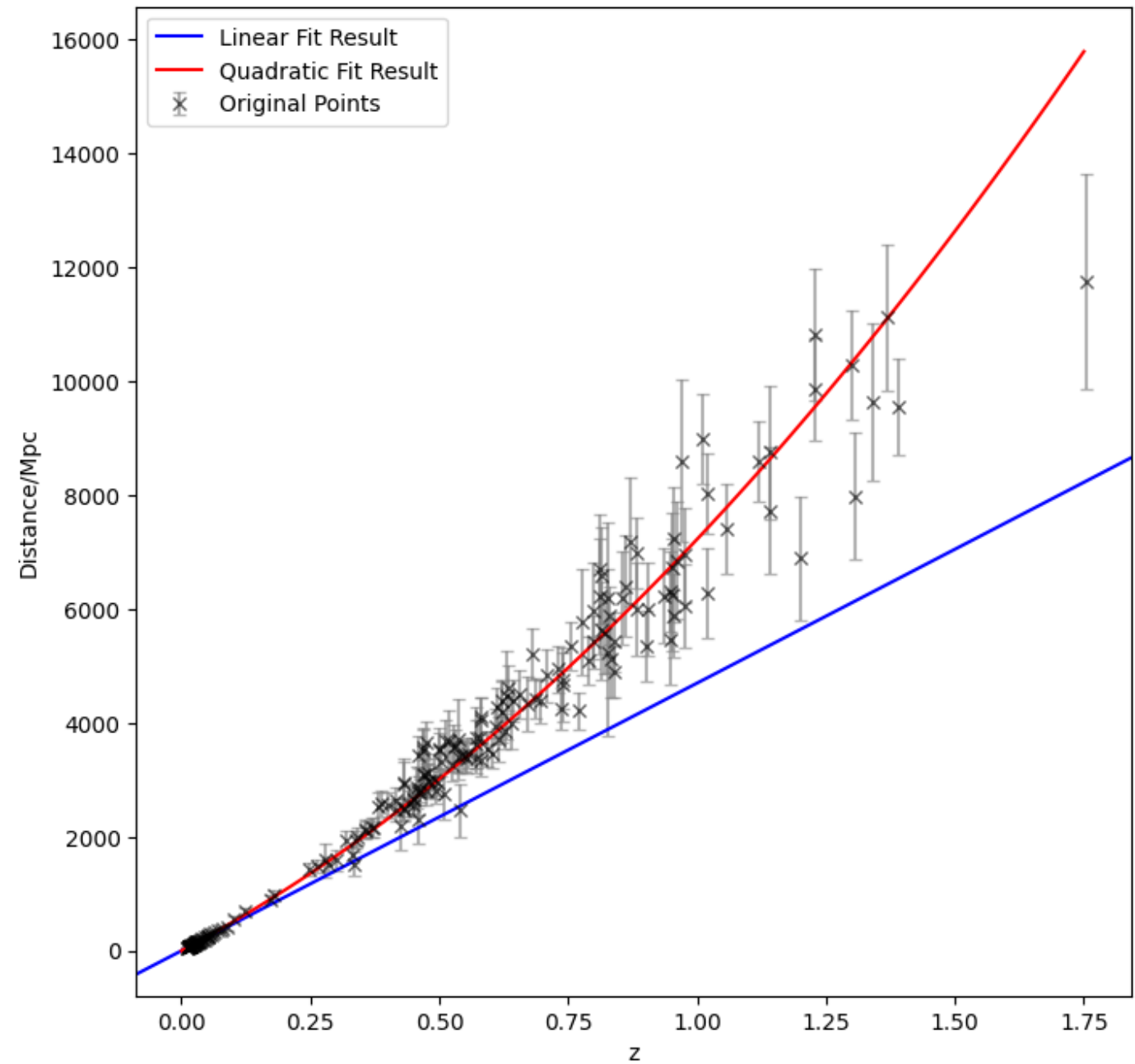
$$q = 0.009365$$

$$\Omega_m = 0.673$$

$$\Omega_\Lambda = 0.327$$

似乎和目前的  $\Lambda$ CDM 标准模型观测值不太相符。原因可能是拟合方法精度不足，或者对数据的处理存在失误。

下图是两种方法拟合得到的结果与原始数据点的比较。相关的代码附在最后。



## 2 黑体辐射和量子力学的关系

本题的回答主要参考了赵凯华《新概念物理教程——量子物理》一书。

根据热力学原理可以得到，黑体辐射的能流谱密度  $r_0$  必然满足以下关系（自变量取为波长  $\lambda$  和频率  $\nu$  是等效的，这里取频率  $\nu$  作为自变量）

$$r_0(\nu, T) = c\nu^3\psi\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

这里  $r_0$  的单位是  $Wm^{-2}Hz^{-1}$ ，而  $\psi(\frac{\nu}{T})$  由具体的黑体辐射机制决定。历史上对黑体辐射的研究主要目标就是确定函数  $\psi(\frac{\nu}{T})$  的具体形式。

## Wien 公式

假设气体分子的辐射频率仅与其速度有关（这个假设的正确性存在很大问题），可以得到 Wien 公式

$$r_0(\nu, T) = \frac{\alpha \nu^3}{c} e^{-\beta \nu / T}$$

式中  $\alpha, \beta$  均为待定的常数。这个公式在短波区与实验数据符合得很好，但是在长波段（即频率降低时）与实验数据有明显的偏差。

## Rayleigh-Jeans 公式

### 公式推导

将黑体辐射抽象为与辐射场交换能量的大量具有不同固有频率的谐振子，则黑体辐射的能量密度为

$$u_T(\nu) = g(\nu) \bar{\epsilon}(\nu, T)$$

其中  $g(\nu)$  为单位体积、单位频率区间内的电磁驻波模式数， $\bar{\epsilon}(\nu, T)$  为频率为  $\nu$  的谐振子在温度  $T$  时的平均能量。

经过计算可以得到（此处省略）

$$g(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

比较重要的是平均能量的计算。如果假设能量是连续的，采取 Boltzmann 正则分布

$$p(\epsilon) = e^{-\epsilon/k_B T}$$
$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^\infty \epsilon p(\epsilon)}{\int_0^\infty p(\epsilon)} = k_B T$$

代入得到

$$r_0(\nu, T) = \frac{c}{4} u_T(\nu) = \frac{c}{4} g(\nu) \bar{\epsilon}(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} k_B T$$

这称为 Rayleigh-Jeans 公式。

## 物理意义

Rayleigh-Jeans 公式在长波区与实验数据符合得很好，但是在短波区（即高频区）有严重的偏离。而且在频率升高时，辐射强度也会随之持续增大，这显然是不合理的，这也被称为“紫外灾难”。

## Planck 公式

解决问题的关键在于抛弃能量是连续分布的这一假设。事实上历史上 Planck 是利用插值法得到了更接近实验数据的 Planck 公式之后才设法从理论上给予严密的证明。他发现如果假设谐振子能量必须是某个值  $\epsilon_0$  的整数倍，就可以得到这一与实验相符较好的公式。具体来说，应当将以上 Rayleigh-Jeans 公式的推导中平均能量改为

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon_0 e^{-n\epsilon_0/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\epsilon_0/k_B T}} = \frac{\epsilon_0}{e^{\epsilon_0/k_B T} - 1}$$

将这里的  $\epsilon_0$  定义为  $\epsilon_0 = h\nu$ ，代入以上公式中就得到 Planck 公式

$$r_0(\nu, T) = \frac{c}{4} g(\nu) \bar{\epsilon}(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

在  $\nu$  较小的长波区，在近似  $e^{h\nu/k_B T} \approx 1 + \frac{h\nu}{k_B T}$  下 Planck 公式变为 Rayleigh-Jeans 公式；在  $\nu$  较大的短波区，分母上的常数项  $-1$  可以省略，此时公式满足 Wien 公式的形式。所以，在短波和长波区 Planck 公式都可以很好地描述实验规律。

但是，其中反映的物理在当时看来是非常难以接受的：能量不是连续分布，而是某个固定值的整数倍。将这种想法扩展到其他领域，就是量子力学的早期雏形。可以说 Planck 的这项发现是量子力学研究的开端。

### 3 辐射机制

本题的回答主要参考了尤峻汉《天体物理中的辐射机制》一书。

#### 1 回旋加速辐射

指非相对论电子在磁场中作圆周运动时发出的辐射。由于在一般天体中磁场通常很弱，且电子的速度很低，所以通常回旋辐射所占的重要性很低。但是在某些具有强磁场的天体中，回旋辐射就会变得比较重要，比如太阳耀斑、白矮星和中子星的 X 射线发射线。

回旋辐射的频谱分布主要集中在基频附近，显示出相当强的单色性。这里的基频就等同于电子作圆周运动的频率

$$\omega_0 = \omega_L = \frac{eB}{mc}$$

设想一个在白矮星附近作圆周或螺旋运动的电子，白矮星周围的磁场约为  $B = 10^7 Gs$  量级，所以对应的辐射波长约为

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_0} = 3219.7m$$

这个波长甚至比一般的通信频段的波长还要长，比较难探测到。

#### 2 同步加速辐射

指相对论电子在磁场中作圆周运动时发出的辐射。由于电子速度更高，所以同步辐射相比回旋辐射通常有着更高的比例。一般宇宙中的非热射电辐射都属于同步辐射，一个重要的例子是 AGN 发出的辐射，包括类星体、射电星系等，除此之外还有超新星遗迹和太阳的辐射中也可以观测到同步辐射过程。

同步辐射的 Lamor 频率为

$$\omega_L = \frac{eB}{mc}$$

同步辐射的频谱分布类似于连续谱，基频为

$$\omega_0 = \frac{1}{\gamma} \omega_L = \frac{1}{\gamma} \frac{eB}{mc}$$

而频谱分布的极大值点为

$$\omega_m = \gamma^2 \omega_L$$

辐射谱的功率主要集中在  $\omega_m$  近旁，所以这里取  $\omega_m$  作为这种辐射的角频率。

对于  $\gamma = 10^3$  的相对论电子，在  $B = 10^6 Gs$  的磁场中的同步加速波长近似为 mm 的量级：

$$\lambda = 3.22 mm$$

这个波长大致位于射电或远红外波段。

### 3 曲率辐射

如果磁场非常大（比如在强磁场中子星中磁场达到  $10^{12} Gs$  量级），此时作圆周运动的相对论电子寿命极短，尚未完成百分之一一个圆周就变为了非相对论电子，此时**同步辐射**的重要性下降，而**曲率辐射**的重要性上升。由于磁场很强，电子仅能沿磁力线运动。曲率辐射指相对论电子在很强的磁场中沿弯曲的磁力线运动时产生的辐射，其机制与同步辐射类似，只是将圆周运动的半径换为磁力线的曲率半径。

曲率辐射一般出现在脉冲星、类星体等具有强磁场环境的天体中。

曲率辐射的功率频谱分布的极大值点大致为

$$\nu_m = \frac{3}{2} \gamma^3 \frac{c}{2\pi\rho}$$

其中  $\rho$  为磁力线的曲率半径。设想中子星附近运动的相对论电子，其速度为  $\gamma = 10^3$ ，磁场为  $B = 10^{12} Gs$ ，曲率半径约等于  $\rho = 10^6 m$ （以中子星半径估计）。对应的波长大约在 mm 量级

$$\lambda = 4.19 mm$$

大约在射电或者远红外波段。

### 4 逆 Compton 散射

Compton 散射指高能光子与低频电子碰撞并将能量传给电子，光子的波长增加；而逆 Compton 散射则指相对论电子与光子发生碰撞，电子将部分能量传递给光子的现象。

这种散射的应用非常广泛，比如黑洞附近吸积盘热辐射产生的光子与黑洞晕中的相对论电子发生的逆 Compton 散射，以及用宇宙微波背景和宇宙线电子产生的 Compton 散射解释宇宙 X 射线背景辐射。

在电子能量远高于光子的假设下，大致每次碰撞会使得光子能量增大  $\gamma^2$  倍。设想来自热辐射的低能光子，波长为

$$\lambda_0 = 300nm$$

在经过速度为  $\gamma = 10^3$  的相对论电子碰撞之后，能量升高  $10^6$  倍，波长变为

$$\lambda = 10^{-6} \lambda_0 = 3 \times 10^{-13} m$$

位于 X 射线和  $\gamma$  射线的波段。

## 5 轫致辐射

轫致辐射指的是等离子体中的电子和离子发生近碰撞时，在库仑力作用下获得加速度的电子发出的辐射。由于电子处于自由状态而非在某个原子核轨道上运动，所以轫致辐射也被称为自由-自由跃迁。

轫致辐射可能发生在宇宙中的所有热等离子体中，比如太阳耀斑以及其他 X 射线源中。

轫致辐射的谱功率分布非常平均。此处仅考虑具有确定速度  $v$  和瞄准距离  $b$  的电子，其轫致辐射频率的量级大约在  $v/b$  左右。（辐射周期不能比电子进入距离离子较近距离内的时间低太多）

对于速度为  $v = 10^4 m/s$ （对应温度约为  $10^4 K$ ）、 $b = 10^{-10} m$ （以氢原子半径估计）的电子，其轫致辐射波长大致为

$$\lambda = 1.88 \times 10^{-5} m = 18.8 \mu m$$

大约是红外波段。

## 6 复合辐射

与轫致辐射不同，如果电子飞近离子的附近时被离子捕获，二者结合成为新的离子，此时发出的辐射称为复合辐射。由于电子由自由态变为束缚态，也称为自由-束缚跃迁。这里“复合”的意义是离子中的电子如果处于高激发态，之后还可以通过跃迁到低激发态发射出谱线，与之前由自由态跃迁到束缚态产生的连续谱一起称为复合辐射。

复合辐射同样存在于宇宙中的热等离子体中，它也是热等离子体冷却的一种重要方式。

设想一个温度在  $10^4 K$  左右的等离子体，电子能量大约是  $k_B T \approx 1 eV$  的量级。这个电子跃迁到氢离子的  $n = 3$  轨道上，光子吸收的能量为

$$h\nu = 1 + \frac{13.6}{3^2} = 2.51 eV$$

对应的波长应为

$$\lambda = 495 nm$$

这个波长位于光学波段。以上计算得到的只是复合辐射连续谱的其中一个波长，如果这个电子由  $n = 3$  向更低的能级跃迁，还会得到其他波长的单个发射线。

## 7 退激发辐射

等离子体中的电子与原子或者离子碰撞过程中，电子将能量传递给原子/离子，使得其中的电子由低能级跃迁到高能级，而高能级电子不稳定又会跃迁回稳定的能级，由此产生的辐射称为**退激发辐射**，或者称为碰

撞激发。

与轫致辐射和复合辐射相同，退激发辐射也出现在等离子体中，比如行星状星云等。由于退激发辐射属于束缚-束缚跃迁，其波长大致在可见光波段内。比如[O III]的绿色双线，对应波长分别为  $500.7nm$  和  $495.9nm$ 。

## 8 Cherenkov 辐射

Cherenkov 辐射指的是在介质中以超过介质中光速的速度匀速运动的带电粒子发出的辐射，其机制是组成介质的原子中的电子被超光速运动粒子的场扫过时产生次波，多个次波相互干涉产生了辐射电磁场。

当能量极高的宇宙线粒子穿过地球大气时，其产生的 Cherenkov 光脉冲可以被光电技术检测到，进而与宇宙线事件对应起来，这是  $\gamma$  射线天文学的一种观测手段。

大多数 Cherenkov 辐射的主要强度集中在紫外波段（来源于 [Wikipedia](#)）。紫外波段对应的波长大约为  $10^{-7}m$  量级。

## 附录：第一题所用程序

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.optimize import curve_fit

data = np.loadtxt('sn_data.txt', delimiter=' ', skiprows=1)
print(data.shape)
z, d, derr = data[:, 0], data[:, 1], data[:, 2]
fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 8))
ax.errorbar(z, d, yerr=derr, ecolor='grey', marker='x', linestyle='none', capsize=3, color='k')
ax.set_xlabel('z')
ax.set_ylabel('Distance/Mpc')

def linear_no_intercept(x, coef):
    y = x * coef
    return y

def quadratic_no_zero_term(x, a, b):
    y = a * x**2 + b * x
    return y

data_close = data[:30]
result_close = curve_fit(f=linear_no_intercept, xdata=data_close[:, 0], ydata=data_close[:, 1],
```

```

sigma=data_close[:, 2], absolute_sigma=True)
coef_close = result_close[0][0]
print(coef_close)

result = curve_fit(f=quadratic_no_zero_term, xdata=data[:, 0], ydata=data[:, 1], sigma=data[:, 2],
absolute_sigma=True)[0]
a, b = result
print(a, b)

xlist = np.linspace(0, 1.75, 100)
ylist = np.array([quadratic_no_zero_term(x, a, b) for x in xlist])

fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 8))
ax.errorbar(z, d, yerr=derr, ecolor='grey', marker='x', linestyle='none', capsize=3, color='k',
label='Original Points', alpha=0.6)
ax.axline(xy1=(0, 0), slope=coef_close, label='Linear Fit Result', color='b')
ax.plot(xlist, ylist, label='Quadratic Fit Result', color='r')
ax.set_xlabel('z')
ax.set_ylabel('Distance/Mpc')
ax.legend()

q = 1 - (a*2 / b)
m = 2/3 * (q + 1)
lam = 1-m
print(q, m, lam)

```