TÉCNICAS ESTADÍSTICAS MULTIVARIADAS DE EXPLORACIÓN Y REDUCCIÓN

Antes de empezar:

A lo largo del material de estudio usted encontrará referencias visuales que le indicarán el tipo de texto que está leyendo.

A continuación, se las presentamos.

Importante:
Presentan definiciones en relación a los conceptos trabajados.

Ejemplos:
Con este ícono se destacan ejemplos o casos.

Integrando Ideas:
Son párrafos que sintetizan las ideas desarrolladas hasta ese momento.

Actividades optativas y sin entrega obligatoria:
Indican todas las actividades que usted podrá realizar a lo largo de cada unidad y que cuentan con la respuesta al final de la misma.

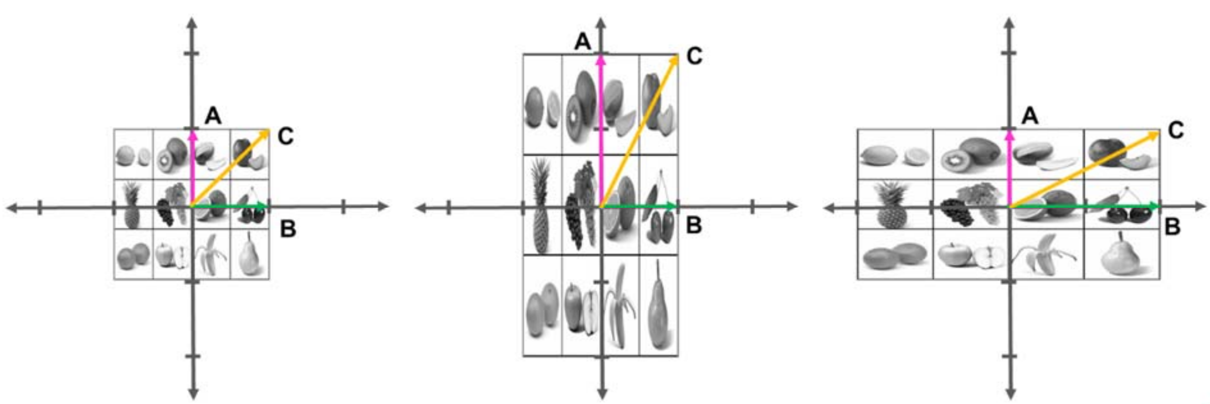
Practica en paquete estadístico R:
Es el ícono del software estadístico que se utilizará en este curso. Su presencia indica que es el momento de utilizarlo.

Unidad 1. Vectores y valores propios

1.1 Introducción

Esta primera unidad está dedicado a revisar los conceptos de vectores y valores propios. En la literatura científica, ambos conceptos son conocidos con otros nombres: *vectores* y *valores característicos*, *autovectores* y *autovalores* o *eigenvectores* y *eigenvalores*. Incluso hay autores que nombra a los *valores propios* como *raíces latentes* o *raíces características*. El término *eigen* proviene del alemán y significa *propio*. Los conceptos de vectores y valores propios son ampliamente empleados en diversos campos del conocimiento que van desde las ciencias de la ingeniería, física, geometría hasta las ciencias sociales, la economía y la administración. Una de esas aplicaciones es obtener trasformaciones lineales que especifican un nuevo sistema de ejes de coordenadas que permiten describir de forma más sencilla comportamientos aislados.

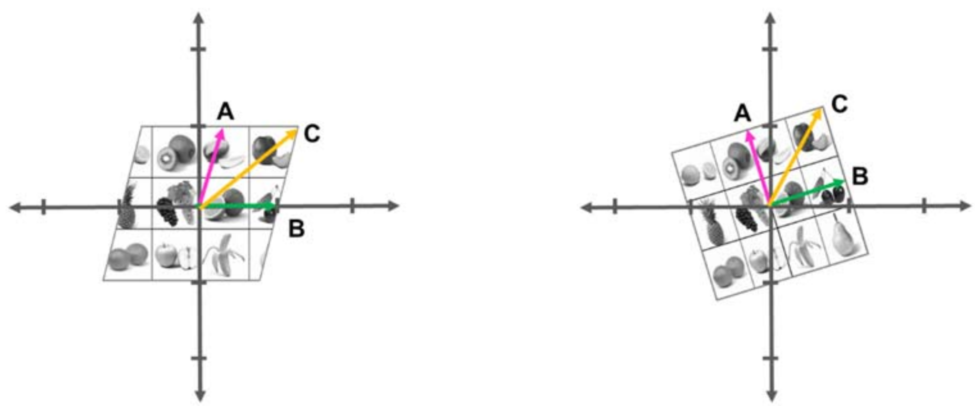
Una interpretación sencilla de estos conceptos sería verlo a través del siguiente ejemplo. Como se aprecia en la Figura 1a, se tiene una imagen (espacio rectangular) centrada en el origen con dimensión de dos unidades por lado y dentro de este espacio se observan tres vectores de diferente color. Cada uno de los vectores tiene las siguientes coordenadas: A (0, 1), B (1, 0) y c (1, 1). La Figura 1b muestra la imagen de la Figura 1a escalada (transformado) en dos unidades en el eje vertical. Se aprecia que el vector B no sufrió variación alguna ya que apunta hacia la misma dirección y tiene la misma magnitud. Por su parte el vector A si bien mantiene la misma dirección (hacia arriba), la dimensión aumentó al doble. En lo que respecta al vector C este sufrió variación tanto en su dirección al pasar de un ángulo de 45° con respecto al eje a un ángulo cercano a los 60°, como en su magnitud. Si ahora escalamos horizontalmente la imagen al doble de su tamaño original como se aprecia en la Figura 1c sucede que el vector A no sufre cambio alguno, el vector B mantiene la misma dirección, pero aumenta al doble su magnitud y, el vector C cambia tanto de magnitud como de dirección.



a) b) c)

Figura 1. Representación de un plano con tres vectores

Con este simple ejemplo se demuestra que tanto los vectores A y B son especiales ya que después de *transformar* la imagen estos nos cambiaron de dirección por los que se dice que son *vectores característicos* de cada una de las transformaciones realizadas. Ahora bien, se dice que el vector B en la Figura 1b tiene un *valor característico* (o *propio*) igual a 1 debido a que no sufrió cambio alguno en cuanto a su magnitud referido al que tenía en la Figura 1a mientras que el vector A tiene un *valor característico* igual a 2 resultado de incrementar al doble la dimensión del que tenía el vector A en la imagen de base (Figura 1a).



a) b)

Figura 2. Otras trasformaciones del plano con tres vectores

Si ahora se tienen las transformaciones que se muestran en la Figura 2 se concluye que, basado en lo demostrado en el ejemplo anterior, para la transformación de la Figura 2a el vector B es el único *vector propio* con un *valor característico* igual a 1 mientras que para la transformación representada en la Figura 2b no existen *vectores propios* ya que todos los vectores cambiaron su dirección inicial.

En resumen, desde el punto de vista del álgebra lineal, lo que se pretende estudiar mediante los conceptos de *vectores* y *valores propios* es dada la transformación de una matriz se quiere encontrar aquellos vectores que no fueron alterado en cuanto a su dirección para posteriormente tratar de medir cuánto fue el cambio de magnitud que tuvieron.

Otra forma de entender estos conceptos sería si en lugar de trabajar con los ingresos y los costos se decide trabajar con los beneficios, construidos como ingresos menos costes, y el volumen de actividad, definido como ingresos más costos. Los beneficios y el volumen de actividad representan una transformación de los datos originales (ingresos y costos). Los valores originales de los ingresos y los costos no son alterados, sino que se escalan a otros valores.

Muchas de los métodos estadísticas multivariados hacen uso de la descomposición de la matriz de datos del fenómeno bajo estudio en sus *vectores* y *valores propios* ya que contienen información importante sobre la naturaleza de los datos. Estadísticamente se asume que hay determinadas propiedades que son invariantes ante transformaciones lineales que preserven la información existente. Por ejemplo, supóngase que partiendo de k variables (vectores) se pasa a otras k variables que son combinación lineal de las anteriores mediante alguna operación. Aunque la matriz cuadrada que representa las varianzas y covarianzas de las nuevas variables sea distinta de la original, la esencia del problema es la misma, y se espera que haya componentes que permanezcan invariantes en el problema. En la siguiente sección, se presenta el planteamiento matemático y la forma de obtención de los valeres y vectores propios.

1.2 Concepto de valor y vector propio

Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de dimensión n x n. Se dice que un número real λ representa un *valor propio* de $\mathbf{A}$ si existe un vector $\mathbf{x}$ distinto de cero tal que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Tal vector $\mathbf{x}$ se llama *vector propio* de $\mathbf{A}$ correspondiente al *valor propio* λ.

Para obtener todos los vectores propios de una matriz $\mathbf{A}$ de orden n x n y sus correspondientes *valores característicos* se deben aplicar los siguientes teoremas:

Teorema 1. El número real λ representa un *valor propio* de $\mathbf{A}$ si y sólo si, λ tiene solución real para la ecuación $\mathbf{det}\ (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. A esta ecuación se le denomina *ecuación característica*.

Se puede demostrar que si $\mathbf{A}$ es una matriz de n x n, entonces $\mathbf{det}\ (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$ es un polinomio en λ de grado n. Las raíces de este sistema serán los *valores propios* de $\mathbf{A}$ y se denotan como $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ por lo que el número máximo de valores propios es igual al tamaño de la matriz $\mathbf{A}$. Para demostrar todo lo mencionado se presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.1. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$, aplicando $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ se tiene

$$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda - 15 & 6 \\ 6 & \lambda - 6 \end{bmatrix}$$

Aplicando el $\mathbf{det}\ (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, se obtiene la ecuación propia de $\mathbf{A}$

$$\mathbf{det}\ (\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = det\begin{bmatrix} \lambda - 15 & 6 \\ 6 & \lambda - 6 \end{bmatrix} = 0$$

$= (\lambda - 15)\ (\lambda - 6) - (6)\ (6) = 0$

$= \lambda^2 - 21\lambda + 54 = 0$ ← *Ecuación propia de* $\mathbf{A}$

$= (\lambda - 3)\ (\lambda - 18) = 0$

$\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 18$ ← *Valores propios* de $\mathbf{A}$

Teorema 2. Sea λ un *valor propio* de $\mathbf{A}$ de orden n x n. El conjunto $\mathbf{E}_\lambda$ de todas las matrices columna de orden n x 1 en $\mathbb{R}^n$, tales que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y se conoce como *vector propio* de $\mathbf{A}$ correspondiente al *valor propio* λ.

Para obtener los vectores propios se desarrolla en dos pasos:

1. Calcular los valores propios λ_i, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.
2. Se obtiene los vectores resultantes de resolver el espacio solución $(\lambda_i\ \mathbf{I} - \mathbf{A})\ \mathbf{x} = 0$ para i = 1, 2, …, n.

Retomando el ejemplo anterior se identifica que los valores propios de $\mathbf{A}$ fueron $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 18$. Se inicia calculando el vector propio asociado a λ_1.

Ejemplo 1.1. (*continuación*)

$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \lambda - 15 & 6 \\ 6 & \lambda - 6 \end{bmatrix}$, y $\lambda_1 = 3$

$$(3\ \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 3 - 15 & 6 \\ 6 & 3 - 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12x_1 + 6x_2 \\ 6x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} -12x_1 + 6x_2 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 = 0 \end{matrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se obtiene:

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Así el vector propio $\mathbf{E}\lambda_1$ que corresponde a $\lambda_1 = 3$ es:

$$\boldsymbol{E_{\lambda 1}} = \mathbf{x} = \left\{ x_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = gen\left(\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Comprobación utilizando $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$

$$\begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3/2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Aplicando el procedimiento anterior para $\lambda_2 = 18$ se tiene que

$$\boldsymbol{E_{\lambda 2}} = gen\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Algunas de las propiedades más importantes de los *valores* y *vectores* propios son las siguientes:

1) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = traza(A)$
2) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |A|$
3) Si $\mathbf{A}$ es una matriz real simétrica, sus *valores propios* son números reales.
4) Si $\mathbf{A}$ es una matriz positiva definida entonces todos sus *valores propios* son positivos.
5) Si $\mathbf{A}$ es una matriz positiva semidefinida entonces puede tener algunos *valores propios* iguales a cero y los demás serán positivos.

1.3 Estimación de valor y vector propio en R

Gracias al avance tecnológico existen paquetes matemáticos y estadísticos que permiten encontrar tanto los *valores* y *vectores propios* de la matriz $\mathbf{A}$ lo cual es de gran ayuda si el tamaño de dicha matriz es muy grande. A continuación se muestra como mediante el paquete estadístico R es posible obtener los *vectores* y *valores propios* del Ejemplo 1. El comando para realizar la descomposición de la matriz $\mathbf{A}$ en el paquete R es `eigen()`.

```r
# Se crea la matriz A
A <- cbind(c(15,-6), c(-6,6))
A
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]   15   -6
## [2,]   -6    6
```

```r
eigen(A)     #Se obtienen los valores y vectores propios
```

```
## eigen() decomposition
## $`values`
## [1] 18  3
##
## $vectors
##            [,1]       [,2]
## [1,] -0.8944272 -0.4472136
## [2,]  0.4472136 -0.8944272
```

Los resultados desplegados por el programa indican que existen dos valores propios $\lambda_1 = 18$ y $\lambda_2 = 3$, lo que coincide con lo calcula en la sección anterior. El paquete estadístico R ordena los valores propios de forma descendente de acuerdo con su magnitud. Así mismo despliega los vectores propios normalizados con respecto a la unidad, razón por la cual no coinciden en magnitud con los valores estimados. Para verificar si realmente los cálculos son correctos es necesario normalizar a la unidad $\mathbf{E}_{\lambda 1}$ y $\mathbf{E}_{\lambda 2}$.

Para $\lambda_1 = 18$

$$\frac{1}{\sqrt{-2^2+1^2}}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.8944\\0.4472\end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 3$

$$\frac{1}{\sqrt{1.5^2+3^2}}\begin{bmatrix}3/2\\3\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{11.25}}\begin{bmatrix}3/2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.4472\\0.8944\end{bmatrix}$$

Como se aprecia los valores coinciden con los estimados por el programa R, la única variación es el signo. Cabe recordar que el signo en al caso de los valores de los vectores propios indican la dirección del vector.