

Системи числення

Теоретичні відомості

Система числення – це сукупність прийомів та правил запису чисел за допомогою цифр та інших символів. Запис числа у деякій системі числення називають його **кодом**. Кількість символів, які використовуються у системі числення називається **основою системи числення**.

Усі системи числення поділяються на позиційні та непозиційні.

Непозиційна система числення має необмежену кількість символів. Кількісний еквівалент кожного символу постійний і не залежить від позиції. Найвідомішою непозиційною системою числення є римська система числення. В ній використовуються сім знаків: I – 1, V – 5, X – 10,

L – 50, C – 100, D – 500, M – 1000. Недоліки непозиційної системи числення: відсутність нуля, складність виконання арифметичних операцій. Проте римську систему нумерації часто використовують при нумерації розділів в книгах, віків в історії та інше.

Позиційна система числення має обмежену кількість символів і значення кожного символу чітко залежить від його позиції у числі. Кількість таких символів q і називають основою позиційної системи числення. Головна перевага позиційної системи числення – це зручність виконання арифметичних операцій. У системах числення з основою, меншою 10 використовують десяткові цифри, а для основи більшої 10 добавляють літери латинського алфавіту. У позиційних системах числення значення кожного символу (цифри чи літери) визначається її зображенням та позицією в числі.

Рисунок 1. – Системи нумерації різних народів світу

Окремі позиції в записі називаються **роздрядами**, а номер позиції – **номером роздряду**. Число роздрядів у записі числа називається **роздрядністю** і зберігається з довжиною числа.

Число A_q в системі числення з основою q подається вигляді ряду:

$$A_q = a_{m-1} \cdot q^{m-1} + a_{m-2} \cdot q^{m-2} + \dots + a_0 \cdot q^0 + a_{-1} \cdot q^{-1} + \dots + a_{-e} \cdot q^{-e}$$

де q – основа системи числення;

q^i – «вага» позиції;

$a_i \in \{0, 1, \dots, (q-1)\}$ – цифри в позиціях числа:

$\overline{0, k}$ – номер розрядів щодо частини:

m – номер розрядів цілого частини,

Для цілого числа такий ряд буде мати вигляд:

$$A_g \equiv a_{m-1} \cdot g^{m-1} + a_{m-2} \cdot g^{m-2} + \dots + a_0 \cdot g^0$$

де a — основа системи числення:

a^i = «вага» позиції;

$a_i \in \{0, 1, \dots, (q-1)\}$ – цифри в позиціях числа:

$\overline{0, k}$ – номер розрядів щодо частини:

Для переведення числа з однієї системи числення потрібно відділити цілу і дробову частини.

Переведення цілих чисел з однієї системи числення в іншу

Для переведення цілого числа з однієї системи числення в іншу необхідно поділити перевідне число на нову основу за правилом початкової системи. Одержана перша остача є значенням молодшого розряду в новій системі числення, а першу частку необхідно знову ділити на основу. Цей процес продовжується аж до появи неподільної частки. Результат записують у порядку, оберненому їх отриманню.

Приклад

Переведення числа 173 з десяткової системи в двійкову.

$$\begin{array}{r}
 173 \quad | \quad 2 \\
 172 \quad 86 \quad | \quad 2 \\
 \hline
 1 \quad 86 \quad 43 \quad | \quad 2 \\
 0 \quad 42 \quad 21 \quad | \quad 2 \\
 \hline
 1 \quad 20 \quad 10 \quad | \quad 2 \\
 1 \quad 10 \quad 5 \quad | \quad 2 \\
 0 \quad 4 \quad 2 \quad | \quad 2 \\
 1 \quad 2 \quad 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$173_{10} = 10101101_2$$

Зробимо перевірку правильності переведення, тобто число 10101101_2 подамо у вигляді:

$$1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 128 + 0 + 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 = 173_{10}$$

Подання чисел в різних системах числення

Dec	Bin	Oct	Hex
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10

При однаковій розрядності у системах числення з більшою основою з більшою основою можна записати більше різних чисел.

Система числення з основою 10 називається **десятковою системою числення**, у ній використовуються десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Десяткова система числення позначається dec або нижнім індексом 10, наприклад, 1234567_{10} .

Двійковою (позначається літерою b – binary) називається система числення з основою 2, у якій використовується знаки 0 та 1. Перевагою двійкової системи числення є простота виконання арифметичних операцій, наявність надійних мікроелектронних схем з двома стійкими станами (тригераами), призначеними для збереження значень двійкового розряду, тобто цифр 0 або 1.

Переведення дробових чисел з однієї системи числення в іншу

Для переведення змішаних чисел у двійкову систему потрібно окремо переводити цілу та дробові частини. Для переведення правильного дробу з однієї системи числення в іншу

необхідно діючи за правилами початкової системи числення помножити перевідне число на основу нової системи числення. Від результату відокремити цілу частину, а дробову частину, що залишилась, знову помножити на цю основу. Процес множення повторюється до отримання заданої кількості цифр. Результат записують у порядку їх отримання.

Наприклад, переведемо число 0,125 з десяткової системи числення у двійкову

$$\begin{array}{r} 0,125 \\ \times 2 \\ \hline 0,250 \\ \times 2 \\ \hline 0,500 \\ \times 2 \\ \hline 1,000 \\ \times 2 \\ \hline 0,000 \end{array}$$

$$0,125_{10} = 0,0010_2$$

В загальному вигляді алгоритм переведення правильного дробу a , що є правильним дробом у q -ій системі числення, тобто $a = \pm 0, q_1 q_2 q_3 \dots q_n$. Переведення числа a з кожної q -ій системі числення до p -ої здійснюється в q -ій системі числення наступним чином:

- 1) Число a збільшується на число p , у результаті чого виходить ціла частина (r_1) і дробова частина (a_1) добутку. Число r_1 відповідає цифрі p_1 .
- 2) Число a збільшується на число p , у результаті чого виходить ціла частина (r_2) і дробова частина (a_2) добутку. Число r_2 відповідає цифрі p_2 .

Процес множення продовжується до отримання необхідної кількості знаків числа a в p -ій системі числення.

У двійковій системі числення можливе виконання різних арифметичних операцій: додавання, віднімання, множення і т.д. Двійкова арифметика використовує слідуючі правила задані таблицями додавання, віднімання та множення.

Додавання

Таблиця додавання

$$\begin{array}{r} 0 + 0 = 0 \\ 0 + 1 = 1 \\ 1 + 0 = 1 \\ 1 + 1 = 10 \end{array}$$

Додавання двох багаторозрядних двійкових чисел проводиться порозрядно з урахуванням одиниць переповнення від попередніх розрядів.

Приклад

$$\begin{array}{r} 1011 \\ + 1011 \\ \hline 10110 \end{array}$$

Віднімання

Таблиця віднімання

$$\begin{array}{r} 0 - 0 = 0 \\ 1 - 0 = 1 \\ 1 - 1 = 0 \\ 10 - 1 = 1 \end{array}$$

Віднімання багаторозрядних двійкових чисел, аналогічно додаванню, починається з молодших розрядів. Якщо позичити одиницю в старшому розряді, утвориться дві одиниці в молодшому розряді.

Приклад

$$\begin{array}{r} 1010 \\ - 0110 \\ \hline 0100 \end{array}$$

Множення

Таблиця множення

$$\begin{array}{r} 0 * 0 = 0 \\ 0 * 1 = 0 \\ 1 * 0 = 0 \\ 1 * 1 = 1 \end{array}$$

Множення являє собою багаторазове додавання проміжних сум та зсувів.

Приклад

$$\begin{array}{r} \times \quad 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ \quad \quad \quad 1 \ 0 \ 1 \\ \hline \quad 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ + \quad 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ \hline 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ \hline 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array}$$

Ділення

Процес ділення складається з операцій віднімання, що повторюються.

Вісімковою називається система числення з основою 8, у якій використовуються наступні цифри: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Шістнадцятковою (позначається літерою h – hex) називається система числення з основою 16, в якій для відображення чисел використовуються наступні цифри: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Правило переведення з двійкової системи числення до вісімкової системи числення

Для того, щоб перевести ціле число з двійкової системи числення до вісімкової, необхідно розбити двійкове число на тріади – сукупність трьох двійкових розрядів, починаючи з кінця числа. Кожну тріаду окремо перевести до вісімкової системи числення. Результат отримується із записів результатів переведення кожної тріади до вісімкової системи числення.

Приклад

Необхідно перевести число 10111111111b до вісімкової системи числення. Розбиваємо число на тріади. Отримуємо 10 111 111 111. Оскільки старша тріада містить тільки два двійкових розряди, то необхідно перед нею дописати 0, щоб було три розряди (загальний результат від того не зміниться). Таким чином отримуємо число 010 111 111 111. Виконуємо переведенняожної з тріад до вісімкової системи числення. Результат переведення: 2 7 7 7, тобто число 10111111111₂=2777₈.

Правило переведення з двійкової системи числення до шістнадцяткової системи числення

Для того, щоб перевести ціле число з двійкової системи числення до шістнадцяткової системи числення, необхідно розбити двійкове число на тетради – сукупність чотирьох двійкових розрядів, починаючи з кінця числа. Кожну тетраду окремо перевести до шістнадцяткової системи числення. Результат отримується із записів результатів переведення кожної тетради до шістнадцяткової системи числення.

Приклад

Необхідно перевести число 10111111111b до шістнадцяткової системи числення. Розбиваємо число на тетради. Отримуємо 101 1111 1111. Оскільки старша тетрада містить тільки три двійкових розряди, то необхідно перед нею дописати 0, щоб було чотири розряди (загальний результат від того не зміниться). Таким чином отримуємо число 0101 1111 1111. Виконуємо переведенняожної тетради до шістнадцяткової системи числення. Результат переведення: 5 FF, тобто число 10111111111b=5FFh.

Правило переведення з вісімкової системи числення в двійкову систему

Для того, щоб перевести ціле число з вісімкової системи числення до двійкової, необхідно кожну цифру вісімкового числа окремо перевести до двійкової системи числення. Результат отримується із записів результатів переведенняожної цифри в двійковій системі числення.

Приклад

Потрібно перевести число 353_8 до двійкової системи числення. Виконуємо переведення кожної цифри числа до двійкової системи числення окремо. Отримуємо: 011 101 011. Таким чином $353_8=11101011_b$.

У вісімковій системі числення можливе виконання різних арифметичних операцій: додавання, віднімання, множення і т.д. При цьому необхідно пам'ятати, що повний десяток в вісімковій системі числення містить вісім одиниць.

Правило переведення з шістнадцяткової системи числення в двійкову систему числення

Для того, щоб перевести ціле число з шістнадцяткової системи числення до двійкової, необхідно кожну цифру шістнадцяткового числа окремо перевести до двійкової системи числення. Результат отримується із записів результатів переведення кожної цифри в двійковій системі числення.

Приклад

Потрібно перевести число $7ADh$ до двійкової системи числення. Виконуємо переведення кожної цифри числа до двійкової системи числення окремо. Отримуємо: 0111 1010 1101. Таким чином $7ADh=11110101101_b$.

У шістнадцятковій системі числення можливе виконання різних арифметичних операцій: додавання, віднімання, множення і т.д. При цьому необхідно пам'ятати, що повний десяток в шістнадцятковій системі числення містить шістнадцять одиниць.

Лабораторна робота №1

"Застосування двійкової системи числення"

Мета: Знайомство з двійкою системою числення, переведення дробових чисел з десяткової системи числення в двійкову систему числення, виконання арифметичних дій в двійковій системі числення

Теоретична частина

1. Охарактеризуйте десяткову систему числення: алфавіт, основу системи числення, запис числа.
2. Охарактеризуйте двійкову систему числення: алфавіт, основу системи числення, запис числа.
3. Алгоритм переведення дробових чисел з однієї системи числення в іншу.
4. Виконання арифметичних операцій в двійковій системі числення.

Вихідні дані до роботи

1. Записати дату народження студента у форматі:
ЧЧ (число) **ММ** (місяць) та **РРРР** (рік народження)
2. Записати рік вступу до навчального закладу у форматі **РРРР**
3. Записати дату народження матері у форматі:
ЧЧ (число) **ММ** (місяць) та **РРРР** (рік народження)
4. Записати дату народження батька у форматі:
ЧЧ (число) **ММ** (місяць) та **РРРР** (рік народження)

Практична частина

1. У пункті 1 вихідних даних визначити позитивну різницю чисел (**ЧЧММ-РРРР** або **РРРР-ЧЧММ**). Якщо отримана різниця менше 100, то до неї додати 100. Отримане число перевести до двійкової системи числення.
2. Число в пункті 2 вихідних даних (**РРРР**) перевести до двійкової системи числення.
3. В двійковій системі числення обчислити суму числа, визначеного в пункті 1 вихідних даних і числа в пункті 2 вихідних даних.
4. У пункті 3 вихідних даних визначити позитивну різницю чисел (**ЧЧММ-РРРР** або **РРРР-ЧЧММ**) і перевести її до двійкової системи числення.
5. У двійковій системі числення обчислити добуток різниці чисел, визначеної в пункті 3 вихідних даних і числа в пункті 2 вихідних даних.
6. У пункті 4 вихідних даних визначити позитивну різницю чисел (**ЧЧММ-РРРР** або **РРРР-ЧЧММ**). Результат розділити на 10 000. Дріб округлити до сотих і перевести до двійкової системи числення до появи першої одиниці в значенні результату.
7. У пункті 4 вихідних даних визначити позитивну різницю чисел (**ЧЧММ-РРРР** або **РРРР-ЧЧММ**) і перевести її до двійкової системи числення.
8. У двійковій системі числення знайти суму числа, визначеного в пункті 1 вихідних даних та різниць чисел, обчислених у пунктах 3, 4 вихідних даних. Результат перевести з двійкової системи числення в десяткову.

Результат виконання роботи оформити у вигляді звіту встановленого зразка. Зробити висновок.

Лабораторна робота №2

"Застосування вісімкової та шістнадцяткової систем числення"

Мета: Знайомство з вісімковою та шістнадцятковою системами числення, виконання арифметичних дій в вісімковій та шістнадцятковій системах числення, правила переведення з однієї системи числення в іншу

Теоретична частина

1. Охарактеризуйте вісімкову систему числення: алфавіт, основа системи числення, запис числа.
2. Охарактеризуйте шістнадцяткову систему числення: алфавіт, основа системи числення, запис числа.
3. Правило переведення числа з двійкової системи числення в вісімкову систему числення.

4. Правило переведення числа з двійкової системи числення в шістнадцяткову систему числення.
5. Правило переведення з вісімкової системи числення в двійкову систему числення.
6. Правило переведення з шістнадцяткової системи числення в двійкову систему числення.

Вихідні дані до роботи

1. Записати дату народження студента у форматі:
ЧЧ (число) **ММ** (місяць) та **PPPP** (рік народження)
2. Записати рік вступу до навчального закладу у форматі **PPPP**
3. Записати дату народження матері у форматі:
ЧЧ (число) **ММ** (місяць) та **PPPP** (рік народження)

Практична частина

1. У пункті 1 вихідних даних визначити позитивну різницю чисел (**ЧЧММ-РРРР** або **РРРР-ЧЧММ**). Якщо отримана різниця менше 100, то до неї додати 100. Отримане число перевести до вісімкової системи числення. Результат з вісімкової системи числення перевести до двійкової системи числення.
2. Отримане у пункті 1 вихідних даних число перевести до шістнадцяткової системи числення. Результат з шістнадцяткової системи числення перевести до двійкової системи числення.
3. Число в пункті 2 вихідних даних (**РРРР**) перевести до вісімкової системи числення.
4. У вісімковій системі числення обчислити суму числа, вказаного в пункті 1 вихідних даних і числа в пункті 2 вихідних даних.
5. Число в пункті 2 вихідних даних (**РРРР**) перевести до шістнадцяткової системи числення.
6. В шістнадцятковій системі числення обчислити суму числа, вказаного в пункті 1 вихідних даних і числа в пункті 2 вихідних даних.
7. У пункті 3 вихідних даних визначити позитивну різницю чисел (**ЧЧММ-РРРР** або **РРРР-ЧЧММ**) і перевести її до двійкової системи числення. Результат перевести з двійкової системи числення до вісімкової системи числення.
8. Отримане у пункті 3 вихідних даних число перевести її до двійкової системи числення. Результат перевести з двійкової системи числення до шістнадцяткової системи числення.

Результат виконання роботи оформити у вигляді звіту встановленого зразка. Зробити висновок.