Kesikli Matematik

Mantık ve İspatlar

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Ali ALTUNCU
Bilgisayar Mühendisliği

Totoloji ve Çelişki

- Önermelerin tüm olası doğruluk değerleri için her zaman doğru olan bir bileşik önermeye **totoloji** denir.
- Sonucu her zaman yanlış olan bir bileşik önermeye **çelişki** denir.
- Ne totoloji ne de çelişki olmayan bir bileşik önerme ise **belirsiz (contingency)** olarak adlandırılır.
- **Örnek:** **p** v **¬p** önermesi bir totoloji, **p ∧ ¬p** ise bir çelişkidir.

p	¬p	p v ¬p	p ∧ ¬p
T	F	T	F
F	T	T	F

Mantıksal Denklik

- Olası her durumda aynı doğruluk değerlerine sahip bileşik önermeler **mantıksal denk** olarak adlandırılır.
- **Örnek: p→q** önermesinin zıt pozitifi olan **¬q→¬p** mantıksal denktir.

p	q	p→q	¬q→¬p
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

- Mantıksal denklikler, mantıklı bir argüman oluşturmak ve yeni önermeler çıkarmak için kullanılabilir.

Mantıksal Denklik

- **Tanım:** A ve B önermeleri, eğer **A↔B** bir totoloji ise mantıksal olarak denk olarak adlandırılır ve **A <=> B** ile gösterilir.

		A	B	
p	q	p→q	¬q→¬p	A↔B
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Mantıksal Denklik

- **Önemli mantıksal denklikler (De Morgan Kanunları)**

1) $\neg(p \vee q) <=> \neg p \wedge \neg q$
2) $\neg(p \wedge q) <=> \neg p \vee \neg q$

- **Örnek:** De Morgan Kanunları ile "Meksika'da yaz soğuk ve güneşlidir" ifadesini olumsuzlayalım.
- **Çözüm:** "Meksika'da yaz soğuk ya da güneşli değildir."

Mantıksal Denklik

- **De Morgan Kanunları**

  $\neg(p \vee q) <=> \neg p \wedge \neg q$

p	q	¬p	¬q	¬(p ∨ q)	¬p ∧ ¬q
T	T	F	F		
T	F	F	T		
F	T	T	F		
F	F	T	T		

Mantıksal Denklik

- De Morgan Kanunları

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

p	q	¬p	¬q	¬(p ∨ q)	¬p ∧ ¬q
T	T	F	F	F	
T	F	F	T	F	
F	T	T	F	F	
F	F	T	T	T	

Mantıksal Denklik

- De Morgan Kanunları

$\neg(p \lor q) \iff \neg p \land \neg q$

p	q	¬p	¬q	¬(p ∨ q)	¬p ∧ ¬q
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

Mantıksal Denklik

- De Morgan Kanunları

$\neg(p \vee q) <=> \neg p \wedge \neg q$

p	q	¬p	¬q	A $\neg(p \vee q)$	B $\neg p \wedge \neg q$	$A \leftrightarrow B$
T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

Mantıksal Denklik

- Önemli mantıksal denklikler (Devam)
- Özdeşlik
  - $p \land T \Leftrightarrow p$
  - $p \lor F \Leftrightarrow p$
- Baskınlık
  - $p \lor T \Leftrightarrow T$
  - $p \land F \Leftrightarrow F$

Mantıksal Denklik

- **Önemli mantıksal denklikler (Devam)**
- **Değişmezlik**
  - p ∨ p <=> p
  - p ∧ p <=> p
- **Çift Değilleme**
  - ¬ (¬p) <=> p
- **Değişme**
  - p ∨ q <=> q ∨ p
  - p ∧ q <=> q ∧ p

Mantıksal Denklik

- **Önemli mantıksal denklikler (Devam)**
- **Birleşme**
  - $(p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$
  - $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$
- **Dağılma**
  - $p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  - $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Mantıksal Denklik

- **Önemli mantıksal denklikler (Devam)**
- **De Morgan**
  - $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
  - $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
- **Yutma**
  - $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
  - $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
- **Diğer Faydalı Denklikler**
  - $p \vee \neg p \Leftrightarrow T$
  - $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$
  - $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

Mantıksal Denklikleri Kullanma

- Mantıksal denklikler ispatlarda kullanılabilir. Bir önerme ya da onun parçası denklikler kullanılarak dönüştürülebilir ve bir sonuca varılabilir.

Örnek: $(p \land q) \rightarrow p$ önermesinin totoloji olduğunu gösterelim.

Mantıksal Denklikleri Kullanma

Örnek: $(p \land q) \rightarrow p$ önermesinin totoloji olduğunu gösterelim.

İspat: Totoloji olması için $(p \land q) \rightarrow p \iff T$ olmalıdır.

Mantıksal Denklikleri Kullanma

Örnek: $(p \wedge q) \rightarrow p$ önermesinin totoloji olduğunu gösterelim.

İspat: Totoloji olması için $(p \wedge q) \rightarrow p$ <=> T olmalıdır.

- $(p \wedge q) \rightarrow p$ <=> $\neg(p \wedge q) \vee p$ (Faydalı Denklik)

Mantıksal Denklikleri Kullanma

Örnek: $(p \wedge q) \rightarrow p$ önermesinin totoloji olduğunu gösterelim.

İspat: Totoloji olması için $(p \wedge q) \rightarrow p \Leftrightarrow T$ olmalıdır.

- $(p \wedge q) \rightarrow p \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee p$ (Faydalı Denklik)
- $(p \wedge q) \rightarrow p \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee p$ (De Morgan)

Mantıksal Denklikleri Kullanma

Örnek: (p ∧ q) → p önermesinin totoloji olduğunu gösterelim.

İspat: Totoloji olması için (p ∧ q) → p <=> T olmalıdır.

- (p ∧ q) → p <=> ¬(p ∧ q) v p (Faydalı Denklik)
- (p ∧ q) → p <=> (¬p v ¬q) v p (De Morgan)
- (p ∧ q) → p <=> (¬q v ¬p) v p (Değişme)

Mantıksal Denklikleri Kullanma

Örnek: $(p \land q) \rightarrow p$ önermesinin totoloji olduğunu gösterelim.

İspat: Totoloji olması için $(p \land q) \rightarrow p$ <=> T olmalıdır.

- $(p \land q) \rightarrow p \iff \neg(p \land q) \lor p$ (Faydalı Denklik)
- $(p \land q) \rightarrow p \iff (\neg p \lor \neg q) \lor p$ (De Morgan)
- $(p \land q) \rightarrow p \iff (\neg q \lor \neg p) \lor p$ (Değişme)
- $(p \land q) \rightarrow p \iff \neg q \lor (\neg p \lor p)$ (Birleşme)

Mantıksal Denklikleri Kullanma

Örnek: $(p \wedge q) \rightarrow p$ önermesinin totoloji olduğunu gösterelim.

İspat: Totoloji olması için $(p \wedge q) \rightarrow p$ <=> T olmalıdır.

- $(p \wedge q) \rightarrow p \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee p$ (Faydalı Denklik)
- $(p \wedge q) \rightarrow p \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee p$ (De Morgan)
- $(p \wedge q) \rightarrow p \Leftrightarrow (\neg q \vee \neg p) \vee p$ (Değişme)
- $(p \wedge q) \rightarrow p \Leftrightarrow \neg q \vee (\neg p \vee p)$ (Birleşme)
- $(p \wedge q) \rightarrow p \Leftrightarrow \neg q \vee (T)$ (Faydalı Denklik)

Mantıksal Denklikleri Kullanma

Örnek: (p ∧ q) → p önermesinin totoloji olduğunu gösterelim.

İspat: Totoloji olması için $(p \wedge q) \rightarrow p \iff T$ olmalıdır.

- $(p \wedge q) \rightarrow p \iff \neg(p \wedge q) \vee p$ (Faydalı Denklik)
- $(p \wedge q) \rightarrow p \iff (\neg p \vee \neg q) \vee p$ (De Morgan)
- $(p \wedge q) \rightarrow p \iff (\neg q \vee \neg p) \vee p$ (Değişme)
- $(p \wedge q) \rightarrow p \iff \neg q \vee (\neg p \vee p)$ (Birleşme)
- $(p \wedge q) \rightarrow p \iff \neg q \vee (T)$ (Faydalı Denklik)
- $(p \wedge q) \rightarrow p \iff T$ (Baskınlık)

Mantıksal Denklikleri Kullanma

Örnek: $(p \land q) \to p$ önermesinin totoloji olduğunu gösterelim.

Alternatif İspat:

p	q	$p \land q$	$(p \land q) \to p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

Mantıksal Denklikleri Kullanma

Örnek 2: $(p \rightarrow q)$ <=> $(\neg q \rightarrow \neg p)$ olduğunu gösterelim.

$p \rightarrow q$ <=> $\neg p \vee q$ (Faydalı Denklik)

İspat: $(p \rightarrow q)$ <=> $(\neg q \rightarrow \neg p)$

Mantıksal Denklikleri Kullanma

Örnek 2: $(p \rightarrow q)$ <=> $(\neg q \rightarrow \neg p)$ olduğunu gösterelim.

$p \rightarrow q$ <=> $\neg p \vee q$ (Faydalı Denklik)

İspat: $(p \rightarrow q)$ <=> $(\neg q \rightarrow \neg p)$

- $(p \rightarrow q)$ <=> $\neg(\neg q) \vee \neg p$ (Faydalı Denklik)

Mantıksal Denklikleri Kullanma

Örnek 2: $(p \rightarrow q) \iff (\neg q \rightarrow \neg p)$ olduğunu gösterelim.

$p \rightarrow q \iff \neg p \vee q$ (Faydalı Denklik)

İspat: $(p \rightarrow q) \iff (\neg q \rightarrow \neg p)$

- $(p \rightarrow q) \iff \neg(\neg q) \vee \neg p$ (Faydalı Denklik)
- $(p \rightarrow q) \iff q \vee \neg p$ (Çift Değilleme)

Mantıksal Denklikleri Kullanma

Örnek 2: $(p \rightarrow q)$ <=> $(\neg q \rightarrow \neg p)$ olduğunu gösterelim.

$p \rightarrow q$ <=> $\neg p \lor q$ (Faydalı Denklik)

İspat: $(p \rightarrow q)$ <=> $(\neg q \rightarrow \neg p)$

- $(p \rightarrow q)$ <=> $\neg(\neg q) \lor \neg p$ (Faydalı Denklik)
- $(p \rightarrow q)$ <=> $q \lor \neg p$ (Çift Değilleme)
- $(p \rightarrow q)$ <=> $\neg p \lor q$ (Değişme)

Mantıksal Denklikleri Kullanma

Örnek 2: $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q})$ <=> $(\neg \mathbf{q} \rightarrow \neg \mathbf{p})$ olduğunu gösterelim.

$p \rightarrow q$ <=> $\neg p \vee q$ (Faydalı Denklik)

İspat: $(p \rightarrow q)$ <=> $(\neg q \rightarrow \neg p)$

- $(p \rightarrow q)$ <=> $\neg(\neg q) \vee \neg p$ (Faydalı Denklik)
- $(p \rightarrow q)$ <=> $q \vee \neg p$ (Çift Değilleme)
- $(p \rightarrow q)$ <=> $\neg p \vee q$ (Değişme)
- $(p \rightarrow q)$ <=> $p \rightarrow q$

Çıkarım Kuralları

- Mevcut ifadelerden yeni ifadeler elde etmek için geçerli ifadeleri inşa eden şablonlar olan çıkarım kurallarını kullanırız. Çıkarım kuralları doğru ifadeleri elde etmek için kullanılan temel araçlardır.

Örnek: (p ∧ (p→q)) → q totolojisi **Modus Ponens (Olumlu Sonuç)** veya ayırma ilkesi olarak adlandırılan çıkarım kuralının temelidir.

- $$\begin{array}{rl} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$
- Modus ponens bize bir koşullu ifade ve bu koşullu ifadenin hipotezi doğru ise sonucunun doğru olması gerektiğini anlatır.
- "Bugün kar yağarsa, kayak yapmaya gideceğiz." koşullu ifadesi ve bu ifadenin hipotezi "Bugün kar yağıyor" doğru olsun. Modus Ponens gereği, bu koşullu ifadenin sonucu olan "Kayak yapmaya gideceğiz." ifadesinin doğru olacağına götürür.

Çıkarım Kuralları

Örnek: Modus ponens bize bir koşullu ifade ve bu koşullu ifadenin hipotezi doğru ise, sonucunun doğru olması gerektiğini anlatır.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Çıkarım Kuralları

- **Toplama :** p → (p ∨ q)

$$\begin{array}{l} \quad p \\ \hline \therefore\ p \vee q \end{array}$$

Örnek: Hava sıcaklığı sıfırın altında. Bundan dolayı, ya hava sıcaklığı sıfırın altındadır ya da yağmur yağıyordur.

- **Sadeleştirme:** (p ∧ q) → p

$$\begin{array}{l} \quad p \wedge q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

Örnek: Hava sıcaklığı sıfırın altında ve yağmur yağıyor. Bundan dolayı, şimdi hava sıcaklığı sıfırın altındadır.

Çıkarım Kuralları

- **Modus Tollens (Olumsuz Sonuç Çıkarma) :** (¬q ∧ (p→q)) → ¬p

$$\begin{array}{rl} & \neg q \\ & p \to q \\ \hline \therefore & \neg p \end{array}$$

- **Varsayıma Dayalı Kıyas:** ((p→ q) ∧ (q→ r)) → (p→ r)

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ \hline \therefore & p \to r \end{array}$$

- **Ayırıcı Kıyas:** (p ∨ q) ∧ ¬p → q

$$\begin{array}{rl} & p \vee q \\ & \neg p \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Çıkarım Kuralları

- **Karar:** $(p \lor q) \land (\neg p \lor r) \rightarrow q \lor r$

$$\begin{array}{rl} & p \lor q \\ & \neg p \lor r \\ \hline \therefore & q \lor r \end{array}$$

- A <=> B ise;

$A \rightarrow B$, totolojidir.

- **Örnek:** De Morgan Kanunu : $\neg(p \lor q) \Leftrightarrow \neg p \land \neg q$ ise;

$\neg(p \lor q) \rightarrow \neg p \land \neg q$, totolojidir.

Çıkarım Kurallarını Kullanma

- Birden fazla ön koşul olduğu zaman, bir ifadenin geçerli olduğunu göstermek için birçok çıkarım kurallarına ihtiyaç duyulur.

Örnek: Aşağıdaki ifadeleri (hipotezleri) varsayalım:

  - Bu öğleden sonra hava güneşli değil ve dünden daha soğuk.
  - Yüzmeye gitmişsek, hava güneşlidir.
  - Yüzmeye gitmezsek, o zaman kano gezisine çıkacağız.
  - Kano gezisine çıkarsak, o zaman gün batımına kadar evde olacağız.

ön koşullarının aşağıdaki sonuca yol açtığını gösterelim.

  - Gün batımına kadar evde olacağız.

Çıkarım Kurallarını Kullanma

Örnek: Aşağıdaki ifadeleri (hipotezleri) varsayalım:

- Bu öğleden sonra hava güneşli değil ve dünden daha soğuk.
- Yüzmeye gitmişsek, hava güneşlidir.
- Yüzmeye gitmezsek, o zaman kano gezisine çıkacağız.
- Kano gezisine çıkarsak, o zaman gün batımına kadar evde olacağız.

- **p: Öğleden sonra hava güneşli,** **q: Dünden daha soğuk,**
- **r: Yüzmeye gideceğiz,** **s: Kano gezisine çıkacağız,**
- **t: Gün batımına kadar evde olacağız.**

Ön koşullar: $\neg p \land q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, $s \rightarrow t$

Çıkarım Kurallarını Kullanma

Ön koşullar: $\neg p \land q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, $s \rightarrow t$

İspat:

1.	$\neg p \land q$	Hipotez

Çıkarım Kurallarını Kullanma

Ön koşullar: $\neg p \land q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, $s \rightarrow t$

İspat:

1.	$\neg p \land q$	Hipotez
2.	$\neg p$	(1)'i kullanarak sadeleştirme

Çıkarım Kurallarını Kullanma

Ön koşullar: $\neg p \land q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, $s \rightarrow t$

İspat:

1.	$\neg p \land q$	Hipotez
2.	$\neg p$	(1)'i kullanarak sadeleştirme
3.	$r \rightarrow p$	Hipotez

Çıkarım Kurallarını Kullanma

Ön koşullar: $\neg p \wedge q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, $s \rightarrow t$

İspat:

1.	$\neg p \wedge q$	Hipotez
2.	$\neg p$	(1)'i kullanarak sadeleştirme
3.	$r \rightarrow p$	Hipotez
4.	$\neg p \wedge (r \rightarrow p) <=> \neg r$	(2) ve (3)'ü kullanarak Modus Tollens

Çıkarım Kurallarını Kullanma

Ön koşullar: $\neg p \land q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, $s \rightarrow t$

İspat:

1.	$\neg p \land q$	Hipotez
2.	$\neg p$	(1)'i kullanarak sadeleştirme
3.	$r \rightarrow p$	Hipotez
4.	$\neg p \land (r \rightarrow p) <=> \neg r$	(2) ve (3)'ü kullanarak Modus Tollens
5.	$\neg r \rightarrow s$	Hipotez

Çıkarım Kurallarını Kullanma

Ön koşullar: $\neg p \land q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, $s \rightarrow t$

İspat:

1.	$\neg p \land q$	Hipotez
2.	$\neg p$	(1) 'i kullanarak sadeleştirme
3.	$r \rightarrow p$	Hipotez
4.	$\neg p \land (r \rightarrow p) <=> \neg r$	(2) ve (3) 'ü kullanarak Modus Tollens
5.	$\neg r \rightarrow s$	Hipotez
6.	$\neg r \land (\neg r \rightarrow s) <=> s$	(4) ve (5)'i kullanarak Modus Ponens

Çıkarım Kurallarını Kullanma

Ön koşullar: $\neg p \land q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, $s \rightarrow t$

İspat:

1.	$\neg p \land q$	Hipotez
2.	$\neg p$	(1) 'i kullanarak sadeleştirme
3.	$r \rightarrow p$	Hipotez
4.	$\neg p \land (r \rightarrow p) <=> \neg r$	(2) ve (3) 'ü kullanarak Modus Tollens
5.	$\neg r \rightarrow s$	Hipotez
6.	$\neg r \land (\neg r \rightarrow s) <=> s$	(4) ve (5)'i kullanarak Modus Ponens
7.	$s \rightarrow t$	Hipotez

Çıkarım Kurallarını Kullanma

Ön koşullar: $\neg p \wedge q$, $r \rightarrow p$, $\neg r \rightarrow s$, $s \rightarrow t$

İspat:

1.	$\neg p \wedge q$	Hipotez
2.	$\neg p$	(1) 'i kullanarak sadeleştirme
3.	$r \rightarrow p$	Hipotez
4.	$\neg p \wedge (r \rightarrow p) <=> \neg r$	(2) ve (3) 'ü kullanarak Modus Tollens
5.	$\neg r \rightarrow s$	Hipotez
6.	$\neg r \wedge (\neg r \rightarrow s) <=> s$	(4) ve (5)'i kullanarak Modus Ponens
7.	$s \rightarrow t$	Hipotez
8.	$s \wedge (s \rightarrow t) <=> t$	(6) ve (7)'yi kullanarak Modus Ponens

Kaynaklar

- **Kenneth Rosen,** “Discrete Mathematics and Its Applications”, 7th Edition , McGraw Hill Publishing Co., 2012.
- **Milos Hauskrecht,** “Discrete Mathematics for Computer Science”, University of Pittsburgh, Ders Notları.