Kesikli Matematik

Kümeler

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Ali ALTUNCU
Bilgisayar Mühendisliği

Kümeler

- Ayrık matematiğin önemli bir kısmı ayrık nesneleri temsil eden ayrık yapıların incelenmesine ayrılmıştır.
- Birçok önemli ayrık yapı, nesnelerin meydana getirdiği kümelerin kullanılması ile kurulur.
- Kümeler kullanılarak oluşturulan ayrık yapılar içinde,
  - Kombinasyonlar,
  - İlişkiler (Bağıntılar)
  - Graflar
  - Sonlu durum makineleri örnek verilebilir.

Küme

Tanım: Küme sıralı olmayan nesneler topluluğudur.

- Bir kümenin içindeki nesnelere kümenin elemanları veya üyeleri denir.
- **a ∈ A,** a'nın A kümesinin bir elamanı olduğunu; **a ∉ A** ise, a'nın A kümesinin bir elemanı olmadığını belirtir.
- İngiliz alfabesindeki ünlü harfler.
  - **V = { a, e, i, o, u }**
- 50 ile 63 arasında çift tam sayılar.
  - **E = { 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62 }**

Küme

- Bir kümeyi göstermenin bir başka yolu da küme kurma gösterimi kullanmaktır.
- Kümenin içindeki tüm unsurları, o kümenin bir elemanı olabilmeleri için taşımaları gereken koşul veya koşulları açıklayarak belirleriz.

Örnek: $E = \{x \mid 50 <= x < 63$, x çift tam sayıdır$\}$

- Bir kümenin elemanlarını listelemenin mümkün olmadığı durumlarda kümeyi belirtmek için "..." gösterimi kullanılır.

Örnek: 1 ile 100 arasında bir tam sayı kümesi.

- **A = {1,2,3, …, 100}**

Ayrık Matematikte Önemli Kümeler

Doğal sayılar: N = {0, 1, 2, 3, …}

Tamsayılar: Z = {…, -2, -1, 0, 1, 2, …}

Pozitif tam sayılar: Z+ = {1, 2, 3, …}

Rasyonel sayılar: Q = {p/q | p $\in$ Z, q $\in$ Z, q $\neq$ 0}

Reel sayılar: R

Pozitif reel sayılar: R^+

Kompleks sayılar: C

Denklik

Tanım: İki küme, ancak ve ancak aynı elemanlardan oluşuyorsa denktirler. Yani, eğer A ve B küme ise, ancak ve ancak $\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$ ise A ve B kümeleri denktir. A ve B denk kümeler ise A=B şeklinde ifade edilir.

Örnek: {1, 2, 3} ve {3, 1, 2} kümeleri denktir.

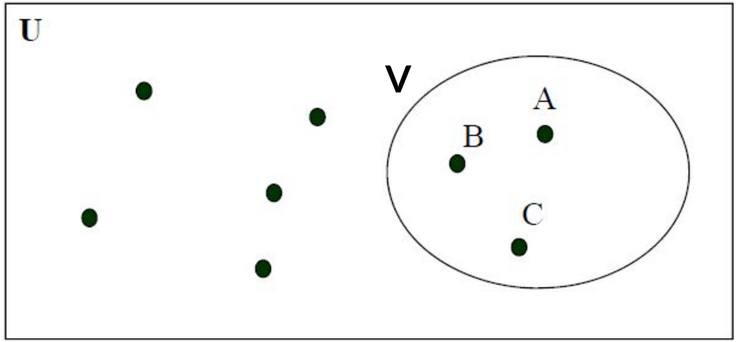
Not: Küme içindeki elemanların hangi sırada listelendiği bir önem arz etmez. Küme içindeki bir elemanın birden fazla tekrarlanması da bir önem arz etmez.

Örnek: {1, 3, 3, 3, 5, 5, 5} ile {1, 3, 5} aynı kümelerdir.

Evrensel ve Boş Küme, Venn Şemaları

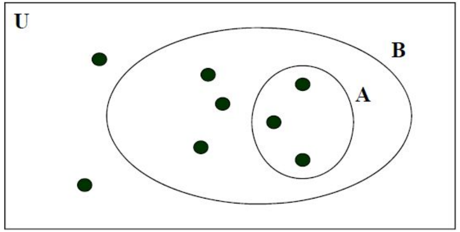
- **Evrensel küme:** Belirli bir kapsam içine giren tüm elemanların dahil olduğu kümeye evrensel küme denir. U ile gösterilir.
- **Boş küme:** Hiç elemanı olmayan kümeye denir. ∅ veya { } olarak gösterilir.
- Kümeler Venn Şemaları kullanılarak grafik olarak da gösterilebilir.

Örnek: V = {A, B, C}



Altkümeler

Tanım: Bir A kümesi, ancak ve ancak A'nın tüm elemanları aynı zamanda B'nin elemanı ise B kümesinin altkümesidir. A'nın B'nin altkümesi olduğunu belirtmek için $A \subseteq B$ gösterimi kullanılır. B'nin bir alt kümesi olan A'yı tanımlamanın alternatif yolu: $\forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$



Örnekler:

- 10'dan küçük olan tüm pozitif tek sayılar kümesi, 10'dan küçük olan tüm pozitif sayıların kümesinin **altkümesidir.**
- Kareleri 100'den küçük olan tam sayılar kümesi, negatif olmayan tam sayılar kümesinin bir **alt kümesi değildir.** (Çünkü -1 sayısı 1. kümenin elemanıdır, fakat 2. kümenin elemanı değildir.)

Altküme Özellikleri

Teorem: Boş küme, herhangi bir kümenin alt kümesidir. ($\varnothing \subseteq S$)

İspat:

- A kümesinin tüm elemanları aynı zamanda B'nin elemanları olmalıdır:
- $\forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$
- Herhangi bir S için aşağıdaki çıkarım tutarlarını göstermeliyiz.
- $\forall x\ (x \in \varnothing \rightarrow x \in B)$
- Boş küme herhangi bir eleman içermediğinden, $x \in \varnothing$ her zaman **F** 'dir.
- O zaman çıkarım her zaman **T** 'dir.

Altküme Özellikleri

Teorem: Herhangi bir S kümesi kendisinin bir alt kümesidir. ($S \subseteq S$)

İspat:

- A kümesinin tüm elemanları aynı zamanda B'nin elemanları olmalıdır:
- $\forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$
- Herhangi bir S için aşağıdaki çıkarım tutarlarını göstermeliyiz.
- $\forall x\,(x \in S \rightarrow x \in S)$
- Yukarıdaki çıkarım her zaman **T** 'dir.

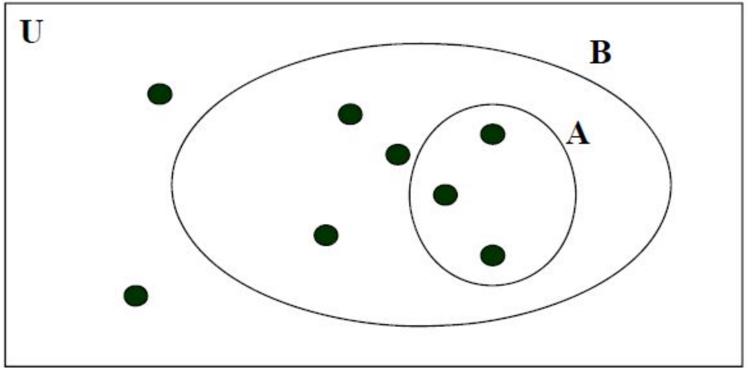
Not: Kümeler başka kümenin elemanları olabilirler.

Örnek: $A = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ **ve** $B = \{x \mid x, \{a,b\}$ kümesinin bir altkümesidir.$\}$

- Bu iki kümenin denk olduğuna; yani A=B olduğuna dikkat ediniz.

Öz Altküme

Tanım: Bir A kümesinin, yalnızca A ⊆ B ve A ≠ B olması durumunda B'nin uygun bir alt kümesi olduğu söylenir. A'nın, B'nin bir öz alt kümesi olduğunu A ⊂ B ile gösterilir.



Örnek: A = {1, 2, 3} ve B = {1, 2, 3, 4, 5} ise **A ⊂ B**

Bir Kümenin Büyüklüğü

Tanım: S bir küme olsun. Eğer S içinde n birbirinden farklı eleman varsa, n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere, S bir sonlu kümedir ve n, S'nin niceliğidir. S'nin niceliği |S| olarak gösterilir.

Örnekler:

- $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $|V| = 5$
- $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 20\}$ $|V| = 20$
- $|\varnothing| = 0$

Tanım: Bir küme sonlu değilse sonsuzdur.

- **Örnek:** Doğal sayılar kümesi, reel sayılar kümesi

Kuvvet Kümeleri

Tanım: Verilen bir S kümesi için, S'nin kuvvet kümesi, S'nin altkümelerinden oluşan bir kümedir. S'nin kuvvet kümesi *P*(S) olarak gösterilir.

Örnekler:

- $\varnothing$'nin kuvvet kümesi, $P(\varnothing) = \{ \varnothing \}$
- $\varnothing$'nin uzunluğu, $|P(\varnothing)| = 1$

- A= {1} kümesinin kuvvet kümesi, $P(A) = \{ \varnothing, \{1\} \}$
- A kümesinin uzunluğu, $|P(A)| = 2$

Kuvvet Kümeleri

Örnekler (devam):

- A= {1, 2} kümesinin kuvvet kümesi, $P(A) = \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \}$
- A kümesinin uzunluğu, $|P(A)| = 4$

- A= {1, 2, 3} kümesinin kuvvet kümesi, $P(A) = \{ \varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$
- A kümesinin uzunluğu, $|P(A)| = 8$

Not: Eğer bir kümenin n elemanı varsa, kuvvet kümesinin 2^n elemanı vardır.

Kartezyen Çarpımlar

- Kümeler sırasız olduklarından, sıralı elemanlardan oluşan koleksiyonları göstermek için farklı bir yapıya ihtiyaç vardır. Bu yapı sıralı n'li demet (sadece sıralı n'li olarak da kullanılır)'tir.

Tanım: Sıralı bir n'li $(x_1, x_2, ..., x_n)$, ilk elemanı x_1, ikinci elemanı x_2, ... ve n'inci elemanı olarak x_n olan sıralı koleksiyondur. (n>=2)

Tanım: S ve T kümeler olsun. S ve T'nin **S x T** ile gösterilen Kartezyen çarpımı, $s \in S$ ve $t \in T$ olmak üzere tüm sıralı (s,t) çiftlerinin kümesidir. Dolayısıyla;

- $S \times T = \{ (s,t) \mid s \in S \wedge t \in T\}$ 'dir.

Kartezyen Çarpımlar

Örnek:

- $S = \{1,2\}$ ve $T = \{a,b,c\}$
- $S \times T = \{ (1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c) \}$
- $T \times S = \{ (a,1), (a, 2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2) \}$

Not: $S \times T \neq T \times S$ olduğuna dikkat ediniz !!!

Örnek: A bir üniversitedeki öğrenciler kümesi olsun. B bu üniversitede verilen tüm derslerin kümesi olsun. A x B kartezyen çarpımı nedir ve ne işe yarar?

- A x B kartezyen çarpımı (a,b) şeklinde tüm sıralı çiftlerden oluşur. Burada a üniversitede bir öğrenci ve b üniversitede verilen bir derstir. A x B kümesini kullanmanın bir yolu, üniversitedeki öğrencilerin derslere yapabilecekleri mümkün olan tüm kayıtları göstermektir.

Kartezyen Çarpımların Büyüklüğü

- |S x T| = |S| * |T|

Örnek:

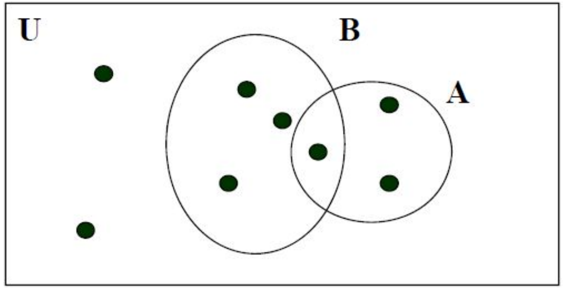
- A= {John, Peter, Mike}
- B ={Jane, Ann, Laura}
- A x B= {(John, Jane),(John, Ann), (John, Laura), (Peter, Jane), (Peter, Ann) , (Peter, Laura) , (Mike, Jane) , (Mike, Ann) , (Mike, Laura)}
- |A x B| = 9
- |A|=3, |B|=3 ise, |A| |B|= 9

Tanım: Kartezyen A x B ürününün bir alt kümesine, A kümesinden B kümesine olan bir ilişki olarak tanımlanır.

Küme İşlemleri

Tanım: A ve B küme olsun. A ve B'nin **A ∪ B** ile gösterilen birleşimi, A'da veya B'de veya her ikisinde bulunan öğeleri içeren kümedir.

- $A \cup B = \{ x \mid x \in A \lor x \in B \}$



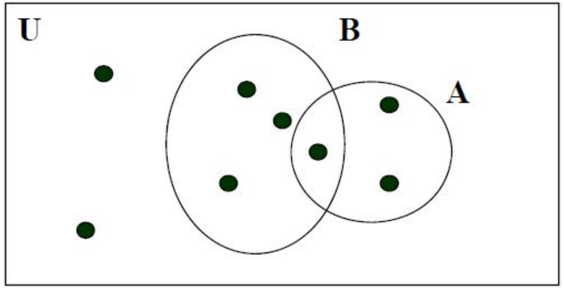
Örnek:

- $A = \{1,2,3,6\}$ ve $B = \{2,4,6,9\}$
- $A \cup B = \{1,2,3,4,6,9\}$

Küme İşlemleri

Tanım: A ve B küme olsun. A ve B'nin **A ∩ B** ile gösterilen kesişimi, A ve B kümelerinin her ikisinde birden bulunan öğeleri içeren kümedir.

- $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$

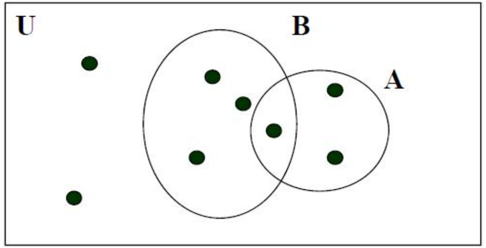


Örnek:

- $A = \{1,2,3,6\}$ ve $B = \{2,4,6,9\}$
- $A \cap B = \{2, 6\}$

Küme İşlemleri

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



Tanım: A ve B küme olsun. A ve B'nin "A - B" ile gösterilen farkı, A'da olup B'de olmayan öğeleri içeren kümedir. A ve B'nin farkı, B'nin A'ya göre tümleyeni olarak da adlandırılır.

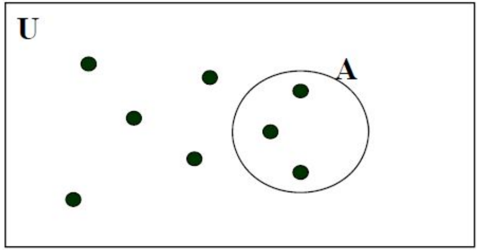
- $A - B = \{ x \mid x \in A \land x \notin B \}$

Örnek: $A = \{1,2,3,5,7\}$ ve $B = \{1,5,6,8\}$

  - $A - B = \{2,3,7\}$

Bir Kümenin Tamamlayıcısı

- *U* evrensel küme olsun. Bir A kümesinin tümleyeni, A'nın *U* 'ya göre tümleyenidir, yani *U-A* 'dır ve A^{I} ile gösterilir.
- $A^{I} = \{ x \in U \mid x \notin A \}$



Örnek: U={1,2,3,4,5,6,7,8} ve A ={1,3,5,7}

- $A^{I} = \{2,4,6,8\}$

Küme Özdeşlikleri

Özdeşlik Kanunları

- $A \cap U = A$
- $A \cup \varnothing = A$

Baskınlık Kanunları

- $A \cup U = U$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$

Değişmezlik Kanunları

- $A \cap A = A$
- $A \cup A = A$

Küme Özdeşlikleri

Katlı Olumsuzluk Kanunu

- $(A')' = A$

Sıra Değişme Kanunları

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

Birleşme Kanunları

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Dağılma Kanunları

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Küme Özdeşlikleri

De Morgan Kanunları

- $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Yutma Kuralı

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

Tümleyen Kuralı

- $A \cup A' = U$
- $A \cap A' = \varnothing$

Küme Özdeşlikleri

- Küme özdeşlikleri üyelik tabloları kullanılarak ispatlanabilir.
- Bir elemanın ait olabileceği tüm küme kombinasyonları göz önüne alınarak, aynı küme kombinasyonları için küme elemanlarının özdeşlikte bulunan her iki kümeye de ait olduğu doğrulanır. (**Örnek:** $(A \cap B)' = A' \cup B'$)

A	B	A'	B'	(A ∩ B)'	A' ∪ B'
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

Genelleştirilmiş Birleşimler ve Kesişimler

Tanım: Bir kümeler topluluğunun birleşim kümesi, koleksiyondaki kümelerden en az bir tanesinin elemanı olan unsurları içerir.

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\}$

Örnek: i=1, 2, ..., n için, A_i= {1, 2, ..., i} olsun.

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{1, 2, \ldots, n\}$

Genelleştirilmiş Birleşimler ve Kesişimler

Tanım: Bir kümeler topluluğunun kesişim kümesi, topluluktaki kümelerden hepsinin birden elemanı olan unsurları içerir.

- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\}$

Örnek: i=1, 2, ..., n için, A_i= {1, 2, ..., i} olsun.

- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{1\}$

Kümelerin Bilgisayar Gösterimi

Bilgisayarda kümeler nasıl temsil edilir?

1. Liste gibi veri yapıları
2. Evrensel kümedeki her elemana bit dizisinde bir bit atanır ve eleman mevcutsa ilgili bit 1'e ayarlanır, aksi takdirde 0 olur. **(En iyi çözüm)**

Örnek:

U={1, 2, 3, 4, 5} ,   A={2, 5}   ve   B={1, 5} olsun.

- **Bilgisayar gösterimi: A = 01001**
- **Bilgisayar gösterimi: B = 10001**

Kümelerin Bilgisayar Gösterimi

Örnek:

A = 01001

B = 10001

- A ve B kümesinin birleşimi sonucu oluşan bit dizgisi : **A v B = 11001**
- A ve B kümesinin kesişimi sonucu oluşan bit dizgisi : **A ∧ B = 00001**
- A ’nın tümleyeni sonucu oluşan bit dizgisi : **A' = 10110**

Kaynaklar

- **Kenneth Rosen,** “Discrete Mathematics and Its Applications”, 7th Edition , McGraw Hill Publishing Co., 2012.
- **Milos Hauskrecht,** “Discrete Mathematics for Computer Science”, University of Pittsburgh, Ders Notları.