Kesikli Matematik

Sayma

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Ali ALTUNCU
Bilgisayar Mühendisliği

Sayma

- Belirli özelliklere sahip bir dizi nesnemiz olduğunu varsayalım.
- Sayma, bu nesnelerin sayısını belirlemek için kullanılır.

Örnekler:

- Yerel arama alanında 10 haneli mevcut telefon numaralarının sayısı
- Takım oyuncularının sayısı ve pozisyonları göz önüne alındığında olası ilk 11 veya ilk 5 başlayan grupların sayısı (Futbol, Basketbol)

Temel Sayma Kuralları

- Sayma problemleri çok zor olabilir, bariz olmayabilir.

Çözüm:

Sorunu ayrıştırarak çözümü basitleştirmek

İki temel ayrıştırma kuralı:

- **Çarpma Kuralı:** Bir sayım, bir bağımlı sayı dizisine ayrıştırılır. (İlk sayımdaki her öğe, ikinci sayımdaki tüm öğelerle ilişkilendirilir.)
- **Toplama Kuralı:** Bir sayım, bir dizi bağımsız sayıma ayrılır. (Sayımın öğeleri alternatiftir.)

Çarpma Kuralı

- Bir sayım, bağımlı sayımlar dizisine bölünebilir.
- İlk sayımdaki her öğe, ikinci sayımdaki tüm öğelerle ilişkilendirilir.

Örnek:

- 1'den 50'ye kadar bir harf ve rakamlarla etiketlenmiş bir koltuğu olan bir konferans salonu varsayalım (Örn: A23). Salondaki toplam koltuk sayısını istiyoruz. (26 harf ve 50 rakam)
- Nasıl sayılır?

Çözüm:

Her harf için 50 rakam vardır.

Çarpım kuralı: Harf sayısı * [1,50] içindeki tamsayı sayısı = 26*50 = 1300

Çarpma Kuralı

- Bir eleman sayısı, ilk sayının n_1 eleman, ikinci n_2 eleman ve k. sayının n_k eleman verdiği bir bağımlı sayı dizisine bölünebiliyorsa, çarpım kuralına göre toplam eleman sayısı:
- $n = n_1 * n_2 * \ldots * n_k$

Örnek: 7 uzunluğunda kaç farklı bit dizisi vardır? **(Ör: 1011010)**

- Bit 1'e olası atamaların sayısı = 2
- Spesifik ilk bit için bit 2'ye olası atamaların sayısı = 2
- Spesifik ilk iki bit için, bit 3'e yapılan sayma atamaları = 2
- Bir dizi n bağımlı sayı çarpma kuralına göre: $\mathbf{n = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 2^7}$
- k elemanlı bir S kümesinin alt kümelerinin sayısı: $\mathbf{2 * 2 * \ldots * 2 = 2^k}$

Toplama Kuralı

- Sayım unsurları alternatiftir, birbirlerine bağlı değildir.

Örnek:

- A ve B şehirleri arasında seyahat etmeniz gerekiyor. Uçak, tren veya otobüse binebilirsiniz. A ve B arasında 12 farklı uçuş, 5 farklı tren ve 10 otobüs var. A'dan B'ye gitmek için kaç seçeneğiniz vardır?
- Sadece bir ulaşım türü ve her biri için bir seçenek alabiliriz. Seçenek sayısı;

Toplam kuralı: n = uçuş sayısı + tren sayısı + otobüs sayısı = 12+5+10

- Bir öğe sayısı, ilk sayının n_1 öğe, ikinci n_2 öğe ve k. sayının n_k öğe verdiği bir bağımsız sayı dizisine bölünebiliyorsa, toplama kuralına göre toplam öğe sayısı:
- $n = n_1+n_2+ \ldots +n_k$

Daha Karmaşık Sayma Problemleri

- Daha karmaşık sayma problemleri, genellikle toplam ve çarpma kurallarının bir kombinasyonunu gerektirir.

Örnek: Oturum açma parolası

- Minimum parola uzunluğu 6 ve maksimum uzunluk 8'dir. Parola büyük harf (26) veya rakamdan (10) oluşabilir. Şifrede en az bir rakam bulunmalıdır.
- Kaç farklı şifre var?
- Olası şifrelerin sayısı nasıl hesaplanır?

Daha Karmaşık Sayma Problemleri

1. Adım:

- Seçtiğimiz şifre 6,7 veya 8 karakterden oluşmaktadır.
- Geçerli parolaların toplam sayısı toplam kuralına göredir:
- Sırasıyla 6,7 ve 8 karakter uzunluğundaki şifrelerin sayısı, P = P6+P7+P8

2. Adım:

- 6 karakterden oluşan geçerli şifrelerin sayısı?
- Her karakterin herhangi bir pozisyonda olmasına izin verirsek,
- 6 karakter uzunluğundaki şifrelerin sayısı $(26+10)^6$, rakam içermeyen dizilerin sayısı 26^6'dır.
- 6 karakter uzunluğundaki geçerli şifrelerin sayısı; **P6 = $36^6 - 26^6 = 10^6$ olur.**

Daha Karmaşık Sayma Problemleri

1. Adım:

- Seçtiğimiz şifre 6,7 veya 8 karakterden oluşmaktadır.
- Geçerli parolaların toplam sayısı toplam kuralına göredir:
- Sırasıyla 6,7 ve 8 karakter uzunluğundaki şifrelerin sayısı, P = P6+P7+P8

2. Adım:

- Benzer şekilde;
- 7 karakterden oluşan geçerli şifrelerin sayısı, **P7 = 36^7 - 26^7 = 10^7 olur.**
- 8 karakterden oluşan geçerli şifrelerin sayısı, **P8 = 36^8 - 26^8 = 10^8 olur.**

Sonuç olarak;

- P = **10^6+10^7+10^8 elde edilir.**

İçerme-Dışlama Kuralı

- Bir işin bazı ortak yolları olan iki işlemden biri ile yapılabildiğini varsayalım.
- Bu durumda bu işi kaç farklı yolla yapacağımızı toplama kuralını kullanarak bulabiliriz.
- Bu işi yapmak için iki işlemdeki olası yolların sayısını toplarsak, işi yapmak için gerekli olası yolların toplam sayısından daha büyük bir sayı elde ederiz.
- Çünkü her iki işlemin kullandığı ortak yolları iki kez saymış oluruz.
- Bu yüzden iki kez sayılan yolların sayısını çıkarmalıyız.
- İçerme-dışlama kuralı, toplama kuralını kullanır ve ardından çakışan öğeleri düzeltir.
- $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

İçerme-Dışlama Kuralı

Örnek: Uzunluğu 8 olan bit dizgilerinin kaç tanesi 1 ile başlar veya sonu 00 ile biter?

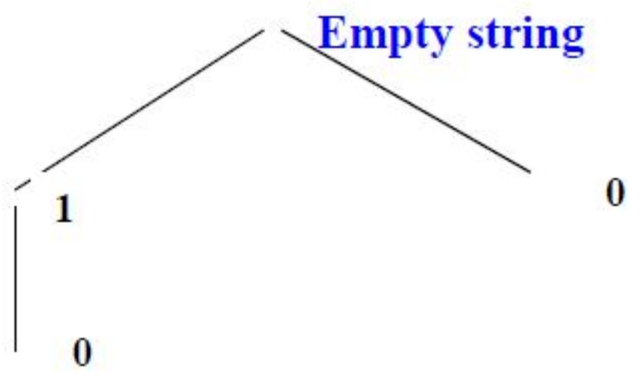
- 1 ile başlayan dizilerin sayısı: $2^7 = 128$
- 00 ile biten dizilerin sayısı: $2^6 = 64$
- İki kez sayılan dizilerin sayısı (1xxxxx00) : $2^5 = 32$
- Sonuç olarak; $128 + 64 - 32 = 160$ elde edilir.

Ağaç Şemaları

- Sayma problemleri ağaç şemaları kullanılarak da çözülebilir.
- Bir ağaç, bir kök ve bu kökten çıkan dallar ve diğer dalların bitiş noktasından çıkan muhtemel ek dallardan oluşur.
- Saymada ağaç şemalarını kullanmak için her bir muhtemel seçimi temsil etmek için dalları kullanırız.
- Muhtemel sonuçlar, yapraklarla temsil edilir.
- Yaprak, kendileri ile başlayan başka dalları olmayan dalların bitiş noktalarıdır.

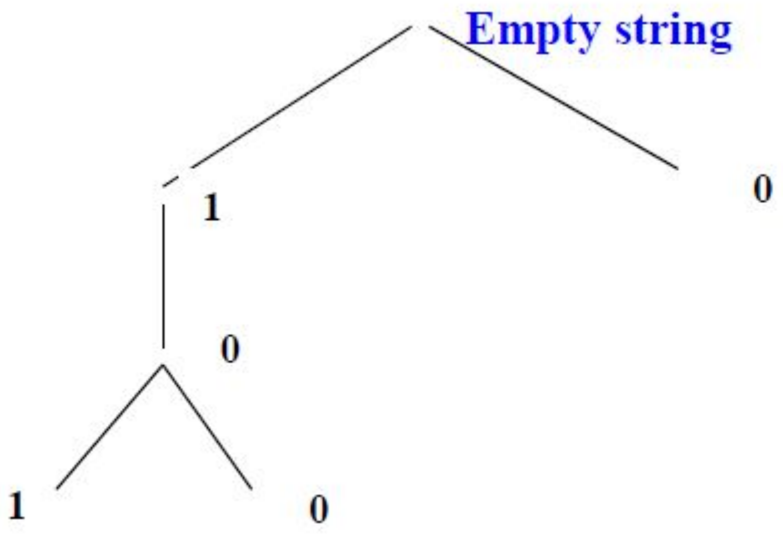
Ağaç Şemaları

Örnek: Ardışık olan iki tanesi 1 olmayan dört uzunluğunda kaç tane bit dizgisi vardır.



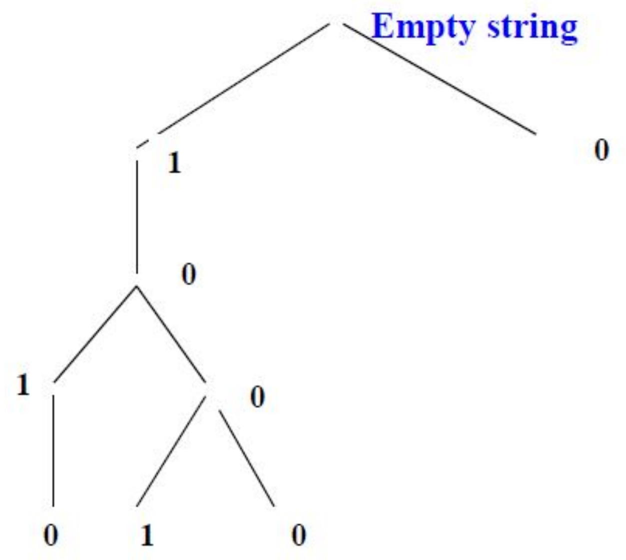
Ağaç Şemaları

Örnek: Ardışık olan iki tanesi 1 olmayan dört uzunluğunda kaç tane bit dizgisi vardır.



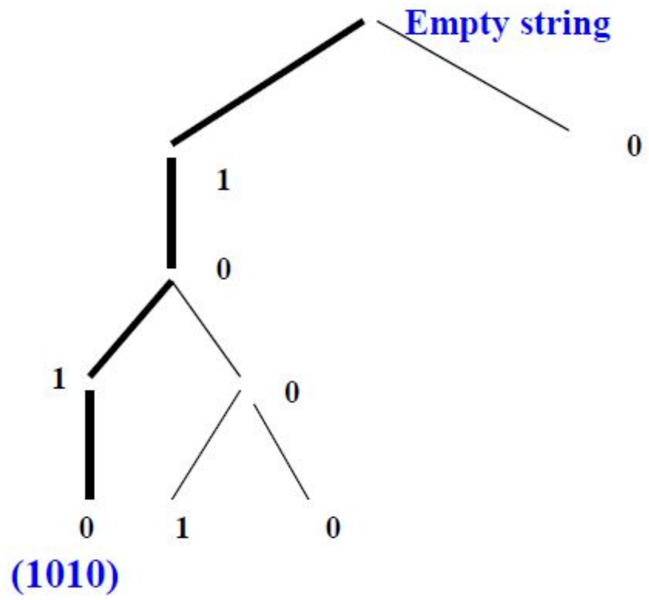
Ağaç Şemaları

Örnek: Ardışık olan iki tanesi 1 olmayan dört uzunluğunda kaç tane bit dizgisi vardır.



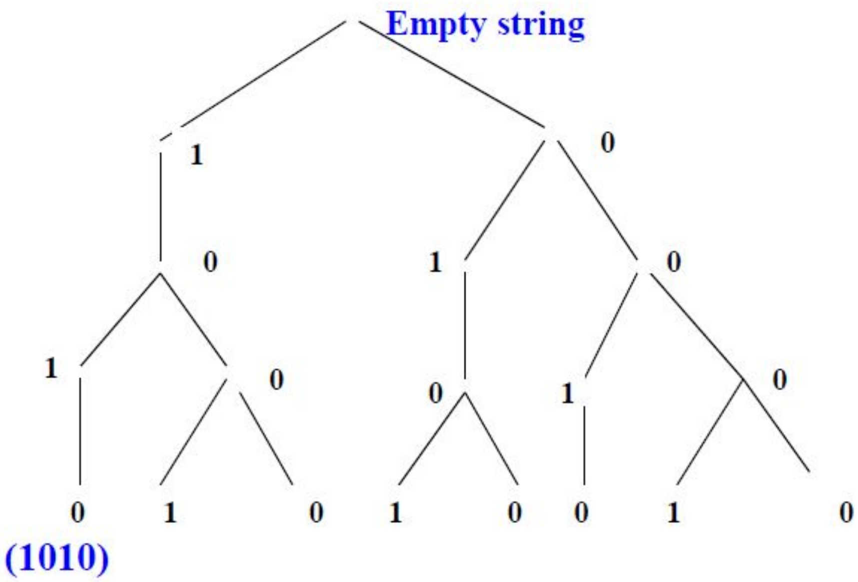
Ağaç Şemaları

Örnek: Ardışık olan iki tanesi 1 olmayan dört uzunluğunda kaç tane bit dizgisi vardır.



Ağaç Şemaları

Örnek: Ardışık olan iki tanesi 1 olmayan dört uzunluğunda kaç tane bit dizgisi vardır.

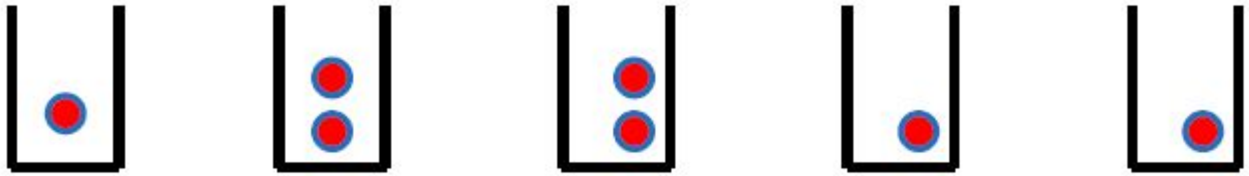


Güvercin Yuvası İlkesi

• Bir dizi nesne ve nesneleri depolamak için kullanılan bir dizi kutu olduğunu varsayalım.

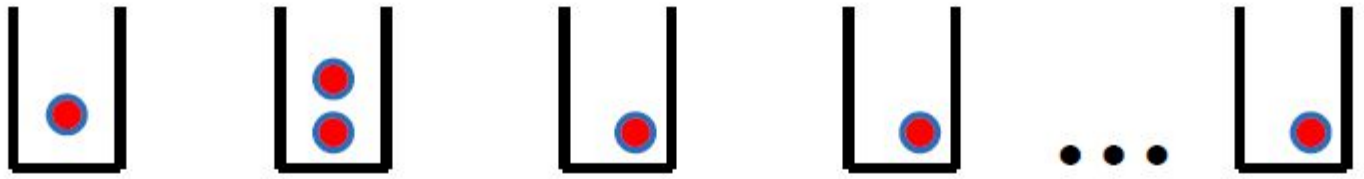
• Güvercin yuvası ilkesi, kutulardan daha fazla nesne varsa, birden fazla nesne içeren en az bir kutu olduğunu belirtir.

Örnek: 7 top ve bunları saklamak için 5 kutu olduğunda 1'den fazla top içeren en az bir kutu mevcuttur.



Güvercin Yuvası İlkesi

Teorem: k pozitif bir tamsayı olmak üzere, eğer k+1 tane veya daha fazla nesne, k tane kutu içerisine yerleştirilirse, iki veya daha fazla nesne içeren en az bir kutu vardır.



k adet kutu

İspat: Verilen k tane kutunun hiç birinin birden fazla nesne içermediğini kabul edersek, nesnelerin sayısı en fazla k tane olur. Bu durum kutuya yerleştirilecek k+1 tane nesne olduğu için çelişkidir.

Güvercin Yuvası İlkesi

Örnek: 367 kişi varsayalım. Aynı doğum gününe sahip iki kişi var mıdır?

- 1 yılda en fazla 366 gün olduğunu varsayarsak, aynı doğum gününe sahip en az iki kişi olmalıdır.

Örnek: 5 kutu ve 12 nesne olduğunu varsayalım. En az 3 elemanlı bir kutu var mıdır?

- 3'ten fazla nesne içeren bir kutu olmadığını varsayalım. O zaman 5 kutuda sahip olabilecek maksimum eleman sayısı 10 olur.
- 12 nesne olduğu için en az 3 elemanlı bir kutu vardır.

Genelleştirilmiş Güvercin Yuvası İlkesi

Teorem: Eğer k tane kutu içerisine N tane nesne yerleştirilirse, en az bir kutu $\lceil N/k \rceil$ tane nesne içerir.

Örnek: 100 kişi arasında aynı ayda doğan en az $\lceil 100/12 \rceil = 9$ kişi vardır.

Örnek: Bir ders için 5 farklı (A,B,C,D,E) not düzeyi olsun. Bu dersten en az 6 öğrencinin aynı notu alması için dersi alan öğrenci sayısı en az kaç olmalıdır?

Çözüm: En az 6 öğrencinin aynı not derecesini alması için $\lceil N/5 \rceil = 6$ olacağından en küçük tamsayı $N = 5*5+1 = 26$ olur. Eğer 25 öğrenci için 5 not derecesi varsa, en az 6 öğrencinin aynı notu almaması mümkündür. Bu yüzden minimum öğrenci sayısı 26 olmalıdır.

Genelleştirilmiş Güvercin Yuvası İlkesi

Örnek: 81 il arasından, aynı ilden gelen en az 100 kişinin olmasını sağlamak için, kaç öğrencinin bir üniversiteye kayıt olması gerekir?

Cevap:

- Her ili bir kutu gibi düşünürsek;
- $\lceil N/81 \rceil = 100$ olacak şekilde minimum N'yi bulmak istiyoruz.
- Kalan 0 olduğu için N=8100 olması fazladır.
- **N=81*99+1=8020** olur.

Permütasyonlar

Bir dizi farklı nesnenin permütasyonu, nesnelerin sıralı bir şekilde düzenlemesidir. Nesneler farklı olduğu için birden fazla seçilemezler. Ayrıca, düzenlemenin sırası önemlidir.

Örnek: 3 elemanlı bir S kümesi olduğunu varsayalım. S={a,b,c}.

- S'nin Permütasyonları şu şekildedir:
  - a b c
  - a c b
  - b a c
  - b c a
  - c a b
  - c b a

Permütasyonlar

Örnek: n elemanlı bir $S=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kümesi olduğunu varsayalım. Kaç farklı permütasyon vardır?

Çözüm:

- Permütasyonun ilk elemanını kaç farklı şekilde seçebiliriz? **n**
- a_2'yi seçtiğimizi varsayalım.
- Kalan elemanları kaç farklı şekilde seçebiliriz? **n-1**
- a_j'yi seçtiğimizi varsayalım.
- Kalan elemanları kaç farklı şekilde seçebiliriz? **n-2**
- $P(n,n) = n.(n-1)(n-2)\ldots1 = \mathbf{n!}$

Permütasyonlar

Örnek: A B C D E F G H harflerinin kaç permütasyonu bir ABC alt dizisi içerir?

Çözüm:

- Toplam 6 eleman: ABC'yi bir eleman olarak ve D,E,F,G,H'yi diğer 5 eleman olarak düşünün.
- O zaman bu elemanların permütasyon sayısını saymamız gerekiyor. **6! = 720**

Teorem: $0 \leq r \leq n$ olmak üzere ve n ve r tamsayılar ise, r-li permütasyon, bir kümenin r elemanının sıralı bir düzenlemesidir. n farklı elemanlı bir kümenin r-permütasyonlarının sayısı:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Permütasyonlar

Örnek: S = {a,b,c} kümesinin 2-li permütasyonları:

- ab, ac, ba, bc, ca, cb
- P(n,r) = P(3,2) = 3!/(3-2)! = **6**

Örnek: Bir yarışta 8 koşucu olduğunu ve kazananın altın, ikinci sırada bitirenin gümüş ve üçüncü sırada bitirenin bronz madalya aldığını varsayalım. Yarışın tüm olası sonuçları gerçekleşirse ve beraberlik yoksa bu madalyaları vermenin kaç farklı yolu vardır?

- **Çözüm:** Madalyaları vermenin farklı yollarının sayısı, 8 elemanlı bir kümenin 3-lü permütasyonlarının sayısıdır.
- P(8,3) = 8!/(8-3)! = 8*7*6 = **336** elde edilir.

Kombinasyonlar

- Bir kümenin elemanlarının r-li kombinasyonu, kümeden sırasız bir r eleman seçimidir. Böylece, bir r-li kombinasyonu r elemanlı bir kümenin basit bir alt kümesidir.

Örnek: S = {a,b,c} kümesinin 2-li kombinasyonları:

- ab, ac, bc
- Burada ab 2 permütasyonu kapsar. (ab,ba)

Teorem: $0 \leq r \leq n$ olmak üzere ve n ve r tamsayılar ise, n elemanlı bir kümenin r-li kombinasyonlarının sayısı:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Kombinasyonlar

İspat:

- Kümenin r-permütasyonları, önce kümenin r-kombinasyonlarını (C(n,r)) oluşturarak ve ardından her r-kombinasyonundaki elemanları sıralayarak elde edilebilir, bu da P(r,r) ile yapılabilir. Sonuç olarak;
- P(n,r) = C(n,r) * P(r,r)
- Böylece;
- C(n,r) = P(n,r) / P(r,r) = P(n,r) / r! = n! / r!(n-r)! elde edilir.

Kombinasyonlar

Örnek: Bir kümede A1, A2, A3, A4 ve A5 öğelerini varsayalım. 3-elemanlı kombinasyonlarının tamamı:

- A1 A2 A3
- A1 A2 A4
- A1 A2 A5
- A1 A3 A4
- A1 A3 A5
- A1 A4 A5
- A2 A3 A4
- A2 A3 A5
- A2 A4 A5
- A3 A4 A5

Her 3'lü kombinasyon birçok 3'lü permütasyonu kapsar.

A1 A2 A3
A1 A3 A2
A2 A1 A3
A2 A3 A1
A3 A1 A2
A3 A2 A1

$$P(5,3) = C(5,3)\,P(3,3)$$

$$C(5,3) = P(5,3)/P(3,3)$$

Kombinasyonlar

Sonuç: $C(n,r) = C(n,n-r)$

İspat:

- $C(n,r) = n! \,/\, (n-r)!\, r!$
- $= n!/ \,(n-r)!\, (n - (n-r))!$
- $= C(n,n-r)$

Binom Katsayıları

- n elemanlı bir küme üzerinde r-kombinasyonlarının sayısı C(n,r) ile gösterilir.
- Ayrıca bu sayıya binom katsayısı da denir.
- Binom teoremi, binom ifadesinin kuvvet açılımındaki terimlerin ($(a+b)^n$) katsayılarını verir.
- Binom ifadesi, iki terimin (a+b) toplamıdır.

Binom Katsayıları

Örnek: $(a+b)^3$ ifadenin açılımı şu şekilde bulunur:

$$(a+b)^3 =$$

$$(a+b)(a+b)(a+b) =$$

$$(a^2+2ab+b^2)(a+b) =$$

$$a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 =$$

$$1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$$

1 3 3 1 ⟵ **Binom Katsayıları**

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

Binom Katsayıları

Binom Teoremi: a ve b birer değişken, n ise negatif olmayan bir tamsayı olsun. Bu durumda;

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

$$= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

İspat: Açılım yapıldığında çarpımdaki terimler i=0,1,2…n için $a^{(n-i)} b^i$ şeklindedir. $a^{(n-i)} b^i$ li terimi elde etmek için n tane toplamdan (n-i) tane x seçmek gerekir. O halde $a^{(n-i)} b^i$ li terimin katsayısı C(n,i) olur.

(n-i) seçim

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n}$$

$$\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$$

Kaynaklar

- **Kenneth Rosen,** “Discrete Mathematics and Its Applications”, 7th Edition , McGraw Hill Publishing Co., 2012.
- **Milos Hauskrecht,** “Discrete Mathematics for Computer Science”, University of Pittsburgh, Ders Notları.