Kesikli Matematik

İlişkiler (Bağıntılar)

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Ali ALTUNCU
Bilgisayar Mühendisliği

İlişkiler (Bağıntılar)

- Kümelerin elemanları arasındaki ilişkiler (bağıntılar) birçok durumda ortaya çıkmaktadır.
- Her gün bir işyeri ve telefon numarası, bir çalışan ve maaşı, bir kişi ve akrabası gibi çok sayıda ilişkiyle karşılaşırız.
- Matematikte, bir pozitif sayı ve bölenleri, bir tamsayı ve mod 5 ile uyumlu olup olmadığı, bir reel sayı x ve f(x) gibi ilişkilerle karşılaşırız.
- Bilgisayar bilimlerinde, bir program ve kullandığı değişken, bir programlama dili ve bu dilde geçerli bir deyim arasındaki ilişkiler bulunmaktadır.
- İlişkiler, bir uçuş ağı hangi iki şehrin bağıntılı olduğu, karmaşık bir projenin farklı aşamalarının sıralanması veya veritabanlarında bilgilerin saklanması gibi problemlerin çözümlerinde de kullanılabilir.

İlişkiler (Bağıntılar)

Tanım: $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ ve $B=\{b_1,b_2,\ldots, b_m\}$ olsun.

- Kartezyen çarpımı, bir dizi çift tarafından tanımlanır.
- $A \times B = \{(a_1\ b_1), (a_1\ b_2), \ldots, (a_1\ b_m), \ldots, (a_k\ b_m)\}$

Tanım: A ve B iki küme olsun. A'dan B'ye ikili bir ilişki, A x B'nin bir alt kümesidir.

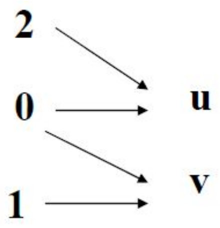
- Başka bir deyişle, A’dan B’ye ikili ilişki kümesi R, bir sıralı çiftler kümesidir ve sıralı elemanlardan birincisi A’dan, ikincisi B’den alınır.
- $(a,b) \in R$’nin gösterimi için $a\ R\ b$, $(a,b) \notin R$’nin gösterimi için $a \not R\ b$ kullanılmaktadır.
- Eğer (a,b) *R*’de bulunuyorsa, a ile b *R* tarafından **ilişkilendirilmiştir.**

İlişkiler (Bağıntılar)

Örnek: A={a,b,c} ve B={1,2,3} olsun.

- R={(a,1),(b,2),(c,2)} A'dan B'ye bir ilişki midir? **Evet**
- Q={(1,a),(2,b)} A'dan B'ye bir ilişki midir? **Hayır**
- P={(a,a),(b,c),(b,a)} A'dan A'ya bir ilişki midir? **Evet**
  - Bir *R* ikili ilişkisini aşağıdaki gibi graf şeklinde gösterebiliriz:

Örnek: R ⊆ A x B ve A = {0, 1, 2}, B = {u,v}, R = { (0,u), (0,v), (1,v), (2,u) } olsun.



İlişkiler (Bağıntılar)

- Bir *R* ikili ilişkisini aşağıdaki gibi tablo şeklinde de gösterebiliriz:

Örnek: R ⊆ A x B ve A = {0, 1, 2}, B = {u,v}, R = { (0,u), (0,v), (1,v), (2,u) } olsun.

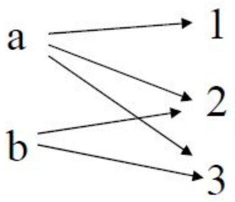
R	u	v
0	x	x
1		x
2	x	

or

R	u	v
0	1	1
1	0	1
2	1	0

- İlişkiler, A ve B'deki öğeler arasındaki bire-çok ilişkiyi temsil eder.

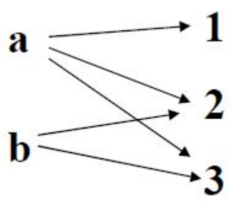
Örnek:



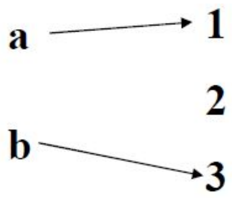
İlişkiler (Bağıntılar)

- A'dan B'ye bir ilişki ve fonksiyon arasındaki fark nedir?

Cevap: A,B kümeleri üzerinde tanımlanan bir fonksiyon *f*: A $\longrightarrow$ B , B'den sadece bir elemanı A'dan bir elemana atar ve b=f (a) şeklinde gösterilir. f fonksiyonu A x B'nin altkümesi olduğundan A'dan B'ye bir ilişkidir. Fakat bir ilişkide A'daki bir eleman B'nin birden fazla elemanıyla ilişkilendirilebilir. Dolayısıyla ilişkiler fonksiyonların genelleştirilmiş şeklidir ve kümeler arasında daha geniş bir ilişkiler göstermek için kullanılır.



İlişki



Fonksiyon

İlişkiler (Bağıntılar)

Tanım: A kümesindeki bir ilişki, A'dan A'ya bir ilişkidir.

Örnek: A= {1,2,3,4} şeklinde tanımlansın ve *R* = {(a,b)| a b'yi böler} ilişkisindeki sıralı çiftler;

- *R* = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)}

R	1	2	3	4
1	x	x	x	x
2		x		x
3			x	
4				x

İlişkiler (Bağıntılar)

Tanım: A kümesindeki bir ilişki, A'dan A'ya bir ilişkidir.

Örnek: A= {1,2,3,4} şeklinde tanımlansın ve *R* = {(a,b) | ancak ve ancak a ≠ b} ilişkisindeki sıralı çiftler;

- *R* = {(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)}

R	1	2	3	4
1		x	x	x
2	x		x	x
3	x	x		x
4	x	x	x	

İlişkiler (Bağıntılar)

Teorem: A kümesindeki ikili ilişkilerin sayısı, | A | = n ise;

- $2^{|AxA|} = 2^{n2}$ şeklinde hesaplanır.

Örnek: A = {1,2} ise A x A = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)} olur. (A x A)'nın olası ilişkilerin listesi;

$$\left.\begin{array}{lr}
\bullet\ \varnothing & \ldots\ 1 \\
\bullet\ \{(1,1)\}\quad \{(1,2)\}\quad \{(2,1)\}\quad \{(2,2)\} & \ldots\ 4 \\
\bullet\ \{(1,1),(1,2)\}\quad \{(1,1),(2,1)\}\quad \{(1,1),(2,2)\} & \ldots\ 6 \\
\quad \{(1,2),(2,1)\}\quad \{(1,2),(2,2)\}\quad \{(2,1),(2,2)\} & \\
\bullet\ \{(1,1),(1,2),(2,1)\}\quad \{(1,1),(1,2),(2,2)\} & \ldots\ 4 \\
\quad \{(1,1),(2,1),(2,2)\}\quad \{(1,2),(2,1),(2,2)\} & \\
\bullet\ \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\} & \ldots\ 1
\end{array}\right\}\ \mathbf{16}$$

Yansımalı İlişki

Tanım: Her a ∈ A elemanı için (a,a) ∈ *R* ise, A kümesi üzerindeki bir *R* ilişkisi **yansımalı (yansıyan)** olarak adlandırılır.

Örnek: A= {1,2,3,4} kümesi üzerindeki;

- *R* = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)} ilişkisi **yansımalı** mıdır?
- **Cevap: Evet** (Çünkü (1,1), (2,2), (3,3) ve (4,4) ∈ *R*)

$$R = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Not: Bir *R* ilişkisi, ancak ve ancak *R*'nin ana köşegeni üzerindeki değerleri 1 olduğunda yansımalıdır.

Yansımasız İlişki

Tanım: Her a ∈ A elemanı için (a,a) ∉ *R* ise, A kümesi üzerindeki bir *R* ilişkisi **yansımasız** olarak adlandırılır.

Örnek: A= {1,2,3,4} kümesi üzerindeki;

- *R* = {(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)} ilişkisi **yansımasız** mıdır?
- **Cevap: Evet** (Çünkü, (1,1),(2,2),(3,3) ve (4,4) ∉ *R*)

$$R = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

Not: Bir *R* ilişkisi, ancak ve ancak *R*'nin ana köşegeni üzerindeki değerleri 0 olduğunda yansımasızdır.

Simetrik İlişki

Tanım: Bir A kümesi üzerindeki bir *R* ilişkisi $\forall$ a, b $\in$ A için (a,b) $\in$ *R* ve (b,a) $\in$ *R* şartını sağlıyorsa **simetrik** olarak adlandırılır.

Örnek: A= {1,2,3,4} kümesi üzerindeki;

- *R* = {(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)} ilişkisi **simetrik** midir?
- **Cevap: Evet** (Tanımdaki şartı sağlıyor)

Örnek 2: A= {1,2,3,4} kümesi üzerindeki;

- *R* = {(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)} ilişkisi **simetrik** midir?
- **Cevap: Hayır** ((2,1) $\in$ *R* iken(1,2) $\notin$ *R*)

Ters Simetrik İlişki

Tanım: Bir A kümesi üzerindeki bir *R* ilişkisi ∀ a, b ∈ A için (a,b) ∈ *R* ve (b,a) ∈ *R* olduğunda a=b şartını sağlıyorsa **ters simetrik** olarak adlandırılır.

Örnek: A= {1,2,3,4} kümesi üzerindeki;

- *R* = {(1,1),(1,2),(2,1)} ilişkisi **ters simetrik** midir?
- **Cevap: Hayır** (1≠2 olmak üzere (1,2) ve (2,1) ikilisi olduğundan dolayı)

Örnek 2: A= {1,2,3,4} kümesi üzerindeki;

- *R* = {(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)} ilişkisi **ters simetrik** midir?
- **Cevap: Evet** (İlişkilerin hiçbirisinde a≠b olmak üzere (a,b) ve (b,a) ikilileri yoktur.)

Geçişli İlişki

Tanım: $\forall$ a, b, c $\in$ A için (a,b) $\in$ *R* ve (b,c) $\in$ *R* iken, (a,c) $\in$ *R* ise A kümesi üzerindeki *R* ilişkisi **geçişlidir.**

Örnek : A= {1,2,3,4} kümesi üzerindeki;

- *R* = {(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)} ilişkisi **geçişli** midir?
- **Cevap: Evet** ((3,2),(2,1),(3,1) ve (4,2),(2,1),(4,1) ve (4,3),(3,1),(4,1) çiftler kümesine sahiptir.)

Örnek 2: A= {1,2,3,4} kümesi üzerindeki;

- *R* = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)} ilişkisi **geçişli** midir?
- **Cevap: Hayır** ((3,4),(4,1) $\in$ *R* iken (3,1) $\notin$ *R*)

İlişkileri Birleştirmek

Tanım: A'dan B'ye ilişkiler, A x B'nin bir alt kümesi olduğundan, A’dan B’ye ikili ilişki, iki kümenin birleştirilebildiği gibi birleştirilebilir.

Örnek: A = {1,2,3}, B = {u,v} ve

R_1 = {(1,u), (2,u), (2,v), (3,u)}

R_2 = {(1,v),(3,u),(3,v)} olsun.

- $R_1 \cup R_2$ = {(1,u),(1,v),(2,u),(2,v),(3,u),(3,v)}
- $R_1 \cap R_2$ = {(3,u)}
- $R_1 - R_2$ = {(1,u),(2,u),(2,v)}
- $R_2 - R_1$ = {(1,v),(3,v)}

İlişkileri Birleştirmek

Örnek: $R_1 = \{(x,y) \mid x<y\}$ ve $R_2 = \{(x,y) \mid x>y\}$ olsun.

- $R_1 \cup R_2 = \{(x,y) \mid x \neq y\}$
- $R_1 \cap R_2 = \varnothing$
- $R_1 - R_2 = \{(x,y) \mid x<y\}$
- $R_2 - R_1 = \{(x,y) \mid x>y\}$

İlişkilerin Matris Gösteriminde Birleşimi

- $M_{R1 \cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2}$

Örnek: A = {1,2,3} , B = {u,v} ve R1 = {(1,u), (2,u), (2,v), (3,u)}, R2 = {(1,v),(3,u),(3,v)} olsun.

- $M_{R1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- $M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

- $M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

İlişkilerin Matris Gösteriminde Birleşimi

- $M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$

Örnek: A = {1,2,3} , B = {u,v} ve R1 = {(1,u), (2,u), (2,v), (3,u)}, R2 = {(1,v),(3,u),(3,v)} olsun.

- $M_{R1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- $M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

- $M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

İlişkilerin Bileşkesi

Tanım: R, A kümesinden B kümesine bir ilişki ve S, B kümesinden C kümesine bir ilişki olsun. R ve S'nin bileşkesi, a ∈ A ve c ∈ C olan (a,c) ikililerinden oluşur. R ve S'nin bileşkesi S o R ile gösterilir.

- $M_{S \circ R} = M_R \oplus M_S$ (Boole Çarpanı)

Örnek: A = {1,2,3}, B = {0,1,2}, C = {a,b} ve; R = {(1,0), (1,2), (3,1),(3,2)}, S = {(0,b),(1,a),(2,b)} ilişkileri olsun.

- $M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

İlişkilerin Bileşkesi

Örnek (devam): A = {1,2,3}, B = {0,1,2}, C = {a,b} ve; R = {(1,0), (1,2), (3,1),(3,2)}, S = {(0,b),(1,a),(2,b)} ilişkileri olsun.

- $M_{S\,o\,R} = \begin{bmatrix} ((1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0)) & ((1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1)) \\ ((0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0)) & ((0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1)) \\ ((0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0)) & ((0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1)) \end{bmatrix}$

- $M_{S\,o\,R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

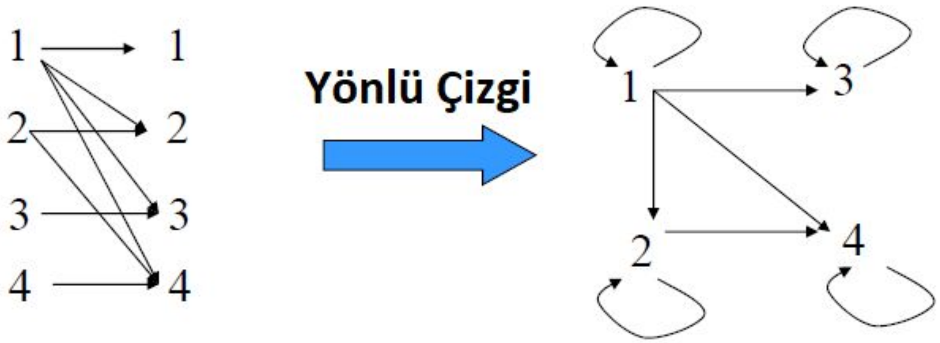
- S o R = {(1,b),(3,a),(3,b)}

İlişkilerin Yönlü Çizge Kullanarak Gösterimi

- Bir ilişkiyi göstermenin bir diğer yolu da **yönlü çizge** kullanmaktır.
- Bu gösterimde, kümenin her elemanı bir nokta ile gösterilir ve her sıralı çift bir ok kullanarak gösterilir.
- Yönlü çizge de, köşelerin (düğümlerin) kümesi V ile, V'nin elemanlarının sıralı çiftlerini gösteren kenarlar kümesi E'den oluşur. (a,b) kenarının başlangıç düğümü a, bitiş düğümü b olarak adlandırılır.
- (a,a) şeklinde bir kenar, a düğümünün kendisinden kendisine bir çizgiyle gösterilir. Bu şekildeki bir kenar, döngü olarak adlandırılır.

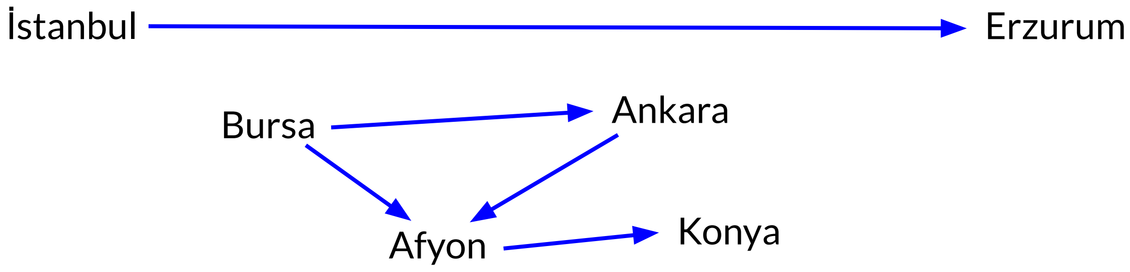
İlişkilerin Yönlü Çizge Kullanarak Gösterimi

Örnek: A={1,2,3,4} kümesindeki R = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)} ilişkisinin yönlü çizgesi şu şekildedir:



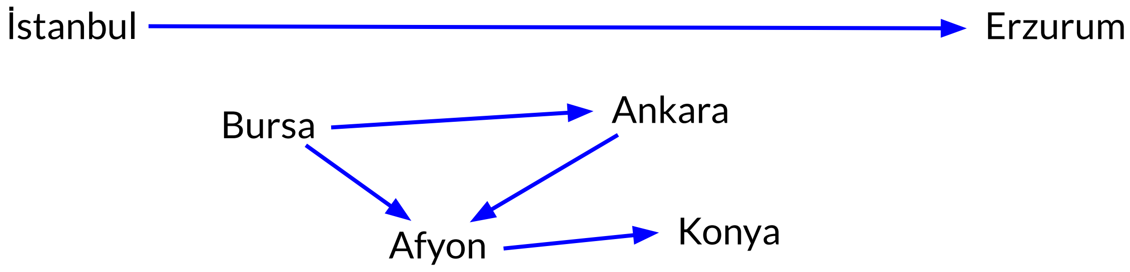
İlişkilerin Kapanışları

- Şekildeki gibi, bir bilgisayar ağının Bursa, Ankara, Konya, Afyon, İstanbul ve Erzurum'da veri merkezlerine sahip olduğunu kabul edelim.
- R, (a,b) şeklinde bir veri merkezi a'dan diğer veri merkezi olan b'ye telefon hattı olması ilişkisini içermektedir.
- **Bir merkezden diğerine doğrudan veya dolaylı bir veya daha fazla telefon hattı olduğunu nasıl belirleriz?**



İlişkilerin Kapanışları

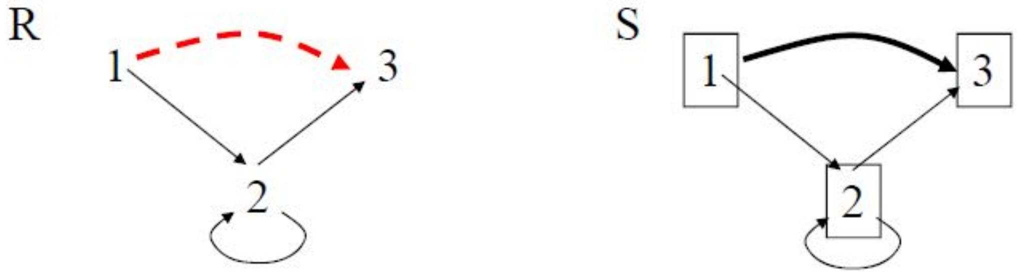
- Tüm bağlantılar direk olmadığı için R'deki ilişkiler doğrudan kullanılamaz.
- Örneğin; Bursa'dan Konya'ya Afyon üzerinden gidilir.
- İlişkilerdeki tanımlamalarda R geçişli değildir çünkü tüm çiftleri içermemektedir.
- Çözüm, bir bağlantıya sahip veri merkezlerinin tüm çiftlerini bir geçişli ilişki olan S'yi oluşturarak bulabiliriz.
- S ilişkisi R'yi içerir ve R'yi içeren tüm geçişli ilişkilerin altkümesidir. Bu ilişki R'nin **geçişli kapanışlı ilişkisi** olarak adlandırılır.



İlişkilerin Kapanışları

Not: Bir ilişkinin geçişli bir kapanışını bulmak, yönlü bir çizgide bağlantılı tüm eleman çiftlerini bulmaya karşılık gelir.

Örnek: A={1,2,3} kümesindeki R = {(1,2), (2,2), (2,3)} ilişkisinin **geçişli kapanışlı** ilişkisi nedir?



- **Cevap:** S= {(1,2), (2,2), (2,3),(1,3)}

Not: Geçişli kapanışlı ilişkisi R'yi içeren en küçük geçişli ilişkidir ve S ⊇ R'dir.

İlişkilerin Kapanışları

Örnek: A={1,2,3} kümesindeki R={(1,1),(1,2),(2,1),(3,2)} ilişkisinin **yansımalı kapanışlı** ilişkisi nedir?

- **Cevap:** S= {(1,1),(1,2),(2,1),(3,2),(2,2),(3,3)}

Örnek: A={1,2,3} kümesindeki R={(1,2),(1,3),(2,2)} ilişkisinin **simetrik kapanışlı** ilişkisi nedir?

- **Cevap:** S= {(1,2),(1,3), (2,2),(2,1), (3,1)}

Denklik İlişkileri

Tanım: Bir A kümesinde tanımlı bir ilişki, yansımalı, geçişli ve simetrik ise denklik ilişkisi olarak adlandırılır.

Örnek: A = {0,1,2,3,4,5,6} kümesinde R= {(a,b)| a,b A, a ≡ b (mod 3)} ilişkisi tanımlansın. R ilişkisinin tam sayılar kümesinde denklik ilişkisi olduğunu gösteriniz.

Not: a, b tamsayılar ve m pozitif bir tamsayı olsun. a ≡ b (mod m) olması için gerek ve yeter şart **a mod m = b mod m** sağlanmasıdır.

Çözüm:

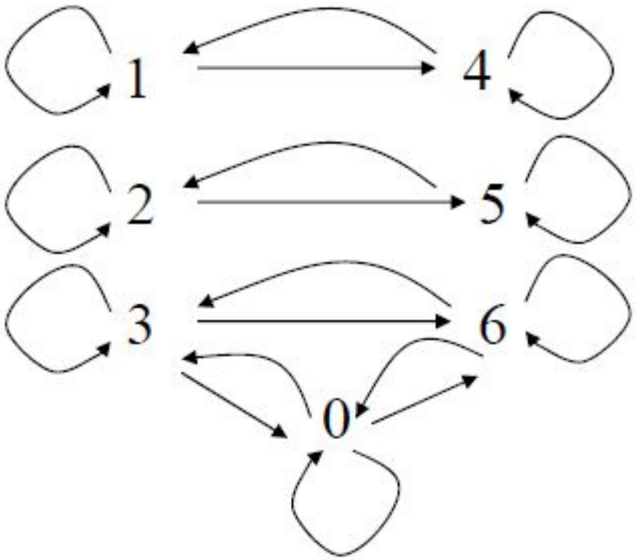
- 0 mod 3 = 0 1 mod 3 = 1 2 mod 3 = 2 3 mod 3 = 0
- 4 mod 3 = 1 5 mod 3 = 2 6 mod 3 = 0

R = {(0,0),(0,3),(3,0),(0,6),(6,0),(1,1),(1,4),(4,1),(4,4),(2,2),(2,5),(5,2),(5,5),(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)} şeklinde olur.

Denklik İlişkileri

R = {(0,0),(0,3),(3,0),(0,6),(6,0),(1,1),(1,4),(4,1),(4,4),(2,2),(2,5),(5,2),(5,5),(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)} şeklinde olur.

- R ilişkisi yanısmalı mıdır? **Evet**
- R ilişkisi geçişli midir? **Evet**
- R ilişkisi simetrik midir? **Evet**
- **Tanım gereği R, denklik ilişkisidir.**



Kaynaklar

- **Kenneth Rosen,** “Discrete Mathematics and Its Applications”, 7th Edition , McGraw Hill Publishing Co., 2012.
- **Milos Hauskrecht,** “Discrete Mathematics for Computer Science”, University of Pittsburgh, Ders Notları.