

Mantıksal Tasarım ve Uygulamaları

Dr. Burcu KIR SAVAŞ



Karnaugh Haritaları

Amaç

- Lojik eşitliklerin sadeleştirilmesinde kullanılan 'Karnaugh Haritası' yönteminin tanıtılması
- İki-üç-dört değişkenli 'Karnaugh Haritalarının' hücrelerin anlamlarının açıklanması
- Doğruluk tablolarından elde edilen 'minterim' veya 'maksterim' terimlerinin 'Karnaugh Haritalarına' taşınması
- Fark etmeyen durumların 'Karnaugh Haritalarında' ifade şeklinin gösterilmesi
- Lojik devrelerin tasarımında 'Karnaugh Haritalarının' kullanımının öğretilmesi

Karnaugh Haritaları

- Devre tasarımında lojik eşitlikleri oluşturmak veya oluşturulan lojik eşitlikleri grafiksel olarak sadeleştirmek için yaygın olarak kullanılan yöntemlerden birisi '**Karnaugh Haritası**' (Karnaugh Maps) yöntemidir.
- . 'Karnaugh haritası' (Karno çizelgesi), sadeleştirilecek eşitliğin bütün değerlerini sıralamak için kullanılan, eşitliğin alabileceği en basit (sade) şekli içeren, hücrelerin oluşturduğu bir yöntemdir.
- Giriş değişkenlerinin sayısı artıkça ifadelerin sadeleştirilmesinin zorlaştığı bu yöntem, giriş değişkenleri sayısının 6'ya kadar olduğu durumlarda iyi bir sonuç verir.
- Genelde kullanılan; 2, 3 ve 4 giriş değişkenli Karnaugh haritalarıdır (çizelgeleridir).

Karnaugh Haritaları

Hücrelerin kullanıldığı bu yöntemde, her hücre bir değer ifade eder. Bir çizelgedeki hücre sayısı 2^n ifadesiyle bulunur. (n =değişken sayısı).

Bu durumda iki değişkenli bir sistemde hücre sayısı $2^2=4$, üç değişkenli bir sistemde hücre sayısı $2^3=8$ olur.

Karnaugh haritası oluşturulurken ortaya çıkan düşey doğrultuda bulunan hücrelere 'kolon veya sütun', yatay doğrultuda bulunanlara 'satır' ismi verilir.

1. Sütun	2. Sütun	
m_0	m_2	1. Satır
m_1	m_3	2. Satır

Şekil 1. Karnaugh haritasında hücrelerin oluşturulması.

Karnaugh Haritaları

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6

(a)

$x \backslash yz$		y			
		00	01	11	10
x	0	m_0 $x'y'z'$	m_1 $x'y'z$	m_3 $x'yz$	m_2 $x'yz'$
	1	m_4 $xy'z'$	m_5 $xy'z$	m_7 xyz	m_6 xyz'

(b)

m_0	m_1	m_3	m_2
m_4	m_5	m_7	m_6
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

(a)

$wx \backslash yz$		y			
		00	01	11	10
w	00	m_0 $w'x'y'z'$	m_1 $w'x'y'z$	m_3 $w'x'yz$	m_2 $w'x'yz'$
	01	m_4 $w'xy'z'$	m_5 $w'xy'z$	m_7 $w'xyz$	m_6 $w'xyz'$
w	11	m_{12} $wxy'z'$	m_{13} $wxy'z$	m_{15} $wxyz$	m_{14} $wxyz'$
	10	m_8 $wx'y'z'$	m_9 $wx'y'z$	m_{11} $wx'yz$	m_{10} $wx'yz'$

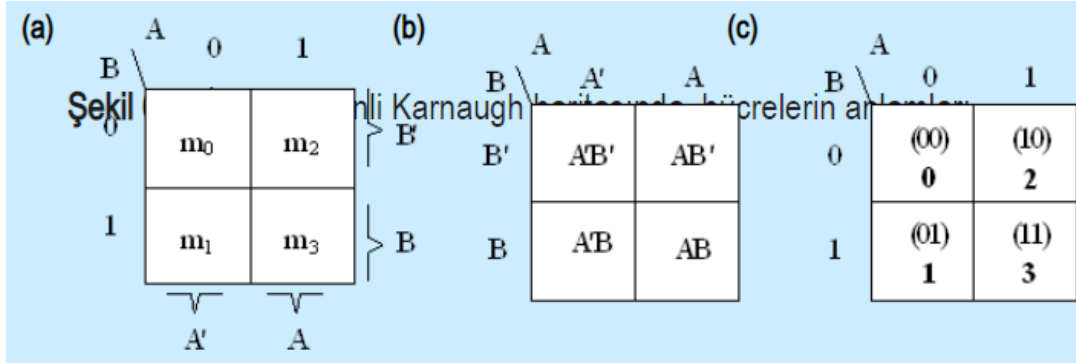
(b)

Karnaugh Haritaları

- Tüm 1 leri kapsayacak en az çemberi kullanılmalıdır.
- Çemberin içindeki tüm kareler 1 içermelidir.
- Gruplamalarda seçilen kutu sayısı 1,2,4,8,16,...olmalıdır.
- Her çember olabildigince büyük olmalıdır.
- Karsılıklı köşe ve kenarlardaki kareler birbirlerine komşu kare sayılırlar.
- Harita içindeki 1 degeri en az çemberi saglamak için birden fazla çember içinde olabilir.
- Bitisik terimlerde sadece 1 degisken değeri farklıdır.

A B	00	01	11	10
C D 00	0 1	4	12	8 1
01	1	5	13	9 1
11	3	7	15	11 1
10	2 1	6	14	10 1

Karnaugh Haritaları

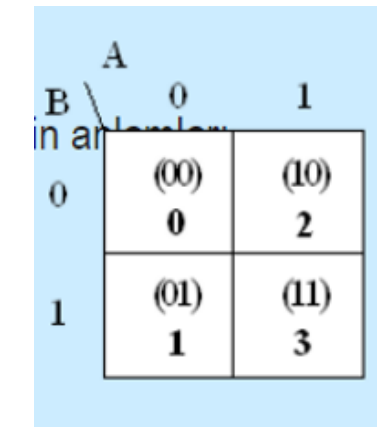
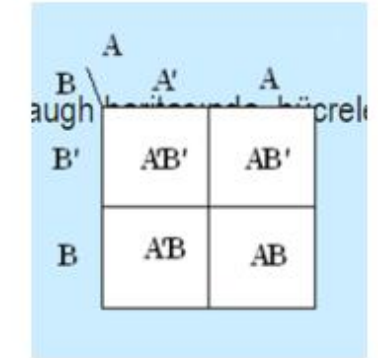
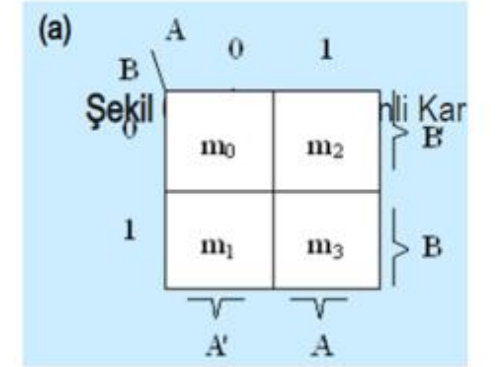


- Karnaugh haritasındaki hücre sayısının 2^n (n = değişken sayısı) formülüyle belirlenmesi nedeni ile, iki değişkenli Karnaugh haritası $2^2=4$ hücre içerir.
- Hücrelerin her birisi, doğruluk tablosunda bulunan kombinasyonlardan (örneğin mintermlerden) birisine karşılık gelir. Hücrelerin ifade ettikleri minterm değerleri belirli bir sistematığe göre belirlenir.

Karnaugh Haritaları

İki değişkenli Karnaugh haritasında hücrelerin anlamları

1. Karnaugh haritasının sol üs köşesi Şekildeki gibi eğik bir şekilde çizilerek, bağımsız değişkenlerin isimleri olan A,B,C,...vb. harfler yazılır.
2. Değişkenlerin alabileceği değerler (0 veya 1) sırasıyla yazılırsa, Şekil 1'deki durum oluşur. Değişken olarak A ve B kullanılırsa; kolonlarda A=0 veya A=1, satırlarda B=0 veya B=1 değerleri temsil edilir.
3. Bu kabullere göre hücrelere temsil ettikleri kombinasyonlar yazılırsa, Şekil 2'deki ifadeler elde edilir.
4. İki değişkenli doğruluk tablosundaki hücrelerde oluşan kombinasyonların karşılıkları olan onlu ve ikili değerlerin hücrelerin içerisine yerleştirilmesi ile, Şekil 3'deki hücre değerleri oluşur.



Karnaugh Haritaları

- **Üç değişkenli Karnaugh haritasında hücrelerin anlamları**

Aynı prensiplere uyularak oluşturulacak üç değişkene sahip Karnaugh haritasında $2^3=8$ hücre bulunur ve iki farklı yerleştirme durumu ortaya çıkar.

Şekilde gösterilen her iki yerleştirme şeklide doğrudur ve daha sonraki aşamalarda her iki tablodan elde edilecek sonuç aynı olur.

		A			
		AB		11	10
C	00	000 AB'C' 0	010 ABC' 2	110 ABC' 6	100 AB'C' 4
	01	001 A'B'C 1	011 ABC 3	111 ABC 7	101 AB'C 5

		C		
		0	1	
AB	00	000 A'B'C' 0	001 A'B'C 1	B
	01	010 A'BC' 2	011 A'BC 3	
	11	110 ABC' 6	111 ABC 7	
	10	100 AB'C' 4	101 AB'C 5	

Karnaugh Haritaları

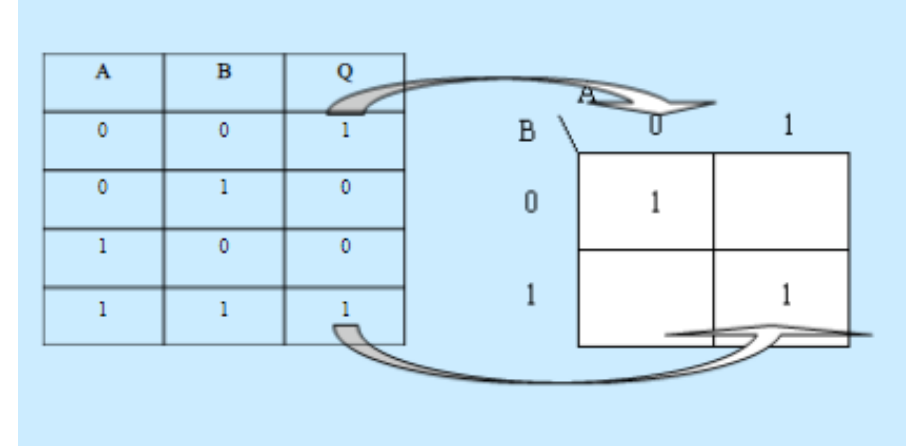
- Dört değişkenli Karnaugh haritasında $2^4=16$ hücre bulunur. Değişkenlerin ikisi yatay, ikisi dikey ekseninde belirtilir.
- Dört değişkenli Karnaugh haritasında oluşan hücreler, hücrelerin temsil ettikleri ikili kombinasyonlar ve her hücrenin onlu karşılığı Şekilde görülmektedir.

A	B	C	D	Q
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

		A									
		AB		00		01		11		10	
CD	00	0000	0100	1100	1000						
	01	0001	0101	1101	1001						
	11	0011	0111	1111	1011						
	10	0010	0110	1110	1010						
		B									

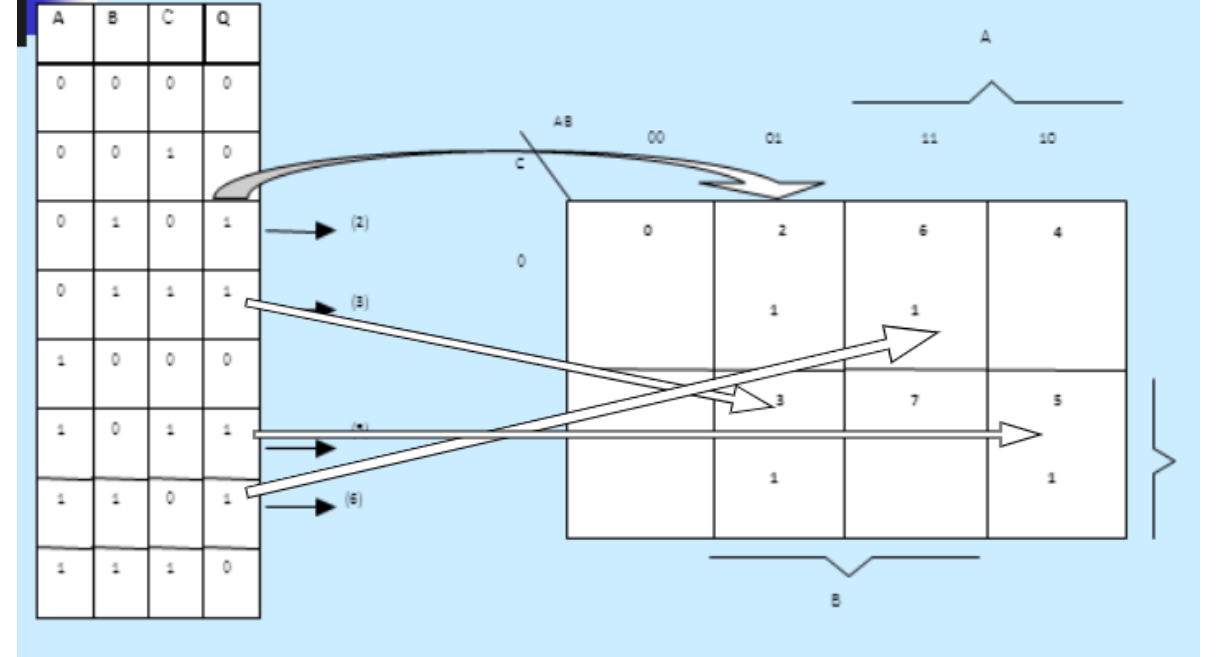
Karnaugh Haritaları

- Karnaugh haritasındaki hücrelerin ifade ettikleri anlamları belirledikten sonra yapılması gerekli işlem, doğruluk tablosundaki bilgilerin Karnaugh haritasına aktarılmasıdır.
- Bilgilerin aktarılması işleminde, doğruluk tablosunda çıkışın '1' olduğu durumlar Karnaugh haritasındaki hücrelere taşınır.
- Taşınma işlemi, doğruluk tablosunda çıkışın '1' olduğu kombinasyonları temsil eden hücrelere '1' değerinin yazılması şeklinde yapılır. Sonuçları '0' olan ifadeler bir sonraki işlem aşaması olan gruplandırmada göz önünde bulundurulmadığı için, çizelgeye yazmaya gerek yoktur.



Karnaugh Haritaları

- Üç değişkenli işlemlerde de doğruluk tablolarındaki '1' değerleri Karnaugh haritalarında temsil edildikleri hücrelere taşınırlar.
- Karnaugh haritasının dışında grup işareti ile belirtilen ve değişkenler ile gösterilen satır ve sütunlar; ilgili değişkenin '1' olarak temsil edildiği satırları veya sütunları göstermektedir.



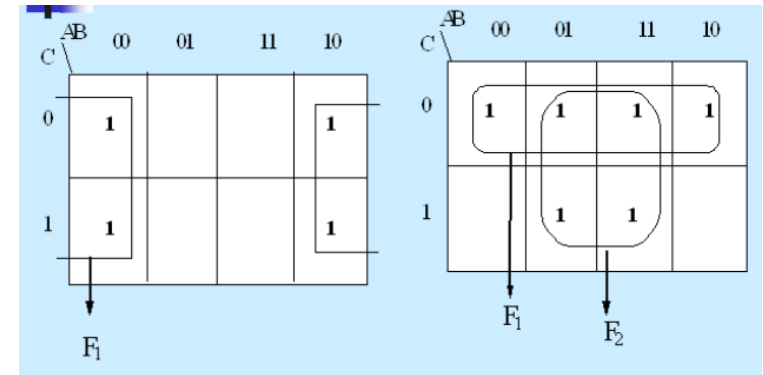
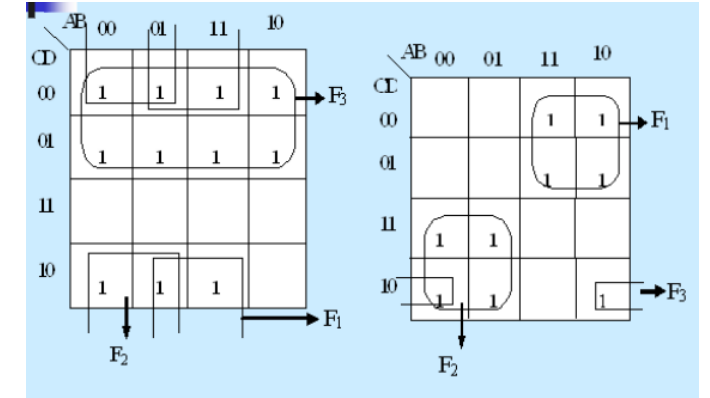
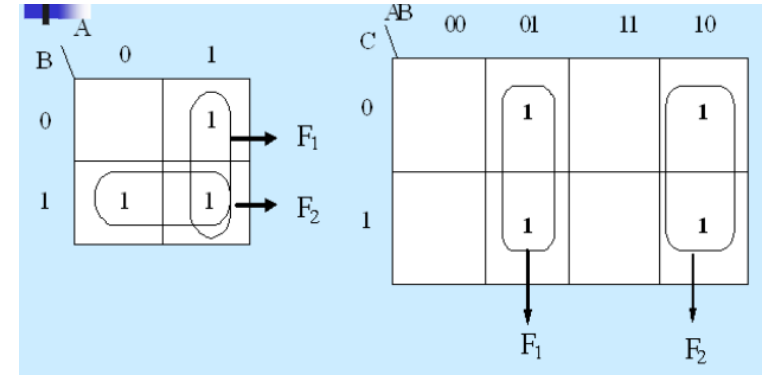
Karnaugh Haritaları

Karnaugh Haritalarındaki Hücrelerin Gruplandırılması ve Graplardan Eşitliklerin Yazılması

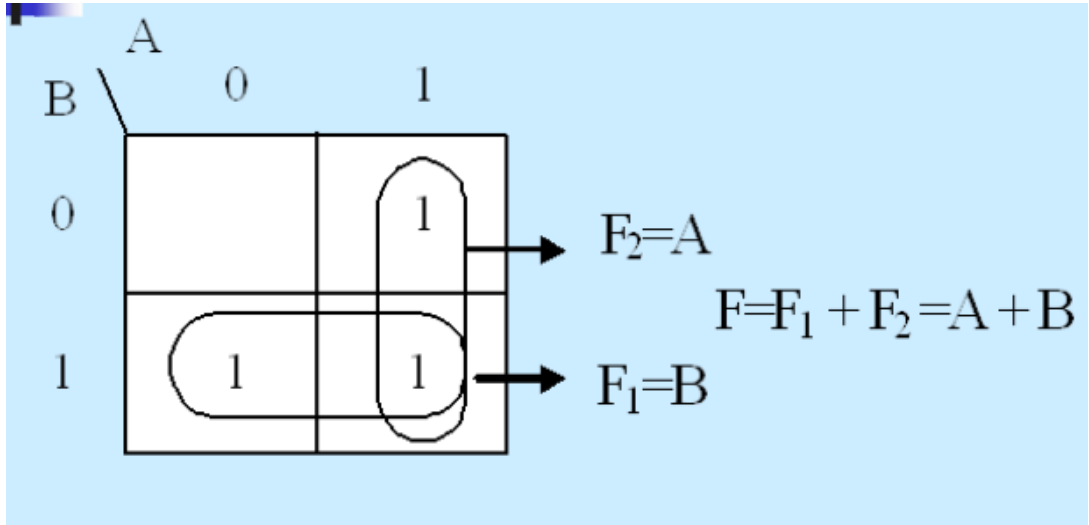
Doğruluk tablosundaki değerlerin Karnaugh haritalarındaki hücrelere taşınmasından sonra gruplandırma yapılır. Yan yana veya alt alta bulunan hücrelerdeki '1' sayılarının halka içerisine alınması işlemine, 'gruplandırma' denir.

Gruplandırmada ve lojik ifadelerin oluşturulmasında takip edilecek sıra ve dikkat edilecek kurallar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. Yan yana veya alt alta bulunan bir, iki veya ikinin kuvveti sayıdaki hücreler gruplandırılabilir. ($2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$,.....).
2. Her bir gruba farklı bir isim verilir.
3. Herhangi bir gruba girmiş olan '1', başka bir gruba girebilir. Bu işlem sonucun daha kısalmasına yardımcı olur.



Karnaugh Haritaları



Şekil 5. iki değişkenli Karnaugh örneği

4. Karnaugh çizelgesini sağa sola veya yukarı aşağı bükecek olursak, çizelge silindirik bir şekle dönüşebilir. Bu durumda çizelgenin alt ve üst hücrelerinde bulunan veya başta ve sondaki hücrelerde olan 1 değerleri bitişik sayılabileceğinden gruplandırma yapılabilir.
5. İki değişkenli Karnaugh'da aynı grup içerisinde dört adet, üç değişkenli Karnaugh'da sekiz adet '1' olması durumunda fonksiyon sonucu '1' olur.
6. Oluşturulan grupların ifade ettikleri kombinasyonlar, grubun bulunduğu kolon(lar) ve satır(lar)da hücreler boyunca değişim göstermeyen değişkenler alınarak oluşturulur. Değişim gösteren değişkenler ise göz ardı edilir

Karnaugh Haritaları

- **Örnek 1:**

Şekil 5'te verilen iki değişkenli Karnaugh'da bulunan değerleri gruplandırarak, gruplara ait eşitlikleri yazalım.

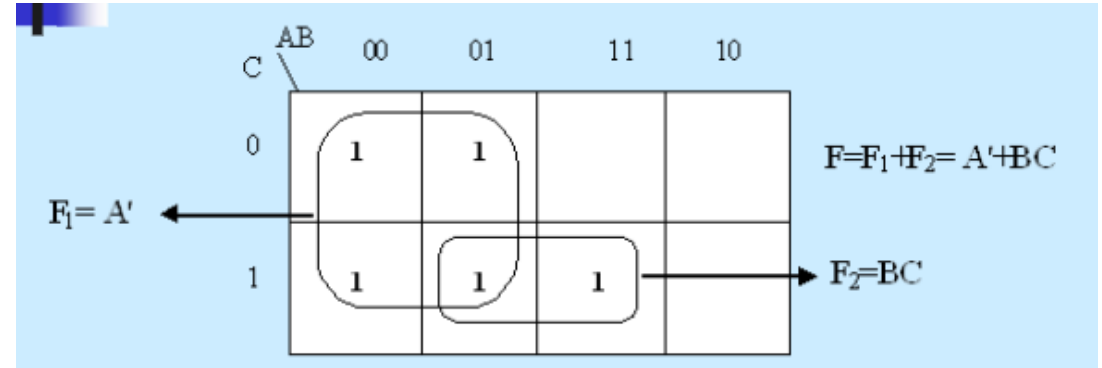
- F1 ve F2 olarak isimlendirilen iki grup oluşturulur. Grupların oluşturup, oluşturulan grupların isimlendirilmesinden sonra yapılacak işlem, her bir grubun temsil ettiği eşitliği yazmaktır.
- F1'in ifade ettiği kombinasyon yazılırken A'nın aldığı değerlere bakılır. Grubun bulunduğu kolonlarda A; hem 0, hemde 1 değerini aldığından 'A' değişkeni yazılmaz.
- Grubun bulunduğu satırda B'nin aldığı değer değişmediğinden ve satır '1' değerini temsil ettiğinden; $F1=B$ olarak elde edilir.
- Aynı şekilde F2'nin bulunduğu kolonda 'A' yalnızca 1 değerini aldığından $F2 = A$ olarak yazılır. Grup her iki satırda olduğundan ve 'B' değişkeni hem '0', hemde '1' değerlerini aldığından B değişkeni yazılmaz. Aynı ayrı yazılan bu grup değerleri toplanırsa, sadeleştirilmiş eşitlik elde edilir.

Karnaugh Haritaları

- Örnek 2:

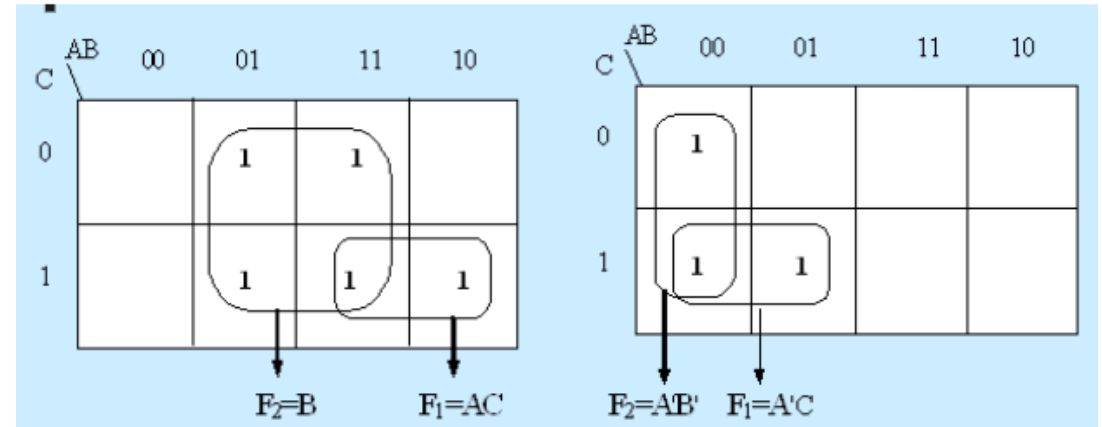
Şekilde görülen 3 değişkenli Karnaugh haritalarında oluşturulan gruplara ait eşitlikleri ve sonuç eşitliği nedir.

- Şekildeki Karnaugh'da F_1 'in ifade ettiği fonksiyon yazılırken; grubun bulunduğu sütunlarda A değeri değişim göstermediğinden ve değişim göstermeyen değer '0' olduğundan fonksiyon A' olarak oluşur.
- Grubun bulunduğu ve B'nin temsil edildiği sütunlarda B değeri '0' ve '1' değerlerine sahip olduğundan B değişkeni yazılmaz. Grup her iki satırı kapladığından ve C değişkenlerinin değerleri değişim gösterdiğinden C değişkeni de eşitlikte belirtilmez. Bu durumda, $F_1 = A'$ eşitliği oluşur.



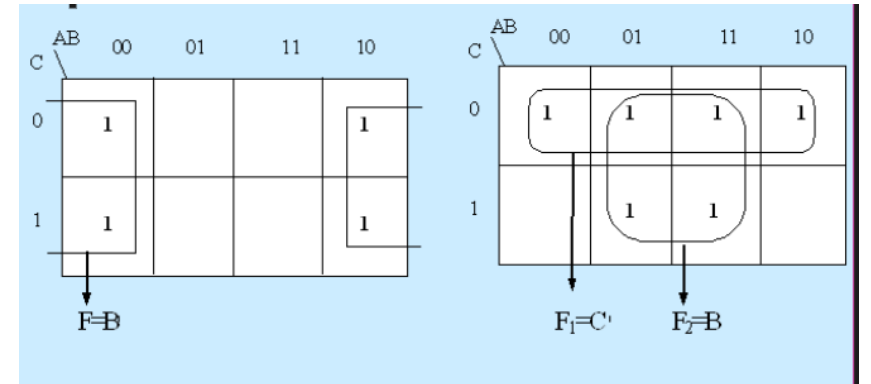
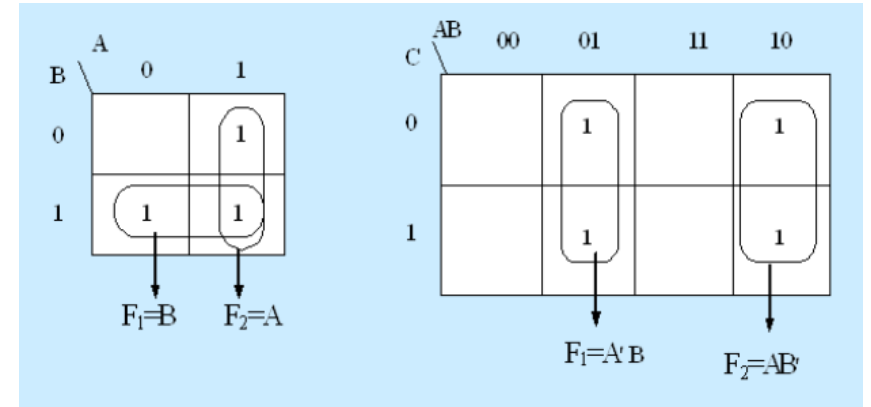
Karnaugh Haritaları

- Örnek 3:
- F2 grubunun bulunduğu sütunlarda B, satırlarda C değişim göstermeyen değişken olduğundan, bu değişkenler çarpım şeklinde yazılarak eşitlik oluşturulur. F2'nin eşitliği; $F_2 = BC$ olarak bulunur. Bulunan eşitlikler toplanırsa, Karnaugh şemasının temsil ettiği eşitlik oluşur. Diğer Karnaugh'larda da aynı prensiplere uyularak gruplar oluşturulur.



Karnaugh Haritaları

- Örnek 4: Herbir Karnaugh'da yapılan gruplara ait eşitlikler yazılırsa, Şekildeki eşitlikler elde edilir.

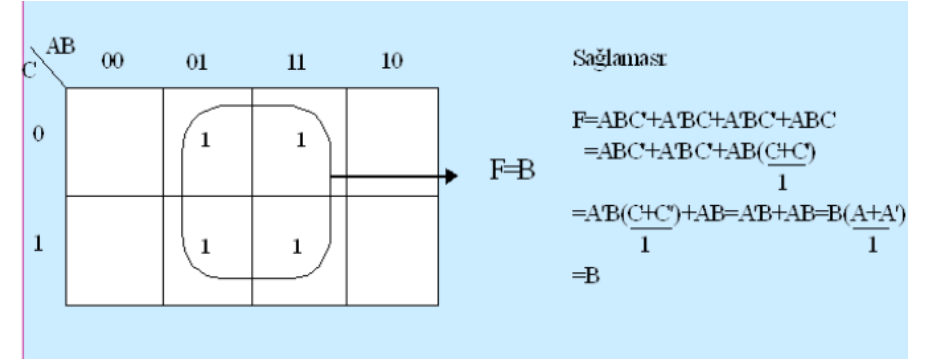


Karnaugh Haritaları

- Örnek 5:

$F=ABC'+A'BC+A'BC'+ABC$ eşitliğini Karnaugh haritası yöntemiyle sadeleştirelim. Sonucun doğru olduğunu Boolean aritmetiği kurallarıyla kontrol edelim.

- Eşitlikteki **mintermlerin** Karnaugh haritasına taşınması ve oluşan 1'lerin gruplandırılması ile Şekildeki Karnaugh elde edilir.
- Gruplandırma sonucunda $F=B$ eşitliği elde edilir. Diğer taraftan verilen eşitliğin boolean cebiri kuralları ile sadeleştirilmesi sonucunda $F=B$ elde edilir.
- Bu durum Karnaugh haritası ve Boolean eşitlikleri ile aynı sonuca ulaşılabileceğinin göstergesidir.
- Bu sonuç, işlemlerin birbirinin sağlamasını yapmak amacıyla kullanılabileceğini gösterir.



Karnaugh Haritaları

Satır	A B	F1(A,B)
0	0 0	0
1	0 1	1
2	1 0	1
3	1 1	0

B \ A	0	1
	0	1
0	0	1
1	1	0

$$F1(A,B) = A' B + A B'$$

Satır	A B	F2(A,B)
0	0 0	0
1	0 1	0
2	1 0	0
3	1 1	1

B \ A	0	1
	0	1
0	0	0
1	0	1

$$F2(A,B) = A B$$

Karnaugh Haritaları

$$Y = \overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} \overline{B} C = \overline{A} \overline{B} (\overline{C} + C) = \overline{A} \overline{B}$$

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Y	AB	00	01	11	10
C	0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$
1	$\overline{A}BC$	$\overline{A}BC$	ABC	$A\overline{B}C$	

Y	AB	00	01	11	10
C	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0

Y	AB	00	01	11	10
C	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0

$$\overline{A} \overline{B}$$

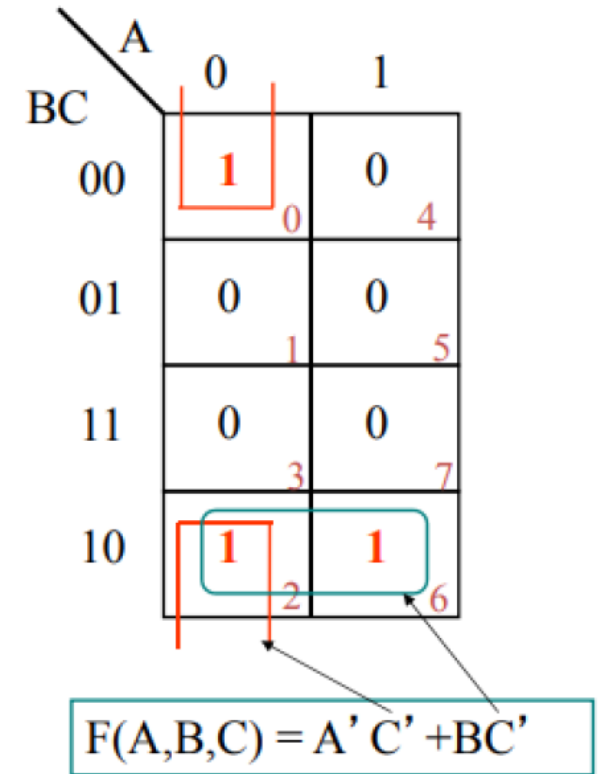
Karnaugh Haritaları

Satır	A B C	F(A,B,C)
0	0 0 0	1
1	0 0 1	0
2	0 1 0	1
3	0 1 1	0
4	1 0 0	0
5	1 0 1	0
6	1 1 0	1
7	1 1 1	0

$$F(A,B,C) = \sum m(0,2,6)$$

$$F'(A,B,C) = \sum m(1,3,4,5,7)$$

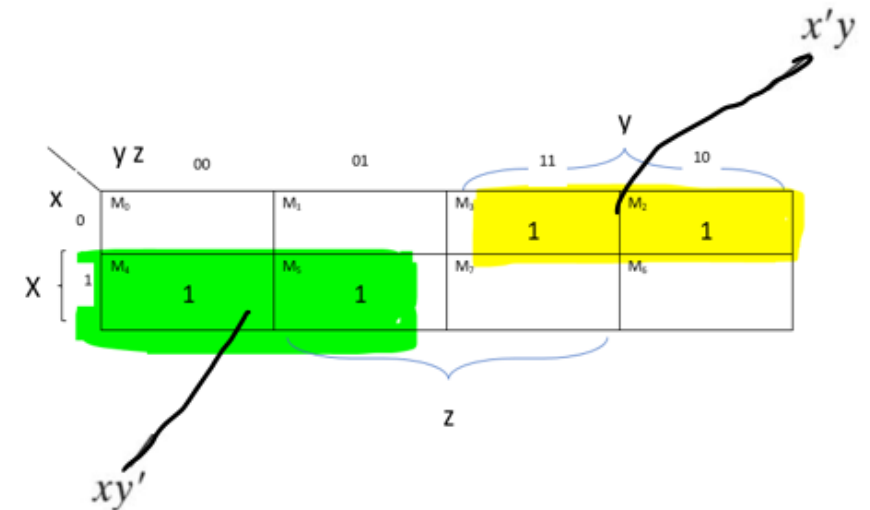
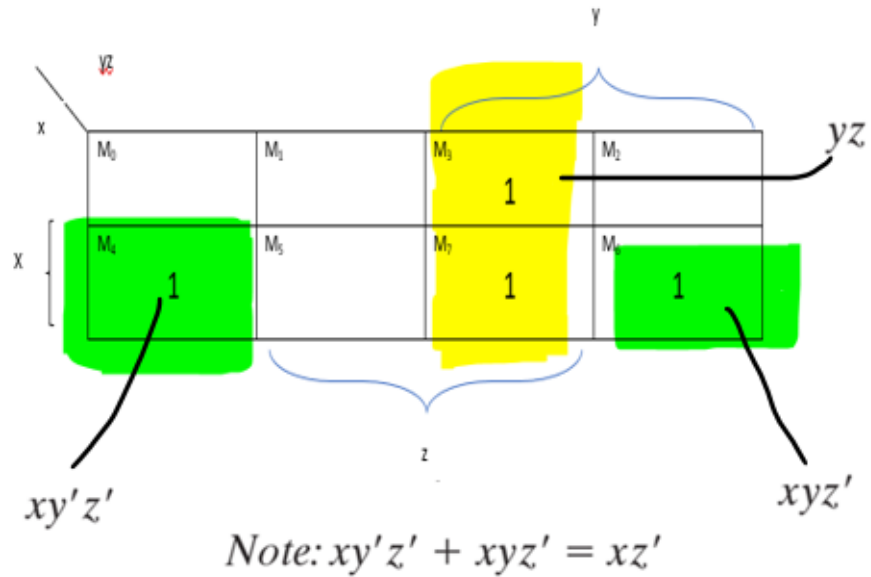
$$F(A,B,C) = \pi M(1,3,4,5,7)$$



Karnaugh Haritaları

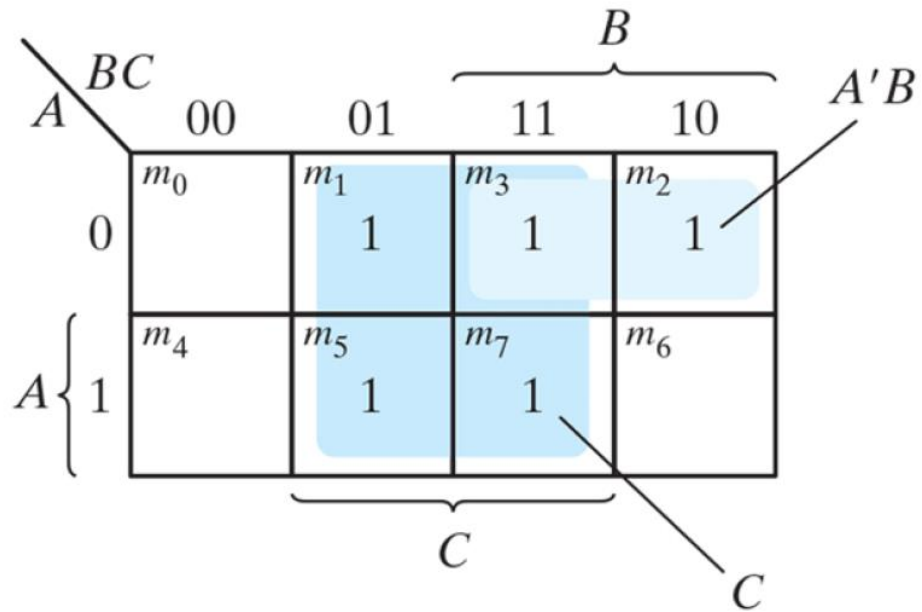
$$F(x,y,z)=\Sigma(3,4,6,7)=yz+xz'$$

- $F(x,y,z)=\Sigma(2,3,4,5)=x'y+xy'$

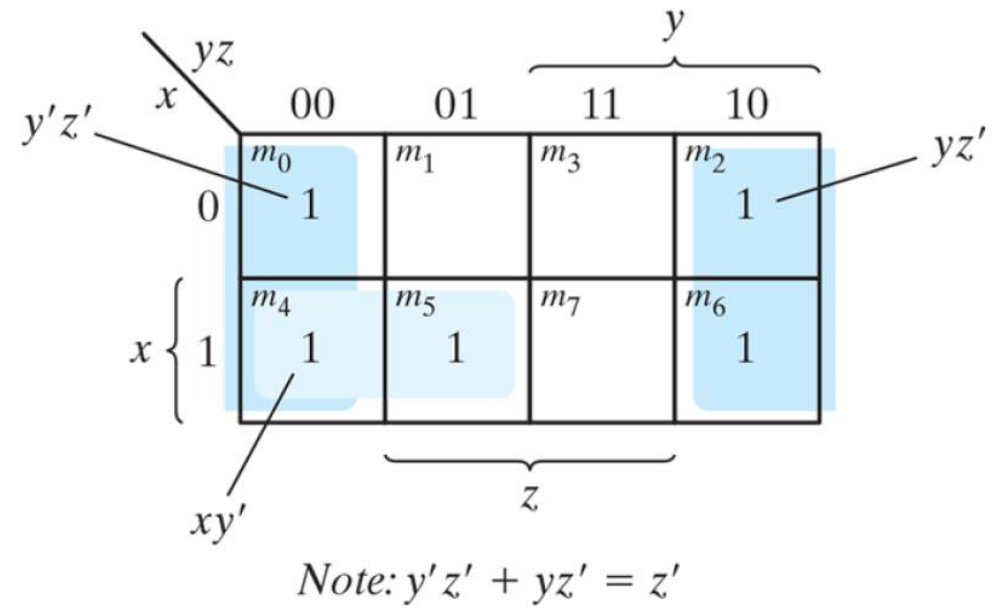


Karnaugh Haritaları

$$F(A,B,C)=A'C+A'B+AB'C+BC=C+A'B$$

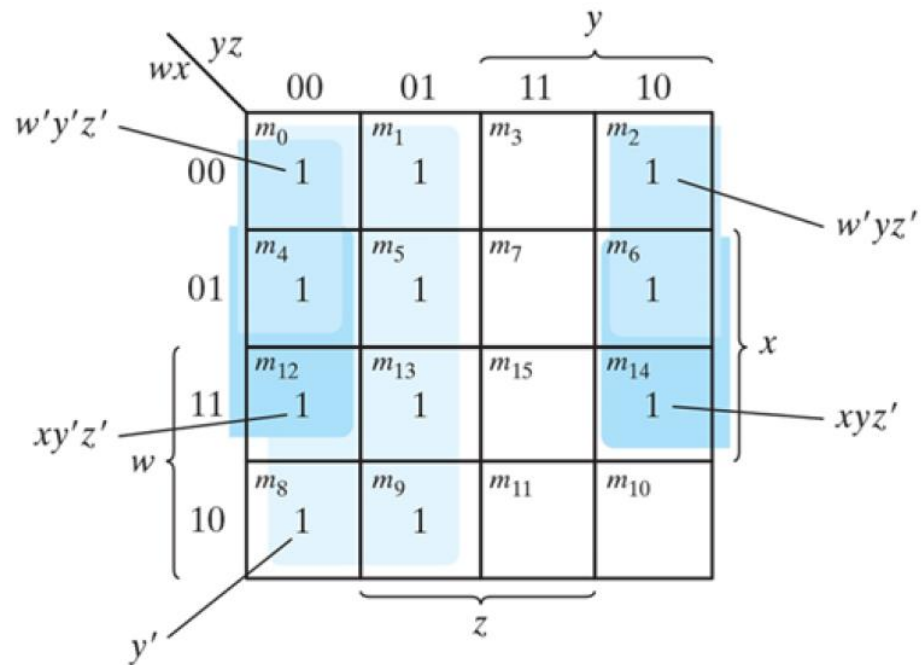


$$F(x,y,z)=\Sigma(0,2,4,5,6)=z'+xy'$$



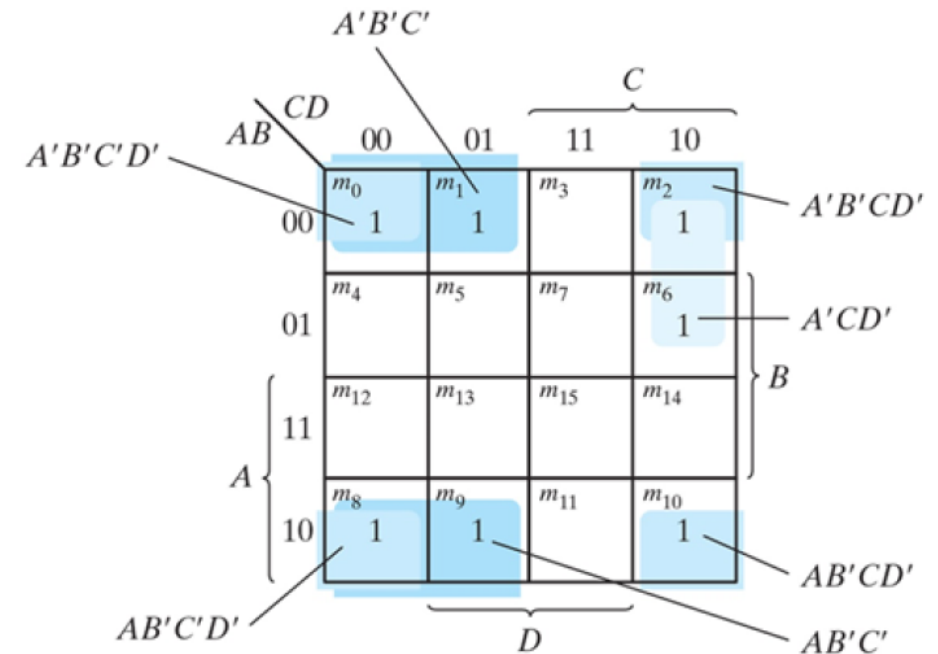
Karnaugh Haritaları

$$F(w,x,y,z) = \Sigma(0,1,2,4,5,6,8,9,12,13,14) = y' + w'z' + xz'$$



Note: $w'y'z' + w'yz' = w'z'$
 $xy'z' + xyz' = xz'$

$$F(A,B,C,D) = A'B'C' + B'CD' + A'BCD' + AB'C = B'D'B'C' + A'CD'$$



Note: $A'B'C'D' + A'B'CD' = A'B'D'$
 $AB'C'D' + AB'CD' = AB'D'$
 $A'B'D' + AB'D' = B'D'$
 $A'B'C' + AB'C' = B'C'$

Karnaugh Haritaları

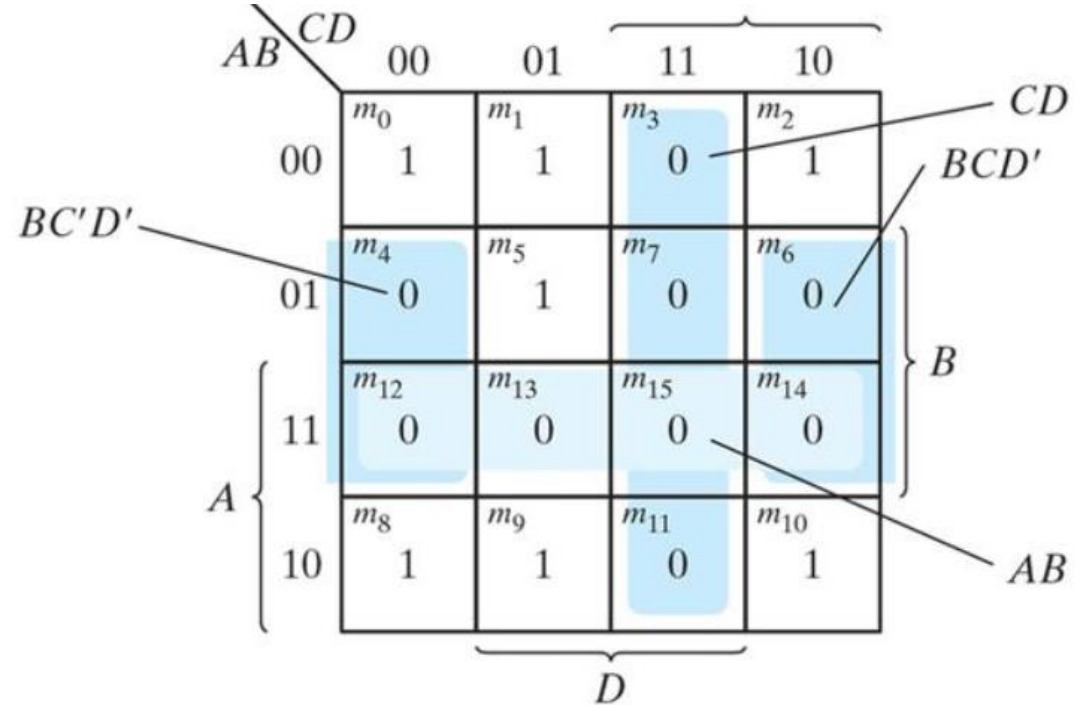
- **Toplamların Çarpımı Sadeleştirilmesi**

- $F(A,B,C,D) = \Sigma(0,1,2,5,8,9,10)$

- $F = B'D' + B'C' + A'C'D$
(Çarpımların toplamı)

- $F' = AB + CD + BD'$

- $F = (A' + B')(C' + D')(B' + D)$
(Toplamların Çarpımı)



Note: $BC'D' + BCD' = BD'$

Karnaugh Haritaları

- Etkisiz durumlar
- $F(w,x,y,z) = \Sigma(1,3,7,11,15)$
- $d(w,x,y,z) = \Sigma(0,2,5)$

		y			
	yz	00	01	11	10
wx	00	m_0 X	m_1 1	m_3 1	m_2 X
	$w'x'$				
	01	m_4 0	m_5 X	m_7 1	m_6 0
	11	m_{12} 0	m_{13} 0	m_{15} 1	m_{14} 0
w	10	m_8 0	m_9 0	m_{11} 1	m_{10} 0
	z				

(a) $F = yz + w'x'$

		y			
	yz	00	01	11	10
wx	00	m_0 X	m_1 1	m_3 1	m_2 X
	$w'z$				
	01	m_4 0	m_5 X	m_7 1	m_6 0
	11	m_{12} 0	m_{13} 0	m_{15} 1	m_{14} 0
w	10	m_8 0	m_9 0	m_{11} 1	m_{10} 0
	z				

(b) $F = yz + w'z$

Karnaugh Haritaları

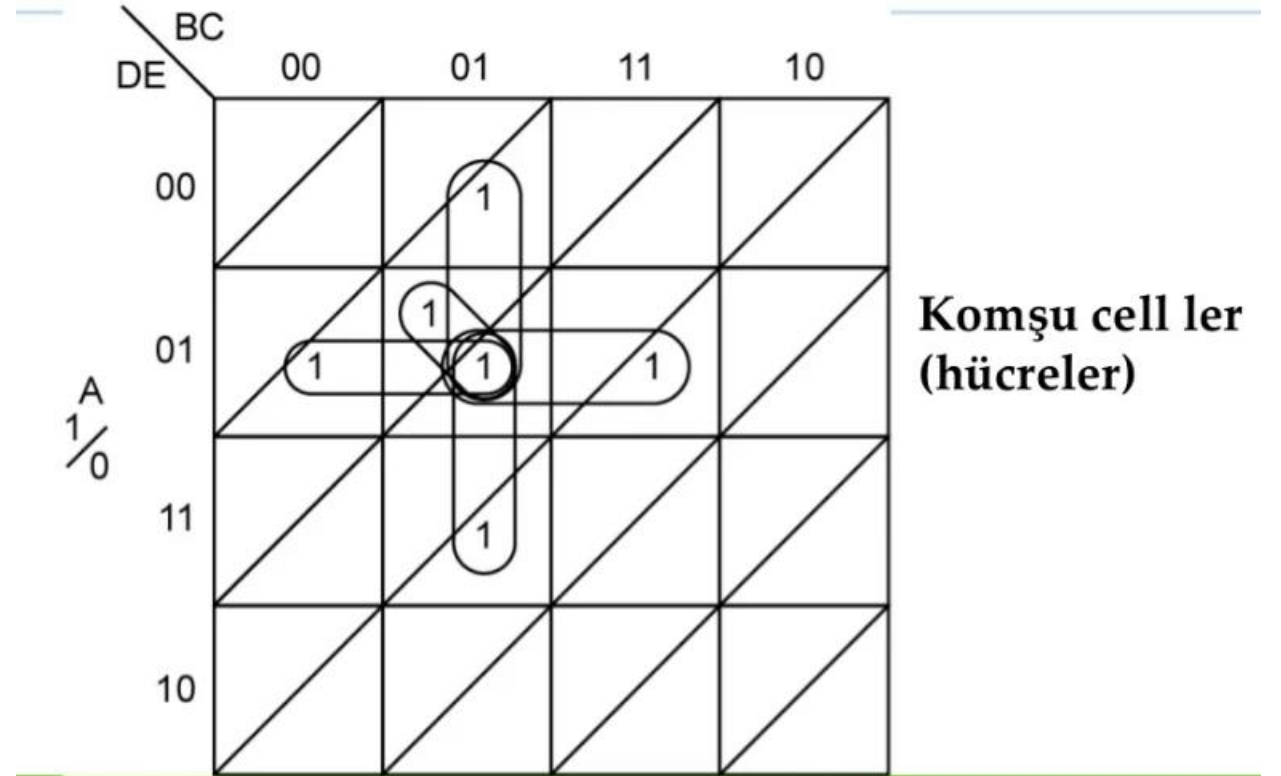
A = 0				
		DE		D
		0 0	0 1	11 10
BC	00	0	1	3 2
	01	4	5	7 6
	11	12	13	15 14
	10	8	9	11 10
B		E		C

A = 1				
		DE		D
		0 0	0 1	11 10
BC	00	16	17	19 18
	01	20	21	23 22
	11	28	29	31 30
	10	24	25	27 26
B		E		C

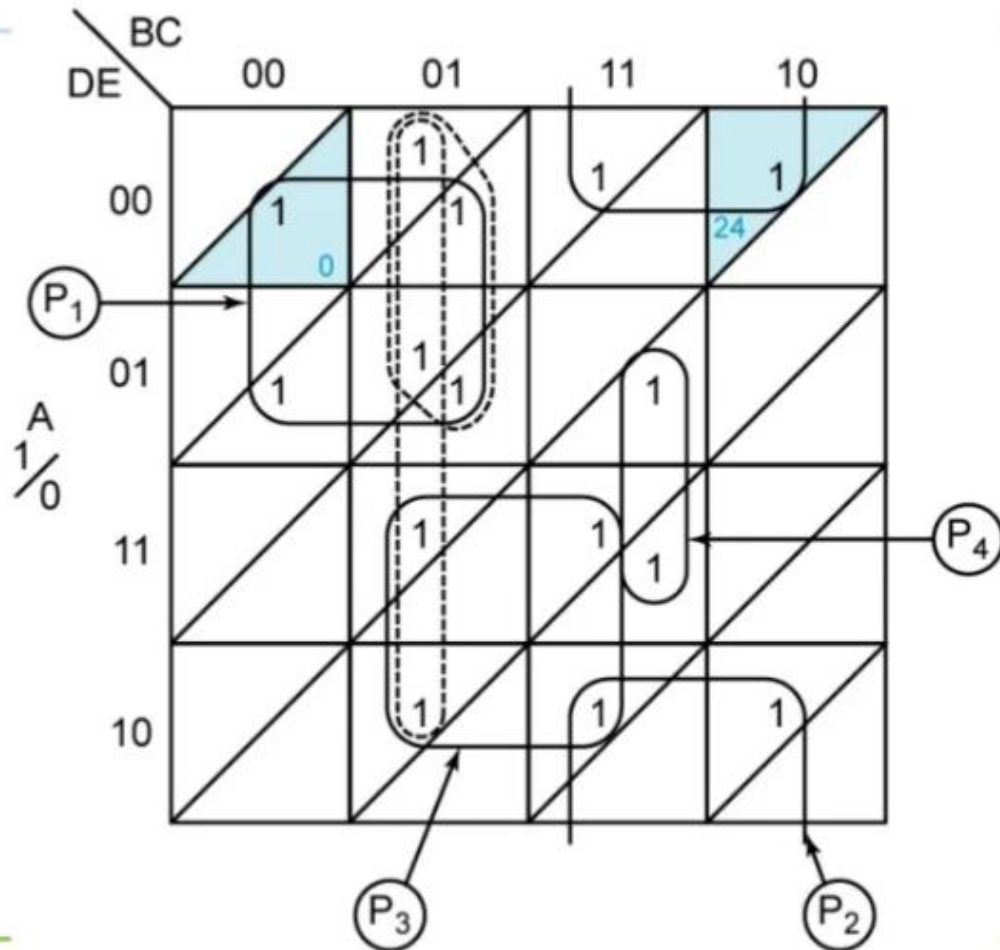
- Beş değişkenli Karno Haritaları : 3 boyutlu tablo kullanılarak A,B,C,D,E değişkenleri ile gösterimi sağlanır.
- BCDE normal iki boyutlu 4'lü karno haritasında gösterilir ve her bir hücre diyagonelden ikiye bölünür. Üst kısım A=1 değerine ve Alt kısım da A=0 değerine verilir. Alt üçgenler 0'dan 15'e ve alt üçgenler 16'dan 31'e numaralandırılır ve komşu üçgenler gruplandırılarak fonksiyonun münümumu bulunur.

Karnaugh Haritaları

- Aşağıda verilen 5 değişkenli fonksiyonun minimum ifadesini Karno haritası kullanarak bulunuz.
- $F(A, B, C, D, E) = \sum m(0,1,4,5,13,15,20,21,22,23,24,26,28,30,31)$
-



Karnaugh Haritaları



Minimum Fonksiyon

$$F = A'B'D' + ABE' + ACD + A'BCE + AB'C$$

P1 P2 P3 P4

Veya

$$F = A'B'D' + ABE' + ACD + A'BCE + B'CD$$

P1 P2 P3 P4