İki Yönlü Sonlu Otomata 2DFA

İki yönlü sonlu özdevinir modelinde ise okuma kafasının hem sağa, hem de sola doğru hareket etmesi mümkündür. Makinenin her hareketinde okuma kafası, üzerinde bulunduğu hücredeki simgeyi okuduktan sonra ya bir sağdaki, ya da bir soldaki hücreye geçer.

2DFA

- 2DFA= $<Q, \Sigma, \delta, q_0, F>$
- Q durumlar kümesi
- Σ giriş alfamesi
- **q_0** başlangıç durum
- **F** uç durumlar kümesi
- **Tek fark geçiş fonksiyon tanımındadır.**
- **(Qx**Σ)'dan Qx(R,L)'ye bir eşleme olarak tanımlanır.
  - **R (Right) Okuma kafası sağa hareket eder.**
  - **L (Left) Okuma kafası sola hareket eder.**

Örnek 1.7

- $M_{1.7} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$
- $Q=\{q_0, q_1, q_2\}$
- $\Sigma=\{0,1\}$
- $F=\{q_0, q_1, q_2\}$

δ:

$\delta(q_0,0)=\{q_0, R\}$ $\delta(q_0,1)=\{q_1, R\}$

$\delta(q_1,0)=\{q_1,R\}$ $\delta(q_1,1)= \{q_2,L\}$

$\delta(q_2,0)=\{q_0,R\}$ $\delta(q_2,1)=\{q_2,L\}$

	0	**1**
$\rightarrow q_0$	(q_0, R)	(q_1, R)
q_1	(q_1, R)	(q_2, L)
q_2	(q_0, R)	(q_2, L)

$M_{1.7}$ makinesi, **{ 0, 1 }** alfabesinde içinde **11** altdizgisi bulunmayan dizgileri tanıyan bir 2DFA'dır.

Tüm durumlar uç durum olduğuna göre, bir dizginin **$M_{1.7}$** tarafından tanınabilmesi için, sonlu sayıda hareket sonunda, tüm dizginin işlenmesi ve okuma kafasının dizginin sağına geçmesi yeterlidir.

2DFA

- Bir dizginin $\mathbf{M_{1.7}}$ tarafından tanınabilmesi için, sonlu sayıda hareket sonunda, tüm dizginin işlenmesi ve okuma kafasının dizginin sağına geçmesi yeterlidir.
- **İki yönlü her sonlu otomata denk, tek yönlü bir otomat bulunabilir. 2DFA ve DFA modellerinin ifadde güçleri denktir.**
- **Tek yönlü modelde her zaman sağlanan bu koşul,** iki yönlü özdevinirlerde her zaman sağlanamaz.
- İki nedenle, okuma kafası sonlu hareket sonunda dizginin sağına ulaşamaz:
  - okuma kafasının hareketlerinin bir döngü oluşturması,
  - şeridin ilk hücresi üzerinde bulunan okuma kafasının sola ilerlemesini gerektiren bir hareketle karşılaşılmasıdır.
- Bir dizginin 2DFA tarafından tanınıp tanınmadığını bulmak için şeritli makine modeli üzerinde okuma kafasının hareketlerinin izlenmesi gerekir. Ancak hareketler iki yönlü olduğu ve aynı hücre üzerinden okuma kafası defalarca geçebildiği için bu işlem oldukça uzun ve güç olabilir.
- Diğer bir yöntem ise, şeritli makine modelini kullanmadan, hareketlerin **anlık tanımlarla** izlenmesidir.

Anlık Tanım **(ID : Instantenaous Descriptions)**:

- Anlık tanım makinenin bulunduğu durum ile giriş dizgisinin okuma kafasının solunda ve sağında kalan kesimlerini gösteren bir üçlüdür:
- $ID=(\alpha, q_i, \beta)$
- Anlık tanım ve anlık tanımlar arasındaki geçiş ilişkisine dayalı olarak, iki yönlü sonlu otomatın(2DFA) tanıdığı dizgiler kümesi:
- $T(M)=\{w \mid (q_0, w) \vdash^{*} (w, q_i), q_i \in F\}$

Anlık Tanım örnek:

w_1 = 1000101

(q_0 ,   1000101)
(1, q_1 , 000101)
(10, q_1 , 00101)
(100, q_1 , 0101)
(1000, q_1 , 101)
(100, q_2 , 0101)
(1000, q_0 , 101)
(10001, q_1 , 01)
(100010, q_1 , 1)
(10001, q_2 , 01)
(100010, q_0 , 1)
(1000101, q_1)

	0	**1**
$\rightarrow q_0$	(q_0, R)	(q_1, R)
q_1	(q_1, R)	(q_2, L)
q_2	(q_0, R)	(q_2, L)

Anlık Tanım örnek:

w_2 = 100110

$(q_0, 100110)$

$(1, q_1, 00110)$

$(10, q_1, 0110)$

$(100, q_1, 110)$

$(10, q_2, 0110)$

$(100, q_0, 110)$

$(1001, q_1, 10)$

$(100, q_2, 110)$

$(10, q_2, 0110)$

$(100, q_0, 110)$

	0	**1**
$\rightarrow q_0$	(q_0, R)	(q_1, R)
q_1	(q_1, R)	(q_2, L)
q_2	(q_0, R)	(q_2, L)

1.2 Çıkış Üreten Otomatlar

Çıkış üreten otomatlar modeli, girişine uygulanan bir giriş dizgisine yanıt olarak, bir çıkış dizgisi üreten bir modeldir.

Böylece sonlu özdevinirlerin iki ana türü, “tanıyıcılar” ve “dönüştürücüler” olarak nitelenebilir.

1.2 Çıkış Üreten Otomatlar

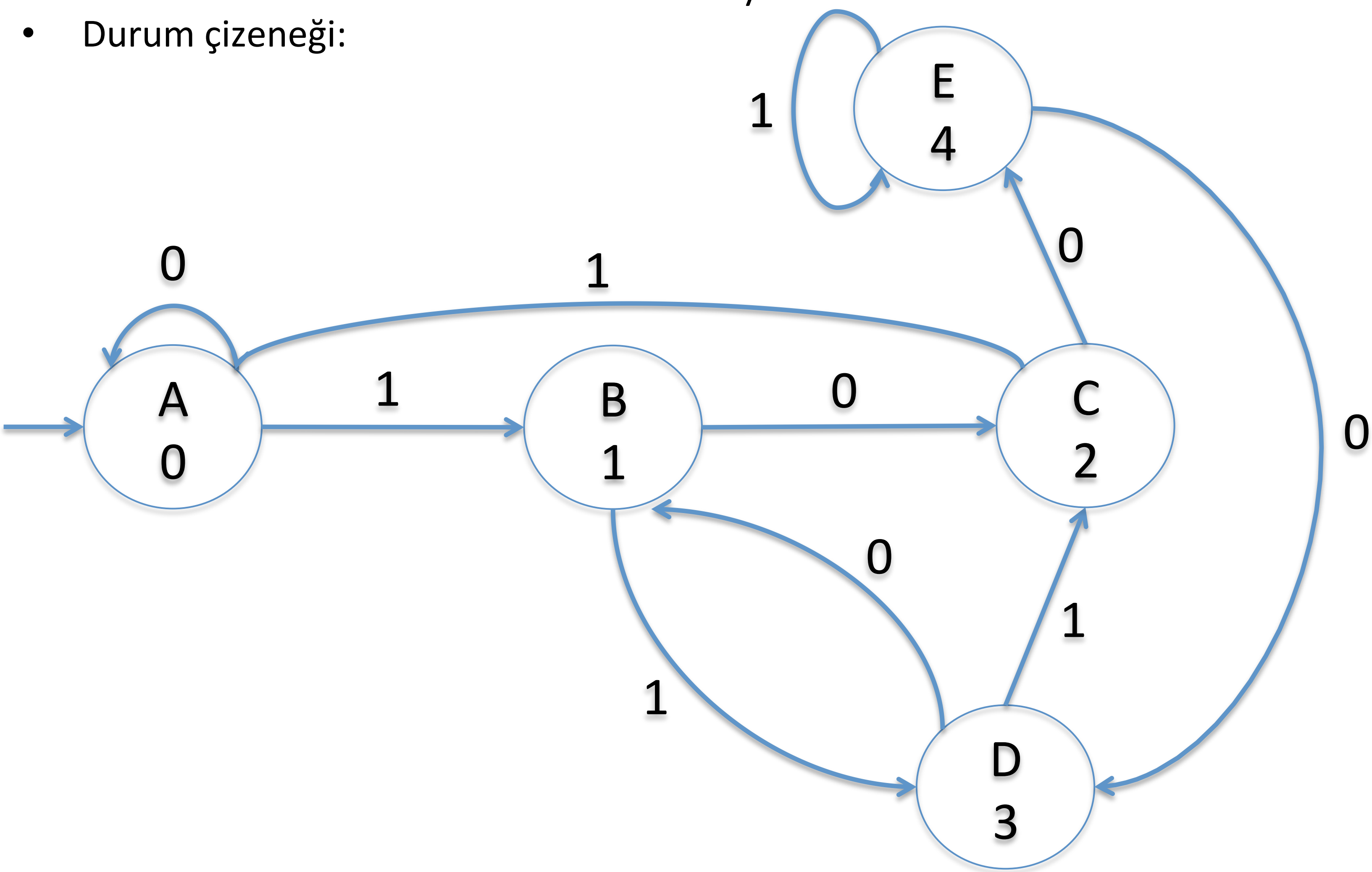
- Tanıyıcı otomat girişine uygulanan giriş dizgilerinin bir kısmını tanımakta, diğer bir kısmını ise tanımamaktadır, FA modeli ikili çıkış üreten bir model olarak görülebilir.
- Modelin ürettiği çıkışlar, örneğin uç durumlar için:
  - “1 : tanıdı”,
  - diğer durumlar için “0 : tanımadı” olabilir.
- Bu açıdan düşünüldüğünde ise, çıkış üreten sonlu özdevinir modeli, tanıyıcı modeli de kapsayan, daha geniş bir model olarak görülebilir
- Çıkış üreten özdevinirlerin **Moore** ve **Mealy** makinesi olarak adlandırılan iki türü vardır.
  - ***Moore makinesi durum düzeyinde çıkış üreten bir model***
  - ***Mealy makinesi durum geçişi düzeyinde çıkış üreten bir model***

1.2.1. Moore Makinesi

- M =<Q, Σ, Δ, δ, λ, q_0>
- Q : Sonlu durumlar kümesi
- Σ : Giriş alfabesi(sonlu bir küme)
- Δ : Çıkış alfabesi(sonlu bir küme)
- δ : Durum geçiş işlevi(QxΣ)'dan Q'ya bir eşleme
- λ : Çıkış işlevi : Q'dan Δ'ya bir eşleme
- q_0: Başlangıç durumu

Örnek 1.8

- **M$_{1.8}$** makinesi, girişine uygulanan ikili sayı X ise, çıkışında z = Mod(X, 5) değerini üreten Moore makinesi olarak tanımlanıyor.
- Durum çizeneği:



Örnek 1.8 Çizelge

ŞimdikiDurum (Ş.D)	Sonraki durum x=0	Sonraki durum x=1	z
A	A	B	0
B	C	D	1
C	E	A	2
D	B	C	3
E	D	E	4

w=1011110 giriş dizgisi uygulandığında makinenin durumları ve üreteceği çıkışlar aşağıdaki gibi değişecektir:

Giriş :		1	0	1	1	1	1	0
Durum:	A	B	C	A	B	D	C	E
Çıkış: :	0	1	2	0	1	3	2	4

1.2.2. Mealy Makinesi

- M =<Q, Σ, Δ, δ, λ, q_0>
- Q : Sonlu durumlar kümesi
- Σ : Giriş alfabesi(sonlu bir küme)
- Δ : Çıkış alfabesi(sonlu bir küme)
- δ : Durum geçiş işlevi(QxΣ)'dan Q'ya bir eşleme
- λ : Çıkış işlevi : QxΣ'dan Δ'ya bir eşleme
- q_0: Başlangıç durumu

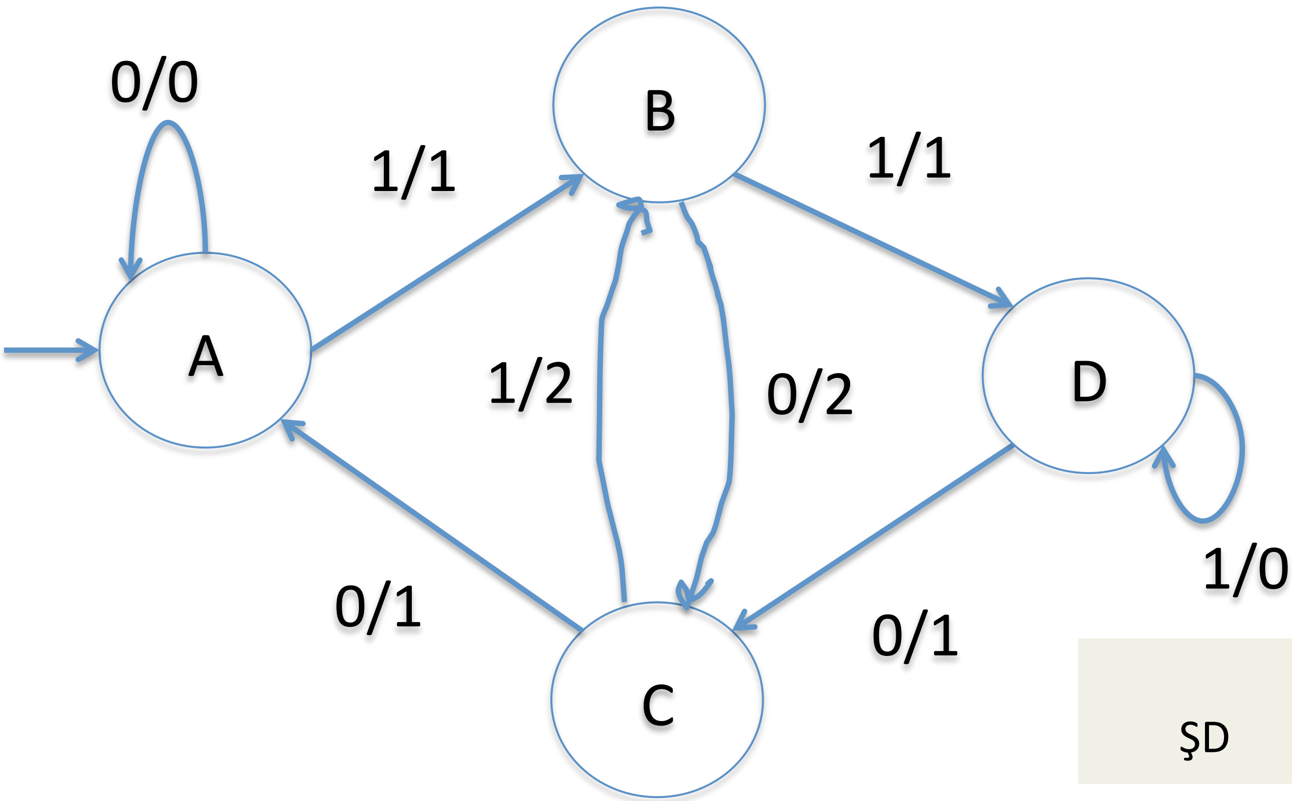
- Altılının çıkış işlevi (λ) dışındaki beşli için Moore makinesindekilerle aynıdır. Moore ve Mealy makineleri arasındaki tek fark çıkış işlevindedir:
  - Moore makinesi için Q'dan Δ'ya bir eşleme
  - Mealy makinesi için QxΣ'dan Δ'ya bir eşleme

Örnek 1.9

- **$M_{1.9}$** makinesi
  - giriş alfabesi **{ 0, 1 }**,
  - çıkış alfabesi ise **{ 0, 1, 2 }** olan

  ve ürettiği çıkış ile, son iki giriş simgesinden kaç tanesinin değerinin bir öncekinden farklı olduğunu gösteren Mealy makinesi olarak tanımlanıyor. Makinenin üreteceği ilk 2 çıkış değeri belirlenirken, başlangıç durumundan önceki iki giriş değerinin **00** olduğu varsayılacaktır.
- $M_{1.9} = \langle Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0 \rangle$
- Q : {A,B,C,D}
- Σ : {0, 1}
- Δ : {0, 1, 2}
- q_0: A

Örnek 1.9 Çizenek ve Çizelge



	SD,z	
ŞD	x=0	x=1
→ A	A,0	B,1
B	C,2	D,1
C	A,1	B,2
S	C,1	D,0

- δ ve λ çizenek ve çizelge ile tanımlanmıştır. Yapılan tasarıma göre, makinenin durumları, önceki iki giriş simgesi değerinin 00, 01, 10 ya da 11 olmasına göre A, B, C ya da D olmaktadır.
- X:0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1
- Z:0 1 1 1 2 2 2 2 2 1 0 0 1 2 2 1 1 1 0 1 1 0 0 1
-

1.2.3. Moore ve Mealy Makinelerinin Eşdeğerliği

Birer altılı olarak tanımlanan Moore ve Mealy modellerinde altılının 5 elemanı ortaktır.

Moore ve Mealy modellerini ayıran çıkış işlevidir.

Belirli bir durumda bulunan bir Moore makinesine**, n** giriş simgesinden oluşan bir giriş dizgisi uygulandığında, makine **(n+1)** uzunluğunda bir çıkış dizgisi üretecektir.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & x_1 & & x_2 & & x_3 & & & \cdots & & & x_{n-1} & & x_n & \\
q_0 & \rightarrow & q_1 & \rightarrow & q_2 & \rightarrow & q_3 & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & q_{n-2} & \rightarrow & q_{n-1} & \rightarrow & q_n \\
z_0 & & z_1 & & z_2 & & z_3 & & \cdots & & z_{n-2} & & z_{n-1} & & z_n
\end{array}
$$

Mealy modelinde ise, **makine her durum geçişi için bir çıkış simgesi üretmektedir.** Belirli bir durumda bulunan bir Mealy makinesine, n giriş simgesinden oluşan bir giriş dizgisi uygulandığında, makine n uzunluğunda bir çıkış dizgisi üretecektir. Çünkü Mealy modelinde, giriş simgesi uygulanmadığı sürece makine çıkış üretmemektedir

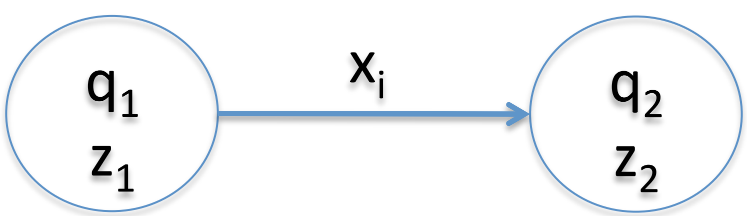
$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & x_1 & & x_2 & & x_3 & & & \cdots & & & x_{n-1} & & x_n & \\
q_0 & \rightarrow & q_1 & \rightarrow & q_2 & \rightarrow & q_3 & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & q_{n-2} & \rightarrow & q_{n-1} & \rightarrow & q_n \\
 & z_1 & & z_2 & & z_3 & & & \cdots & & & z_{n-1} & & z_n &
\end{array}
$$

1.2.4. Moore Makinesine Eşdeğer Mealy Makinesinin Bulunması

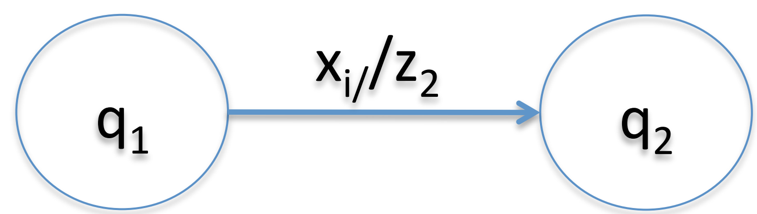
- ***Teorem 1.1:***
- ***M_1 =<Q, Σ, Δ, δ, λ, q_0> bir Moore makinesi ise M_1'e eşdeğer Mealy Makinesi M_2:***
- ***M_2=<Q, Σ, Δ, δ, λ, q_0> , λ'(q,a)=λ(δ(q,a))***

- Moore makinesinde her duruma bir çıkış simgesi eşlenirken, Mealy makinesinde her durum geçişine (durum, giriş simgesi çiftine) bir çıkış simgesi eşlenir.
- Bir Moore makinesine eşdeğer Mealy makinesi bulunurken, her durum geçişine eşlenen çıkış değeri, durum geçişinin ucundaki sonraki duruma Moore makinesinde eşlenen çıkış değerine eşittir.

Moore Makinesi

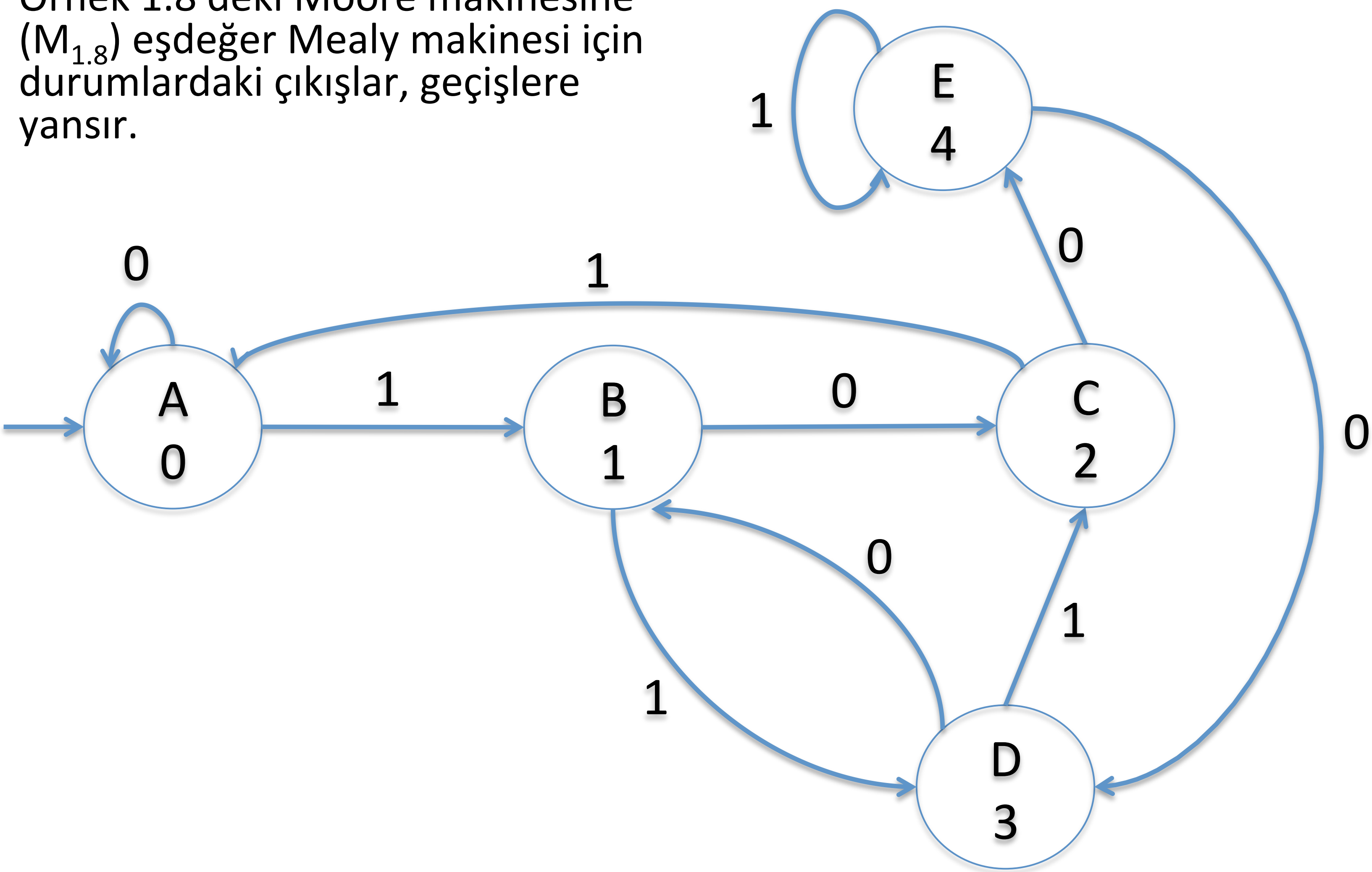


Mealy Makinesi

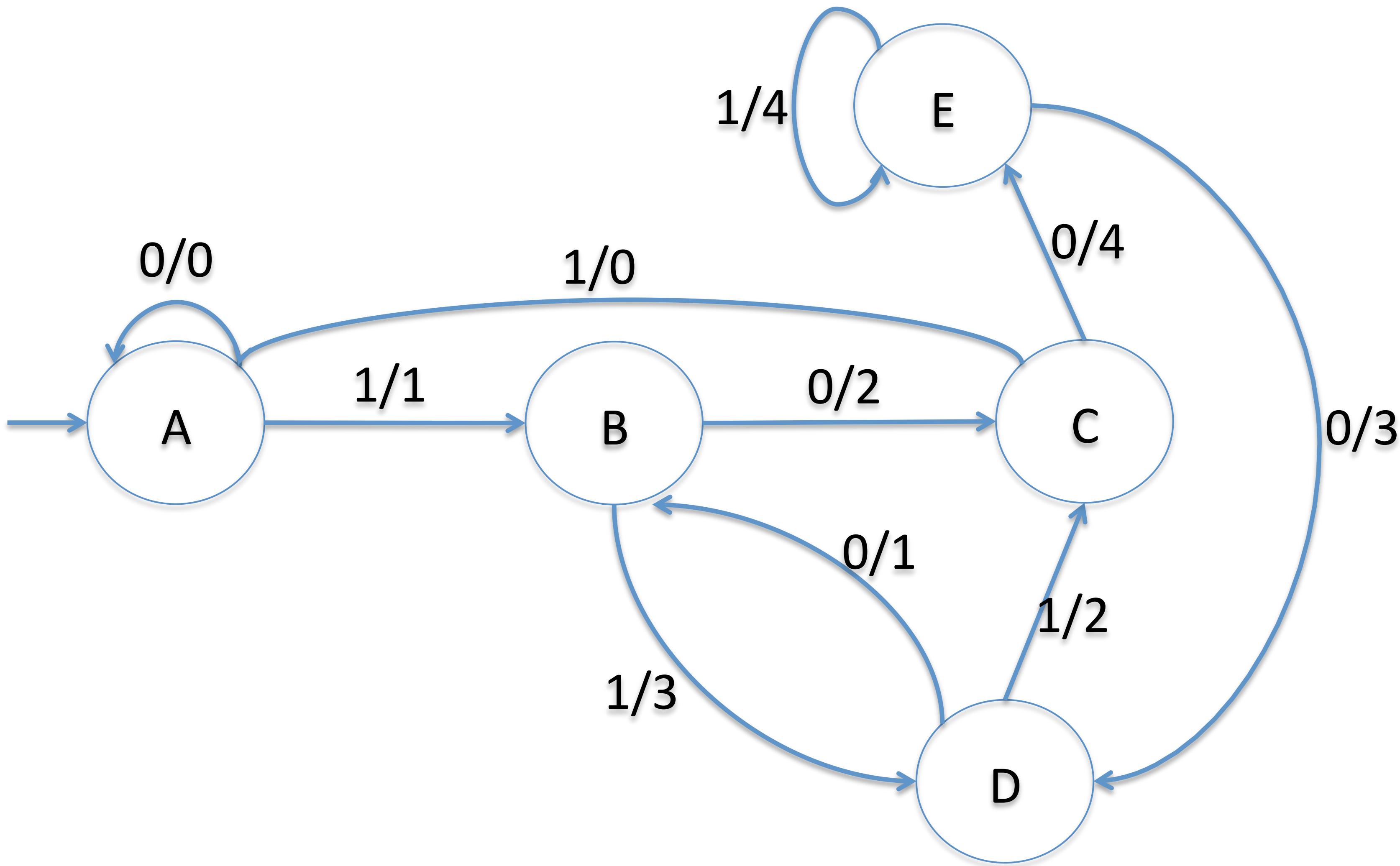


1.2.4. Moore Makinesine Eşdeğer Mealy Makinesinin Bulunması

Örnek 1.8'deki Moore makinesine ($M_{1.8}$) eşdeğer Mealy makinesi için durumlardaki çıkışlar, geçişlere yansır.



Örnek 1.8 Moore makinesine denk Mealy makinesi



Örnek 1.8 Mealy Makinesi Çizelgesi

ŞimdikiDurum (Ş.D)	Sonraki durum x=0	Sonraki durum x=1
→ A	A,0	B,1
B	C,2	D,3
C	E,4	A,0
D	B,1	C,2
E	D,3	E,4

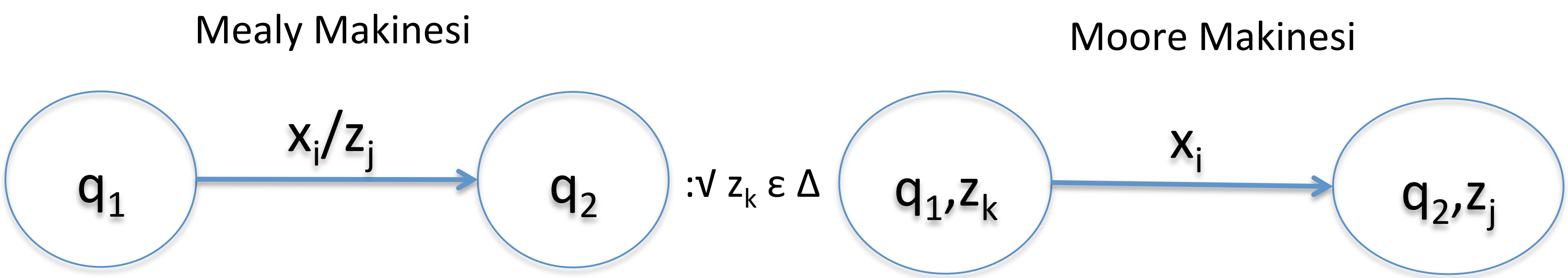
1.2.5. Mealy Makinesine Eşdeğer Moore Makinesinin Bulunması

- ***Teorem 1.2:***

M_2 =<Q, Σ, Δ, δ, λ, q_0> bir Mealy makinesi ise M_2'e eşdeğer Mealy Makinesi M_1:
M_1=<Q, Σ, Δ, δ, λ, q_0> ,
Q'=QxΔ
q'_0=[q_{0}, z_i] (z_i çıkış simgelerinden rasgele seçilmiş biri)
$\delta'([q_i,z_k],x_i)= [\delta(q_i,x_i), \lambda(q_i,x_i)]$
$\lambda'([q_i,z_k])=z_k$

- **M_2**'nin her [durum, çıkış simgesi] çiftine karşılık, **M_1** makinesinin bir durumu vardır. Buna göre **M_2** makinesin durum sayısı n, çıkış simgesi sayısı ise m ise, **M_1** makinesinin (n x m) durumu bulunacaktır.
- Örneğin **M_9** Mealy makinesinin 4 durumu, 4 de çıkış simgesi vardır. **M_9** Mealy makinesinin, Teorem 1.2'ye göre bulunacak eşdeğeri Moore makinesinin 4 x 4 = 16 durumu olacak ve bu durumlar sembolik olarak **[A, 0], [A, 1], ... [D, 4]** diye gösterilecektir.
- **M_1**'in durumlarından, sembolik gösterimde birinci elemanı **q_0** olanlar arasından rasgele seçilen biri başlangıç durumu yapılır.
- Örneğin çıkış alfabesinde 4 simge bulunan **M_9** Mealy makinesinin başlangıç durumu **A** olduğuna göre, bu makineye eşdeğer Moore makinesinin başlangıç durumu **[A, 0], [A, 1], [A, 2] ve [A, 3]** arasından rasgele seçilen biri olacaktır.

Mealy Makinesine Eşdeğer Moore Makinesinin Bulunması



- Mealy makinesinde, $\mathbf{q_1}$ durumundan $\mathbf{q_2}$ durumuna $\mathbf{x_i}$ geçişi sırasında $\mathbf{z_j}$ çıkış simgesi üretiliyorsa, eşdeğer Moore makinesinde, birinci elemenı $\mathbf{q_1}$ olan her durumdan, $\mathbf{x_i}$ giriş simgesi ile, birinci elemenı $\mathbf{q_2}$, ikinci elemenı ise $\mathbf{z_j}$ olan duruma bir geçiş oluşturulur.
- Buna göre eğer çıkış alfabesinde m çıkış simgesi varsa, Mealy makinesindeki her durum geçişine karşılık, eşdeğer Moore makinesinde m geçiş bulunacaktır. Böylece bir Mealy makinesinin her durumuna karşılık eşdeğer Moore makinesinde m durum bulunduğu gibi, Mealy makinesindeki her durum geçişine karşılık eşdeğer Moore makinesinde m durum geçişi bulunacaktır.

Örnek 1.10

Mealy Makinesi

$M_{1.10}$ =<Q, Σ, Δ, δ, λ, q_0>

Q : {A,B,C}

Σ : {0, 1}

Δ : {0, 1}

q_0: A

δ(A,0)=B	λ(A,0)=0
δ(A,1)=A	λ(A,1)=1
δ(B,0)=B	λ(B,0)=1
δ(B,1)=C	λ(B,1)=1
δ(C,0)=A	λ(C,0)=0
δ(C,1)=C	λ(C,1)=0

Moore Makinesi

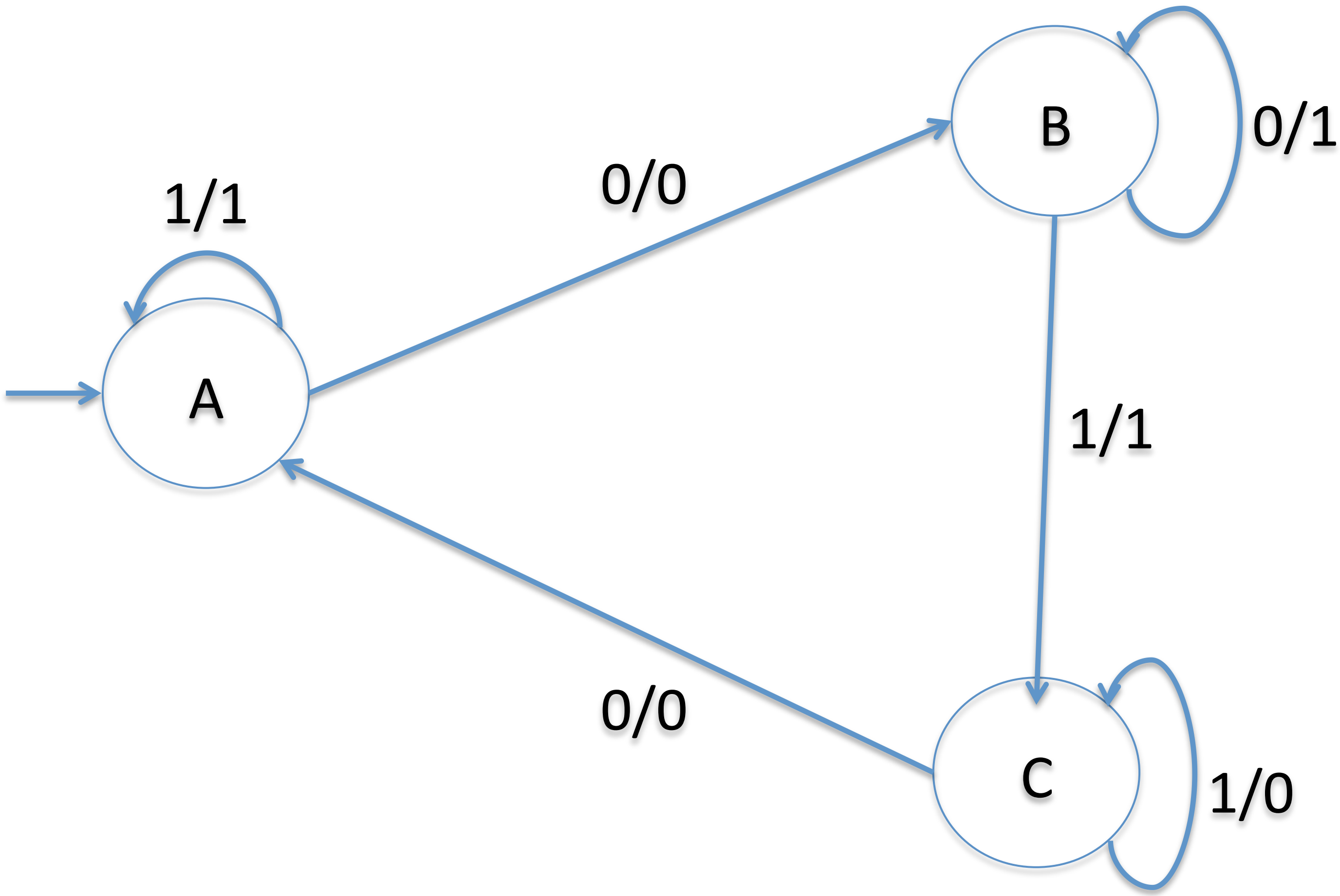
$M_{1.10}$ =<Q', Σ, Δ, δ', λ', q'_0>

Q : {[A,0], [A,1], [B,0], [B,1], [C,0], [C,1]}

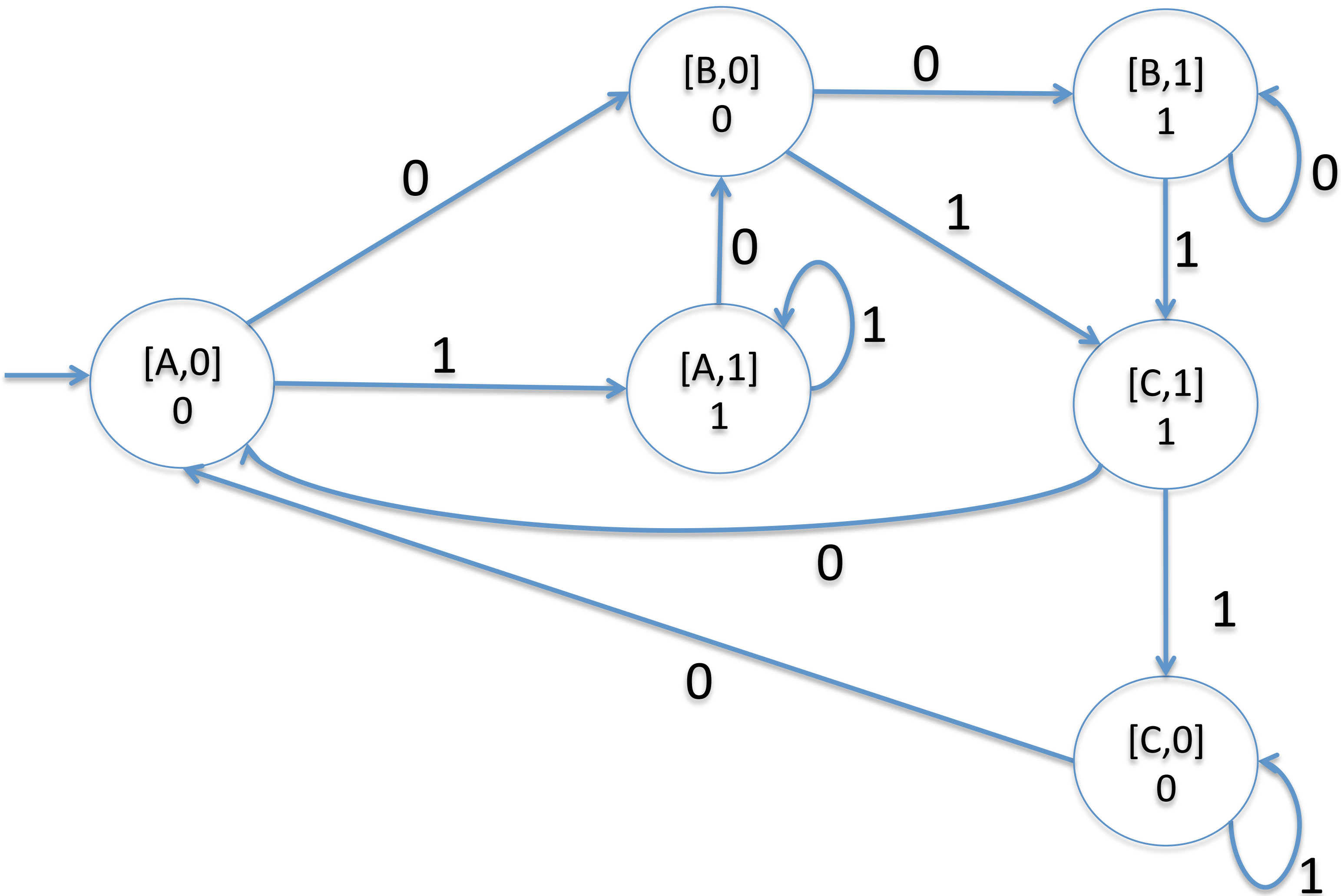
q'_0: [A,0]

δ([A,0],0)=[B,0]	δ([A,1],0)=[B,0]
δ([A,0],1)=[A,1]	δ([A,1],1)=[A,1]
δ([B,0],0)=[B,1]	δ([B,1],0)=[B,1]
δ([B,0],1)=[C,1]	δ([B,1],1)=[C,1]
δ([C,0],0)=[A,0]	δ([C,1],0)=[A,0]
δ([C,0],1)=[C,0]	δ([C,1],1)=[C,0]

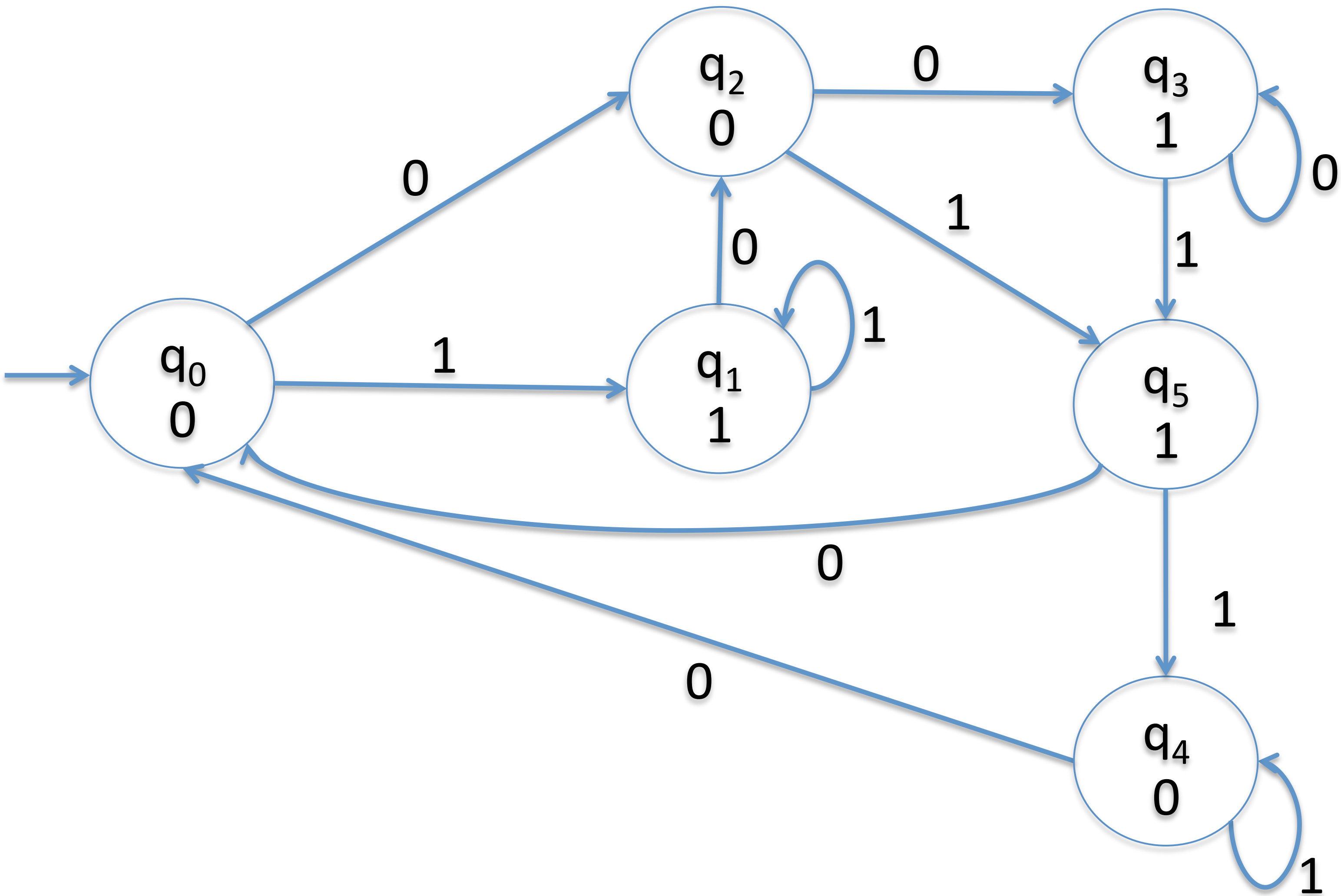
$M_{1.10}$ Mealy Makinesi



$M_{1.10}$ Mealy Makinesine Eş Değer Moore Makinesi



$M_{1.10}$ Moore Makinesi durumlar yeniden adlandırıldıktan sonra:



Örnek 7: Çizelgesi verilmiş Moore makinesine eşdeğer Mealy Makinesinin durum ve çizelgesini bulunuz.

ŞimdikiDurum (Ş.D)	Sonraki durum x=0	Sonraki durum x=1	z
q_0	q_1	q_2	0
q_1	q_3	q_2	1
q_2	q_2	q_3	0
q_3	q_3	q_0	1

Cevap 7:

Şimdiki Durum (Ş.D)	Sonraki durum x=0	Sonraki durum x=1	z
q_0	q_1	q_2	0
q_1	q_3	q_2	1
q_2	q_2	q_3	0
q_3	q_3	q_0	1

Şimdiki Durum (Ş.D)	Sonraki durum x=0	Sonraki durum x=1
q_0	q_1, 1	q_2, 0
q_1	q_3, 1	q_2, 0
q_2	q_2, 0	q_3, 1
q_3	q_3, 1	q_0,0

Örnek 8

Yanda durum çizelgesi verilen Mealy makinesine eşdeğer Moore makinesinin durum çizenek ve çizelgesini bulunuz. Moore makinesinin durumlarını **S_0, S_1, S_2, …** diye adlandırınız. Eğer Moore makinesinin denk durumları varsa, makineyi indirgeyiniz.

	SD, z	
ŞD	x=0	x=1
→A	A,0	B,0
B	C,0	B,1
C	C,1	D,1
D	A,1	D,0

Durumların anlamları:

q_0 : [A, 0] q_1 : [A, 1]

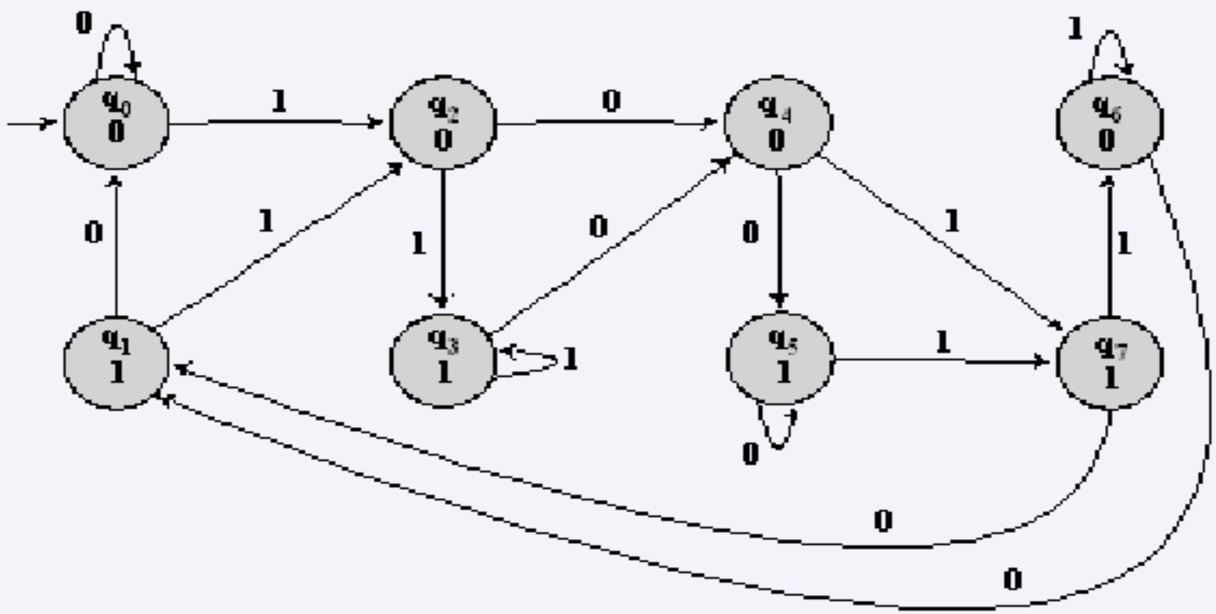
q_2 : [B, 0] q_3 : [B, 1]

q_4 : [C, 0] q_5 : [C, 1]

q_6 : [D, 0] q_7 : [D, 1]

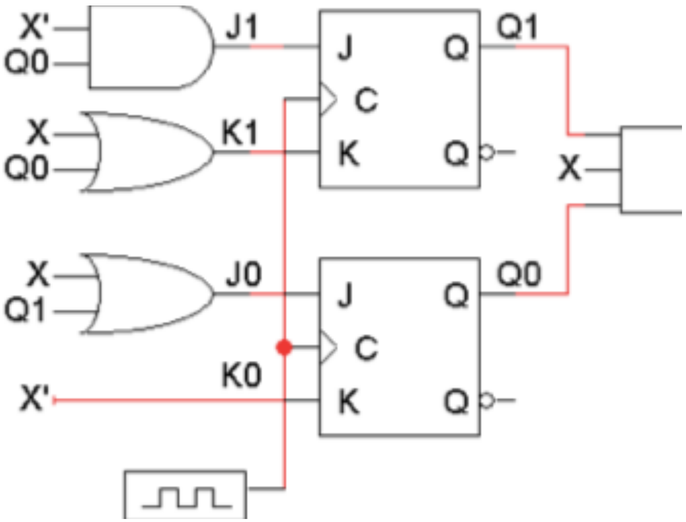
Moore makinesinin Durum Çizelge ve Çizeneği:

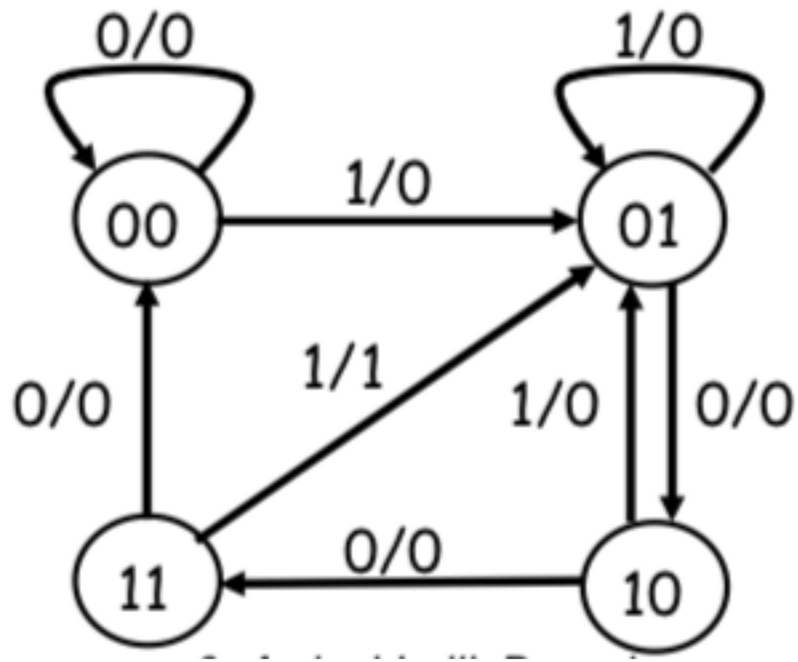
	0	1	z
$\rightarrow q_0$	q_0	q_2	0
q_1	q_0	q_2	1
q_2	q_4	q_3	0
q_3	q_4	q_3	1
q_4	q_5	q_7	0
q_5	q_5	q_7	1
q_6	q_1	q_6	0
q_7	q_1	q_6	1



Moore makinesinin denk durumları yoktur; indirgeme yapılamaz.

Mealy Örnek JK Flip Flop:





- **Sequence detector for the pattern '0110'.**