

Kesikli Matematik

Mantık ve İspatlar

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Ali ALTUNCU
Bilgisayar Mühendisliği

Kesikli (Ayrık) Matematik



- **Ayrık Matematik:** Sürekli olmaktan ziyade temelde ayrık olan matematiksel yapıların ve nesnelerin incelenmesi.
- **Ayrık değerlere sahip nesnelere örnekler:** Mantıktaki tamsayılar, grafikler veya ifadeler.
- **Ayrık matematik ve bilgisayar bilimi:** Ayrık matematikten gelen kavramlar, bilgisayar algoritmaları ve programlama dillerindeki nesneleri ve sorunları tanımlamak için kullanışlıdır. Bunların kriptografi, otomatik teorem kanıtlama ve yazılım geliştirmede uygulamaları vardır.

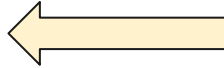
Konu Başlıkları



- Mantık ve İspatlar
- Fonksiyonlar
- Tam Sayılar ve Modüler Aritmetik
- Diziler ve Toplamlar
- Sayma, Permütasyonlar, Kombinasyonlar
- Olasılık
- İlişkiler (Bağlantılar)
- Grafikler

Konu Başlıkları

- Mantık ve İspatlar
- Fonksiyonlar
- Tam Sayılar ve Modüler Aritmetik
- Diziler ve Toplamlar
- Sayma, Permütasyonlar, Kombinasyonlar
- Olasılık
- İlişkiler (Bağlantılar)
- Grafikler



Mantık



Mantık

- Bilgiyi temsil etmek ve mantıksal çıkarımlar yapmak için resmi bir dil tanımlar.
- Geçerli bir argümanın nasıl oluşturulacağını anlamamıza yardımcı olur.

Mantık şunları tanımlar:

- İfadelerin sözdizimi
- İfadelerin anlamı
- Mantıksal çıkarsama kuralları (manipülasyon)

Önermeli Mantık



- **Tanım:** Önerme, ya doğru ya da yanlış olan, fakat hem doğru hem de yanlış olamayan bir ifadedir.
- **Örnekler:**
 - Pitt Üniversitesi, Pittsburgh'un Oakland bölümünde yer almaktadır. (T)
 - $5 + 2 = 8$ (F)
 - Bugün yağmur yağıyor. (T ya da F)

Önermeli Mantık



- Örnekler (devam):
 - Nasılsınız? (Soru bir önerme değildir.)
 - $x + 5 = 3$ (x belirtilmediği için ne doğru ne de yanlış. Önerme değildir.)
 - 2 bir asal sayıdır. (T)
 - O çok yetenekli. (Kim için söylendiği belirtilmediği için ne doğru ne de yanlış. Önerme değildir.)
 - Evrendeki diğer gezegenlerde başka yaşam formları var. (T ya da F)

Bileşik Önermeler



- Mantıksal bağlaçlar kullanılarak temel ifadelerden daha karmaşık önerme ifadeleri oluşturulabilir.

Örnek:

- **Önerme A:** Dışarıda yağmur yağıyor.
- **Önerme B:** Bir film izleyeceğiz.
- **Yeni (birleşik) bir önerme:** Dışarıda yağmur yağarsa film izleyeceğiz.

Mantıksal Bağlaçlar



- Değil (Negation)
- Birleştirme (Conjunction)
- Ayırma (Disjunction)
- Dışlayıcı veya (Exclusive or)
- Koşullu (Implication)
- Çift Koşullu (Biconditional)

Değil ($\neg p$)



- **Tanım:** p bir önerme olsun. **p 'nin değili** ifadesi, p 'nin olumsuzlanması olarak adlandırılan başka bir önermedir. p 'nin değili $\neg p$ ile gösterilir ve " p değil" olarak okunur.

Örnek:

- p : Pitt Üniversitesi, Pittsburgh'un Oakland bölgesinde yer almaktadır.
- $\neg p$: Pitt Üniversitesi'nin Pittsburgh'un Oakland bölümünde yer alması söz konusu değildir.

Diğer Örnekler:

- $5 + 2 \neq 8$
- 10 asal sayı değildir.
- Otobüslerin saat 21.00'de durması söz konusu değildir.

Değil ($\neg p$)



Diğer Örnekler (devam):

- p : Bugün yağmur yağıyor.
- $\neg p$: Bugün yağmur yağmıyor.

- p : 2 bir asal sayıdır.
- $\neg p$: 2 asal sayı değildir.

- p : Evrendeki diğer gezegenlerde başka yaşam formları vardır.
- $\neg p$: Evrendeki diğer gezegenlerde başka yaşam formlarının olması söz konusu değildir.

Değil ($\neg p$)

- Doğruluk tablosu, farklı önermelerin doğruluk değerleri (T veya F) arasındaki ilişkileri gösterir.

p	$\neg p$
T	F
F	T

Satırlar, önermelerin tüm olası değerlerini gösterir.

Birleştirme ($p \wedge q$)



- **Tanım:** p ve q önerme olsun. $p \wedge q$ ile gösterilen " p ve q " önermesi, hem p hem de q doğru olduğunda doğrudur, aksi halde yanlıştır. $p \wedge q$ önermesine p ve q 'nin birleşimi denir.

Örnekler:

- Pitt Üniversitesi, Pittsburgh'un Oakland bölümünde yer almaktadır **ve** $5 + 2 = 8$ 'dir.
- Bugün yağmur yağıyor **ve** 2 asal sayıdır.
- 2 bir asal sayıdır **ve** $5 + 2 \neq 8$ 'dir.
- 13 tam karedir **ve** 9 asaldır.

Ayırma (pvq)



- **Tanım:** p ve q önerme olsun. **pvq** ile gösterilen "p veya q" önermesi, hem p hem de q yanlış olduğunda yanlıştır, aksi halde doğrudur. **pvq** önermesine p ve q'nun ayrışımı denir.

Örnekler:

- Pitt, Pittsburgh'un Oakland bölümünde yer almaktadır **veya** $5 + 2 = 8$ 'dir.
- Bugün yağmur yağıyor **veya** 2 asal sayıdır.
- 2 bir asal sayıdır **veya** $5 + 2 \neq 8$ 'dir.
- 13 tam karedir **veya** 9 asaldır.

Birleştirme ve Ayırma Doğruluk Tabloları

- p ve q için dört farklı değer kombinasyonu

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

Temel önermeler için tüm
olası değer
kombinasyonları: 2^n

Birleştirme ve Ayırma Doğruluk Tabloları

- p ve q için dört farklı değer kombinasyonu

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	T	
T	F	F	
F	T	F	
F	F	F	

Birleştirme ve Ayırma Doğruluk Tabloları

- p ve q için dört farklı değer kombinasyonu

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	F
F	F	F	F

Dışlayıcı veya ($p \oplus q$)

- Tanım:** p ve q önerme olsun. $p \oplus q$ ile gösterilen " p dışlayıcı veya q " önermesi, tam olarak p ve q 'dan biri doğru olduğunda doğrudur, aksi halde yanlıştır.

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Koşullu İfade ($p \rightarrow q$)

- Tanım:** p ve q önerme olsun. $p \rightarrow q$ ile gösterilen " p , q 'yu içerir" önermesinde p doğru ve q yanlış olduğunda yanlıştır, aksi halde doğrudur. $p \rightarrow q$ şartlı ifadesinde p 'ye hipotez, q 'ya sonuç denir.

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Koşullu İfade ($p \rightarrow q$)

- $p \rightarrow q$ ifadesini anlatmak için değişik terminolojiler kullanılmıştır.
 - eğer p ise, q ,
 - p eğer sadece q ise,
 - p yeterlidir q için,
 - q , p gerçekleştiğinde

Örnekler:

- “Eğer seçilirsem, vergileri düşüreceğim.”

Politikacı, seçildiği halde vergileri düşürmezse; yani $p=T$, $q=F$ ise $p \rightarrow q$ ifadesi F olur, diğer durumlarda T olur.

Koşullu İfade ($p \rightarrow q$)



Örnekler (devam):

- “Eğer Hasan’ın cep telefonu varsa, bu durumda $2+3=5$.”

q sonuç kısmı T olduğu için, $p \rightarrow q$ ifadesi her durumda T olur. (Bu durumda hipotezin (p) doğruluk değerinin bir önemi yoktur.)

- “Eğer Hasan’ın cep telefonu varsa, bu durumda $2+3 \neq 5$.”

q sonuç kısmı F olduğu için, $p \rightarrow q$ ifadesi Hasan’ın cep telefonu olmadığı durumlarda T olur.

Koşullu İfade ($p \rightarrow q$)

- $p \rightarrow q$ ifadesinin karşıtı $q \rightarrow p$,
- $p \rightarrow q$ ifadesinin zıt pozitif $\neg q \rightarrow \neg p$,
- $p \rightarrow q$ ifadesinin tersi $\neg p \rightarrow \neg q$ ' dir.

Örnekler:

“Kar yağarsa, trafik yavaş ilerler.”

p: Kar yağıyor.

q: Trafik yavaş ilerliyor.

$p \rightarrow q$ ifadesinin karşıtı $q \rightarrow p$;

- “Eğer trafik yavaş ilerliyorsa, kar yağar.”

Koşullu İfade ($p \rightarrow q$)



Örnekler (devam):

“Kar yağarsa, trafik yavaş ilerler.”

p : Kar yağıyor.

q : Trafik yavaş ilerliyor.

$p \rightarrow q$ ifadesinin zıt pozitif $\neg q \rightarrow \neg p$;

- “Eğer trafik yavaş ilerlemiyorsa, kar yağmaz.”

$p \rightarrow q$ ifadesinin tersi $\neg p \rightarrow \neg q$;

- “Eğer kar yağmazsa, trafik hızlı ilerler.”

Çift Koşullu İfade ($p \leftrightarrow q$)

- Tanım:** p ve q önerme olsun. $p \leftrightarrow q$ ile gösterilen " p , sadece ve sadece q ise" önermesinde p ve q aynı doğruluk değerlerine sahip olduğunda doğrudur, aksi takdirde yanlıştır.

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Bileşik Önermelerin Doğruluk Tabloları



Örnek:

- $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$ ifadesinin doğruluk tablosunu oluşturalım.

Bileşik Önermelerin Doğruluk Tabloları

Örnek:

- $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$ ifadesinin doğruluk tablosunu oluşturalım.

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

Temel önermeler ve değerleri

Ara önermeler ve değerleri

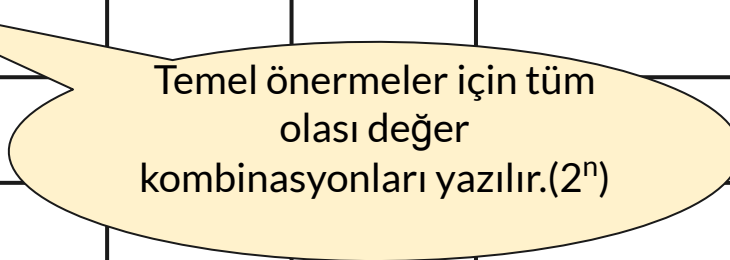
Hedef (bilinmeyen) önerme ve değerleri

Bileşik Önermelerin Doğruluk Tabloları

Örnek:

- $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$ ifadesinin doğruluk tablosunu oluşturalım.

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				



Temel önermeler için tüm olası değer kombinasyonları yazılır.(2^n)

Bileşik Önermelerin Doğruluk Tabloları

Örnek:

- $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$ ifadesinin doğruluk tablosunu oluşturalım.

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T	F			
T	F	F			
F	T	T			
F	F	T			

Bileşik Önermelerin Doğruluk Tabloları

Örnek:

- $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$ ifadesinin doğruluk tablosunu oluşturalım.

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T	F	T		
T	F	F	F		
F	T	T	T		
F	F	T	T		

Bileşik Önermelerin Doğruluk Tabloları

Örnek:

- $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$ ifadesinin doğruluk tablosunu oluşturalım.

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T	F	T	F	
T	F	F	F	T	
F	T	T	T	T	
F	F	T	T	F	

Bileşik Önermelerin Doğruluk Tabloları

Örnek:

- $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$ ifadesinin doğruluk tablosunu oluşturalım.

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F

Doğru (T) ve Yanlış (F) 'ın Bilgisayar gösterimi



- Bilgisayarlar bilgileri bitler kullanarak gösterirler.
- Bir bit sadece 0 ve 1 değerleri alan bir semboldür.
- Bit, doğru ve yanlış değerleri alan bir doğruluk değerini göstermek için kullanılabilir. (**0: Yanlış veya 1: Doğru**)
- Eğer bir değişkenin değeri sadece doğru ya da yanlış olabiliyorsa bu değişkene **Boolean değişkeni** denir.
- **Tanım:** Bir bit dizisi sıfır ya da daha fazla bit'in sıralı şekilde yazılmasıdır. Bu dizinin uzunluğu dizinde yer alan bit sayısı ile ifade edilmektedir.
- **Örnek:** 101010011 bit dizisinin uzunluğu 9'dur.

Bit Düzeyinde İşlemler

- T ve F, 1 ve 0 ile değiştirilir.

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

Bit Düzeyinde İşlemler

- Örnekler:

$$\begin{array}{r} 1011\ 0011 \\ \vee\ 0110\ 1010 \\ \hline 1111\ 1011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1011\ 0011 \\ \wedge\ 0110\ 1010 \\ \hline 0010\ 0010 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1011\ 0011 \\ \oplus\ 0110\ 1010 \\ \hline 1101\ 1001 \end{array}$$

Önermeli Mantık Uygulamaları



- Tercüme: Cümlelerin anlamlarını kesinleştirebilmek için cümleler mantık diline dönüştürülür.
- Çıkarım ve akıl yürütme: Yeni doğru önermeler, mevcut olanlardan çıkarılır.
- Yapay Zekada; Kural tabanlı (uzman) sistemler, otomatik teorem kanıtlama
- Mantıksal devrelerin tasarımı

Kaynaklar



- **Kenneth Rosen**, “Discrete Mathematics and Its Applications”, 7th Edition , McGraw Hill Publishing Co., 2012.
- **Milos Hauskrecht**, “Discrete Mathematics for Computer Science”, University of Pittsburgh, Ders Notları.