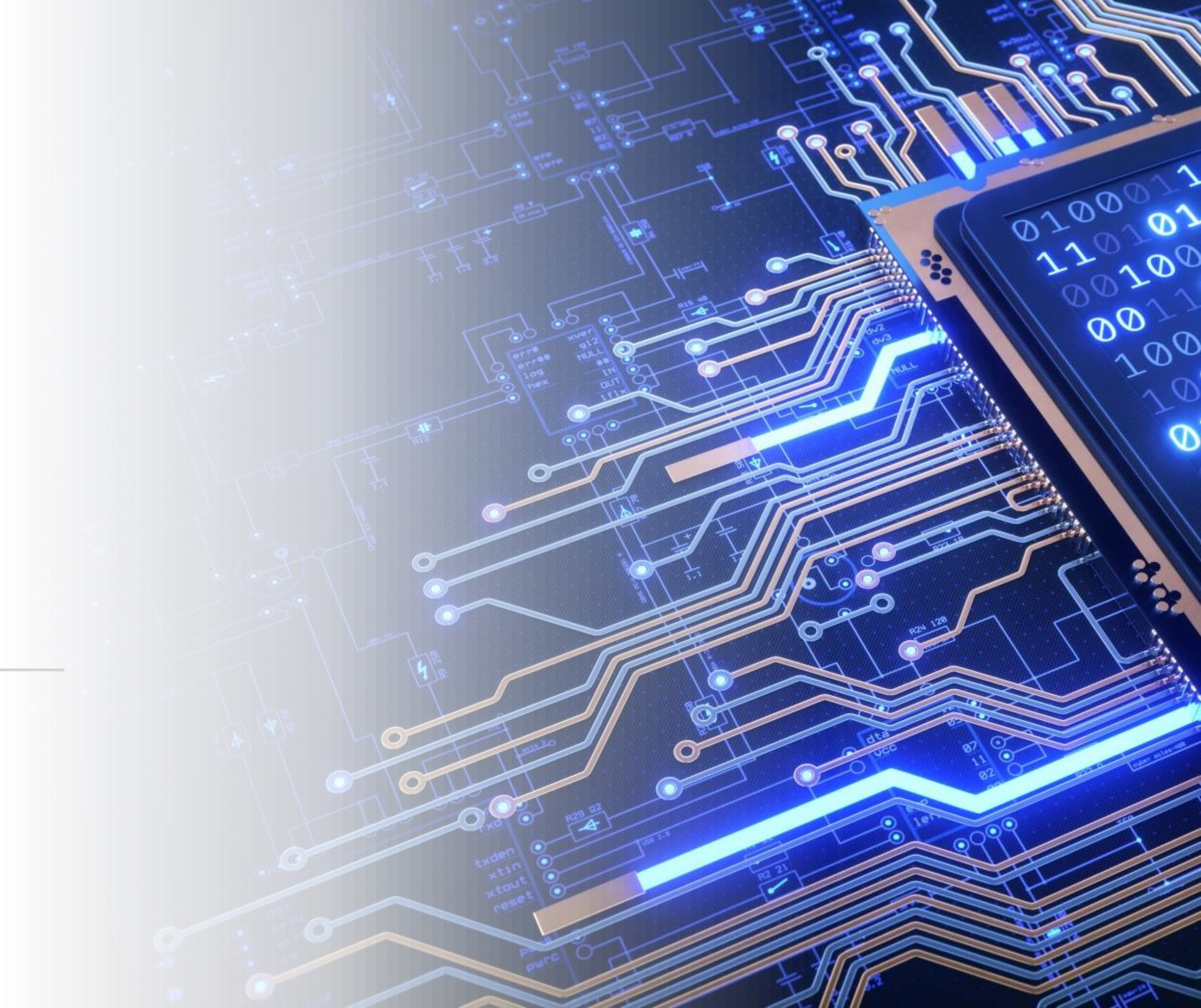
Mantıksal Tasarım ve Uygulamaları

Dr. Burcu KIR SAVAŞ



Tümleyen Aritmetiği

- Tümleyen Aritmetiği
- r Tümleyeni Aritmetiği
- r-1 Tümleyeni Aritmetiği
- İkili Sayı Kodları
- BCD Kodu
- Ağırlıklı Kodlar
- Ağırlıksız Kodlar

Tümleyen Aritmetiği

- Tümleyen alınacak sayıların negatif sayılar olduklarını varsayacağız.
- Tümleyen ifadesi için sayıcıları örnek gösterilebilir. Sayıcılar yukarı doğru sayarken 01,02 diye artar.
- Aşağı doğru sayarken ise 09,08 diye azalır.
- Burada 09 un tümleyenine 01, 08 in tümleyenine is 02 denilmektedir.

Tümleyen Aritmetiği

- İkili sayı sisteminde iki tümleyen kullanılmaktadır. Bunlar 1'in tümleyeni ve 2'nin tümleyeni r tabanlı bir sayı sisteminde tümleyenler r (r:radix (tümleyeni ve r-1 tümleyeni olarak ifade edilir.
- ÖRNEK: 10 tabanlı bir sayı sisteminde r tümleyeni 10, r-1 tümleyeni 9 dur.
-

Tümleyen Aritmetiği

r-Tümleyeni

r tabanlı bir tam sayı sisteminde n basamaklı pozitif tamsayı N ile gösterilirse N sayısının r tümleyeni $N^r=r^n-N$ olarak tanımlanabilir (n: kullanılan bit veya basamak sayısı.)

ÖRNEK 1: $(125.456)_{10}$ sayısının 10 tümleyenini bulunuz.
$(125)_{10}$ sayısının tamsayı kısmı 3 basamaklıdır. Bu nedenle $r^n = 10^3$ tür.
$N^{r}=r^{n}- N = 10^3 -125.456 = 874.544$

Tümleyen Aritmetiği

Örnek **$(21.426)_{10}$ sayısının 10'a tümleyenini ve 9'a tümleyenini bulunuz.**

10'a tümleyeni:

$N^r=10^n-N=100.000-21.456=78.544$ olur.

9'a tümleyeni:

r-1 tümleyen=$N^{r-1}=r^n-r^{-m}-N$

$N^{r-1}=10^2-10^{-3}-21.426=100-0.001-21.426=78.543$ olur.

Tümleyen Aritmetiği

- **ÖRNEK 2: $(110010.1011)_2$ sayısının 2'ye tümleyenini bulunuz.**
- **$(110010.1011)_2$ sayısının tamsayı kısmı 6 basamaklıdır. Bu nedenle $r^n = 2^6$ dır.**
- **$N^{r=}r^n - N = 2^6 - 110010.1011 = 1000000 - 110010.1011 = 0001101.0101$ olur.**
- **İkili sayı sisteminde 2'nin tümleyeni iki şekilde bulunabilir (ikili sayı sisteminde r=2 dir).**
- ***N sayısındaki bitlerin tersi alınır (1'ler 0, 0'lar 1 yapılır) ve LSB'e 1 eklenir.***

Tümleyen Aritmetiği

r-1 Tümleyeni

- Bir N tam sayının r-1 tümleyeni $N^{r-1}=r^n-1-N$ olur.
- Kesirli bir N sayının tümleyeni $N^{r-1}=r^n-r^{-m}-N$ dir.
- n: tamsayı kısmındaki basamak (digit) sayısı
- m: kesirli kısımdaki basamak (digit) sayısı
- ÖRNEK 5 : 2314 desimal sayısının 9'a tümlenini bulalım. Çözüm n=4, r=10. $10^4-1-2314=$
- $=10000-1-2314=9999-2314=7685$ elde edilir.

Tümleyen Aritmetiği

- ÖRNEK 6: Binary $(101101)_2$ sayısının r-1 (r=2) veya 1' tümleyenini bulunuz.

Normalde 0 ları 1 birleri 0 yapmak yeter:
Sonuç= 010010 elde edilir.

Fomül uygulanırsa:
2^6-1-101101=1000000-0000001-101101=0010010
aynı sonuç bulunur.

- ÖRNEK 7 : 2314 desimal sayısının 9 tümlenini bulalım.
- n=4, r=10. 10^4-1-2314=10000-1-2314=9999-2314=7685 elde edilir.
- ÖRNEK 8: Binary $(101101)_2$ sayısının r-1 (r=2) veya 1 tümleyenini bulunuz.
- Normalde 0 ları 1 birleri 0 yapmak yeter:
Sonuç= 010010 elde edilir.

Tümleyen Aritmetiği

Kesirli sayıların r-1 tümleyeni $N^{r-1} = r^n - r^{-m} - N$ dir.

Örnek 9: $(624.125)_{10}$ sayısının 10'a ve 9'a tümleyenlerini bulunuz.

Çözüm: r=10, n=3, m=3
Sayının 10'a tümleyeni=10^3-624.125=375.875 olur.
9'a tümleyeni=10^3-10^{-3}-624.125=375.874

Örnek 10: $(100110.011)_2$ binary (ikili) sayısının 2'ye ve 1'e tümleyenlerini bulunuz.

Çözüm: r=2, n=6, m=3
Sayının 2'ye tümleyeni: 2^6-100110.011=011000.101
1'e tümleyeni:
1000000-0.001-100110.011=1000000-100110.100
=0011001.1 olur

Tümleyen Aritmetiği

Işaretli büyüklük aritmetiği

İşaretli büyüklük aritmetiğini kullanarak 100100112 (–19) ile 000011012 (+13) ‘ü toplayınız:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & 0 & 1 & 2 & & & & \Leftarrow \text{borrows} \\
1 & & 0 & 0 & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & 1 & 1 & & (-19) \\
0 & - & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & & +\ (13) \\
\hline
1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & & (-6)
\end{array}
$$

Tümleyen Aritmetiği

r tümleyen aritmetiği ile çıkarma

- **R tabanındaki iki pozitif sayının 'M - N' işlemi aşağıdaki gibi özetlenebilir.**
- ***a) M sayısının kendisi ile N sayısının r tümleyeni toplanır***
- ***b) Toplama sonucunda bulunan değerin 'elde' si varsa bu değer atılır ve sayının pozitif lduğu kabul edilir. Eğer elde değeri yoksa bulunan değerin r tümleyeni alınır ve önüne - işareti konur.***

- **ÖRNEK 1: (72532-3250) işleminin sonucunu 10'a tümleyen kullanarak bulunuz.**

- **03250 sayısının 10 tümleyeni 100000 - 3250 = 96750.**
- **Ohalde sonuç: 72532 + 96750 = 169282 (Elde 1 var)**

Tümleyen Aritmetiği

ÖRNEK 3: $(1010100)_2$ - $(1000100)_2$ işleminin sonucunu 2'nin tümleyenini kullanarak bulunuz.

(1000100)2 sayısının 2 tümleyeni 0111100 dir. Dolayısiyle sonuç: 1010100 + 0111100 = 10010000 (İşaret biti 1)

Taşma

- Pozitif+ Pozitif =Negatif
- Negatif + Negatif =Pozitif

- Örnek: +4 + 5
- =0100+0101
- =1001
- =-7

- +3= 0011 -3=1101
- +3= 000011
  -3=1111101

İkili sayı sisteminde kodlar (Binary Kodlar)

- Binary Coded Decimal- BCD

Decimal Symbol	BCD Digit
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

937.25 sayısı BCD olarak aşğıdaki gibi kodlanır:

1001	0011	0111	.	0010	0101
9	3	7		2	5

İkili sayı sisteminde kodlar (Binary Kodlar)

BCD Sayılarda Toplama

Örnek 1: $146_{10}+259_{10}=405_{10}$

0001 0100 0110	BCD formunda yazılım
+ 0010 0101 1001	
0011 1001 1111	
+ 0110	düzeltme sayısı (1111>9)
0011 1010 0101	
+ 0110	düzeltme sayısı (1010>9)
0100 0000 0101	$=405_{10}$

Herhangi bir BCD blok 9 dan büyük olunca o bloka düzeltme sayısı olarak 6 (binary 0110) eklenir.

Ağırlıklı Kodlar

2) 8-4-2-1 KODU (bu kod ağırlıklı bir koddur)

8-4-2-1 KODU

0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1

3) 6-3-1-1 KODU (AĞIRLIKLI KOD)

0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	1	0	0
4	0	1	0	1
5	0	1	1	1
6	1	0	0	0
7	1	0	0	1
8	1	0	1	1
9	1	1	0	0

3) 4-3-2-1 CODE (Ağırlıklı kod)

0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	1	0	0	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	0	1
9	1	1	1	0

Ağırlıklı Kodlar

3) 4-3-2-1 CODE (Ağırlıklı kod)

0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	1	0	0
4	1	0	0	0
5	1	0	0	1
6	1	0	1	0
7	1	1	0	0
8	1	1	0	1
9	1	1	1	0

Ağırlıksız Kodlar

4) ARTI 3 (EXCESS 3) Kodu (Ağırlıksız kod)

0	0	0	1	1
1	0	1	0	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	0	1	1	1
5	1	0	0	0
6	1	0	0	1
7	1	0	1	0
8	1	0	1	1
9	1	1	0	0

Bu kod 8-4-2-1 kodunun her sayısına 3 (0011) eklenerek bulunmustur ve ağırlıksız bir koddur.

Decimal Digit	BCD Code	Excess-3 Code
0	0000	0011
1	0001	0100
2	0010	0101
3	0011	0110
4	0100	0111
5	0101	1000
6	0110	1001
7	0111	1010
8	1000	1011
9	1001	1100

49 sayısını Excess-3 kodu ile gösteriniz.

Digit		BCD
4	4+3=7	0111
9	9+3=12	1100

$(49)=(01111100)_{+3}$

$(01111100)_{+3}$

Sayısının decimal karşılığını bulunuz.

- Excess-3 formatındaki sayı 4'lü gruplanır ve her grubun 10 luk karşılığı bulunur.

$(0111\ 1100)_{+3} = (7\ 12\ )_{+3}$

- Her basamaktan 3 çıkarılır.

$(7\ 12\ )_{+3} = (49)$

Ağırlıksız Kodlar

5. 5'te 2 Kodu (AĞIRLIKSIZ KOD)

0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
2	0	0	1	1	0
3	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	0
5	0	1	1	0	0
6	1	0	0	0	1
7	1	0	0	1	0
8	1	0	1	0	0
9	1	1	0	0	0

her ondalık sayı 5 bit ile yazılmıştır ve her satırda sadece iki tene 1 vardır. Analog-digital ölçmelerde cok kullanılan bir koddur.

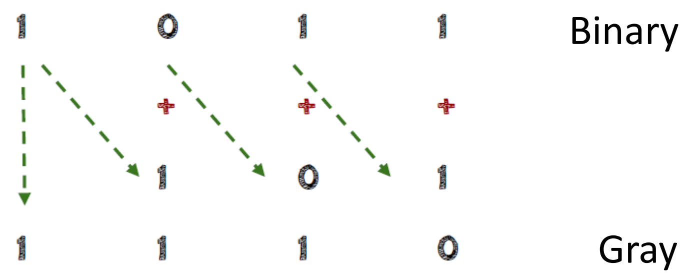
6) GRAY Kodu (Ağırlıksız kod)

0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	0	1	0
4	0	1	1	0
5	0	1	1	1
6	0	1	0	1
7	0	1	0	0
8	1	1	0	0
9	1	1	0	1

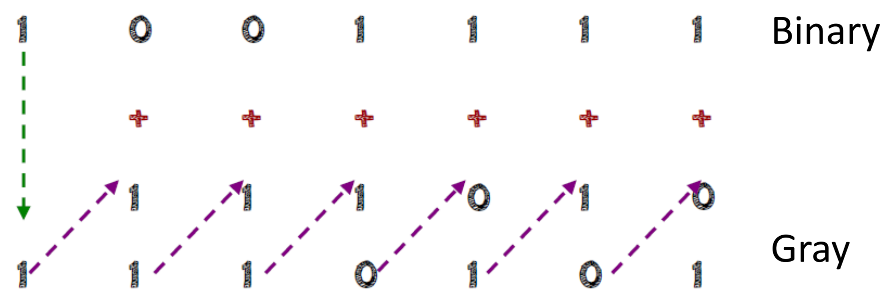
Ölçülmüş anlog işaretlerin dijital işarete dönüştürülmesine sıkça kullanılan bir koddur (A/D converters), örneğin motorların hızını when mesuring mil encoderi kullanarak ölçülmesinde.

Gray Kodu

İkilik tabandaki 1011 sayısını Gray koda çevirin



İkilik tabandaki $(1001111)_{Gray}$ sayısını ikilik koda çevirin



ASCII Kod : American Stadart code for Information Interchange

Char-acter	ASCII Code A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0	Char-acter	ASCII Code A_6	A_5	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
space	0	1	0	0	0	0	0	@	1	0	0	0	0	0	0
!	0	1	0	0	0	0	1	A	1	0	0	0	0	0	1
"	0	1	0	0	0	1	0	B	1	0	0	0	0	1	0
#	0	1	0	0	0	1	1	C	1	0	0	0	0	1	1
$	0	1	0	0	1	0	0	D	1	0	0	0	1	0	0
%	0	1	0	0	1	0	1	E	1	0	0	0	1	0	1
&	0	1	0	0	1	1	0	F	1	0	0	0	1	1	0
'	0	1	0	0	1	1	1	G	1	0	0	0	1	1	1
(	0	1	0	1	0	0	0	H	1	0	0	1	0	0	0
)	0	1	0	1	0	0	1	I	1	0	0	1	0	0	1
*	0	1	0	1	0	1	0	J	1	0	0	1	0	1	0
+	0	1	0	1	0	1	1	K	1	0	0	1	0	1	1
,	0	1	0	1	1	0	0	L	1	0	0	1	1	0	0
–	0	1	0	1	1	0	1	M	1	0	0	1	1	0	1
.	0	1	0	1	1	1	0	N	1	0	0	1	1	1	0
/	0	1	0	1	1	1	1	O	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	P	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	Q	1	0	1	0	0	0	1
2	0	1	1	0	0	1	0	R	1	0	1	0	0	1	0
3	0	1	1	0	0	1	1	S	1	0	1	0	0	1	1
4	0	1	1	0	1	0	0	T	1	0	1	0	1	0	0

Table 1-3
ASCII code
(incomplete)

Kaynakça

1. Hüseyin EKİZ, Mantık Devreleri, Değişim Yayınları, 4. Baskı, 2005
2. Thomas L. Floyd, Digital Fundamentals, Prentice-Hall Inc. New Jersey, 2006
3. M. Morris Mano, Michael D. Ciletti, Digital Design, Prentice-Hall, Inc.,New Jersey, 1997
4. Hüseyin Demirel, Dijital Elektronik, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2012