Kesikli Matematik

Fonksiyonlar

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet Ali ALTUNCU
Bilgisayar Mühendisliği

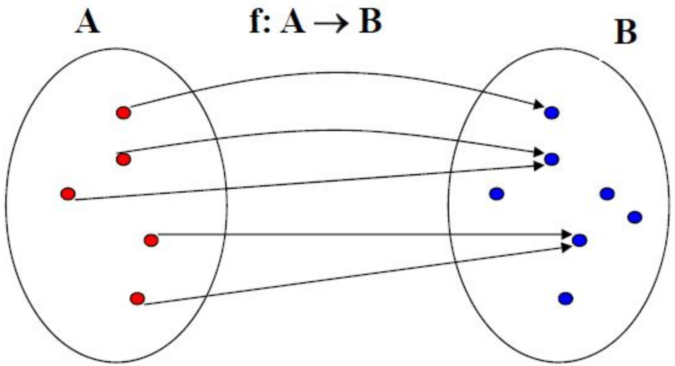
Fonksiyonlar

- Ayrık matematikte diziler gibi ayrık yapıların tanımlarında fonksiyonlar kullanılır.
- Ayrıca fonksiyonlar, bir bilgisayarın verilen bir büyüklükteki problemleri çözmesi için geçen zamanı göstermek için kullanılır.
- Pek çok bilgisayar programları ve alt programları böyle fonksiyonların değerlerini hesaplamak üzere tasarlanmıştır.
- Kendileri cinsinden tanımlanan yinelemeli fonksiyonlar, bilgisayar biliminin her yerinde kullanılır.

Fonksiyon

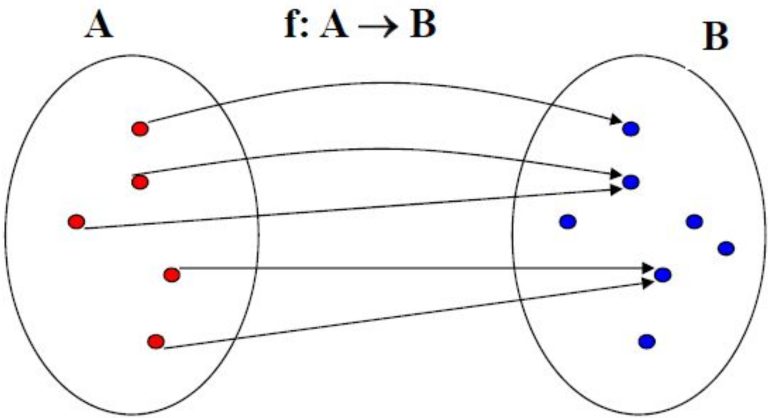
Tanım: A ve B boş olmayan iki küme olsun. A'dan B'ye bir *f* fonksiyonu, A’nın her elemanının B’nin tam olarak bir elemanına atandığı bir atamadır.

- A’nın bir a elemanı *f* fonksiyonu ile B’nin tek elemanı b’ye gönderildiğinde *f*(a)=b yazılır. *f*, A’dan B’ye bir fonksiyonsa; *f*: A $\longrightarrow$ B yazılır.



Fonksiyonların Temsilleri

1. Şekildeki gibi açık biçimde,
2. Bir formül verilerek (f(x)=x+1)
3. (a,b) gibi sıralı ikililer şeklinde (AxB kartezyen çarpımı)



Fonksiyonların Temsilleri

Örnek: A = {1,2,3} ve B = {a,b,c} olsun, *f*'nin şu şekilde tanımlandığını varsayalım:

- $1 \longrightarrow c$
- $2 \longrightarrow a$
- $3 \longrightarrow c$

***f* bir fonksiyon mudur?**

- *f*(1)=c, *f*(2)=a, *f*(3)=c olduğundan, A'nın her elemanına B'den bir eleman atandığı için **fonksiyondur.**

Fonksiyonların Temsilleri

Örnek: A = {1,2,3} ve B = {a,b,c} olsun, *g*'nin şu şekilde tanımlandığını varsayalım:

- $1 \longrightarrow c$
- $1 \longrightarrow b$
- $2 \longrightarrow a$
- $3 \longrightarrow c$

***g* bir fonksiyon mudur?**

- *g*(1), hem c hem de b' ye atandığı için **fonksiyon değildir.**

Fonksiyonların Temsilleri

Örnek: A = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} ve B = {0,1,2} olsun. A'dan B'ye olan ilişki R ile gösterilsin. R ilişkisi;

- (0,0), (3,0), (6,0), (9,0)
- (1,1), (4,1), (7,1),
- (2,2), (5,2), (8,2)

ise, bu ilişki ile belirtilen bir fonksiyon bulunuz.

Çözüm: ?

Fonksiyonların Temsilleri

Örnek: A = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} ve B = {0,1,2} olsun. A'dan B'ye olan ilişki R ile gösterilsin. R ilişkisi;

- (0,0), (3,0), (6,0), (9,0)
- (1,1), (4,1), (7,1),
- (2,2), (5,2), (8,2)

ise, bu ilişki ile belirtilen bir fonksiyon bulunuz.

Çözüm: h: A $\longrightarrow$ B ve h(x) = x mod 3

Fonksiyonlar

Tanım: *f*, A'dan B'ye bir fonksiyon olsun.

- A'ya *f*'nin tanım kümesi ve B'ye *f*'nin değer kümesi denir.
- *f*(a) = b ise, b, a'nın görüntüsü ve a, b'nin ön görüntüsüdür.
- A'nın elemanlarının görüntülerinin kümesine *f*'nin görüntü kümesi denir.
- Ayrıca, *f*, A'dan B'ye bir fonksiyon ise, *f*'nin A ile B'yi eşlediğini söyleriz.

Fonksiyonlar

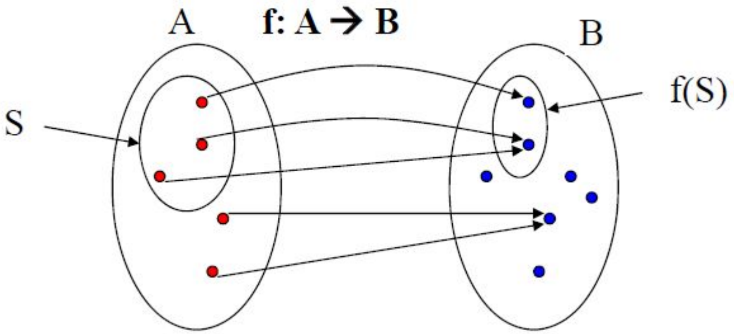
Örnek: A = {1,2,3} ve B = {a,b,c} olsun.

- *f*'nin şu şekilde tanımlandığını varsayalım: $1 \longrightarrow c$, $2 \longrightarrow a$, $3 \longrightarrow c$
- $1 \longrightarrow c$ **c, 1'in görüntüsüdür.**
- $2 \longrightarrow a$ **2, a'nın ön görüntüsüdür.**
- ***f*'in tanım kümesi (domain)?**, {1,2,3}
- ***f*'in değer kümesi (codomain)?,** {a,b,c}

Fonksiyonlar

Tanım: *f*, A kümesinden B kümesine bir fonksiyon ve S, A'nın bir alt kümesi olsun. S'nin *f* altındaki görüntüsü, S'nin elemanlarının görüntülerinden oluşan B'nin bir alt kümesidir. S'nin görüntüsünü *f*(S) ile gösteririz.

- $f(S) = \{ f(s) \mid s \in S \}$ ile gösterilir.



Fonksiyonlar

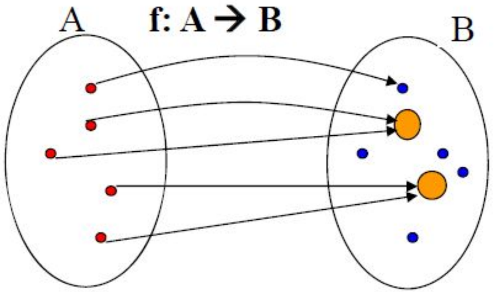
Örnek: A = {1,2,3} ve B = {a,b,c} olsun.

- *f*'nin şu şekilde tanımlandığını varsayalım: $1 \longrightarrow c$, $2 \longrightarrow a$, $3 \longrightarrow c$
- S= {1,3} altkümesinin görüntüsü *f*(S) ={c} kümesidir.

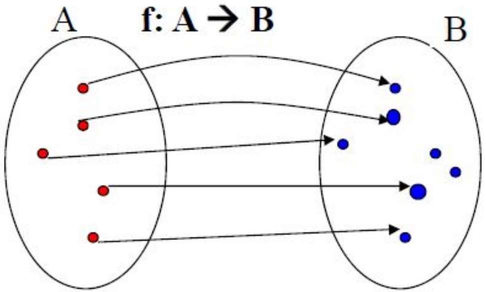
Bire-Bir (Injective) Fonksiyon

Tanım: Bazı fonksiyonlar tanım kümesinin iki farklı elemanını aynı değere götürmezler. Bu fonksiyonlara **bire-birdir** denir.

Alternatif: Bir *f* fonksiyonuna ancak ve ancak her a ve b, *f*'nin tanım kümesi elemanı için *f*(a) = *f*(b) eşitliği a=b olmasını gerektiriyorsa **bire-bir** denir.



Bire-Bir değil



Bire-Bir

Bire-Bir (Injective) Fonksiyon

Örnek: A = {1,2,3} ve B = {a,b,c} olsun.

• *f*'nin şu şekilde tanımlandığını varsayalım: $1 \longrightarrow c$, $2 \longrightarrow a$, $3 \longrightarrow c$

• *f* fonksiyonu bire-bir midir? **Hayır (f(1) = f(3) = c ve 1 ≠ 3 olduğundan bire-bir değildir.)**

Örnek: *g* : Z $\longrightarrow$ Z olsun ve *g*(x) = 2x - 1 olsun.

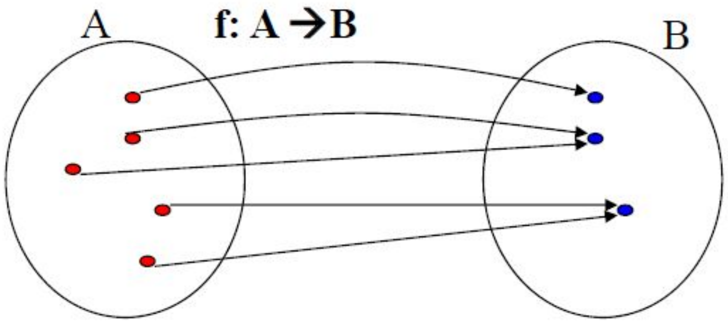
f fonksiyonu bire-bir midir? **Evet**

- *g*(a) = *g*(b) olduğunu varsayalım
- 2a-1=2b-1 $\Rightarrow$ a=b 'dir **(Tanım gereği bir-birdir.)**

Örten (Surjective) Fonksiyon

Tanım: A'dan B'ye bir *f* fonksiyonu, ancak ve ancak her b ∈ B için f(a) = b olacak şekilde bir a ∈ A öğesi varsa **örtendir.**

- **x:** tanım kümesi, **y:** değer kümesi olmak üzere; ∀y ∃x (*f*(x)=y) ise örtendir.



Örten (Surjective) Fonksiyon

Örnek: A = {1,2,3} ve B = {a,b,c} olsun.

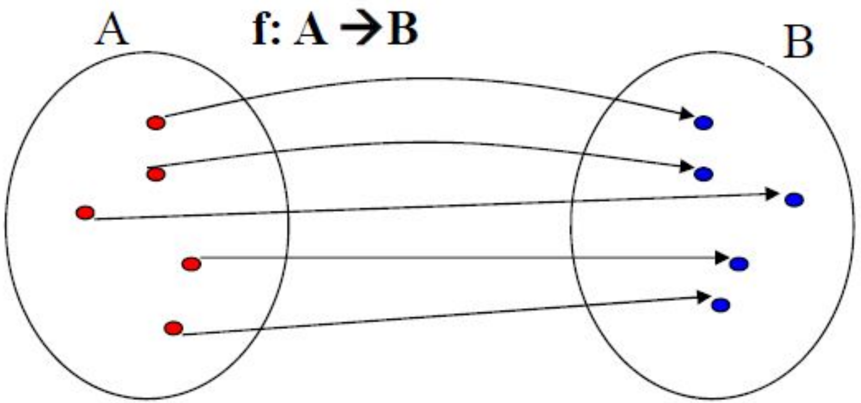
- *f*'nin şu şekilde tanımlandığını varsayalım: $1 \longrightarrow c$, $2 \longrightarrow a$, $3 \longrightarrow c$
- *f* fonksiyonu örten midir? **Hayır (Çünkü b ∈ B ön görüntüye sahip değildir.)**

Örnek: A = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}, B = {0,1,2} ve $h: A \longrightarrow B$, h(x) = x mod 3 olsun.

- *h* fonksiyonu örten midir? **Evet (b ∈ 0'ın ön görüntüsü (0,3,6,9), b ∈ 1'in ön görüntüsü (1,4,7) ve b ∈ 2'nin ön görüntüsü (2,5,8) olduğundan örtendir.)**

Bire-Bir ve Örten (Bijective) Fonksiyon

Tanım: *f* fonksiyonu bire-bir ve örten ise **bire-bir eşleme (bijective)** denir. Böyle bir fonksiyona **tam eşleme** de denir.



Bire-Bir ve Örten (Bijective) Fonksiyon

Örnek: A = {1,2,3} ve B = {a,b,c} olsun.

• *f*'nin şu şekilde tanımlandığını varsayalım: $1 \longrightarrow c$, $2 \longrightarrow a$, $3 \longrightarrow b$

• *f* fonksiyonu bijective midir? **Evet (Çünkü bire-bir ve örtendir.)**

Örnek: f, $Z \longrightarrow Z$, ve $f(z) = 2 * z$ olsun.

• *f* fonksiyonu bijective midir? **Hayır (*f*, bire bir ama örten değil (3'ün ön görüntüsü yoktur.)**

Bire-Bir ve Örten (Bijective) Fonksiyon

Örnek: $g : Z \longrightarrow Z$ ve g(n) = floor (n/2) olsun.

- g(0) = floor (0/2) = 0
- g(1) = floor (1/2) = 0
- g(2) = floor (2/2) = 1
- g(3) = floor (3/2) = 1
- g fonksiyonu bijective midir? **Hayır (Örtendir, fakat g(0) = g(1) = 0 ve 0 ≠ 1 olduğu için bire-bir değil.)**

Not: Floor, bir reel sayıyı x'e, x'ten küçük veya eşit olan en büyük tam sayıya eşitler.

Gerçek Sayılarda Fonksiyonlar

Tanım: f ve g, A'dan R'ye fonksiyonlar olsun. O halde $f + g$ ve $f * g$ aşağıdaki fonksiyonlarla tanımlanır:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f * g)(x) = f(x) * g(x)$

Örnek: $f(x) = x-1$ ve $g(x) = x^3+1$ ise;

- $(f + g)(x) = x^3+x$
- $(f * g)(x) = x^4-x^3+x-1$

Artan ve Azalan Fonksiyonlar

Tanım: Tanım kümesi ve değer kümesi gerçek sayıların alt kümeleri olan bir f fonksiyonu verilmiş olsun. $x<y$ olan her $x, y \in R$ için $f(x)<f(y)$ oluyorsa bu fonksiyon **kesinlikle artmaktadır**. Benzer şekilde, $x<y$ olan her $x, y \in R$ için $f(x)>f(y)$ oluyorsa, f'ye **kesin olarak azalan fonksiyon** denir.

Örnek: $g : R \longrightarrow R$ ve $g(x) = 2x - 1$ olsun. **Artan fonksiyon mudur?**

İspat:

- $x<y$ olsun.
- Her iki tarafı 2 ile çarparsak $2x<2y$ olur.
- Her iki tarafı 1'den çıkarırsak $2x-1<2y-1$ olur.
- Böylece $g(x)<g(y)$ olur. Kesinlikle **artan fonksiyondur.**

Not: Kesin olarak artan ve azalan fonksiyonlar bire-birdir.

Özdeşlik Fonksiyonu

Tanım: A bir küme olsun. A üzerinde tanımlı özdeşlik fonksiyonu, $i_A: A \longrightarrow A$, her $x \in A$ için **$i_A(x) = x$**'tir. Diğer bir deyişle özdeşlik fonksiyonu her elemanı kendisine götürür ve bijective'dir (bire-bir ve örtendir).

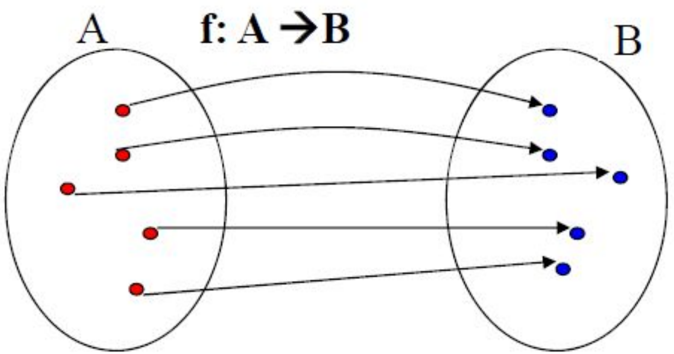
Örnek:

$A = \{1,2,3\}$ olsun. O zaman:

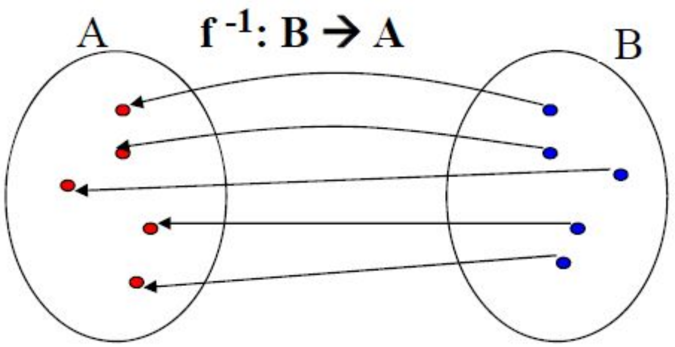
- $i_A(1) = 1$
- $i_A(2) = 2$
- $i_A(3) = 3$

Ters Fonksiyonlar

Tanım: *f*, A kümesinden B kümesine bire-bir ve örten (bijective) olsun. *f*'nin ters fonksiyonu, B'nin bir b elemanını, A'nın *f*(a) = b olacak şekilde tek a elemanına götürür. *f*'nin ters fonksiyonu f^{-1} ile gösterilir. **Dolayısıyla, *f*(a) = b olduğunda f^{-1}(b) = a olur.**



Bire-bir ve örten *f* fonksiyonu

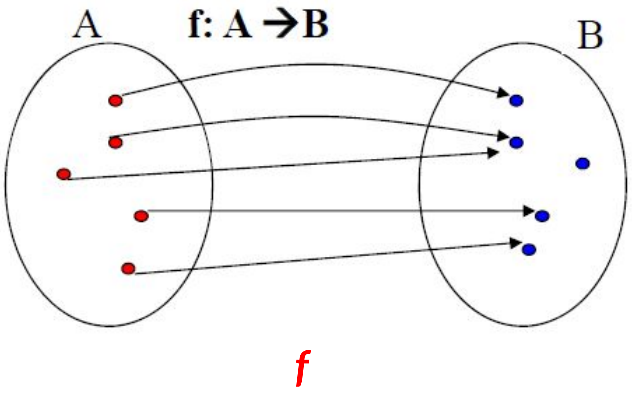


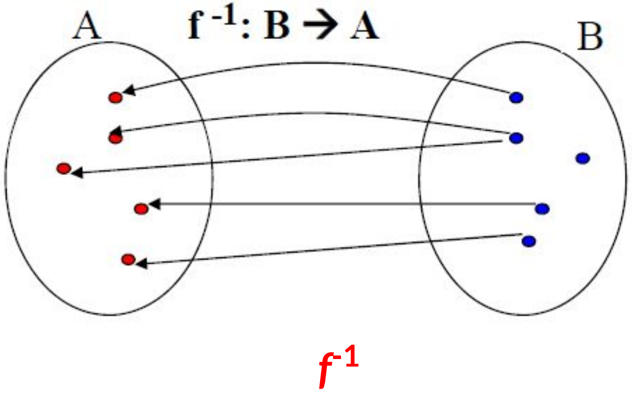
f fonksiyonunun tersi

Ters Fonksiyonlar

Not: *f* bire-bir ve örten değilse, *f*'nin ters fonksiyonunu tanımlamak mümkün değildir.

Örnek: Bire-bir olmayan *f* fonksiyonu



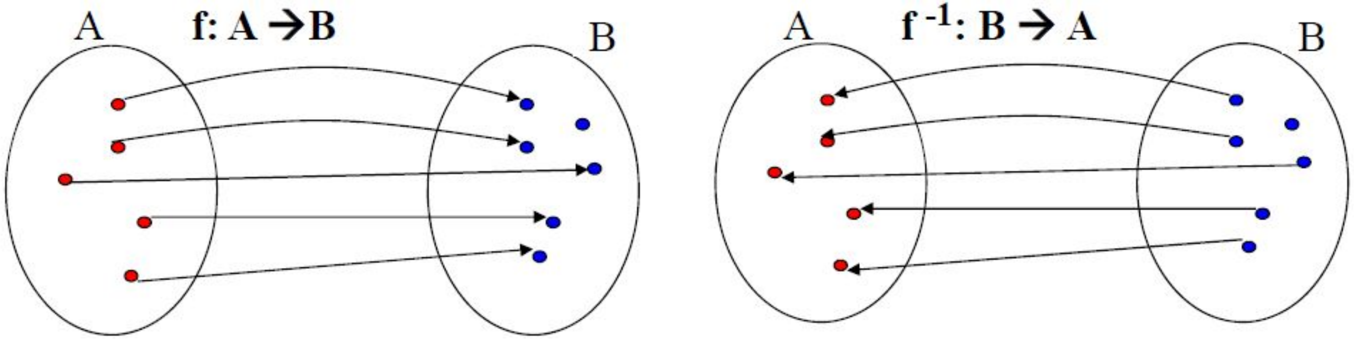


- f^{-1} bir fonksiyon değildir. B'nin bir elemanı iki farklı elemana eşlenir.

Ters Fonksiyonlar

Not: *f* bire-bir ve örten değilse, *f*'nin ters fonksiyonunu tanımlamak mümkün değildir.

Örnek: Örten olmayan f fonksiyonu



f f^{-1}

- f^{-1} bir fonksiyon değildir. B'nin bir elemanı hiçbir elemana eşlenmez.

Ters Fonksiyonlar

Not: Özdeşlik fonksiyonunun tersi kendisidir.

Örnek:

A = {1,2,3} olsun. O zamanlar:

- $i_A(1) = 1$ ise $i_A^{-1}(1) = 1$
- $i_A(2) = 2$ ise $i_A^{-1}(2) = 2$
- $i_A(3) = 3$ ise $i_A^{-1}(3) = 3$

Ters Fonksiyonlar

Örnek: $g : R \longrightarrow R$ ve $g(x) = 2x - 1$ olsun. $\boldsymbol{g^{-1}}$ nedir?

Çözüm:

- $y = 2x\text{-}1 \Rightarrow y+1 = 2x \Rightarrow x = \boldsymbol{g^{-1}(y) = (y+1/2)}$

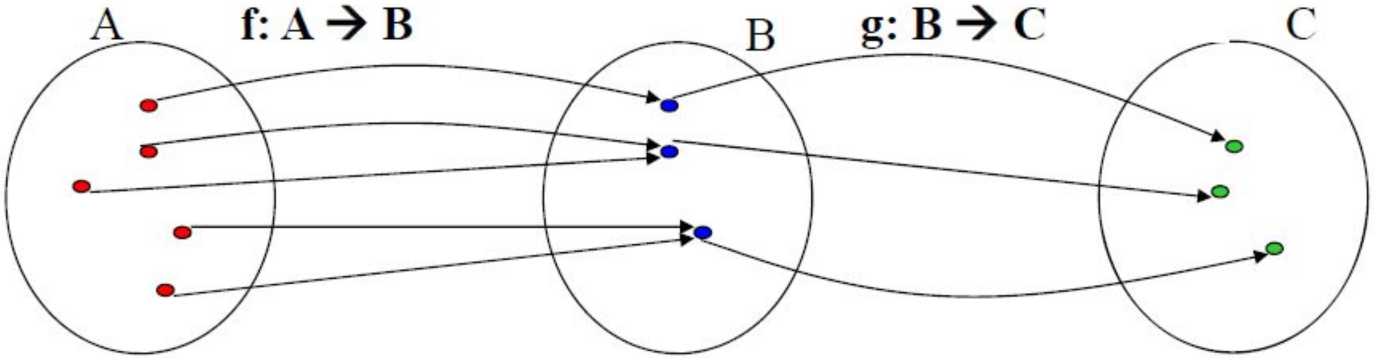
g^{-1} ‘in doğruluğunun testi:

- $g(3) = 5$
- $g^{-1}(5) = 3$

Fonksiyonların Bileşkesi

Tanım: *f*, A kümesinden B kümesine bir fonksiyon ve *g*, B kümesinden C kümesine bir fonksiyon olsun. *g* ve *f* fonksiyonlarının bileşkesi ***g* o *f***;

- ***g* o *f* (a) = *g* (*f*(a))** ile gösterilir.



Fonksiyonların Bileşkesi

Örnek: A = {1,2,3} ve B = {a,b,c,d} olsun.

g: A $\longrightarrow$ A , 1 $\longrightarrow$ 3, 2 $\longrightarrow$ 1, 3 $\longrightarrow$ 2

f: A $\longrightarrow$ B, 1 $\longrightarrow$ b, 2 $\longrightarrow$ a, 3 $\longrightarrow$ d

ise $f \circ g$: A $\longrightarrow$ B nedir?

Çözüm:

- $f \circ g$: 1 $\longrightarrow$ d, 2 $\longrightarrow$ b, 3 $\longrightarrow$ a

Fonksiyonların Bileşkesi

Örnek: *f* ve *g*, Z (tam sayılar kümesi)'den Z'ye iki fonksiyon ve $f(x) = 2x$,

$g(x) = x^2$ olsun.

- $\boldsymbol{f \circ g} : Z \longrightarrow Z = \boldsymbol{f \circ g\,(x)} = f(g(x)) = 2(x^2) = 2x^2$
- $\boldsymbol{g \circ f} : Z \longrightarrow Z = \boldsymbol{g \circ f\,(x)} = g(f(x)) = (2x)^2 = 4x^2$

Fonksiyonların Bileşkesi

Not: Tüm x'ler için $\mathbf{(f \circ f^{-1})(x) = x}$ ve $\mathbf{(f^{-1} \circ f)(x) = x}$ olduğunu gösterelim.

Örnek: $f: R \longrightarrow R$, $f(x) = 2x-1$ olsun. Böylece, $f^{-1}(x) = (x+1) / 2$'dir.

- $\mathbf{(f \circ f^{-1})(x)} = f\,(f^{-1})(x)) = 2\,((x+1) / 2) - 1 = x + 1 - 1 = x$
- $\mathbf{(f^{-1} \circ f)(x)} = f^{-1}(f(x)) = ((2x - 1) + 1) / 2 = 2x / 2 = x$

Bazı Önemli Fonksiyonlar

- **Faktöriyel Fonksiyonu:** $f(n) = n!$
- **Taban (Floor) Fonksiyonu :** Bir reel sayıyı x'e, x'ten küçük veya eşit olan en büyük tam sayıya eşitler.
- **Tavan (Ceiling) Fonksiyonu :** Bir reel sayıyı x'e, x'ten büyük veya eşit olan en küçük tam sayıya eşitler.
- Bu fonksiyonlar nesnelerin sayımında sıklıkla kullanılır. Ayrıca belirli büyüklükteki problemlerin çözümünde kullanılan fonksiyonların gerektirdiği adım sayısını analiz etmekte de kullanılır.

Kaynaklar

- **Kenneth Rosen,** “Discrete Mathematics and Its Applications”, 7th Edition , McGraw Hill Publishing Co., 2012.
- **Milos Hauskrecht,** “Discrete Mathematics for Computer Science”, University of Pittsburgh, Ders Notları.