2023-2024 学年概率统计（理工）期末试题解答

一：填空题（共 24 分，每小题 3 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	2024	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{8}$	-1	40	$\frac{31}{3}$	5	0.02

二：解答题(共 76 分)

第一题：共 10 分

解：设A表示“取到正品”，B表示“抛掷 5 次都是国徽”，则$P(A)=\frac{m}{m+n}$，$P(B|A)=\frac{1}{2^5}$，$P(B|\bar{A})=1$，由贝叶斯公式可知

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})}=\frac{m}{m+32n}.$$

第二题：共 15 分

解：

(1) 由归一性可知，$\int_0^1\int_0^2(x^2+kxy)dxdy=\frac{2}{3}+k=1$，故$k=\frac{1}{3}$.

(2) $P(Y\geq X^2)=1-\int_0^1\int_0^{x^2}(x^2+kxy)dxdy=1-\frac{41}{180}=\frac{139}{180}$.

(3) 当$0\leq z\leq 2$时，

$$P(Z\leq z)=P\left(X\leq\frac{z}{2},Y\leq z\right)=\int_0^{z/2}\int_0^{z}(x^2+kxy)dxdy$$

$$=\int_0^{z/2}\left(x^2z+\frac{1}{6}xz^2\right)dx=\frac{z^4}{16}$$

显然：$z\leq 0$时，$P(Z<z)=0$；$z\geq 2$时，$P(Z<z)=1$.

求导可得Z的概率密度：

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3}{4},0\le z\le 2\\ 0,其他\end{cases}.$$

第三题，共 15 分

解：设X为治愈的人数.

（1）$X\sim B(100{,}0.8)$，由中心极限定理，近似地有$X\sim N(80,4^2)$，故

$$P\{X>75\}=P\left(\frac{X-80}{4}>\frac{75-80}{4}\right)$$

$$=1-\Phi(-1.25)=\Phi(1.25)=0.89$$

（2）$X\sim B(100{,}0.7)$，由中心极限定理，近似地有$X\sim N(70{,}21)$，故

$$P\{X>75\}=P\left(\frac{X-70}{\sqrt{21}}>\frac{75-70}{\sqrt{21}}\right)$$

$$=1-\Phi(1.09)=1-0.86=0.14$$

(3)第二类错误.

(4)医院的检验方法相当于作了假设检验，以“治愈率≥ 0.8”为零假设。假设检验是有利于零假设的，在医院的检验方法下，该药即使通过检验，即接受零假设，也不能断言“治愈率不低于 0.8”是显著的.我们对于“治愈率不低于 0.8”只有较弱的证据，并没有太大的把握，这对于患者来说是不利的.

第四题：共 15 分

解：(1)因$EX=1-\theta/2$，故矩估计为：$\hat{\theta}=2(1-\bar{X})$. 它是参数$\theta$的无偏估计，因$E\hat{\theta}=E2(1-\bar{X})=2(1-E\bar{X})=2(1-EX)=\theta$.

(2) 似然函数为$L(\theta)=\frac{1}{\theta^n}$，无临界点，因$1-\theta\le X_i$，即$1-X_i\le\theta$，由似然函数的单调性可知极大似然估计为：$\hat{\theta}=\max\{1-X_1,\cdots,1-X_n\}=1-\min\{X_1,\cdots,X_n\}$.

第五题：共 15 分

解：

(1) 作单侧假设检验：$H_0:\mu\le 23.5, H_1:\mu>23.5$. 考虑随机变量：$t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(8)$. 零假设成立时，检验统计量$t_*=\frac{\bar{X}-23.5}{S/\sqrt{9}}\ge t$. 取$t(8)$的分位点$t_{0.95}(8)=1.86$，使得$P(t_*>1.86)\le P(t>1.86)=0.05$. 因而拒绝域为$\{t_*>1.86\}$. 代入样本值可得

$$t_*=\frac{24.6-23.5}{1.96/\sqrt{9}}=1.68<1.86,$$

样本值不在拒绝域中，故不能认为总体均值显著大于23.5.

(2) σ^2的置信水平为0.95的置信区间：$\chi^2=\frac{8S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(8)$，取分位点$\chi^2_{0.025}(8)=2.2$，$\chi^2_{0.975}(8)=17.5$，使得$P(\chi^2\le 2.2)=0.025$，$P(\chi^2\ge 17.5)=0.025$. 故$P(2.2\le\chi^2\le 17.5)=0.95$，因$\{2.2\le\chi^2\le 17.5\}=\left\{2.2\le\frac{8S^2}{\sigma^2}\le 17.5\right\}=\left\{\frac{8S^2}{17.5}\le\sigma^2\le\frac{8S^2}{2.2}\right\}$，故$\sigma^2$的置信水平0.95的置信区间为：$\left[\frac{8S^2}{17.5},\frac{8S^2}{2.2}\right]$，代入样本值，即得所求置信区间

$$[8\times 3.85/17.5, 8\times 3.85/2.2]=[1.76,14].$$

(3) σ^2的置信水平为0.975的单侧置信上限，即为σ^2的置信水平0.95的置信区间的上限，即14.

第六题：共 6 分

判断：正确.

证明：模仿切比雪夫不等式的证明即可.

$$P\{X > \varepsilon\} = \int_{x>\varepsilon} f(x)dx \le \int_{x>\varepsilon} \frac{x}{\varepsilon} f(x)dx$$

$$\le \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\varepsilon} f(x)dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \frac{EX}{\varepsilon}.$$