2023-2024概率统计期末

2024年12月19日 9:32

一、填空题

1.解：$P=\frac{1}{C_{24}^{3}}=\frac{1}{2024}$，则 $\frac{1}{P}=2024$

2.解：$P(\bar{A}\bar{B})=\frac{1}{9}$，$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)$

则 $P(A)=P(B)$，则 $P(A)=\frac{2}{3}$

3.解：$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.25 & 0.5 & 0.25\end{pmatrix}$

$\because$ X、Y 相互独立

$\therefore$

X\Y	0	1	2
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

则 $E(Z)=0\times\frac{1}{8}+0\times\frac{2}{8}+0\times\frac{1}{8}+0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{2}{8}+1\times\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

4.解：设其中一段长为x，另一段长为y，则

$$x+y=3$$

$\therefore$ 相互系数为-1

5.解：$E(X)=\frac{1}{2}$，$D(X)=\frac{1}{4}$，$E(Y)=3$，$D(Y)=3$

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=-1$ $\qquad \frac{3}{3}+\frac{28}{3}=\frac{24}{3}$

则 $E(XY)=-\frac{5}{6}$，同时 $D(2X-3Y+8)=4D(X)+9D(Y)-12Cov(X,Y)$

$\therefore D(2X-3Y+8)=1+27+12=40$

6.解：$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2X_k-1}{\sqrt{n}}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(2X_k-1)^2=E\left[(2X-1)^2\right]=D(2X-1)+\left[E(2X-1)\right]^2$

$\because D(2X-1)=4D(X)=4\times\frac{4}{12}=\frac{4}{3}$，$E(2X-1)=2E(X)-1=3$

$\therefore E\left[(2X-1)^2\right]=\frac{4}{3}+9=\frac{31}{3}$

$\therefore E[(2X-1)^2] = \frac{4}{3} + 9 = \frac{31}{3}$

7.解：5

8.解：在 $\mu=6$ 时样本均值 $\bar{X}$ 的分布为 $N(6,1)$，标准化后 $\bar{X}$ 为 $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} = 2$

则犯二错概率为 $P(\bar{X} \geq 8 \mid \mu=6) = P(Z \geq 2) = 1-\Phi(2) = 0.02$

二、解答题

1.解：设事件A为硬币为正面，事件B为抛掷5次都是国徽

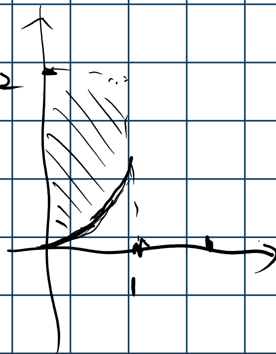
$\therefore P(A) = \frac{m}{m+n}$，$P(B|A) = \frac{1}{32}$，$P(B|\bar{A}) = 1$

$\because P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$，故 $P(AB) = \frac{m}{32(m+n)}$

又 $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = \frac{m+32n}{32(m+n)}$

则 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{m}{m+32n}$

2.解：由题意



(1) $\int_0^1 dx \int_0^2 (x^2+kxy)\,dy = 1$，则 $\frac{2}{3}+k=1$，故 $k=\frac{1}{3}$

(2) $P(Y \geq X^2) = \int_0^1 dx \int_{x^2}^2 (x^2+\frac{1}{3}xy)\,dy = \frac{139}{180}$

(3) $P(Z \leq z) = P(\max\{2X, Y\} \leq z) = P(X \leq \frac{z}{2}, Y \leq z)$

$= \int_0^{\frac{z}{2}} dx \int_0^z (x^2+\frac{1}{3}xy)\,dy = \frac{x^4}{16} \qquad z \in [0,2]$

$\therefore z \in [0,2]$ 时 $f_Z(z) = \frac{x^3}{4}$

$\therefore f_Z(z) = \begin{cases} \frac{x^3}{4} & 0 \leq z \leq 2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$

3.解(1)由题意 $X \sim B(100, 0.8)$，故由中心极限定理可知 $X \sim N(80, 16)$

则 $P(X > 75) = P\left(\frac{X-80}{4} > \frac{75-80}{4}\right) = \Phi(1.25) = 0.89$

则 $P(X>75)=P\left(\frac{X-80}{4}>\frac{75-80}{4}\right)=\Phi(1.25)=0.89$

(2) $X\sim B(100,0.7)$，故由中心极限定理知 $X\sim N(70,21)$

则 $P(X>75)=P\left(\frac{X-70}{\sqrt{21}}>\frac{75-70}{\sqrt{21}}\right)=1-\Phi(1.09)=0.14$

(3) 第二类错误

(4) 不利的

4.解：(1) $\because E(X)=\frac{1+(1-\theta)}{2}=1-\frac{\theta}{2}$，则 $\theta=2-2E(X)$

则矩估计为 $\hat{\theta}_1=2-2\bar{X}$

$\because E(\hat{\theta}_1)=E(2-2\bar{X})=2-2E(\bar{X})=\theta$

$\therefore$ 为无偏估计

(2) 极大似然方程为 $L(\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}X_i$，取对数后有 $\ln L(\theta_2)=\sum_{i=1}^{n}X_i$

$\because$ 无极值点，且严格单调递增

又 $X_i\geq 1-\theta$，故 $1-X_i\leq\theta$.

则 $\hat{\theta}_2=\max\{1-X_1,1-X_2,\cdots,1-X_n\}$

5.解 (1) 假设 $H_0:\mu<23.5$，$H_1:\mu>23.5$

选取统计量 $t=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(8)$

$\because t_{0.95}(8)=1.86$ 而统计量 $t\approx1.68<t_{0.95}(8)$

$\therefore$ 无法拒绝原假设，总体均值 μ 不显著大于 23.5

(2) 在 μ 未知估计 σ^2 的情况下选择 χ^2 分布

则 σ^2 的双侧置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

代入相关数值得置信区间为 $(1.76, 14)$

(3) 在 μ 未知估计 σ^2 的情况下选择 χ^2 分布

则 σ^2 的单侧置信上限为

$$\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)} = 14$$

6. 解：$\because P(X>\varepsilon) = \int_{x>\varepsilon} f(x)dx \leq \int_{x>\varepsilon} \frac{x}{\varepsilon} f(x)dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{x}{\varepsilon} f(x)dx = \frac{E(X)}{\varepsilon}$

故正确