DICIPLINE : Mathématiques	NIVEAU : 3ème

Séquence N°1	THEME : Organisation et gestion de données - Fonctions

RAPPEL DU COURS

Séquence 1 : Fonctions affines et linéaires – Définitions, premiers exemples et vocabulaires

Définition : On appelle **fonction affine**, une fonction *f* définie par :

$f(x) = ax + b$ où a et b sont des nombres quelconques.

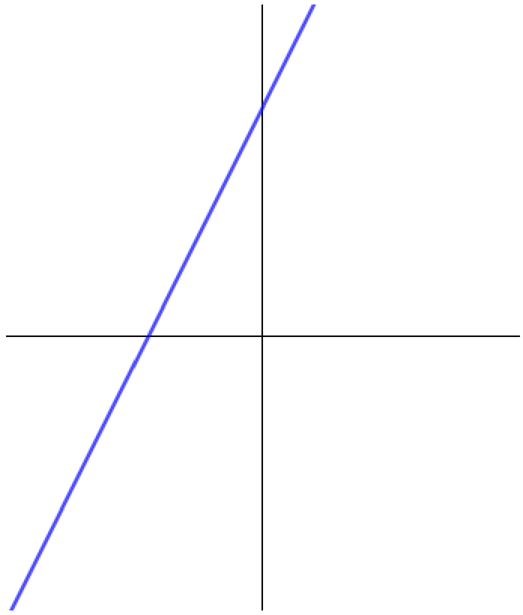
Cas particulier : Lorsque $b = 0$, la fonction définie par $f(x) = ax$ est dite **linéaire**.

Exemples :

- $f(x) = 2x + 3$ est dite affine car elle est de la forme $ax + b$ avec $a = 2$ et $b = 3$.
- $f(x) = 4x$ est dite linéaire (elle est aussi affine) car elle est de la forme ax avec $a = 4$.

Théorème :

- Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une **droite non-parallèle à l'axe des ordonnées**.
- Réciproquement, toutes droites non parallèles à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.



Vocabulaire :

- Le nombre « *a* » s'appelle le **coefficient directeur de la droite**.
Il répond à la question « de combien augmente f(x) quand x augmente de 1 ? ».
- Le nombre « *b* » est **l'ordonnée à l'origine** : la droite passe par le point de coordonnées (0 ; b). Il est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées (vertical).
Il répond à la question « combien vaut f(x) quand x=0 ? », soit « combien vaut f(0) ? ».

EXERCICES

Exercice 1 :
Parmi les fonctions f, g, h et m définies ci-dessous, indique celles qui sont linéaires.

a. $f(x) = 2x$
b. $h(x) = 3x - 4$
c. $g(x) = x^2$
d. $m(x) = (5 - 2x) - 5$

Exercice 2 :
Parmi les fonctions n, p, k et d définies ci-dessous, indique celles qui sont affines.

a. $n(x) = 5x$
b. $k(x) = 2x + 7$
c. $p(x) = \frac{1}{x}$
d. $d(x) = (4x - 7) - 4x$

Exercice 3 :
Parmi les fonctions t, u, w et z définies ci-dessous, indique celles qui sont affines.

a. $t(x) = -x$
b. $u(x) = \frac{1}{2x+3}$
c. $w(x) = (x + 9)^2 - x^2$
d. $z(x) = (3x - 1)^2 - 3x^2$

Exercice 4 :
Un rectangle a pour longueur 7 cm et pour largeur x cm.

a. Exprime le périmètre $p(x)$ en cm, et l'aire $a(x)$, en cm², de ce rectangle en fonction de x.
b. Les fonctions p et a sont-elles linéaires ? Sont-elles affines ?

DICIPLINE : Mathématiques	NIVEAU : 3ème

Séquence N°1	THEME : Organisation et gestion de données - Fonctions

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1

a. $f(x) = 2x$ est une fonction linéaire car elle est de la forme ax avec $a = 2$.

b. $h(x) = 3x - 4$ est une fonction affine car elle est de la forme $ax + b$ avec $a = 3$ et $b = -4$.

c. $g(x) = x^2$ n'est pas une fonction affine et n'est pas une fonction linéaire.

d. $m(x) = (5 - 2x) - 5 = 5 - 2x - 5 = -2x$ est une fonction linéaire car elle est de la forme ax avec $a = -2$. On a réduit l'expression de la fonction m.

Exercice 2

a. $n(x) = 5x$ est une fonction linéaire car elle est de la forme ax avec $a = 5$.

b. $k(x) = 2x + 7$ est une fonction affine car elle est de la forme $ax + b$ avec $a = 2$ et $b = 7$.

c. $p(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas une fonction affine et n'est pas une fonction linéaire.

d. $d(x) = (4x - 7) - 4x = 4x - 7 - 4x = -7$ est une fonction constante car elle est de la forme b avec $b = -7$. On a réduit l'expression de la fonction d.

Exercice 3

a. $n(x) = -x = -1 \times x$ est une fonction linéaire car elle est de la forme ax avec $a = -1$.

b. $u(x) = \frac{1}{2x+3}$ n'est pas une fonction affine et n'est pas une fonction linéaire.

c. $w(x) = (x + 9)^2 - x^2$
On va développer et réduire l'expression de la fonction w.
$(x + 9)^2 - x^2 = (x + 9)(x + 9) - x^2$ On développe
$= x^2 + 9x + 9x + 81 - x^2$ On réduit
$= 18x + 81$
w est donc une fonction affine car elle est de la forme $ax + b$ avec $a = 18$ et $b = 81$.

d. $z(x) = (3x - 1)^2 - 3x^2$
On va développer et réduire l'expression de la fonction z.
$(3x - 1)^2 - 3x^2 = (3x - 1)(3x - 1) - 3x^2$
$= 9x^2 - 3x - 3x - 3x^2 + 1$
$= 6x^2 - 6x + 1$
z n'est donc pas une fonction affine et n'est pas une fonction linéaire.

Exercice 4

Rappels :
- Le périmètre d'un rectangle se calcule avec la formule $P_{rectangle} = 2 \times longueur + 2 \times largeur$
- L'aire d'un rectangle se calcule avec la formule $A_{rectangle} = longueur \times largeur$

a. Le rectangle a pour longueur 7 cm et pour largeur x cm. On utilise les formules des rappels :
- Périmètre : $p(x) = 2 \times 7 + 2 \times x = 14 + 2x$
- Aire : $a(x) = 7 \times x = 7x$

b.
- $p(x) = 14 + 2x$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 2$ et $b = 14$.
p est donc une fonction affine.
- $a(x) = 7x$ est de la forme ax avec $a = 7$.
a est donc une fonction linéaire. Attention, a est aussi une fonction affine (avec $b = 0$).

DICIPLINE : Mathématiques	NIVEAU : 3ème

Séquence N°2	THEME : Organisation et gestion de données - Fonctions

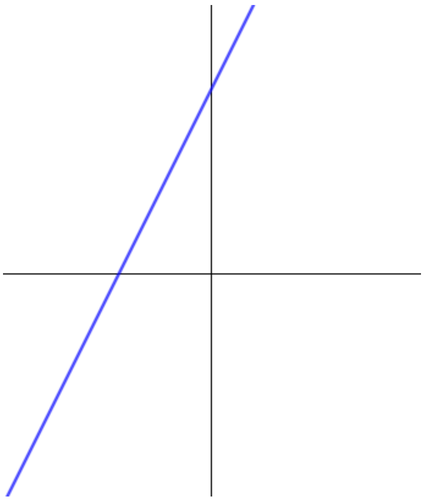
RAPPEL DU COURS

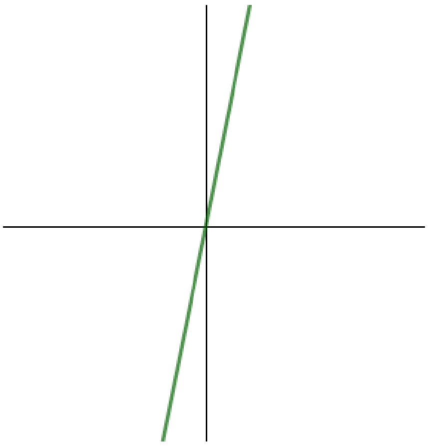
Séquence 2 : Fonctions affines et linéaires – Représentations graphiques

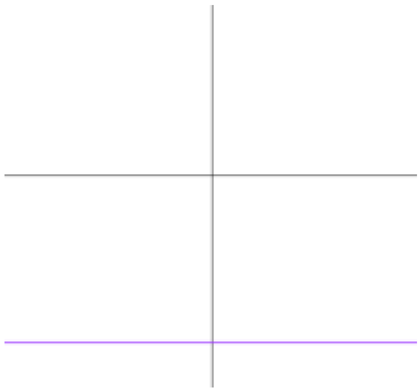
Propriété : Soit f une fonction affine définie par : $f(x) = ax + b$

- Si $a > 0$, alors f est croissante (sa courbe « monte »)
- Si $a < 0$, alors f est décroissante (sa courbe « descend »)
- Si $a = 0$, alors f est constante (sa courbe est parallèles à l'axe des abscisses)

Propriétés :







Ci-dessus, la représentation graphique d'une fonction affine de la forme : $f(x) = ax + b$ où a est le coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine.

Ci-dessus, la représentation graphique d'une fonction linéaire de la forme : $f(x) = ax$ où a est le coefficient directeur. C'est le cas où $b = 0$.

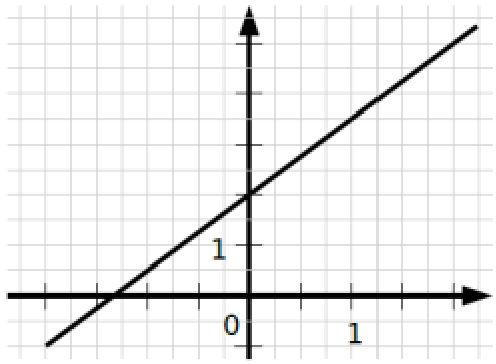
Ci-dessus, la représentation graphique d'une fonction constante de la forme : $f(x) = b$ où b est l'ordonnée à l'origine. C'est le cas où $a = 0$.

Remarques :

- Pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine, il suffit de **calculer deux points**.
- La représentation graphique d'une fonction affine ne peut pas être une droite parallèle à l'axe des ordonnées, sinon il existerait une abscisse ayant plusieurs images.

EXERCICES

Exercice 1 : Ce graphique représente une fonction f.

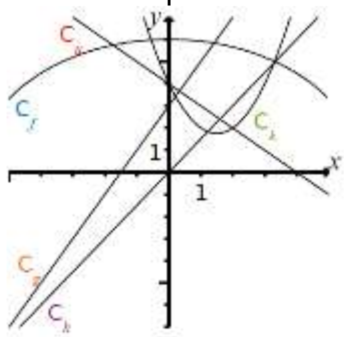


a. Quelle est l'image de 1 par f ?
b. Donne des valeurs pour :

- $f(0)$
- l'image de -2 par f
- l'image de 2 par f
- $f(-1)$

Exercice 2 : Sur le graphique ci-dessous, des fonctions f, g, h, k et u ont été représentées.

Parmi ces fonctions, indique celles qui sont affines.
(Tu préciseras celles qui sont linéaires.)

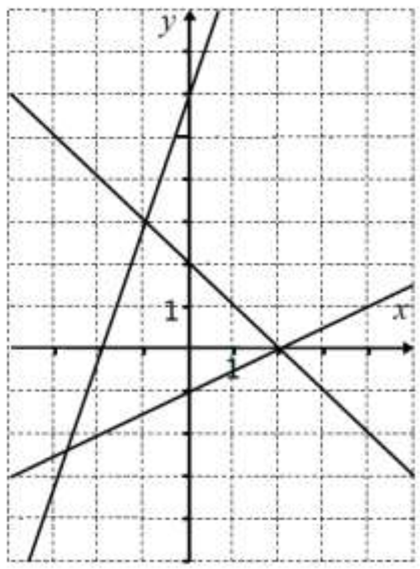


Exercice 3 : La fonction linéaire h est définie par $h(x) = -1{,}5x$.

a. Quelle est la nature de la représentation graphique de cette fonction ?
b. Combien de points sont nécessaires pour construire la représentation graphique de cette fonction ?
c. Déterminer les coordonnées de suffisamment de points avec des abscisses comprises entre -4 et 4.
d. Construis la représentation graphique en prenant 1 cm pour 1 unité en abscisse et 1 cm pour 2 unités en ordonnée.

Exercice 4 : Reprends les questions de l'exercice précédent pour la fonction affine m définie par $m(x) = 3x - 5$.

Exercice 5 : Avec le graphique ci-dessous :



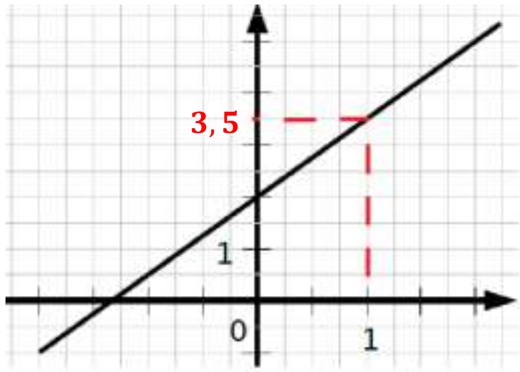
a. Identifie les droites (d_f), (d_g) et (d_h) qui représentent les fonctions f, g et h définies par :
$f(x) = 3x + 6$;
$g(x) = 0{,}5x - 1$;
$h(x) = -x + 2$.
b. Détermine les coordonnées du point d'intersection des droites (d_g) et (d_h) par le calcul.
c. Détermine celles du point d'intersection des droites (d_f) et (d_h) également par le calcul.

DICIPLINE : Mathématiques	NIVEAU : 3$^{\text{ème}}$

Séquence N°2	THEME : Organisation et gestion de données - Fonctions

CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1



a. L'image de 1 par la fonction f est $3{,}5$.
b. $f(0) = 2$
$f(-2) = -1$ ou l'image -2 par f est -1.
$f(2) = 5$ ou l'image 2 par f est 5.
$f(-1) = 0{,}5$

Exercice 2

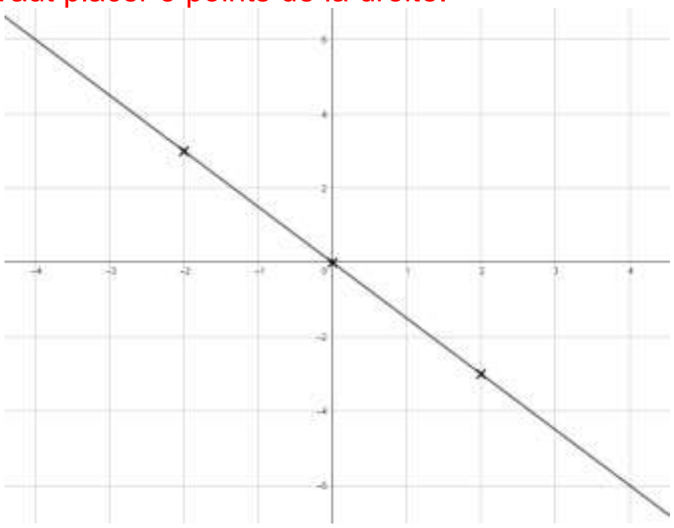
Rappels : La représentation graphique d'une fonction affine (et donc aussi d'une fonction linéaire) est une droite (qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées).
L'origine du repère est le point de coordonnées (0 ; 0). C'est le point « au centre » du repère.

Sur le graphique, les seules droites sont les représentations graphiques de u, g et h.
u, g et h sont donc des fonctions affines.

De plus, la droite qui représente h passe par l'origine du repère, h est donc aussi une fonction linéaire.

Exercice 3

a. $h(x) = -1{,}5x$ est de la forme ax avec $a = -1{,}5$. h est donc une fonction linéaire.
D'après les rappels précédents, la représentation graphique de la fonction h est donc une droite qui passe par l'origine du repère.
b. Il faut au minimum 2 points pour tracer une droite.
Pour être sûr de ne pas s'être trompé, mieux vaut placer 3 points de la droite.



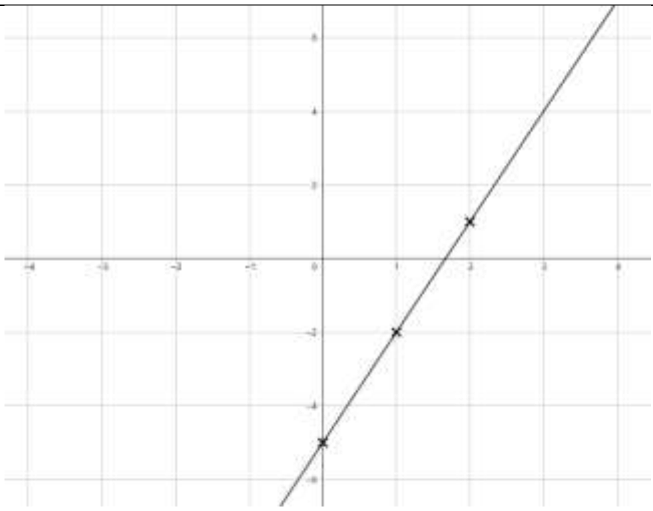
c. $h(x) = -1{,}5 \times x$
$h(0) = -1{,}5 \times 0 = 0$
$h(2) = -1{,}5 \times 2 = -3$
$h(-2) = -1{,}5 \times (-2) = 3$

Exercice 4

a. $m(x) = 3x - 5$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 3$ et $b = -5$. m est donc une fonction affine.
D'après les rappels précédents, la représentation graphique de la fonction m est donc une droite.

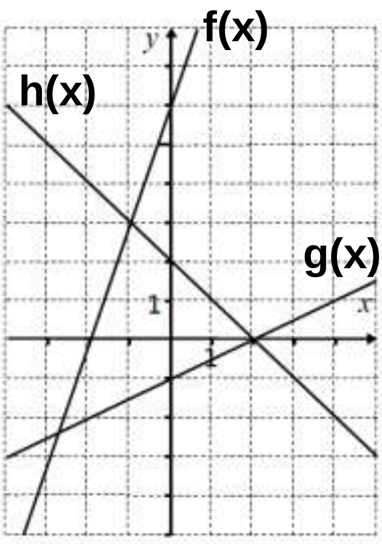
b. Il faut au minimum 2 points pour tracer une droite.
Pour être sûr de ne pas s'être trompé, mieux vaut placer 3 points de la droite.

c. $m(x) = 3 \times x - 5$
$m(0) = 3 \times 0 - 5 = -5$
$m(1) = 3 \times 1 - 5 = 3 - 5 = -2$
$m(2) = 3 \times 2 - 5 = 6 - 5 = 1$



Exercice 5

a. $f(x) = 3x + 6$ est la droite qui passe par le point de coordonnées (0 ; 6). $f(0) = 3 \times 0 + 6 = 6$ ou « f est une fonction affine dont l'ordonnée à l'origine est 6 ».



$g(x) = 0{,}5x - 1$ est la droite qui passe par le point de coordonnées $(0\ ;\ -1)$. $g(0) = 0{,}5 \times 0 - 1 = -1$ ou « g est une fonction affine dont l'ordonnée à l'origine est -1 ».

$h(x) = -x + 2$ est la droite qui passe par le point de coordonnées (0 ; 2). $h(0) = -0 + 2 = 2$ ou « h est une fonction affine dont l'ordonnée à l'origine est 2 ».

b. On aurait pu trouver le point d'intersection graphiquement si l'énoncé ne précisait pas « par le calcul ».
Pour déterminer le point d'intersection des droites (d_g) et (d_h) par le calcul, on va résoudre l'équation suivante :

$g(x) = h(x)$
$0{,}5x - 1 = -x + 2$ — On regroupe les termes « avec x ».
$0{,}5x - 1 + x = -x + 2 + x$ — On réduit.
$1{,}5x - 1 = 2$ — On regroupe les termes « sans x ».
$1{,}5x - 1 + 1 = 2 + 1$ — On réduit.
$1{,}5x = 3$ — On divise par le nombre devant x.
$\frac{1{,}5x}{1{,}5} = \frac{3}{1{,}5} = 2$ — On réduit.

Donc pour $x = 2$, $g(x) = h(x)$ et $g(2) = h(2) = 0{,}5 \times 2 - 1 = 0$.
Conclusion : Le point d'intersection des droites (d_g) et (d_h) a pour coordonnées (2 ; 0).

c. Pour déterminer le point d'intersection des droites (d_f) et (d_h) par le calcul, on va résoudre l'équation suivante :

$f(x) = h(x)$
$3x + 6 = -x + 2$ — On regroupe les termes « avec x ».
$3x + 6 + x = -x + 2 + x$ — On réduit.
$4x + 6 = 2$ — On regroupe les termes « sans x ».
$4x + 6 - 6 = 2 - 6$ — On réduit.
$4x = -4$ — On divise par le nombre devant x.
$\frac{4x}{4} = \frac{-4}{4} = -1$ — On réduit.

Donc pour $x = -1$, $f(x) = h(x)$ et $f(-1) = h(-1) = 3 \times (-1) + 6 = 3$.
Conclusion : Le point d'intersection des droites (d_f) et (d_h) a pour coordonnées (-1 ; 3).

DICIPLINE : Mathématiques	NIVEAU : 3ème

Séquence N°3	THEME : Organisation et gestion de données - Fonctions

RAPPEL DU COURS

Séquence 3 : Fonctions affines et linéaires – Déterminer une fonction affine linéaire par lecture graphique

Méthode : Pour lire le coefficient directeur a d'une droite il faut :

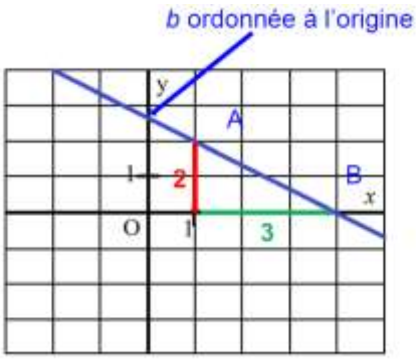
1. Choisir deux points A et B sur la droite.
2. Se déplacer de A vers B par la méthode des escaliers :
   a. On compte le nombre de graduations verticales : monter (+) et descendre (-)
   b. On compte le nombre de graduations horizontales : droite (+) et gauche
3. Déduire le coefficient directeur : $\frac{déplacement\ vertical}{déplacement\ horizontal}$

Exemple : On se déplace de A vers B

- En descendant de 2 graduations.
- Puis en se déplaçant vers la droite de 3 graduations.

Le coefficient directeur de la droite est :

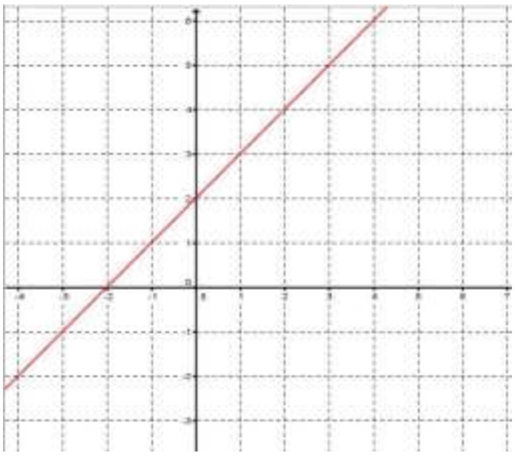
$$a = \frac{(-2)}{3} = -\frac{2}{3}$$

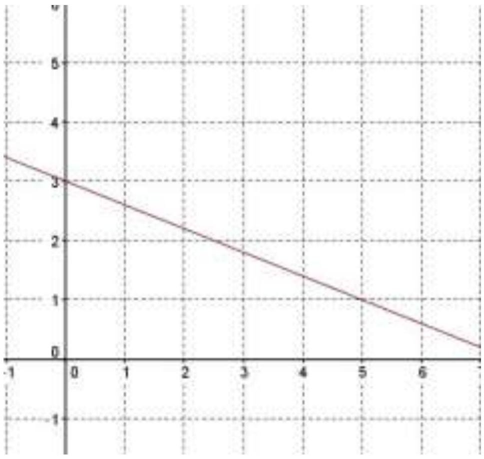


Pour trouver graphiquement b, il suffit de « lire » la hauteur de la courbe pour $x = 0$.

EXERCICES

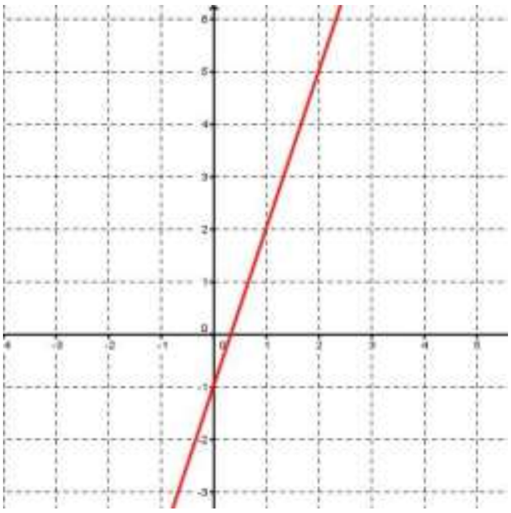
<u>Exercice :</u> Pour chaque représentation graphique, donner l'expression littérale de la fonction affine associée.

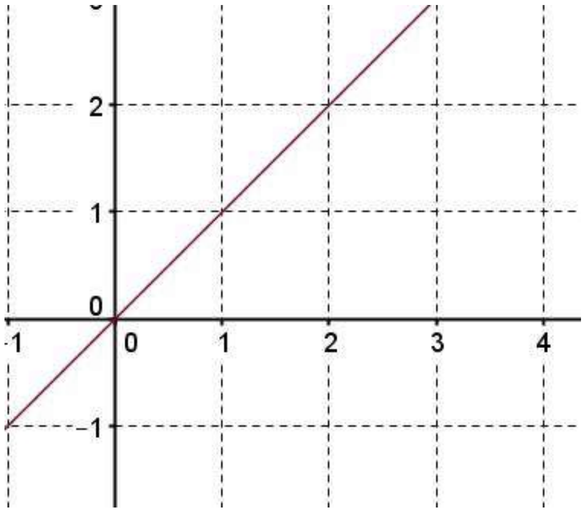




$f(x) =$ ……………………………………………..

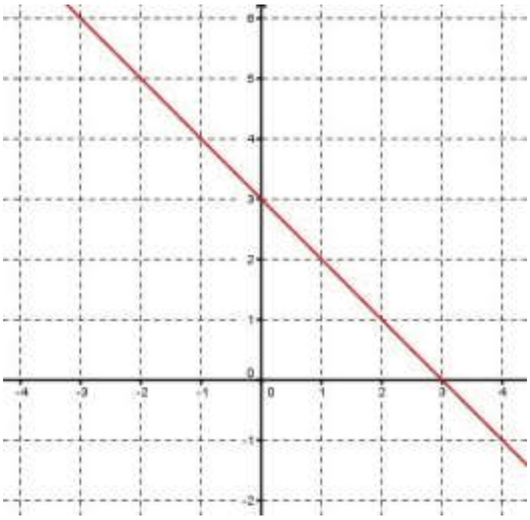
$i(x) =$ ……………………………………………..

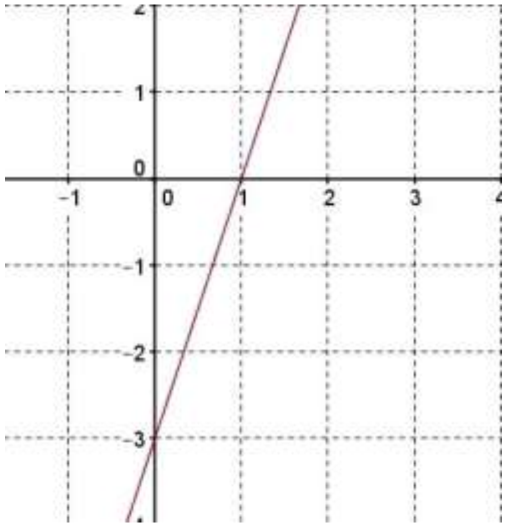




$g(x) =$ ……………………………………………..

$j(x) =$ ……………………………………………..





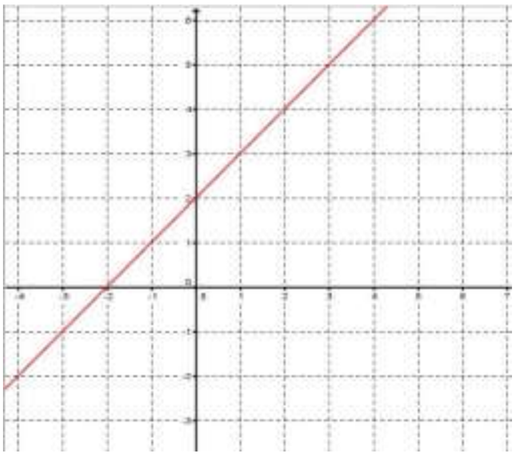
$h(x) =$ ……………………………………………..

$k(x) =$ ……………………………………………

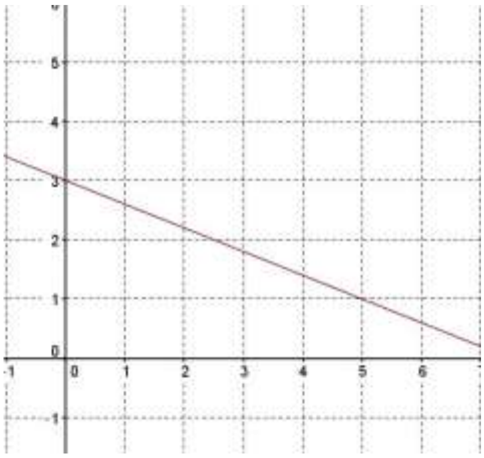
DICIPLINE : Mathématiques	NIVEAU : 3ème

Séquence N°3	THEME : Organisation et gestion de données - Fonctions

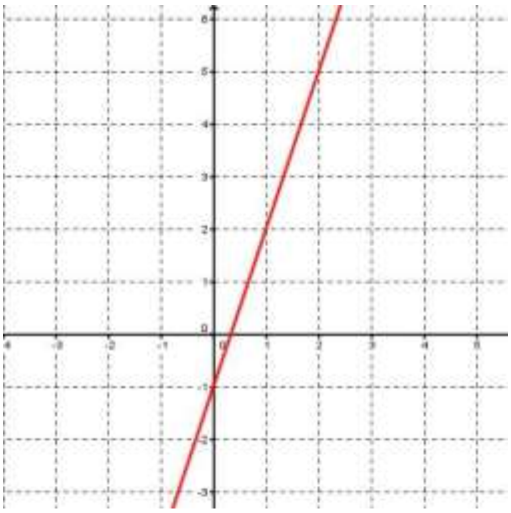
CORRECTION DES EXERCICES



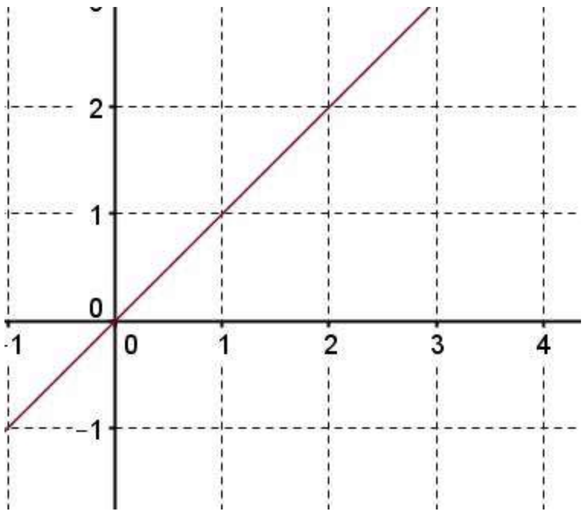
$f(x) = x + 2$



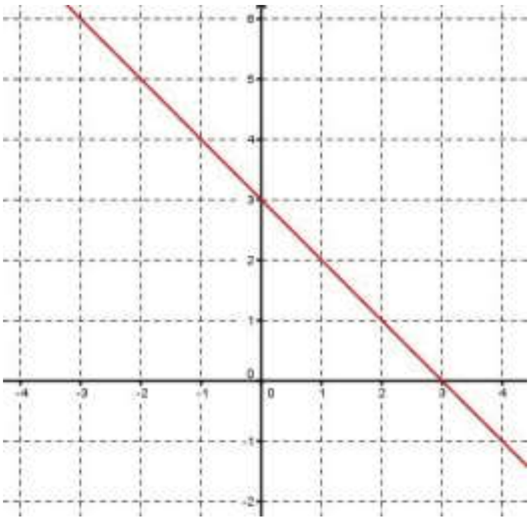
$i(x) = -\frac{2}{5}x + 3$



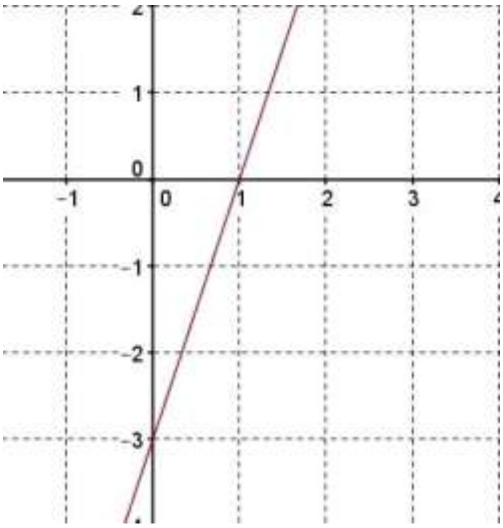
$g(x) = 3x - 1$



$j(x) = x$



$h(x) = -x + 3$



$k(x) = 3x - 3$