14. Арифметические и геометрические прогрессии
Блок 1. ФИПИ Примеры решений

Задание 1. В амфитеатре 15 рядов. В первом ряду 28 мест, а в каждом следующем на 3 места больше, чем в предыдущем. Сколько мест в двенадцатом ряду амфитеатра?

Дано:
$a_1 = 28$
$d = 3$

Найти:
a_{12} - ?

Решение:
$a_n = a_1 + d(n-1)$
$a_{12} = a_1 + d \cdot 11$
$a_{12} = 28 + 3 \cdot 11 = 61$

Проверка:
$a_1 = 28$ $a_5 = 40$ $a_9 = 52$
$a_2 = 31$ $a_6 = 43$ $a_{10} = 55$
$a_3 = 34$ $a_7 = 46$ $a_{11} = 58$
$a_4 = 37$ $a_8 = 49$ $a_{12} = 61$

Ответ: 61

Задание 2. При проведении опыта вещество равномерно охлаждали в течение 10 минут. При этом каждую минуту температура вещества уменьшалась на 7° С. Найдите температуру вещества (в градусах Цельсия) через 4 минуты после начала проведения опыта, если его начальная температура составляла -13° С.

Дано:
$d = -7$
$a_{нач} = -13$

Найти:
a_4 - ?

Решение:
$a_1 = a_{нач} + d$
$a_1 = -13 - 7 = -20$
$a_n = a_1 + d(n-1)$
$a_4 = a_1 + d \cdot 3$
$a_4 = -20 - 7 \cdot 3 = -20 - 21 = -41$

Проверка:
$a_{нач} = -13$ $a_3 = -34$
$a_1 = -20$ $a_4 = -41$
$a_2 = -27$

Ответ: –41

Задание 3. В амфитеатре 16 рядов, причём в каждом следующем ряду на одно и то же число мест больше, чем в предыдущем. В пятом ряду 17 мест, а в девятом ряду 25 мест. Сколько мест в последнем ряду амфитеатра?

Дано:
$n = 16$
$a_5 = 17$
$a_9 = 25$

Найти:
a_{16} - ?

Решение:

I способ
$a_9 = a_5 + 4d$
$25 = 17 + 4d$
$4d = 25 - 17$
$4d = 8 \quad d = 8:4 = 2$
$a_{16} = a_9 + 7d$
$a_{16} = 25 + 7 \cdot 2 = 25 + 14 = 39$

II способ
$a_n = a_1 + d(n-1)$
$\begin{cases} a_9 = a_1 + d \cdot 8, \\ a_5 = a_1 + d \cdot 4 \end{cases}$
$-\begin{cases} 25 = a_1 + 8d \\ 17 = a_1 + 4d \end{cases}$
$8 = 4d$
$d = 8:4 = 2$
$17 = a_1 + 4 \cdot 2$
$a_1 = 17 - 8 = 9$
$a_n = a_1 + d(n-1)$
$a_{16} = a_1 + d \cdot 15$
$a_{16} = 9 + 2 \cdot 15 = 9 + 30 = 39$

Проверка:
$a_5 = 17$ $a_{11} = 29$
$a_6 = 19$ $a_{12} = 31$
$a_7 = 21$ $a_{13} = 33$
$a_8 = 23$ $a_{14} = 35$
$a_9 = 25$ $a_{15} = 37$
$a_{10} = 27$ $a_{16} = 39$

Ответ: 39

Е. А. Ширяева Задачник **ОГЭ 2025** (примеры решений)

Задание 4. В амфитеатре 14 рядов. В первом ряду 24 места, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в амфитеатре?

Дано:
$n = 14$
$a_1 = 24$
$d = 2$

Найти:
S_{14} - ?

Решение:
$a_n = a_1 + d(n-1)$
$a_{14} = 24 + 2 \cdot 13 = 24 + 26 = 50$
$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
$S_{14} = \dfrac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14$
$S_{14} = \dfrac{24 + 50}{2} \cdot 14 = 74 \cdot 7 = 518$

Проверка:
$a_1 = 24$ $a_9 = 40$
$a_2 = 26$ $a_{10} = 42$
$a_3 = 28$ $a_{11} = 44$
$a_4 = 30$ $a_{12} = 46$
$a_5 = 32$ $a_{13} = 48$
$a_6 = 34$ $a_{14} = 50$
$a_7 = 36$ $S_{14} = (24+50) \cdot 7$
$a_8 = 38$ $S_{14} = 518$

Ответ: 518

Задание 5. Камень бросают в глубокое ущелье. При этом в первую секунду он пролетает 6 метров, а в каждую следующую секунду на 10 метров больше, чем в предыдущую, до тех пор, пока не достигнет дна ущелья. Сколько метров пролетит камень за первые восемь секунд?

Дано:
$a_1 = 6$
$d = 10$
$n = 8$

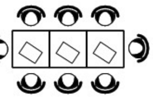
Найти:
S_8 - ?

Решение:
$a_n = a_1 + d(n-1)$ $\quad S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
$a_8 = 6 + 10 \cdot 7 = 6 + 70 = 76$
$S_8 = \dfrac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8$
$S_8 = \dfrac{6 + 76}{2} \cdot 8 = 82 \cdot 4 = 328$

Проверка:
$a_1 = 6$ $a_6 = 56$
$a_2 = 16$ $a_7 = 66$
$a_3 = 26$ $a_8 = 76$
$a_4 = 36$ $S_8 = (6+76) \cdot 4$
$a_5 = 46$ $S_8 = 328$

Ответ: 328

Задание 14 (Блок 2). В кафе есть только квадратные столики, за каждый из которых могут сесть 4 человека. Если сдвинуть два квадратных столика, то получится стол, за который могут сесть 6 человек. На рисунке изображён случай, когда сдвинули 3 квадратных столика вдоль одной линии. В этом случае получился стол, за который могут сесть 8 человек. Сколько человек может сесть за стол, который получится, если сдвинуть 15 квадратных столиков вдоль одной линии?



Дано:
$a_1 = 4$
$a_2 = 6$
$a_3 = 8$

Найти:
a_{15} - ?

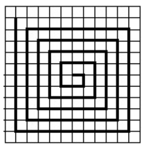
Решение:
$d = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$
$a_n = a_1 + d(n-1)$
$a_{15} = 4 + 2 \cdot 14 = 4 + 28 = 32$

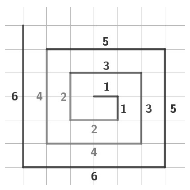
Проверка:
$a_1 = 4$ $a_6 = 14$ $a_{11} = 24$
$a_2 = 6$ $a_7 = 16$ $a_{12} = 26$
$a_3 = 8$ $a_8 = 18$ $a_{13} = 28$
$a_4 = 10$ $a_9 = 20$ $a_{14} = 30$
$a_5 = 12$ $a_{10} = 22$ $a_{15} = 32$

Ответ: 32

Е. А. Ширяева Задачник **ОГЭ 2025** (примеры решений)

Задание 18 (Блок 2). На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 нарисована «змейка», представляющая из себя ломаную, состоящую из чётного числа звеньев, идущих по линиям сетки. На рисунке изображён случай, когда последнее звено имеет длину 10. Найдите длину ломаной, построенной аналогичным образом, последнее звено которой имеет длину 120.





$n = 10 \quad l_{10} = 1+1+2+2+3+3+\ldots+9+9+10+10 =$
$= (1+2+3+\ldots+9+10) \cdot 2 = S_{10} \cdot 2$
$n = 120 \quad l_{120} = (1+2+3+\ldots+119+120) \cdot 2 = S_{120} \cdot 2$
$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad a_1 = 1 \qquad a_n = 120 \qquad n = 120$
$S_{120} = \dfrac{1 + 120}{2} \cdot 120 = 121 \cdot 60 = 7260$
$l_{120} = S_{120} \cdot 2 = 7260 \cdot 2 = 14520$

Ответ: 14520

Задание 6. У Тани есть теннисный мячик. Она со всей силы бросила его об асфальт. После первого отскока мячик подлетел на высоту 270 см, а после каждого следующего отскока от асфальта подлетал на высоту в три раза меньше предыдущей. После какого по счёту отскока высота, на которую подлетит мячик, станет меньше 10 см?

Дано:
$b_1 = 270$
$q = \dfrac{1}{3}$
$b_n < 10$

Найти:
n - ?

Решение:
$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 270 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} < 10$
$270 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} < 10 \qquad |:270$
$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} < \dfrac{10}{270}$
$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} < \dfrac{1}{27}$
при $n = 3$: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9} > \dfrac{1}{27}$
при $n = 4$: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27} = \dfrac{1}{27}$
при $n = 5$: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{81} < \dfrac{1}{27} \Rightarrow n = 5$

Проверка:
$b_1 = 270$
$b_2 = 90$
$b_3 = 30$
$b_4 = 10$
$b_5 = 3\frac{1}{3} < 10$
$n = 5$

Ответ: 5

Комментарий: данную задачу проще решать подбором (см. проверку).

Е. А. Ширяева Задачник **ОГЭ 2025** (примеры решений)

Задание 7. У Яны есть попрыгунчик (каучуковый шарик). Она со всей силы бросила его об асфальт. После первого отскока попрыгунчик подлетел на высоту 320 см, а после каждого следующего отскока от асфальта подлетал на высоту в два раза меньше предыдущей. После какого по счёту отскока высота, на которую подлетит попрыгунчик, станет меньше 6 см?

Дано:
$b_1 = 320$
$q = \dfrac{1}{2}$
$b_n < 6$

Найти:
n - ?

Решение:
$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 320 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} < 6$
$320 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} < 6 \qquad |:320$
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} < \dfrac{6}{320}$
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} < \dfrac{3}{160} < \dfrac{4}{160}$
$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} < \dfrac{1}{40}$
при $n = 6$: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{1}{32} > \dfrac{1}{40}$
при $n = 7$: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 = \dfrac{1}{64} < \dfrac{1}{40} \Rightarrow n = 7$

Проверка:
$b_1 = 320$
$b_2 = 160$
$b_3 = 80$
$b_4 = 40$
$b_5 = 20$
$b_6 = 10$
$b_7 = 5 < 6$
$n = 7$

Ответ: 7

Комментарий: данную задачу проще решать подбором (см. проверку).

Задание 8. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается вдвое каждые 6 минут. В начальный момент масса изотопа составляла 480 мг. Найдите массу изотопа через 36 минут. Ответ дайте в миллиграммах.

Дано:
$q = \dfrac{1}{2}$
$t_1 = 6$
$b_{нач} = 480$
$t_n = 36$

Найти:
b_n - ?

Решение:
$n = t_n : t_1 = 36 : 6 = 6$
$b_1 = b_{нач} \cdot q$
$b_1 = 480 \cdot \dfrac{1}{2} = 240$
$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
$b_6 = b_1 \cdot q^5$
$b_6 = 240 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{240}{1} \cdot \dfrac{1}{32} = \dfrac{15}{2} = \dfrac{75}{10} = 7{,}5$

Проверка:
$b_{нач} = 480$
$t_1 = 6$: $b_1 = 240$
$t_2 = 12$: $b_2 = 120$
$t_3 = 18$: $b_3 = 60$
$t_4 = 24$: $b_4 = 30$
$t_5 = 30$: $b_5 = 15$
$t_6 = 36$: $b_6 = 7{,}5$

Ответ: 7,5

Комментарий: данную задачу проще решать подбором (см. проверку).

14 задание

Задание №14 называется «Прогрессии / последовательности»

Объекты, которые пронумерованы подряд натуральными числами 1, 2, 3, …, n, …, образуют **последовательность**

Арифметическая прогрессия — последовательность чисел, в которой каждый член, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и разности прогрессии.

Разность прогрессии — то число, на которое отличаются члены прогрессии друг от друга. Разность прогрессии обозначается буквой d.

Арифметическую прогрессию можно задать формулой.

$$\mathbf{a_{n+1} = a_n + d}$$

Например, если мы хотим найти третий член арифметической прогрессии, то нужно воспользоваться формулой: $a_3 = a_2 + d$

Формула нахождения n-ого члена арифметической прогрессии:	$\boldsymbol{a_n = a_1 + d\,(n-1)}$, где n– количество чисел в прогрессии.
Сумма членов арифметической прогрессии:	1-й способ: $\boldsymbol{S_n = (a_1 + a_n) \cdot\ 2n}$, 2-й способ: $\boldsymbol{S_n = 2a_1 + d\,(n-1) \cdot 2n}$,
Любой член прогрессии равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов (кроме первого и последнего)	$\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$

Геометрическая прогрессия – это такая последовательность, отношение каждого члена которой, начиная со второго, к предыдущему есть число постоянное.
Это число **q** называется **знаменателем геометрической прогрессии.**

Формула нахождения n-ого члена геометрической прогрессии	$\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot\ q^{n-1}}$**,** где n – порядковый номер числа прогрессии
Квадрат любого члена геометрической прогрессии (кроме первого) равен произведению двух соседних с ним членов	$\boldsymbol{b_n^2 = b_1 \cdot\ q^{n-1}}$
Сумма членов геометрической прогрессии:	1 способ: $\boldsymbol{\frac{S_n = b_1\,(q^n - 1)}{q-1}}$ 2 способ: $\boldsymbol{S = \frac{b_1}{1-q}}$