ПОСОБИЕ ПРОШЛО НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКУЮ ОЦЕНКУ ФГБНУ

ФИПИ ШКОЛЕ

2024

ЕГЭ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ

10 ВАРИАНТОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО НАЦИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
012345678

Онлайн поддержка

Содержание

Все задачи с решениями. Для просмотра решения задачи, нажмите на её номер или перейдите в соответствующий тест на сайте, завершите его и разверните нужное решение.

Для перехода к варианту на сайте, нажмите на его номер или наведите камеру на qr-код в разделе "Решения и ответы".

Для перехода в тест на сайте, проверки ответов и сохранения результатов нужна авторизация (регистрация) на сайте.

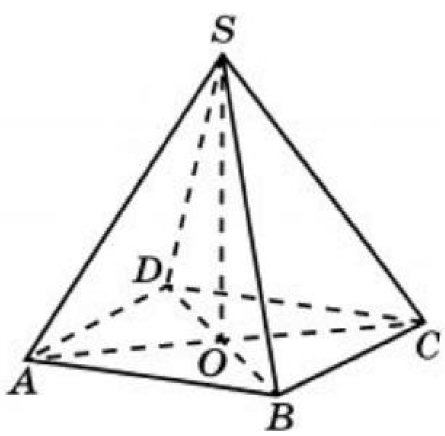
ВАРИАНТ 1

Часть 1

1 Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 82° и 58°. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

2 Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты (3;1), (11;1), (11;16), (3;16).

3 В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD точка O - центр основания, S - вершина, SO=9, SC=15. Найдите длину отрезка BD.



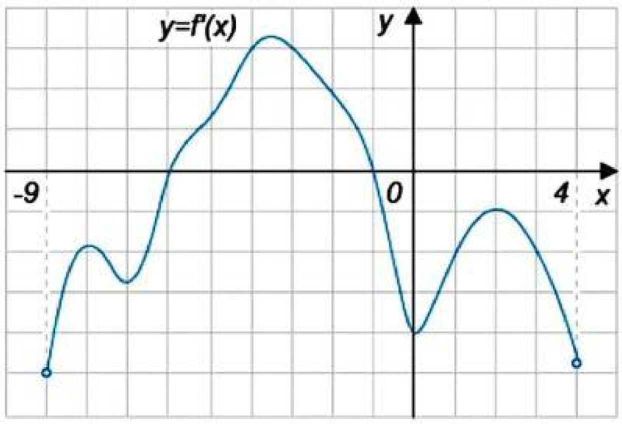
4 В группе туристов 8 человек. С помощью жребия они выбирают шестерых человек, которые должны идти в магазин за продуктами. Какова вероятность, что турист А, входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

5 На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что этот вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,15 . Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,2 . Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

6 Найдите корень уравнения $4^{x-7} = \frac{1}{64}$

7 Найдите значение выражения $4 \cdot \sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[30]{32}$

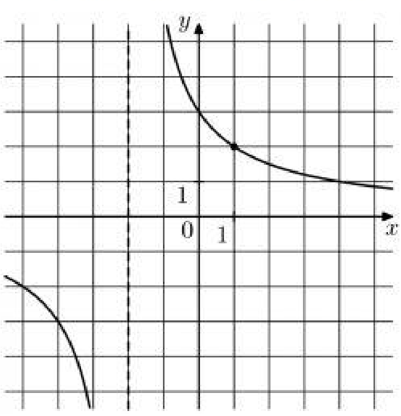
8 На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-9; 4)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 17$ или совпадает с ней.



9 В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1 = 90$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 Ом и R_2 Ом их общее сопротивление дается формулой $R_{общ} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 9 Ом. Ответ выразите в Омах.

10 Два велосипедиста одновременно выехали из пункта A в пункт B, расстояние между которыми составляет 60 км. Скорость первого на 10 км/ч больше, чем скорость второго, и он прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым (в км/ч).

11 На рисунке изображен график функции $f(x) = \dfrac{k}{x+a}$. Найдите $f(10)$



12 Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$

Часть 2

13 а) Решите уравнение $2\log_2^2(2\cos x) - 9\log_2(2\cos x) + 4 = 0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

14 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах A_1D_1 и DD_1 отмечены соответственно точки K и M так, что $A_1K=KD_1$, а $DM:MD_1=2:1$.
а) Докажите, что прямые MK и BK перпендикулярны.
б) Найдите угол между плоскостями BMK и BCC_1. Ответ дайте в градусах.

15 Решите неравенство $\dfrac{27^{x+\frac{1}{3}} - 10\cdot 9^x + 10\cdot 3^x - 5}{9^{x+\frac{1}{2}} - 10\cdot 3^x + 3} \leqslant 3^x + \dfrac{1}{3^x-2} + \dfrac{1}{3^{x+1}-1}$

16 31 декабря 2014 года Михаил взял в банке некоторую сумму в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Михаил переводит в банк 2928200 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

17 В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 – середины сторон BC, AC и AB соответственно, AH – высота, $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.
а) Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности.
б) Найдите A_1H, если $BC = 2\sqrt{3}$.

18 Найдите все положительные значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} (|x|-6)^2 + (y-12)^2 = 4 \\ (x+1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

19 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел -1, 3, 4, -5, 7, -9, -10, 11. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел -1, 3, 4, -5, 7, -9, -10, 11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.
а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

ВАРИАНТ 2

Часть 1

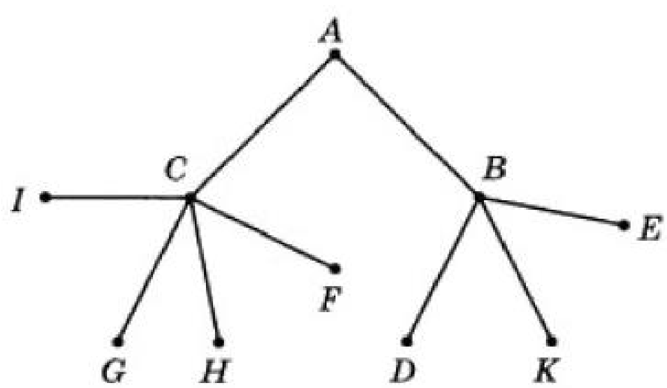
1 Основания трапеции равны 5 и 16, площадь равна 63. Найдите её высоту.

2 Найдите длину средней линии треугольника ABC, вершины которого имеют координаты A(14;27), B(-13;0), C(22;12), параллельной стороне AC.

3 Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4. Её объем равен 16. Найдите высоту этой пирамиды.

4 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 12, но не дойдя до отметки 3.

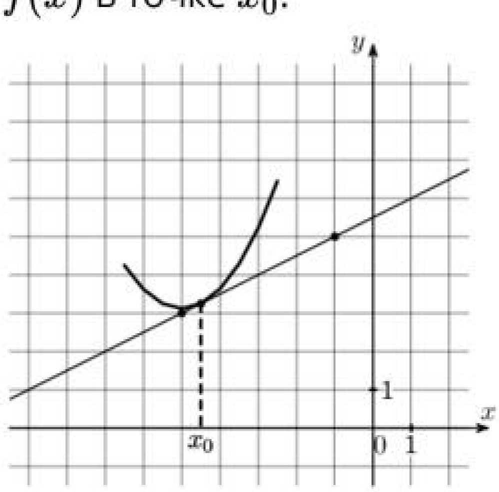
5 Павел Иванович совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Найдите вероятность того, что Павел Иванович попадет в точку G.



6 Решите уравнение $\sqrt{28-2x}=2$

7 Найдите значение выражения $\dfrac{24}{\sin^2 127^\circ + 4 + \sin^2 217^\circ}$

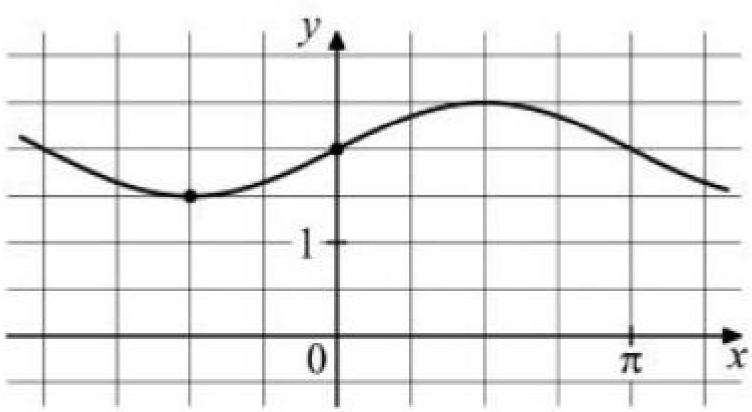
8 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке с абциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



9 На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \alpha\rho g r^3$, где $\alpha = 4{,}2$ – постоянная, r – радиус аппарата в метрах, $\rho = 1000\ \text{кг}/\text{м}^3$ – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ Н/кг). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 511014 Н? Ответ выразите в метрах.

10 На изготовление 45 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 63 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

11 На рисунке изображен график функции $f(x) = a\sin x + b$. Найдите a.



12 Найдите наибольшее значение функции $y = 20\operatorname{tg} x - 20x + 5\pi - 17$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

Часть 2

13 а) Решите уравнение $\log_{2{,}5}(2x^2 + 4x - 18) + \log_{0{,}4}(x^2 + 3x + 2) = 0$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $[-1{,}5\pi; 1{,}5\pi]$

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с равными сторонами AB и BC. Точки K и M — середины рёбер A_1B_1 и AC соответственно.

а) Докажите, что KM=KB.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если AB=8, AC=6 и AA_1=3.

15 Решите неравенство

$$\log_{12}(17x^2 + 16) - \log_{12}(x^2 + x + 1) \geqslant \log_{12}\left(\frac{x}{x+10} + 16\right)$$

16 1 февраля 2014 года Анфиса взяла в банке кредит под 10% годовых. Условия выплаты кредита следующие: 1 февраля каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Анфиса переводит платеж. Весь долг Анфиса выплатила за три платежа, при том второй был в 2 раза больше первого, а третий был в 3 раза больше первого. Какую сумму взяла в кредит Анфиса, если всего она выплатила банку 2395800 рублей?

17 На гипотенузе AB и катетах BC и AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки M, N и K соответственно, причём прямая NK параллельна прямой AB и BM=BN=KN/2. Точка P - середина отрезка KN.

а) Докажите, что четырёхугольник BCPM - равнобедренная трапеция.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если BM=2 и угол BCM=30°

18 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{16-x^2}\log_{11}(|x^2-y^2|+1)=0 \\ y^2+(x-a)^2=16+2a(y-x) \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

19 Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги -натуральное число рублей. Если цена книги меньше 75 рублей, на неё приклеивают бирку «выгодно». Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 15 рублей, из-за чего количество книг с бирками «выгодно» уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой «выгодно» до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки «выгодно» до открытия выставки?

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 80 рубля, средняя цена книг с биркой «выгодно» составляла 56 рублей, а средняя цена книг без бирки — 152 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 70 рублей, а средняя цена книг без бирки -145 рублей. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

ВАРИАНТ 3

Часть 1

1 Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 36 и 22. Найдите среднюю линию этой трапеции.

2 Даны векторы $\vec{a}(1;2)$, $\vec{b}(-3;6)$ и $\vec{c}(4;-2)$. Найдите длину вектора $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

3 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 16 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

4 Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Григорий Поддубный. Найдите вероятность того, что в первом туре Григорий Поддубный будет играть с каким-либо спортсменом из России.

5 Лучник стреляет по мишеням. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что он попадет 3 раза подряд.

6 Решите уравнение $\log_5 x = -\log_{0,2}(16-x)$.

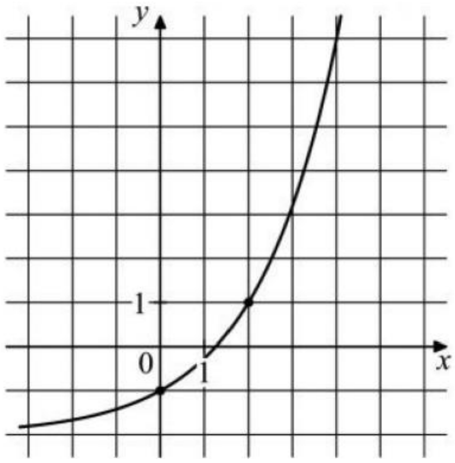
7 Вычислите $29 \cdot \operatorname{tg} 55^\circ \cdot \operatorname{tg} 35^\circ$

8 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\dfrac{1}{2}t^3-3t^2+2t$, где x - расстояние от точки отсчёта в метрах, t - время в секундах, прошедшее с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=6$ с.

9 Выехав из города со скоростью $v_0=53$ км/ч, мотоциклист начинает разгоняться с постоянным ускорением $a=8$ км/ч^2. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S=v_0t+\dfrac{at^2}{2}$, где t (ч) - время, прошедшее с момента выезда мотоциклиста из города. Через сколько минут мотоциклист доберется от границы города до автозаправочной станции, расположенной в 42 км от города?

10 Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 42 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью, на 28 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в город В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

11 На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(6)$.



12 Найдите точку максимума функции $y = (4x-1)\cos x - 4\sin x - 7$ принадлежащую промежутку $\left(0; \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Часть 2

13 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{3}{\cos x} + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

14 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины ребер AB, B_1C_1, AD.
б) Найдите угол между плоскостью A_1BD и плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, B_1C_1, AD.

15 Решите неравенство $20\log_4^2(\cos x) + 4\log_2(\cos x) \leqslant 1$

16 В марте 2017 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S - целое число. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг увеличивался на 20% по вравнению с концом предыдущего года;
- в феврале каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в марте каждого года долг должен составлять часть кредита в соответветствии со следующей таблицей.

Дата	Март 2017	Март 2018	Март 2019	Март 2020	Март 2021
Долг (в млн руб)	S	0,7S	0,4S	0,2S	0

Найдите наименьшее значение S, при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.

17 Высоты тупоугольного треугольника ABC с тупым углом ABC пересекаются в точке H. Угол AHC равен 60°.

а) Докажите, что угол ABC равен 120°.

б) Найдите BH, если AB=7, BC=8.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

19 Группу детей можно перевезти автобусами модели А или автобусами модели Б. Известно, что в автобусе модели А количество мест больше 30, но меньше 40, а в автобусах модели Б - больше 40, но меньше 50. Если всех детей рассадить в автобусы модели А, то все места будут заняты. Если всех детей рассадить в автобусы модели Б, то все места также будут заняты, но потребуется на один автобус меньше.

а) Может ли потребоваться 6 автобусов модели А?

б) Найдите наименьшее возможное количество детей в группе.

в) Сколько в группе детей, если для их перевозки потребовалось 3 автобуса модели Б?

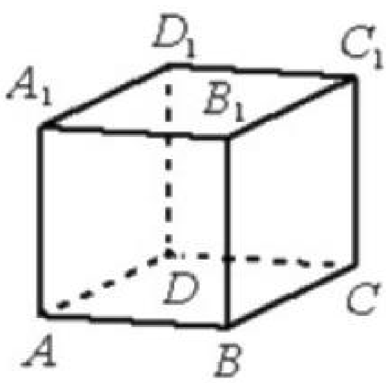
ВАРИАНТ 4

Часть 1

1 Периметр прямоугольника равен 42, а площадь 98. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

2 Точки A(-1;1), B(3;4), C(12;5) и D(4;-1) являются вершинами трапеции ABCD. Найдите длину средней линии этой трапеции.

3 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми AC и BB_1. Ответ дайте в градусах.



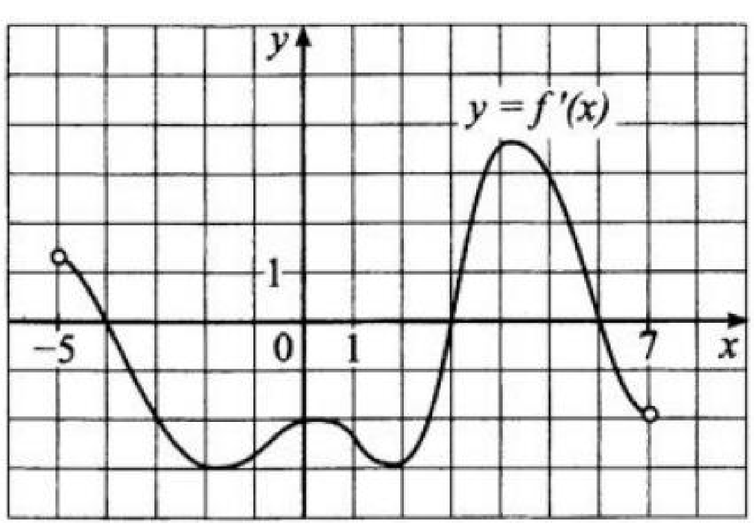
4 Найдите вероятность того, что случайно выбранное натуральное число из чисел от 1 до 25 (включительно) будет делиться на 3.

5 Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,42. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,35. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

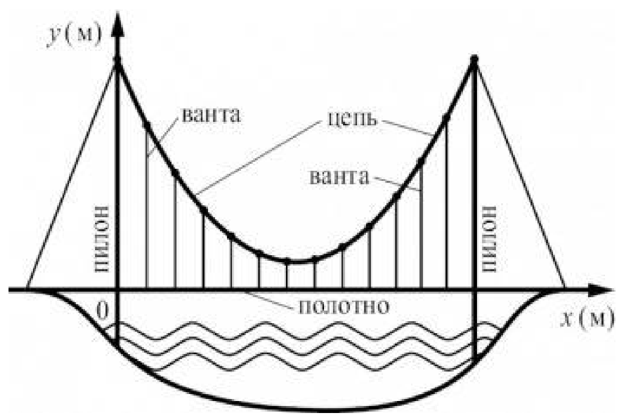
6 Решите уравнение $x^2 - 16 = (x+4)^2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший из корней.

7 Вычислите $\log_a \frac{a^4}{b^6}$, если $\log_a b = -14$

8 На рисунке изображен график y=f'(x) — производной f(x), определённой на интервале (-5;7). В какой точке отрезка [-3;2] функция f(x) принимает наименьшее значение?

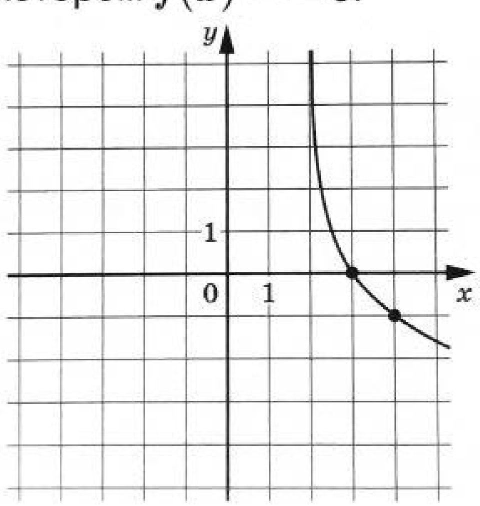


9 На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0{,}001x^2 - 0{,}28x + 26$ где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 10 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



10 Первые 140 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 160 км - со скоростью 60 км/ч, а последние 120 км - со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

11 На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a(x + b)$. Найдите x, при котором $f(x) = -5$.



12 Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x}{x^2 + 9} + 1$

Часть 2

13 а) Решите уравнение $(2\cos^2 x - \cos x)\sqrt{-11\operatorname{tg} x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

14 Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S, причём A и C диаметрально противоположны. Точка M - середина BC.

а) Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC.

б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC, если AB=6, BC=8 и SC=5√2

15 Решите неравенство $\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{x+2}} \geqslant \frac{2}{3} \cdot 3{,}5^{x+1-\frac{3}{x+2}}$

16 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 30% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 10 млн рублей в первый и второй годы, а также по 9 млн в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений (в млн руб.), при котором общая сумма средств вкладчика к началу третьего года станет больше 140 млн, а к концу проекта – больше 250 млн рублей.

17 В треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке F. Отрезок BD - диаметр этой окружности.

а) Докажите, что AD=CF.

б) Найдите DF, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 12, угол BAC=35°, угол ACB=65°.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$\begin{cases} ((x-6)^2+y^2-a^2)\ln(16-x^2-y^2)=0 \\ ((x-6)^2+y^2-a^2)(y-x+a-6)=0 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

19 В результате опроса выяснилось, что примерно 58% опрошенных предпочитают искусственную ёлку натуральной. Из этого же опроса последовало, что примерно 42% респондентов никогда не отмечали Новый год не дома. Эти результаты получились с помощью округления до целого числа.

а) Могло ли в опросе участвовать ровно 40 человек?

б) Могло ли в опросе участвовать ровно 48 человек?

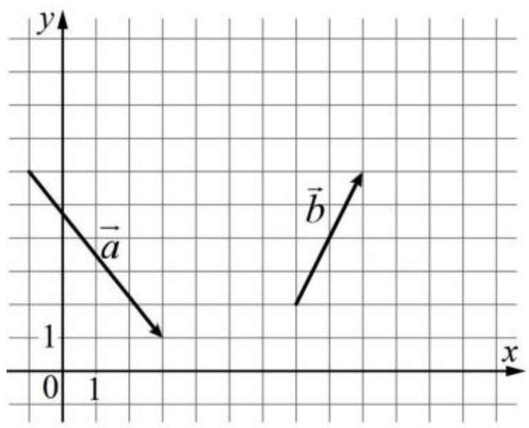
в) Какое наименьшее количество человек могло участвовать в этом опросе?

ВАРИАНТ 5

Часть 1

1 На окружности отмечены точки A, B и C. Дуга окружности AC, не содержащая точку B, составляет 200°. Дуга окружности BC, не содержащая точку A, составляет 80°. Найдите вписанный угол ACB. Ответ дайте в градусах.

2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите Квадрат длины вектора $2\vec{a}-\vec{b}$



3 Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 74. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

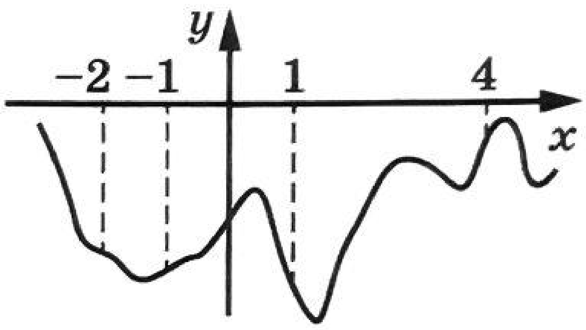
4 На олимпиаде по русскому языку 400 участников разместили в трёх аудиториях. В первых двух удалось разместить по 120 человек, а оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

5 Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 35% этих стекол, вторая — 65%. Среди стекол, выпущенных на первой фабрике, 3% бракованные, а на второй — 5% бракованные. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

6 Решите уравнение $\sqrt{x+2}=x$. Если корней несколько, в ответ запишите меньший из них.

7 Найдите значение выражения $\log^2_{\sqrt[3]{13}} 169$

8 На рисунке изображён график $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2, -1, 1, 4$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

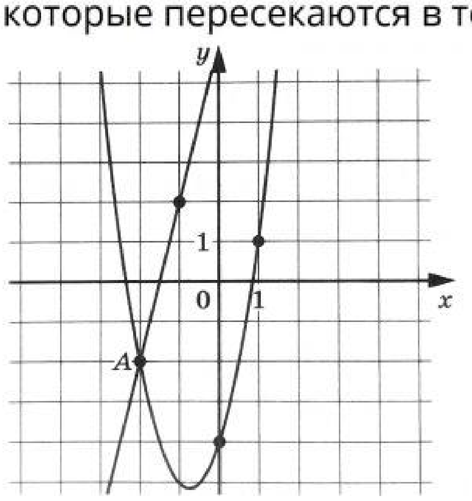


9 Водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 2{,}4$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2 в атмосферах. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле

$A = a\nu T \log_2 \dfrac{p_2}{p_1}$, где $a = 13{,}5 \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ - постоянная, $T = 300$ К - температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 16200Дж. Ответ дайте в атмосферах.

10 Расстояние между пристанями А и В равно 165 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через 1 час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот проплыл 92 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx + d$, которые пересекаются в точках А и В. Найдите абсциссу точки В.



12 Найдите наименьшее значение функции $y = 6x - \ln(6x) + 35$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{12}; \dfrac{5}{12}\right]$

Часть 2

13 а) Решите уравнение $36^{x^2-8,25x+1}-13\cdot 42^{x^2-8,25x}-49^{x^2-8,25x+1}=0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\frac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}{2};\log_{\sqrt[4]{2}}\sqrt{11+2\sqrt{3}}\right]$$

14 В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причем AK:KB=SM:MC=1:5. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите косинус угла между плоскостями α и SBC.

15 Решите неравенство $\log_{|x-2|}(3-|x|)\leqslant 1$.

16 15-го января Егор взял кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что восьмая выплата составила 108 тысяч рублей. Сколько рублей Егор взял в кредит?

17 Диагонали AC и BD четырёхугольника ABCD, вписанного в окружность, пересекаются в точке P, причём BC = CD.

а) Докажите, что AB : BC = AP : PD.

б) Найдите площадь треугольника COD, где O - центр окружности, вписанной в треугольник ABD, если дополнительно известно, что BD - диаметр описанной около четырёхугольника ABCD окружности, AB = 5, а BC = $5\sqrt{2}$.

18 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-2)(y+2x-4)=|x-2|^3\\ y=x+a\end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

19 Сторона квадрата на 3 см длиннее ширины прямоугольника, площади этих фигур равны, а все стороны – целые числа.

а) Может ли ширина прямоугольника быть равной 8?

б) Может ли длина прямоугольника быть равной 16?

в) Найдите все возможные варианты таких пар прямоугольников и квадратов.

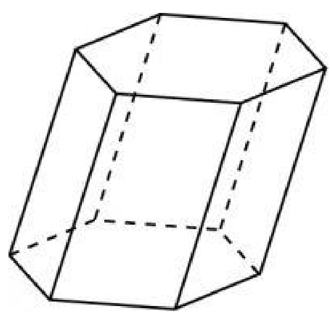
ВАРИАНТ 6

Часть 1

1 Основания трапеции равны 13 и 25, боковая сторона равна 12. Площадь трапеции равна 114. Найдите острый угол трапеции, прилежащий к данной боковой стороне. Ответ дайте в градусах.

2 Стороны правильного треугольника ABC равны 4. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$

3 Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами $3\sqrt{3}$, а боковые ребра равны 4 и наклонены к плоскости основания под углом 60°.



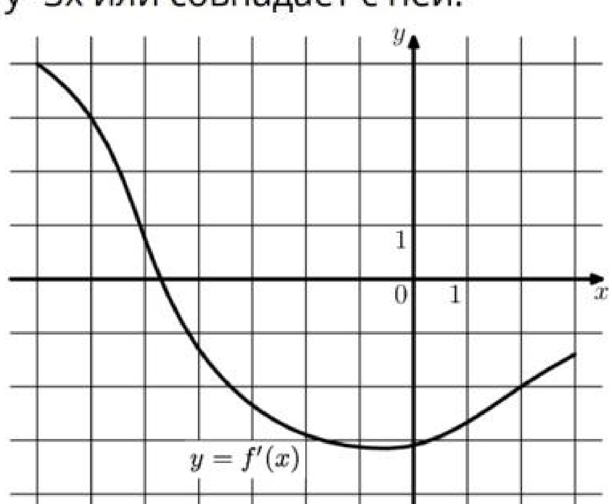
4 В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 16. Результат округлите до тысячных.

5 Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не попадёт в неё. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна p=0,6. Найдите вероятность того, что стрелку потребуется ровно три попытки.

6 Найдите корень уравнения $7^{4-x} = 3{,}5 \cdot 2^{4-x}$

7 Найдите значение выражения $3\sqrt{2}\cos^2\dfrac{9\pi}{8} - 3\sqrt{2}\sin^2\dfrac{9\pi}{8}$

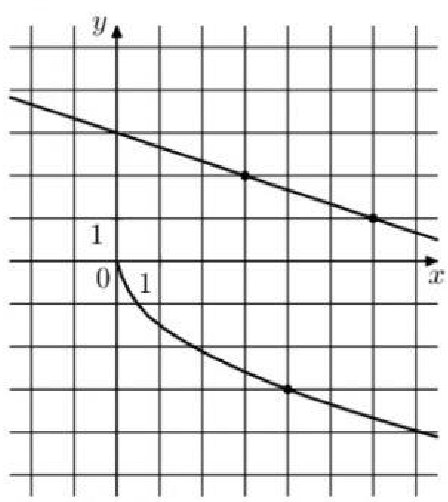
8 На рисунке изображен график y=f′(x) - производной функции y=f(x). Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику y=f(x) параллельна прямой y=3x или совпадает с ней.



9 Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = const$, где p (Па) – давление в газе, V – объем газа в кубических метрах, a – положительная константа. При каком наименьшем значении константы a увеличение вчетверо объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к уменьшению давления не менее, чем в 2 раза?

10 Первая труба наполняет бассейн на 48 минут дольше, чем вторая. Обе трубы, работая одновременно, наполняют тот же бассейн за 45 минут. За сколько минут наполняет этот бассейн одна вторая труба?

11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A. Найдите ординату точки A.



12 Найдите наибольшее значение функции $y = (x-6)e^{7-x}$ на отрезке $[2; 15]$.

Часть 2

13 а) Решите уравнение $125^{\sin^2 x} = (\sqrt{5})^{5\sin 2x} \cdot 0{,}2$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -2\pi]$

14 Радиус основания конуса равен 12, а высота конуса равна 5.
а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и взаимно перпендикулярные образующие.
б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания конуса.

15 Решите неравенство $(25^x - 4 \cdot 5^x)^2 + 8 \cdot 5^x < 2 \cdot 25^x + 15$

16 15-го января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
–15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

17 Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD, а также боковой стороны AB трапеции ABCD. Окружность с центром O_2 касается сторон BC, CD и AD. Известно, что AB=9, BC=8, CD=4, AD=15.
а) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям трапеции ABCD.
б) Найдите O_1O_2

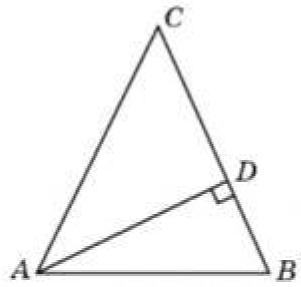
18 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $6^{100x^2-60x+10}+16a^2+40a+20+\sin(5\pi x)=0$ имеет хотя бы одно решение. И укажите корни уравнения для каждого найденного значения a.

19 В течение n дней каждый день на доску записывают натуральные числа, каждое из которых меньше 6. При этом каждый день (кроме первого) сумма чисел, записанных на доску в этот день, больше, а количество меньше, чем в предыдущий день.
а) Может ли n быть больше 5?
б) Может ли среднее арифметическое чисел, записанных в первый день, быть меньше 3, а среднее арифметическое всех чисел, записанных за все дни, быть больше 4?
в) Известно, что сумма чисел, записанных в первый день, равна 6. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, записанных за все дни?

ВАРИАНТ 7

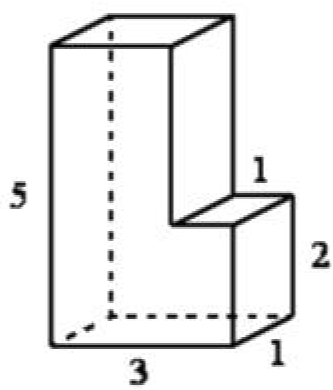
Часть 1

1 В треугольнике ABC AC=BC, AD – высота, угол BAD равен 34°. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.



2 Стороны параллелограмма $ABCD$ с острым углом A равны 5 и 20, а его площадь равна 28. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{AB}$

3 Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы – прямые).



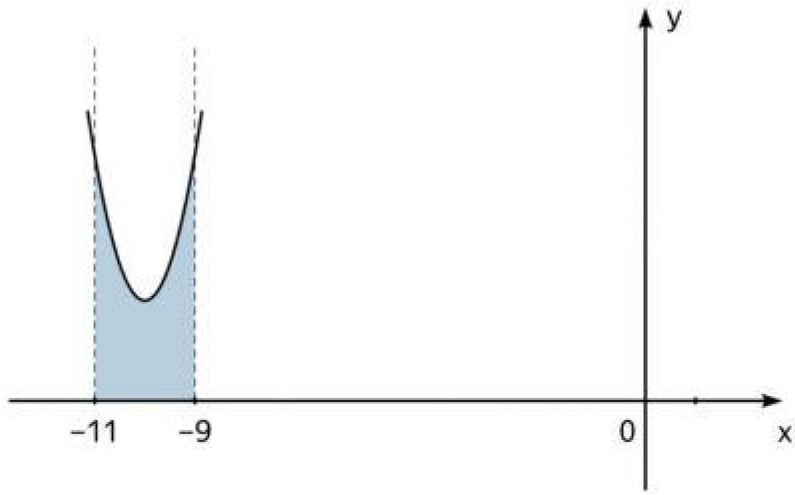
4 В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орел выпадет меньше раз, чем решка.

5 В торговом центре стоят два платежных терминала. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,15 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один терминал исправен.

6 Решите уравнение $\log_3(7-4x)=\log_3(4x-1)+2$

7 Найдите $\operatorname{tg} x$, если $\dfrac{6\sin x-2\cos x}{4\sin x-4\cos x}=-1$

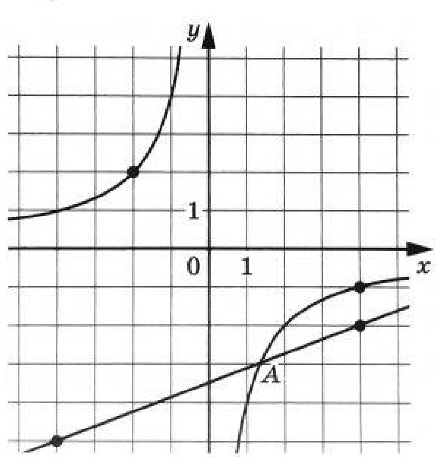
8 На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \dfrac{15}{8}$ - одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



9 При температуре $0^\circ C$ рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, изменяется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}(^\circ C)^{-1}$ - коэффициент теплового расширения, t° - температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на $7{,}2$ мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

10 Программист пишет программу, состоящую из 1455 строк кода. Ежедневно он пишет на одно и то же количество строк кода больше по сравнению с предыдущим днем. Сколько строк кода он написал за первые 10 дней, если известно, что в 15-й он написал 47 строк, а всю программу он написал за 30 дней?

11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординту точки B.



12 Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 13x + 13)e^{37-x}$

Часть 2

13 а) Решите уравнение $\log_{x^2+x-2}(x^3+2x^2-5x-5)=0$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$\left[\log_{0,2}127; \log_{\sqrt{3}}\sqrt{6+\sqrt{5}}\right]$

14 В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF сторона основания AB равна 2, а боковое ребро SA равно 8. Точка M – середина ребра AB. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и D. Прямая SC пересекает плоскость α в точке K.

а) Докажите, что KM = KD.

б) Найдите объем пирамиды CDKM.

15 Решите неравенство

$$\left(2\cdot 0{,}5^{x+2}-0{,}5\cdot 2^{x+2}\right)\left(2\log^2_{0,5}(x+2)-0{,}5\log_2(x+2)\right)\leqslant 0$$

16 15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1 числа каждого месяца долг увеличивается на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2 по 15 число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- на 15 число каждого с 1 по 20 месяц долг должен уменьшаться на 40 тыс. рублей;
- за 21 месяц долг должен быть погашен полностью.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15 число 20 месяца, если банку всего было выплачено 1820 тыс. рублей?

17 Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M. Продолжение стороны AD пересекает эту окружность в точках P и Q, причем точка P лежит между точками D и Q. Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM.

а) Докажите, что $\angle DMP=\angle CBM$.

б) Известно, что $CM=17$ и $CD=25$. Найдите сторону AD.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{\ln y}=4^{|x|} \\ \log_2(x^4y^2+2a^2)=\log_2(1-ax^2y^2)+1 \end{cases}$$ имеет единственное решение.

19 Пусть K(n) обозначает сумму квадратов всех цифр натурального числа n.

а) Существует ли такое трехзначное число n, что K(n)=181?

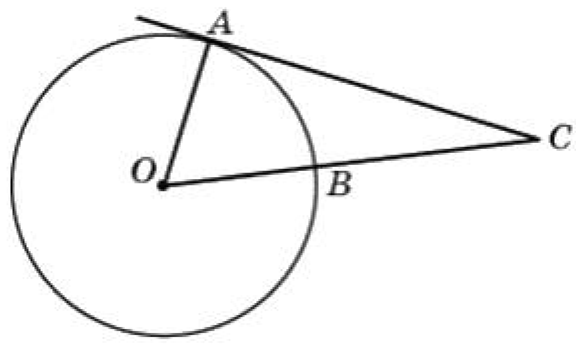
б) Существует ли такое трехзначное число n, что K(n)=180?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение 9K(n)-n, если n – трехзначное число?

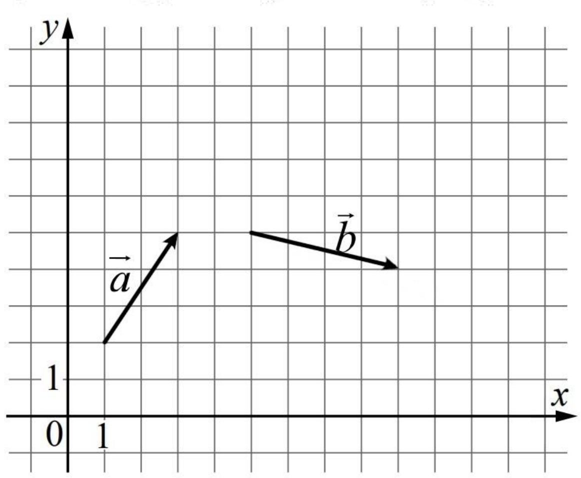
ВАРИАНТ 8

Часть 1

1 Угол ACO равен 27°, где O – центр окружности. Его сторона CA касается окружности. Сторона CO пересекает окружность в точке B (см. рис.). Найдите величину меньшей дуги AB окружности. Ответ дайте в градусах.



2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$



3 Ребра тетраэдра равны 2. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его ребер.

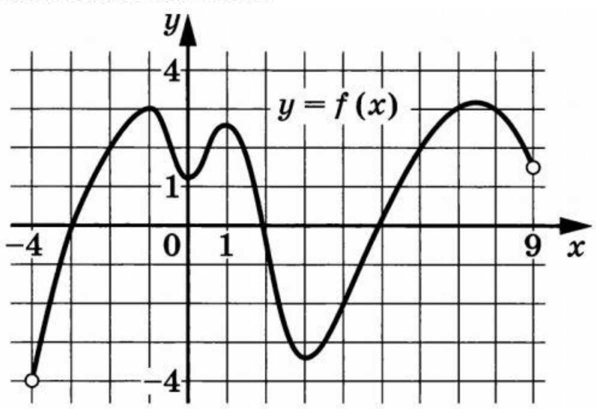
4 Вероятность того, что новый пылесос в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,093. В некотором городе из 1000 проданных пылесосов в течение года в гарантийную мастерскую поступило 97 штук. На сколько отличается относительная частота события "гарантийный ремонт" от его вероятности в этом городе?

5 При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание испеченной буханки. Известно, что вероятность того, что её масса окажется меньше 690 г, равна 0,96. Вероятность того, что её масса окажется больше 650 г, равна 0,9. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 650 г, но меньше 690 г.

6 Решите уравнение $\log_{3-x} 25 = 2$. Если корней несколько, в ответ запишите больший из них.

7 Найдите $\dfrac{a+9b+38}{a+3b+19}$, если $\dfrac{a}{b}=3$

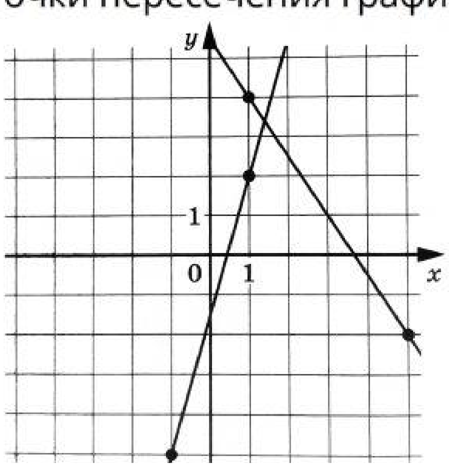
8 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-4;9)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



9 Скорость колеблющегося на пружине груза меняется по закону $v(t)=7\sin\dfrac{\pi t}{4}$ (см/с), где t — время в секундах. Какую долю времени из первых двух секунд скорость движения превышала 3,5 см/с? Ответ выразите десятичной дробью, если нужно, округлите до сотых.

10 Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 400 метров, за 39 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

11 На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.



12 Найдите наибольшее значение функции $y=28\cos x+14\sqrt{3}x-\dfrac{14\sqrt{3}\pi}{3}+11$ на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Часть 2

13 а) Решите уравнение $\sin^2\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=0,375\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;\pi]$.

14 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ на рёбрах AC и BC отмечены соответственно точки M и N так, что AM:MC = CN:BN = 2:1, точка K — середина ребра A_1C_1.

а) Докажите, что плоскость MNK проходит через вершину B_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости KMN, если AB = 6, AA_1 = 2,4

15 Решите неравенство $\dfrac{\log_{\log_{0,5}x}(\log_{0,25}x)}{5^{2x+3}-5^{4-3x}}\geqslant 0$

16 В августе 2020 года взяли кредит. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на r%;

— с февраля по июль необходимо выплатить часть долга.

Кредит можно выплатить за три года равными платежами по 38016 рублей, или за два года равными платежами по 52416 рублей. Найдите r.

17 На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, причём $AC_1:C_1B=11:30$, $BA_1:A_1C=5:1$, $CB_1:B_1A=6:5$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.

а) Докажите, что ADA_1B_1 — параллелограмм.

б) Найдите CD, если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC=11$, $BC=18$.

18 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ xy=a^2-3a \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

19 На доске написано n чисел a_i ($i=1,2,\ldots,n$). Каждое из чисел не меньше 50 и не больше 150. Каждое из этих чисел уменьшают на r_i% (для каждого числа какой-то процент). При этом, для каждого i ($1\leqslant 1\leqslant n$) либо $r_i=2$, либо число a уменьшается на 2, то есть становится равным a_i-2.

а) Может ли среднее арифметическое чисел $r_1,r_2,\ldots,r_n$ быть равным 5?

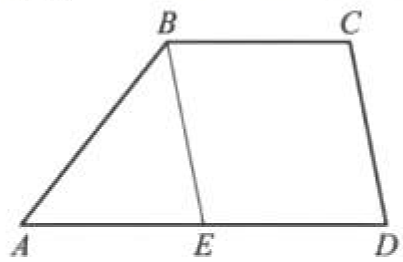
б) Могло ли оказаться, что среднее арифметическое чисел $r_1,r_2,\ldots,r_i$ больше 2, а сумма чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ уменьшилась более чем на $2n$?

в) Пусть всего чисел 30, а после выполнения описанной операции их сумма уменьшилась на 40. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел $r_1,r_2,\ldots,r_n$.

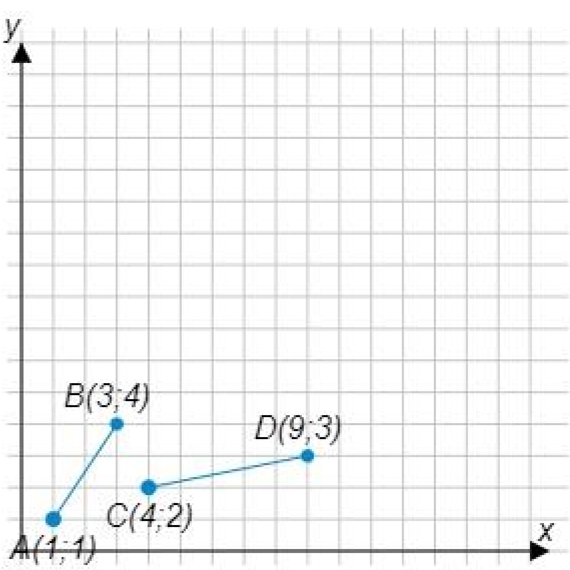
ВАРИАНТ 9

Часть 1

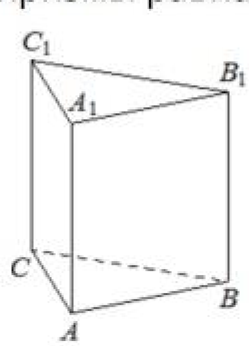
1 В трапеции ABCD меньшее основание BC равно 8, прямая BE параллельна боковой стороне CD. Найдите периметр трапеции ABCD, если периметр треугольника ABE равен 29.



2 Даны точки $A(1;1)$, $B(3;4)$, $C(4;2)$, $D(9;3)$. Найдите величину угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Ответ дайте в градусах.



3 Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A, C, A_1, B_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Площадь основания призмы равна 15, а боковое ребро равно 6.



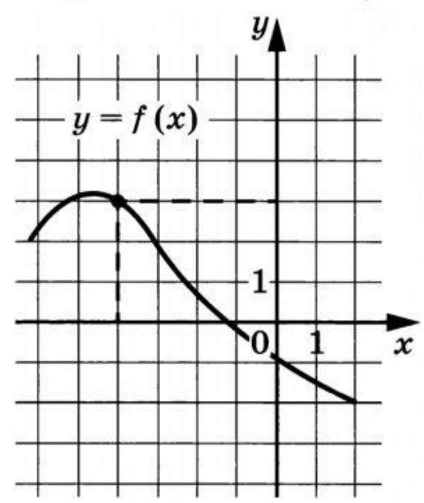
4 За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки не будут сидеть рядом.

5 Чтобы поступить в институт на специальность «Переводчик», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 78 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Журналист», нужно набрать не менее 78 баллов по каждому из трёх предметов – математика, русский язык и обществознание.
Вероятность того, что абитуриент X получит не менее 78 баллов по математике, равна 0,9, по русскому языку – 0,7, по иностранному языку – 0,8 и по обществознанию – 0,9.
Найдите вероятность того, что X сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

6 Найдите корень уравнения $(x-11)^4=(x+3)^4$

7 Найдите значение выражения $(1-\log_2 12)(1-\log_6 12)$

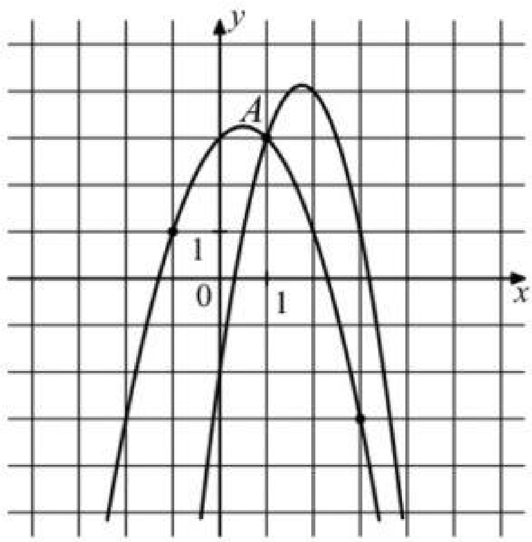
8 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой -4. Найдите значение производной функции в точке $x_0=-4$.



9 Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км – радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 24 км. К пляжу ведет лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 32 км?

10 Первый насос наполняет бассейн за 1 час, второй – за 1 час 30 минут, а третий – за 1 час 48 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = -2x^2 + 7x - 2$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



12 Найдите наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 6x + 12)$ на отрезке $[-13; 1]$.

Часть 2

13 а) Решите уравнение $\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

14 В правильной восьмиугольной призме $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ сторона основания AB равна $3\sqrt{2}$, а боковое ребро AA_1 равно 6. На ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Плоскость α параллельна прямой H_1E_1 и проходит через точки M и A.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ плоскостью α – равнобедренная трапеция.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка F_1, а основанием – сечение призмы $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ плоскостью α.

15 Решите неравенство $3^{x^2} \cdot 5^{x-1} \geqslant 3$

16 15 декабря планируется взять кредит в банке на сумму 600 тысяч рублей на n+1 месяц. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
- к 15-му числу (n+1)-го месяца кредит должен быть полностью погашен. Найдите n, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 852 тысячи рублей.

17 Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Отрезок AP - диаметр окружности, описанной около треугольника ABC.
а) Докажите, что прямая HP пересекает отрезок BC в его середине.
б) Луч PH вторично пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке M. Найдите длину отрезка MC_1, если расстояние от центра этой окружности до прямой BC равно 4, $\angle BPH=120°$.

18 Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |3x-y+2| \leqslant 12 \\ (x-3a)^2+(y+a)^2=3a+4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19 а) Существуют ли такие двузначные натуральные числа m и n, что $\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{100}$?

б) Существуют ли такие двузначные натуральные числа m и n, что $\left|\frac{m^2}{n^2}-2\right| \leqslant \frac{1}{10000}$?

в) Найдите все возможные значения натурального числа n, при каждом из которых значение выражения $\left|\sqrt{2}-\frac{n+10}{n}\right|$ является наименьшим.

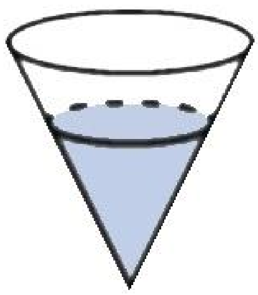
ВАРИАНТ 10

Часть 1

1 Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 3:4, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 33.

2 Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{(-4;7)}$ и $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{(16;11)}$. Ответ дайте в градусах.

3 В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает 2/3 высоты. Объём жидкости равен 144 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



4 В классе 16 учащихся, среди них два друга – Юра и Борис. Класс случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Юра и Борис окажутся в одной группе.

5 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,03. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

6 Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg}\frac{(11-x)\pi}{6}=-\frac{0{,}5}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

7 Найдите значение выражения $\dfrac{p(b)}{p\left(\dfrac{1}{b}\right)}$, если $p(b)=\left(b-\dfrac{9}{b}\right)\left(-9b+\dfrac{1}{b}\right)$ при

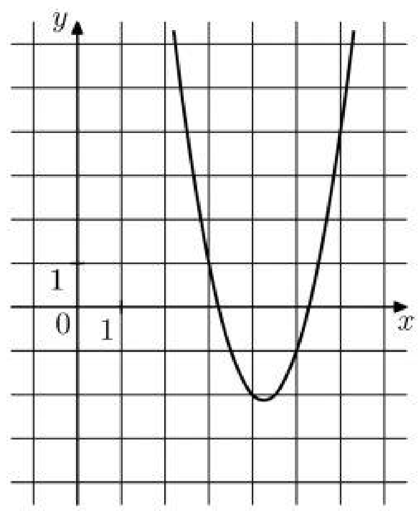
$b\neq 0$

8 Прямая $y=-6x+1$ является касательной к графику функции $f(x)=4x^2+bx+2$. Найдите b, если абсцисса точки касания отрицательна.

9 Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \dfrac{A_0\omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω – частота вынуждающей силы (в c^{-1}), A_0 – постоянный параметр, $\omega_p = 360\ \text{c}^{-1}$ – резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω, меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на одну пятнадцатую. Ответ выразите в c^{-1}.

10 Смешав 8-процентный и 26-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 16-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 20-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 8-процентного раствора использовали для получения смеси?

11 На рисунке изображен график функции вида $f(x)=ax^2+bx+c$. Найдите f(10).



12 Найдите наименьшее значение функци $y = e^{2x} - 9e^x - 3$ на отрезке [0;3].

Часть 2

13 а) Решите уравнение $\cos 2x \sin 2x \sin \frac{2\pi}{3} = \dfrac{1}{4}\cos\left(8x - \frac{3\pi}{2}\right)$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{8\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}\right]$

14 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $5\sqrt{3}$. На ребре DD_1 отмечена точка M так, что $DM:MD_1=3:2$. Плоскость α параллельна прямой A_1F_1 и проходит через точки M и E.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α – равнобедренная трапеция.

б) Найдите объем пирамиды, вершиной которой является точка F, а основанием – сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α

15 Решите неравенство $\log_{0,2}^{2}(x-3)^8+8\log_5(x-3)^4\leqslant 32$

16 Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 рублей в конце каждого года $t(t=1;2;\ldots)$. В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $(1+r)$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги необходимо продавать в конце двадцать первого года. При каких положительных r это возможно?

17 Точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности, точка I — центр вписанной в этот треугольник окружности, точка H — точка пересечения высот треугольника ABC. Известно, что ∠BAC=∠OBC+∠OCB.
а) Докажите, что точка I лежит на окружности, описанной около треугольника BOC.
б) Найдите угол OIH, если ∠ABC=75°

18 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(4x-x^2)^2-32\sqrt{4x-x^2}=a^2-14a$ имеет хотя бы одно решение.

19 Вася и Петя решали задачи из сборника, и они оба решили все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.
а) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу меньше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 5 дней?
б) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу больше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 4 дня?
в) Какое наименьшее количество задач могло быть в сборнике если каждый из ребят решал задачи более 6 дней, причем в первый день один из мальчиков решил на одну задачу больше чем другой?

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Чтобы посмотреть решение задачи, нажмите на её номер (в варианте).
Нажмите на номер варианта или наведите камеру на qr-код, чтобы перейти к нему, ввести и проверить разом ответы и узнать свои баллы за тест (нужна авторизация на сайте).
После завершения теста можно посмотреть решения и ответы ко всем его задачам.

Вариант 1

1) 122
2) 17
3) 24
4) 0,75
5) 0,35
6) 4
7) 8
8) 2
9) 10
10) 10
11) 0,5
12) 1
13) а) $\pm\pi/4+2\pi n,\ n\in Z$
 б) $-7\pi/4$
14) 45
15) $(-\infty;-1)\cup(-1;0]\cup(\log\_3(2);1)$
16) 9282000
17) 1
18) $\sqrt{193}+2;11$
19) нет;нет;16

Вариант 2

1) 6
2) 8,5
3) 4
4) 0,25
5) 0,125
6) 12
7) 4,8
8) 0,5
9) 2,3
10) 7
11) 0,5
12) 3
13) а) -5;4
 б) 4
14) $\arcsin(3\sqrt{55}/40)$
15) $(-\infty;-23]\cup(-160/17;$
$0]$
16) 1923000
17) $8\sqrt{3}$
18) $-4\sqrt{2};4\sqrt{2}$
19) да;да;12

Вариант 3

1) 36
2) 10
3) 4
4) 0,12
5) 0,512
6) 8
7) 29
8) 20
9) 45
10) 56
11) 25
12) 0,25
13) а) $\pm\pi/3+2\pi n;\ 2\pi n,\ n\in Z$
 б) $-7\pi/3,\ -2\pi,\ -5\pi/3$
14) $\mathrm{arctg}2\sqrt{2}$
15) $[-\pi/3+2\pi k;\pi/3+2\pi k],k\in Z$
16) 7
17) $13/\sqrt{3}$
18) -0,2;0,2
19) да;96;132;144

Вариант 4

1) 7
2) 7,5
3) 90
4) 0,32
5) 0,147
6) -4
7) 88
8) 2
9) 23,3
10) 63
11) 34
12) -3
13) а) $-\pi/3+2\pi n;\ \pi n,\ n\in Z$
 б) $2\pi,\ 3\pi$
14) $\arcsin(3/\sqrt{17})$
15) $(-\infty;-3]\cup(-2;1]$
16) 70
17) 12
18) $(6-\sqrt{30};2]\cup[10;6+\sqrt{30})$
19) нет;да;12

Вариант 5

1) 40
2) 232
3) 111
4) 0,4
5) 0,043
6) 2
7) 36
8) 4
9) 9,6
10) 16
11) 2,5
12) 36
13) а) 0,25;8
 б) 0,25
14) $31/(14\sqrt{10})$
15) $(-3;-0,5]\cup(1;2)\cup(2;2,5]$
16) 1500000
17) $25\sqrt{3}/2$
18) $(-17/4;-2)\cup(-2;1/4)$
19) нет;да;4;6;12

Вариант 6

1) 30
2) 8
3) 243
4) 0,028
5) 0,096
6) 3
7) 3
8) -6
9) 0,5
10) 72
11) -9
12) 1
13) а) $\mathrm{arctg}1/4+\pi n;\ \pi/4+\pi n,\ n\in Z$
 б) $\mathrm{arctg}1/4-3\pi;\ -11\pi/4$
14) $5\sqrt{119}/13$
15) $(-\infty;0)\cup(\log\_5(3);1)$
16) 39
17) 5
18) при $a=-5/4,\ x=3/10$
19) да;да;48

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Вариант 7

1) 68
2) -96
3) 12
4) 0,3125
5) 0,9775
6) 0,4
7) 0,6
8) 6
9) 40
10) 185
11) -0,5
12) 13
13) а) -3;2
   б) -3
14) $9\sqrt{5}/4$
15) $-1\cup[2^{(1/4)}-2;+\infty)$
16) 600
17) 68
18) 1
19) да;нет;-277

Вариант 8

1) 63
2) -71
3) 1
4) 0,004
5) 0,86
6) -2
7) 2
8) 6
9) 0,67
10) 250
11) 3,4
12) 25
13) а) $\pm\pi/3+2\pi n,\ n\in Z$
   б) $-7\pi/3;\ -5\pi/3;\ -\pi/3;\ \pi/3$
14) 24/13
15) $(0{,}2;0{,}25]\cup(0{,}5;1)$
16) 20
17) 7
18) 2;6
19) нет;да;8:3

Вариант 9

1) 45
2) 45
3) 60
4) 0,75
5) 0,6174
6) 4
7) 1
8) -0,75
9) 175
10) 27
11) 5
12) -1
13) а) $-\pi/12+\pi n,\ n\in Z$
   б) $-13\pi/12;\ -\pi/12;\ 11\pi/12$
14) $36+30\sqrt{2}$
15) $(-\infty;-1-\log_3(5)]\cup[1;+\infty)$
16) 20
17) 48
18) -4/3;2
19) да;нет;24

Вариант 10

1) 11,55
2) 135
3) 342
4) 0,2
5) 0,83
6) 6
7) 1
8) -2
9) 90
10) 55
11) 64
12) -23,25
13) а) $\pi n/4;\ \pm5\pi/24+\pi n/2,\ n\in Z$
   б) $65\pi/24, 11\pi/4, 67\pi/24, 3\pi, 77\pi/24, 13\pi/4, 79\pi/24$
14) 36
15) $[3-\sqrt{5};2{,}8]\cup[3{,}2;3+\sqrt{5}]$
16) (43/441;41/400)
17) 165
18) $[0;6]\cup[8;14]$
19) да;нет;84