

# Гипергеометрическая функция ${}_2F_1(a, b, c, z)$

## Гипергеометрический ряд (ряд Гаусса)

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (1)$$

$(x)_n$  – символ Похгаммера, определяется соотношением:

$$(x)_n = x(x+1) \dots (x+n-1), \quad (x)_0 = 1.$$

## Свойства ряда

- Ряд сходится при  $|z| < 1$
- При  $|z| = 1$  ряд сходится если  $c - a - b > 1$
- Ряд теряет смысл при  $c = 0, -1, -2 \dots$

## Элементарные частные случаи

$${}_2F_1(1, 1, 2, z) = -z^{-1} \ln(1 - z) \quad (2)$$

$${}_2F_1(1/2, 1/2, 3/2, z^2) = z^{-1} \arcsin(z) \quad (3)$$

## Задание:

- 1 Запрограммировать вычисление гипергеометрического ряда (1).
- 2 Для приведённых выше частных случаев (2-3) напечатать таблицы: переменная  $z$ , функция  ${}_2F_1()$ , соответствующая элементарная функция, относительная ошибка вычисления.  $z$  изменять в диапазоне:
  - для  $\ln()$ :  $z \in [-0.95; +0.95]$  с шагом 0.1
  - для  $\arcsin()$ :  $z \in [0.05; 0.95]$  с шагом 0.1

## Примеры таблиц:

$z$	$F21(1/2, 1/2, 3/2, z^2)$	$\text{asin}(z)/z$	( eps )
0.05	1.00041713611540040	1.00041713611540029	(-1.027e-16)
0.15	1.00378848517790709	1.00378848517790684	(-2.412e-16)
...			
$z$	$F21(1, 1, 2, z)$	$-\ln(1-z)/z$	( eps )
-0.95	0.70219719607223907	0.70297828692174257	( 1.111e-03)
-0.85	0.72374464774287617	0.72374781069439230	( 4.370e-06)
...			

## Формулы преобразований

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c, z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \cdot {}_2F_1(a, b, a+b-c+1, 1-z) + \\ &+ (1-z)^{c-a-b} \cdot \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \times \\ &\times {}_2F_1(c-a, c-b, c-a-b+1, 1-z) \\ c-a-b &\neq 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad \& \quad |\arg(1-z)| < \pi \end{aligned} \quad (4)$$

$${}_2F_1(a, b, c, z) = (1-z)^{-a} {}_2F_1(a, c-b, c, \frac{z}{z-1}) \quad (5)$$

## Значение аргумента $z = 1$ (следует из (4))

$${}_2F_1(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad \text{Re}(c) > \text{Re}(a+b)$$

## Элементарные частные случаи (продолжение)

$${}_2F_1(1/2, 1, 3/2, -z^2) = z^{-1} \operatorname{arctg}(z) \quad (6)$$

$${}_2F_1(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -z^2) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\sqrt{1+z^2} + z} + \sqrt{\sqrt{1+z^2} - z} \right) \quad (7)$$

### Задание:

- Запрограммировать вычисление гипергеометрической функции:
  - ❶ для  $|z| \leq 1/2$  по гипергеометрическому ряду (1)
  - ❷ для  $1/2 < z \leq 1$  использовать преобразование (4)  
для  $z = 1$  предусмотреть упрощение и проверку  $c > a + b$
  - ❸ для  $z < -1/2$  использовать преобразование (5)
- Проверить для частных случаев (6-7);  
z изменять в диапазоне  $[0.; 10.0]$  с шагом:
  - 0.05 для  $x < 0.7$ ;
  - 0.1 для  $0.7 \leq x < 1$ ;
  - 0.5 для  $1 \leq x \leq 10$ ;