Гамма-функция $\Gamma(z)$

Определение (интеграл Эйлера)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \Rightarrow \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Асимптотическая формула (Стирлинг)

$$ln(\Gamma(z)) = (z - \frac{1}{2}) ln(z) - z + \frac{1}{2} ln(2\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)} \frac{1}{z^{2k-1}},$$

где B_{2k} — числа Бернулли:

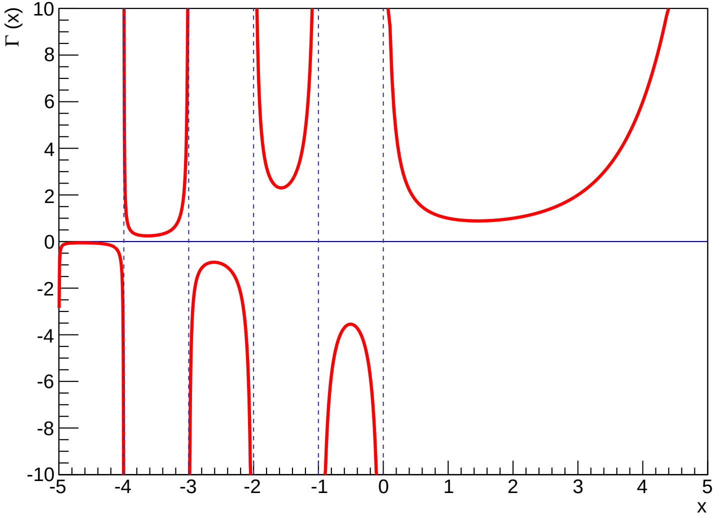
$$B_2 = \frac{1}{6}; \quad B_4 = -\frac{1}{30}; \quad B_6 = \frac{1}{42}; \quad B_8 = -\frac{1}{30};$$

$$B_{10} = \frac{5}{66}; \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}; \quad B_{14} = \frac{7}{6}; \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}.$$

Факториал и формула симметрии

$$\Gamma(n) = (n-1)!; \qquad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)} \quad \Rightarrow \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

График функции $\Gamma(x)$



Задание:

1. Запрограммировать функцию $\Gamma(z)$:
   - для $z > 9.5$ вычисления по асимптотической формуле Стирлинга;
   - для $z \leqslant 9.5$ использовать соотношение: $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$.
2. Проверить правильность вычислений для частных случаев: $\Gamma(10) = 9! = 362880$ и $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} = 1.772453850905516\,03$.
3. Напечатать таблицу: переменная n, значение $n!$, $\Gamma(n+1)$, относительная ошибка вычисления $\Gamma(n+1)$
4. Напечатать таблицу проверки формулы симметрии: переменная z, значение $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$, значение $\pi/sin(\pi z)$, относительная ошибка вычисления; $z \in [-0.95; +0.95]$ с шагом 0.1.

Примеры таблиц приведены на следующем слайде.

Примеры таблиц:

```
  n                  n!           Gamma(n+1)             ( eps )
  1                   1            1.0000000000000133 (-1.332e-15)
  2                   2            2.0000000000000266 (-1.332e-15)
...
  z       Gamma(z)*Gamma(1-z)   pi/sin(pi*z)           ( eps )
 -0.95 -20.0824840790797871 6 -20.0824840790797263 5 (-3.028e-15)
 -0.85  -6.91995241176217490  -6.91995241176217700 ( 3.028e-16)
...
```