Homework 2
Mathematical Basics 1

Stefan Röhrl
Technische Universität München, Arcisstraße 21, Munich, Germany
Email: stefan.roehrl@tum.de

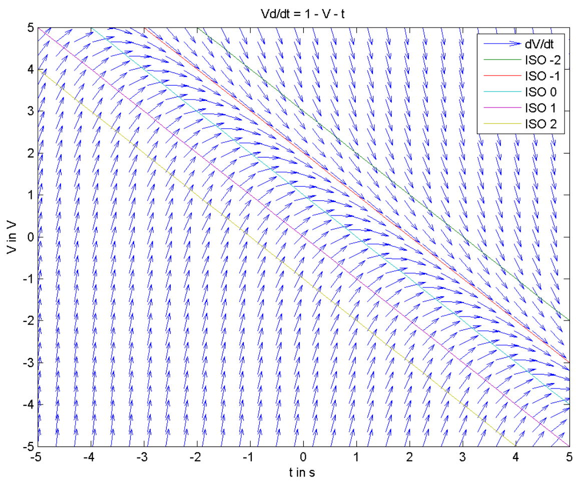

Figure 1. Richtungsfeld der Differentialgleichung (1)

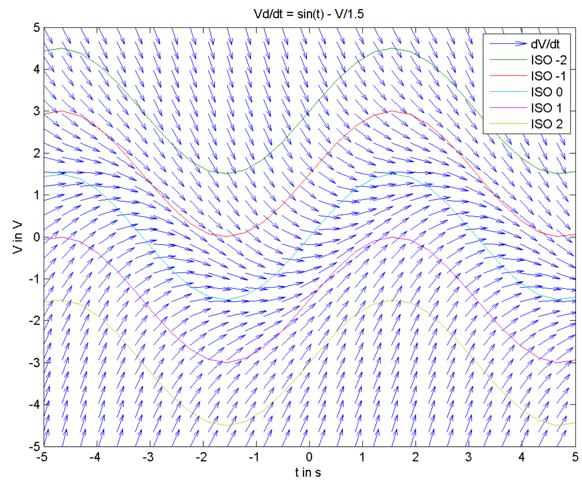

Figure 2. Richtungsfeld der Differentialgleichung (2)

I. Plot slope fields and isocline

In Abb. 1 ist das Richtungsfeld und die Isoklinen der Differentialgleichung (1) aufgezeichnet. Egal ein welchem Punkt man startet man landet auf der Isoklinen mit $\frac{dV}{dt} = -1$.

$$\frac{dV}{dt} = 1 - V - t \tag{1}$$

In Abb. 2 ist das Richtungsfeld und die Isoklinen der Differentialgleichung (2) aufgezeichnet. Befindet man sich außerhalb der "Grundschwingung" treibt einen das Feld wieder dorthin zurück.

$$\frac{dV}{dt} = sin(t) - \frac{V}{1.5} \tag{2}$$

II. Differential equations of a simple cell model

Die Differentialgleichung für das "leaky integrate and fire neuron" erschließt sich folgendermaßen:

$$I_{ex} = I_{C_m} + I_{R_l} \tag{3}$$
$$I_{C_m} = C_m \cdot \frac{dV}{dt} \tag{4}$$
$$I_{R_l} = \frac{V}{R_l} \tag{5}$$
$$I_{ex} = C_m \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R_l} \tag{6}$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C_m}(I_{ex} - \frac{V}{R_l}) \tag{7}$$

Mit der Definition von $I_{ex} = I_{max} sin(t)$ und einem zusätzlichen konstanten Strom D ergibt sich für die Differentialgleichung diese Form:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C_m}(I_{max} sin(t) + D - \frac{V}{R_l}) \tag{8}$$

In den folgenden Betrachtungen gilt: $R_l = 1\Omega$, $C_m = 1F$
In Abb. 3 ist zu erkennen, dass wenn kein externer Strom anliegt, die Zelle immer auf ein Potential von 0V zurück kehrt. Dies geschieht durch den Leck-Strom durch den Widerstand R_l.

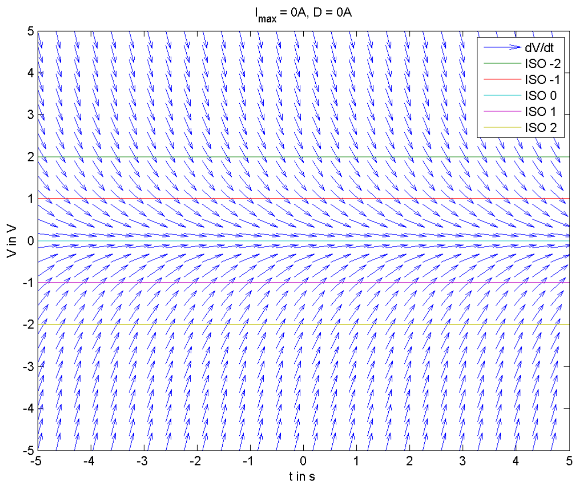

Figure 3. Richtungsfeld mit $I_{max} = 0A$, $D = 0A$

In Abb. 4 ist zu sehen, wie sich die Zelle verhält wenn ein sinusförmiger Strom eingeprägt wird. Das Zellpotential versucht der Grundschwingung des Stromes zu folgen.

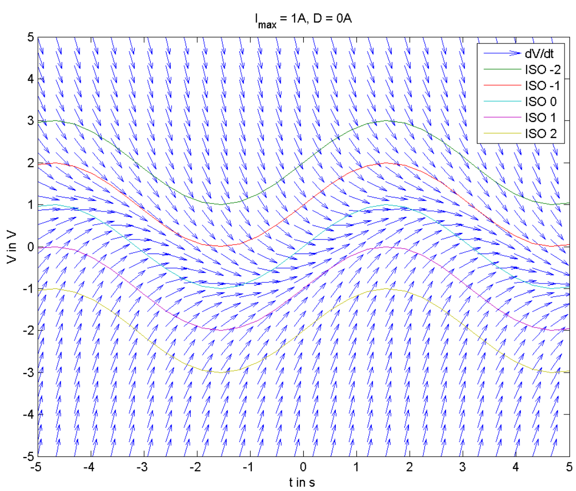

Figure 4. Richtungsfeld mit $I_{max} = 1A$, $D = 0A$

Der externe konstante Strom in Abb. 5 sorgt dafür, dass sich die Zelle unter eine Vorspannung befindet. Der Kondensator wird soweit aufgeladen, bis der komplette Strom über R_l abfließt. Somit wird das Potential konstant bei 2V gehalten. Wird die Zelle auf ein anderes Potential angeregt, kehrt sie wieder zum 2V Potential zurück.

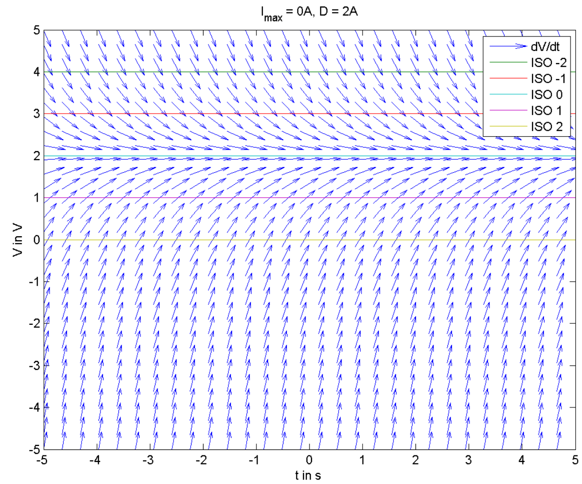

Figure 5. Richtungsfeld mit $I_{max} = 0A$, $D = 2A$

Wird nun zusätzlich ein sinusförmiger Strom eingeprägt, schwingt das Potential der Zelle um den 2V Offset (vgl. Abb. 6).

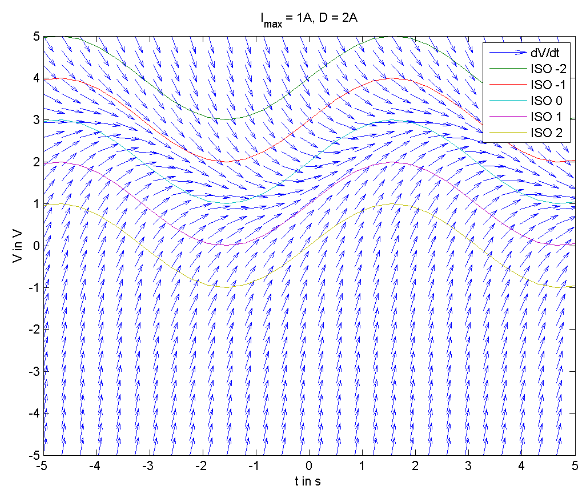

Figure 6. Richtungsfeld mit $I_{max} = 1A$, $D = 2A$