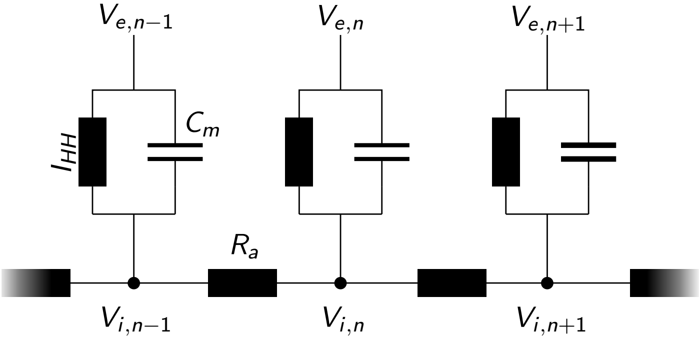
Multi Compartment Model

Neuroprothetics SS 2015

Jörg Encke
TU-München
Fachgebiet für Bioanaloge Informationsverarbeitung
Prof. Hemmert

Technische Universität München

Fachgebiet für Bioanaloge Informationsverarbeitung


$V_{e,n-1}$
$V_{e,n}$
$V_{e,n+1}$
I_{HH}
C_m
R_a
$V_{i,n-1}$
$V_{i,n}$
$V_{i,n+1}$

Differentialgleichungssystem

Durch anwenden der Knotenpunktregel für das Compartment n kommen wir zu folgendem Differentialgleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
0 =& C_m \frac{dV_{m,n}}{dt} + I_{HH,n} + \frac{V_{i,n} + V_{i,n-1}}{R_a} + \frac{V_{i,n} - V_{i,n+1}}{R_a} \\
\frac{dV_{m,n}}{dt} =& - \frac{1}{C_m} I_{HH,n} + \frac{1}{C_m} \frac{V_{i,n-1} - 2V_{i,n} + V_{i,n+1}}{R_a}
\end{aligned}
$$

If we add a stimulation current:

$$
\frac{dV_{m,n}}{dt} = \frac{1}{C_m}(-I_{HH,n} + I_{stim,n}) + \frac{1}{C_m} \frac{V_{i,n-1} - 2V_{i,n} + V_{i,n+1}}{R_a}
$$

Dieses System lässt sich auch vektoriell schreiben als:

$$\frac{d}{dt}\vec{V}_m = \frac{1}{C_m}(-\vec{I}_{HH} + \vec{I}_{stim}) + \frac{1}{C_m R_a}\mathbf{C}\vec{V}_i$$

Wobei $\vec{V}_m = \begin{pmatrix} V_{m,1} \\ V_{m,2} \\ \vdots \end{pmatrix}$ und $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\vec{V}_i, \vec{I}_{HH}, \vec{I}_{stim}$ sind dementsprechend Vektoren ähnlich $\vec{V}_m$

Die Spannung im inneren des Neurons kann über den Zusammenhang $\vec{V}_m = \vec{V}_i - \vec{V}_e$ ersetzt werden.

$$\frac{d}{dt}\vec{V}_m = \frac{1}{C_m}(-\vec{I}_{HH} + \vec{I}_{stim}) + \frac{1}{C_m R_a}\mathbf{C}\vec{V}_m + \frac{1}{C_m R_a}\mathbf{C}\vec{V}_e$$

Für die heutige Übung ist $\mathbf{C}\vec{V}_e = 0$ da kein externer Potentialgradient anliegt.

Wir lösen dieses System an Differentialgleichungen mit Hilfe des impliziten Euler Verfahrens.

$$\frac{dV}{dt} = f(t)$$
$$V(t + \Delta t) = V(t) + \Delta t \cdot f(t + \Delta t)$$

$$\vec{V}_m(t+\Delta t) = \vec{V}_m(t) + \frac{\Delta t}{C_m}(-\vec{I}_{HH}(t+\Delta t) + \vec{I}_{stim}(t+\Delta t)) + \frac{\Delta t}{C_m R_a}\mathbf{C}\vec{V}_m(t+\Delta t)$$

$$\underbrace{\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{C_m R_a}\mathbf{C}\right)}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\vec{V}_m(t+\Delta t)}_{\vec{x}} = \underbrace{\vec{V}_m(t) + \frac{\Delta t}{C_m}(-\vec{I}_{HH}(t+\Delta t) + \vec{I}_{stim}(t+\Delta t))}_{\mathbf{B}}$$

Es resultiert ein einfaches lineares Gleichungssystem der Art:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \mathbf{B}$$

Ein Gleichungssystem der Art $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \mathbf{B}$ lässt sich mit Hilfe des Computers sehr einfach Lösen:

Matlab: $\mathrm{x} = \mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$

Python: x = solve(A, B)
The solve function is provided by the Numpy package numpy.linalg

Fragen ?