西北工業大學

离散数学习题集

Problem Set of Discrete Mathematics

姓　　名:	钱　　锋
班　　级:	14012203
学　　号:	2022303324
邮　　箱:	strik0r.qf@gmail.com
日　　期:	2024 年 4 月 14 日

目录

专题 1　命题逻辑

1.1　第一讲 (2024.2.27)

习题 1.1. 设 p 为 2 是素数, q 为 3 是素数, r 为 $\sqrt{2}$ 为有理数. 下列符合命题中哪一个是假命题?

- $(p \vee q) \longrightarrow r$. 我们先判断一下 p, q, r 的真值, 显然 $p = 1, q = 1, r = 0$, 于是 $(p \vee q) = 1$, 根据蕴含式的真值规则, 前件为真, 后件为假, 该命题为假命题.
- $r \longrightarrow (p \vee q)$. 根据蕴含式的真值规则, 当前件为假时无论后件为真命题还是假命题, 蕴含式为真, 所以由 $r = 0$ 知这是一个真命题.
- $(p \wedge q) \longrightarrow p$. 根据合取式的真值表, $(p \wedge q) = 1$, 前件为真, 后件为真, 这是一个真命题.
- $(r \vee p) \longleftrightarrow q$. 根据 p, q, r 的真值可知, $(r \vee p) = 1, q = 1$, 于是根据等价式的真值规则, 这是一个真命题.

习题 1.2. 判断下列语句是否为命题, 如果是命题, 请指出其真值.

- **中国是一个人口众多的国家**. 这是一个陈述句, 并且在特定的语境下能够判断其陈述内容的真假, 例如在上下文中有关于“人口众多”的定义和明确的判定标准时, 这个陈述句就是可以明确判定真假的, 因此它是一个命题. 除此之外, 根据常识可知, 中国是目前人口最多的国家, 当然称得上是人口众多 (毕竟都已经是最多的那一个了, 再算不上众多的话说明众多的定义需要修正一下了), 所以这是一个真命题.
- **存在最大的素数**. 这是一个典型的数学命题, 根据素数的有关研究结果我们知道它是一个假命题.
- **这座楼可真高啊**. 这是一个感叹句, 因此它不是一个命题. 如果改成“这座楼有超过 50 层”的话就是一个命题了.
- **请你跟我走**. 这是一个祈使句, 它不是命题.
- **火星上也有人**. 这是一个陈述句, 并且是能够判断它的真假的——有人, 或者没有人, 必居其一且只居其一, 所以这是一个命题. 虽然目前我们的科学研究并不能严格的说明火星上是否有人存在, 但是按照目前的主流观点来看, 火星上是没有人的, 所以我们说这个命题在这意义下是一个假命题.

习题 1.3. 将下列命题符号化.

- “虽然交通堵塞, 但是老王还是准时到达火车站”. 设 p 为交通拥堵, 设 q 为老王准时到达火车站. 显然这里的转折关系是表示这两件事情同时发生的, 因此应该取它们二者的合取命题, 即 $p \wedge q$.
- “张小宝是三好生, 它是北京人或河北人”. 设 p 为张小宝是三好生, q 表示张小宝是北京人, r 表示他来自河北. 这里的逗号显然表示了并列关系, 因此应该取 $p \wedge (q \vee r)$.

- “除非天下雨, 否则我骑车上班”. 这句话的意思就是说, 如果天不下雨那么我就要骑车去上班, 设 p 表示雨天, q 表示我骑车去上班, 那么表示为 $(\neg p) \longrightarrow q$.

习题 1.4. 设命题 p, q 的真值为 F, 命题 r, s 的真值为 T, 求公式 $(p \longleftrightarrow r) \wedge ((\neg q) \vee s)$ 的真值.

解. 直接代入 p, q, r, s 的真值, 得到

$$(0 \leftrightarrow 1) \wedge ((\neg 0) \vee 1),$$

根据等价式和逻辑或的真值规则, 它实际上就是

$$0 \wedge 1,$$

根据逻辑与的运算规则, 原命题的真值应该为 F.

1.2　第二讲 (2024.2.29)

习题 1.5. 证明下列等价关系:

- $p \to (q \to p) \equiv \neg p \to (p \to \neg q)$.

表 1.1: $p \to (q \to p)$ 和 $\neg p \to (p \to \neg q)$ 的真值表

p	q	$q \to p$	$p \to (q \to p)$	$\neg p$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$\neg p \to (p \to \neg q)$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1

证明. 容易验证它们所在的两列是完全相同的, 因此它们逻辑等价. 在下面几例中不再赘述, 仅列出真值表. □

- $(p \to q) \wedge (r \to q) \equiv ((p \vee r) \to q)$.

p	q	r	$p \to q$	$r \to q$	$(p \to q) \wedge (r \to q)$	$p \vee r$	$(p \vee r) \to q$
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

- $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q)) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

p	q	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge q)$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p) \wedge q$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0

- $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$.

  证明. 这是显然成立的, 因为 $p \to q \equiv \neg p \vee q$, 我们只需要两边取反即可. □

习题 1.6. 求出下列公式的最简等价式:

- $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)) \wedge r$.

  解. 我们采用布尔代数的记号来简化我们的书写和计算, 我们**约定** $a+b$ **表示** $a \vee b$**,** $ab = a \cdot b$ **表示** $a \wedge b$**,** $\bar{a}$ **表示** $\neg a$. 由于布尔代数和命题逻辑都是同一个更一般的代数结构的具体形式, 因此这种符号的替代和运算的相互转换, 以及布尔恒等式和逻辑等价式的相互对应是显然成立的. 这样做的好处是, 在求复合命题的否定的时候, 可以利用上划线来减少括号的嵌套层数, 在视觉上让公式更加紧凑, 提高公式的可读性. 此外, 关于 $+$ 和 $\cdot$ 的有关运算律是我们所熟识的, 唯一不同的是在布尔代数中逻辑加对逻辑乘依然具有分配性, 即 $a + bc = (a+b)(a+c)$.

  由于布尔代数中并没有定义与 $\to$ 和 $\leftrightarrow$ 相对应的基本运算, 所以我们利用 $p \to q \equiv \neg p \vee q$ 和 $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$ 得到两个能表达相同含义的布尔表达式:

  $$\bar{p} + q, \quad pq + \bar{p}\bar{q}.$$

  现在考虑对原命题公式进行化简, 按照先前的结论, $p \leftrightarrow q$ 对应 $pq + \bar{p}\bar{q}$, 同理, $\neg q \to \neg p$ 对应 $q + \bar{p}$. 所以 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ 对应的布尔表达式为

  $$(pq + \bar{p}\bar{q})(q + \bar{p}) + (\overline{pq + \bar{p}\bar{q}} \cdot \overline{q + \bar{p}}).$$

  我们先考虑 $(pq + \bar{p}\bar{q})(q + \bar{p})$, 根据相关的布尔恒等式,

  $$(pq + \bar{p}\bar{q})(q + \bar{p}) = pq(q + \bar{p}) + \bar{p}\bar{q}(q + \bar{p}) = pqq + pq\bar{p} + \bar{p}\bar{q}q + \bar{p}\bar{q}\bar{p} = pq + \bar{p}\bar{q}.$$

  而

  $$\overline{pq + \bar{p}\bar{q}} = \overline{pq} \cdot \overline{\bar{p}\bar{q}} = (\bar{p} + \bar{q})(p + q) = (\bar{p} + \bar{q})p + (\bar{p} + \bar{q})q = \bar{p}p + \bar{q}p + \bar{p}q + \bar{q}q = \bar{p}(p + q),$$

  $$\overline{q + \bar{p}} = \bar{q}p,$$

  因此

  $$\overline{pq + \bar{p}\bar{q}} \cdot \overline{q + \bar{p}} = \bar{p}(p + q)\bar{q}p = 0.$$

  这就是说,

  $$(pq + \bar{p}\bar{q})(q + \bar{p}) + (\overline{pq + \bar{p}\bar{q}} \cdot \overline{q + \bar{p}}) = pq + \bar{p}\bar{q}.$$

  于是原命题对应的布尔表达式为

  $$pqr + \bar{p}\bar{q}r.$$

  于是原命题的最简等价式为 $(p \leftrightarrow q) \wedge r$.

- $p \vee \neg p \vee (q \wedge \neg q)$.

  解. 容易得到 $p + \bar{p} + (q\bar{q}) = 1 + 0 = 1$, 于是原命题的最简等价式为 T.

- $(p \wedge (q \wedge s)) \vee (\neg p \wedge (q \wedge s))$.

  解. 容易得到 $pqs + \bar{p}qs = (p + \bar{p})qs = qs$. 于是原命题的最简等价式为 $q \wedge s$.

习题 1.7. 证明下列蕴含式.

- $p \wedge q \Longrightarrow (p \to q)$.

  证明. 只需证明 $p \wedge q \to (p \to q)$ 是永真式即可. 它所对应的布尔表达式为 $\overline{pq} + (\bar{p} + \bar{q})$.

  $$\overline{pq} + (\bar{p} + \bar{q}) = \bar{p} + \bar{q} + \bar{p} + q = \bar{p} + \bar{q} + q = \bar{p} + 1 = 1.$$

  于是上述蕴含式得证. □

- $p \Longrightarrow (q \to p)$.

  证明. $\neg p + (\bar{q} + p) = \bar{p} + \bar{q} + p = \bar{q} + 1 = 1.$ □

- $(p \to (q \to r)) \Longrightarrow (p \to q) \to (p \to r)$.

p	q	r	$p \to (q \to r)$	$(p \to q) \to (p \to r)$	$(p \to (q \to r)) \to (p \to q) \to (p \to r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

1.3 第二周

例 1.3.1. 求下列各式的主析取范式和主合取范式.

- $(\neg p \vee \neg q) \to (p \leftrightarrow \neg q)$.

  解. 原命题对应的布尔表达式为 $\overline{\bar{p}\bar{q}} + (p\bar{q} + \bar{p}q)$. 根据 De Morgan 定律, 我们有

  $$p + q + p\bar{q} + \bar{p}q$$

  补充变元,

  $$p(q + \bar{q}) + (p + \bar{p})q + p\bar{q} + \bar{p}q = p\bar{q} + \bar{p}q + pq$$

  于是主析取范式为 $m_1 \vee m_2 \vee m_3$, 主合取范式为 M_0.

- $p \vee (\neg p \to (q \vee (\neg q \to r)))$.

  解. 原命题对应的布尔表达式为 $p + p + (q + q + r)$. 所以

  $$p(q+\bar{q})(r+\bar{r}) + (p+\bar{p})q(r+\bar{r}) + (p+\bar{p})(q+\bar{q})r = pqr + pq\bar{r} + p\bar{q}r + p\bar{q}\bar{r} + \bar{p}qr + \bar{p}q\bar{r} + \bar{p}\bar{q}r.$$

  因此主析取范式为 $m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$. 主合取范式为 M_0.

例 1.3.2. 证明下列论证的有效性.

- $(A \to B) \wedge (A \to C), \neg(B \wedge C), D \vee A \vdash D$.

  1° 后续几例都是按照同样的推理规则来推理论证的, 因此我们仅在本例中较为详细地叙述整个推理的过程. 由前提条件得, $\neg(B \wedge C)$

  2° 同时, $(A \to B) \wedge (A \to C)$

  3° $\neg A$, 这是因为 B 与 C 都为假, 但要保证 $(A \to B)$ 和 $(A \to C)$ 为真, 所以 A 为假. 事实上, 在 $p \to q$ 的真值表中, 能保证 $p \to q$ 为真且 q 为假的只有 $p = 0, q = 0, p \to q = 1$ 这一行.

  4° 同时我们又有 $D \vee A$

  5° D, 这是因为先前已经论证过 A 为假了, 这时要保证 $D \vee A$ 为真就必须要有 D 为真.

- $p \to q, (\neg q \vee r) \wedge \neg r, \neg(\neg p \wedge s) \vdash \neg s$.

  1° $\neg(\neg p \wedge s)$

  2° $p \vee \neg s$

  3° $(\neg q \vee r) \wedge \neg r$,

  4° $(q \to r) \wedge \neg r$,

  5° $\neg q$

  6° $p \to q$

  7° $\neg p$

  8° $\neg s$

- $p \wedge q \to r, \neg r \vee s, \neg s \vdash \neg p \vee \neg q$.

  1° $\neg r \vee s$

  2° $r \to s$

  3° $\neg s$

  4° $\neg r$

  5° $\neg(p \wedge q)$

  6° $(\neg p) \vee (\neg q)$

专题2　谓词逻辑

引言：有关“全总个体域”概念严格性与合理性的问题

1. 课程相关参考文献中有关“全总个体域”概念的表述

在徐洁磐老师编著的《离散数学导论 (第 5 版)》[1] 中提到的“全总个体域”概念是并没有严格定义的，其中的有关表述为：个体的变化是有一定范围的，个体的一定变化范围叫做个体域，个体域可由若干个个体常量组成，个体域中常量数可以有限，也可以无限，而所有个体常量聚集在一起所构成的个体域叫做全总个体域．这一表述并没有给出明确的、严格的“全总个体域”的定义，事实上，要严格地定义这一概念是不可能的，因为这会导致集合包含自身，即集合的无限递归问题．例如说，如果存在这样的一个全总个体域，那么这一个“全总个体域”作为一个个体 (元素) 本身也属于该个体域，即全总个体域中有一个元素是它自身，这就导致了无限的递归链．换言之，“全总个体域”的概念不仅是不严格的，也是不合理的．

在《离散数学及其应用》[3] 中并没有有关“全总个体域”的表述．

2. 通用的数学教材中的有关表述　笔者的主张

笔者主张按照 V.A.Zorich 著《数学分析：第 7 版 (第一卷)》[4] 中有关谓词的相关表述来使用谓词逻辑，即不采用“全体论述域”的概念，而是对每一个谓词逻辑命题指定特定的论述域，例如，当指定论述域为实数域 $\mathbb{R}$ 的时候，任意实数的平方都是非负的可以记作

$$\forall x\left(x^2 \geqslant 0\right),$$

简记作

$$\forall x \in \mathbb{R}\left(x^2 \geqslant 0\right).$$

对于确实不便指定论述域的命题，例如所有演员都佩服某些老师，可以按照既有的符号化的方法规定 $L(x)$ 表示 x 是演员、$J(x)$ 表示 x 是老师、$A(x,y)$ 表示 x 佩服 y，然后将其表示为

$$\forall x\left(L(x) \rightarrow \exists y\left(J(y) \wedge A(x,y).\right)\right),$$

但不应在表述中采用“全总个体域”的概念．或者定义所有人组成的集合为 A[1]，并确定论域为集合 A，将其表示为

$$\forall x \in A\left(L(x) \rightarrow \exists y\left(J(y) \wedge A(x,y).\right)\right).$$

更进一步地，可以在所有人组成的集合 A 的基础上根据分离公理确定出全体演员的集合 $P := \{x \in A | J(x)\}$ 和全体老师组成的集合 $Q := \{x \in A | L(x)\}$，其中符号 $:=$ 表示定义，冒号位于被定义的符号一侧．然后将

[1]全球所有人类的总数是有限的，而且一个事物是否是人具有明确的标准，并且人与人之间并没有任何的序关系，而且没有两个完全相同的人．因此，全体人类组成的集合满足集合中元素的确定性、互异性、无序性，是合理的．

该命题表述为

$$\forall x \in P \exists y \in Q\,(A(x,y))\,,$$

即对于演员集合 P 中任意给定的演员 x, 存在教师集合 Q 中的教师 y 使得 x 崇拜 y.

2.1　第一讲 (2024.3.14)

习题 2.1. 谓词公式 $\forall x\,(P(x) \wedge \exists y\,(R(y))) \to Q(x)$ 中, 量词 $\forall x$ 的辖域是 ____________.

A. $\forall\,(P(x) \vee \exists y\,(R(y)))$　　　　B. $P(x)$

C. $P(x) \vee \exists y R(y)$　　　　D. $Q(x)$

解. 本题选 C.

习题 2.2. 若个体域为整数集, 下列公式中真值为 T 的有哪几个?

- $\forall x \exists y(x+y=0)$. 这是真命题, 因为这是整数环的基本代数性质之一, 即*任意元素都存在加法负元*(其中加法零元的负元是它自身).
- $\exists y \forall x\,(x+y=0)$. 这是一个假命题, 这是因为, 它的否定是 $\forall y \exists x\,(x+y \neq 0)$, 而它的否定是显然为真的, 这是因为我们只需要取 $x=y+1$, 就有 $x+y=y+1+y=2y+1$, 而代数方程 $2y+1$ 在整数环内是无解的.
- $\forall x \forall y\,(x+y=0)$. 这是一个假命题, 只需要取 $x=y=1$, 此时 $x+y=1+1=2 \neq 0$.
- $\exists x \exists y\,(x+y=0)$. 这时一个真命题, 只需要取 $x=1, y=-1$, 则 $x+y=1+(-1)=0$.

习题 2.3. 设 $L(x)$ 表示 x 是演员, $J(x)$ 表示 x 是老师, $A(x,y)$ 表示 x 佩服 y. 那么命题*所有演员都佩服某些老师* 可以被符号化为

$$\forall x\,(L(x) \to \exists y\,(J(y) \wedge A(x,y).))$$

习题 2.4. 在命题公式 $\forall x\,(P(x) \to Q(x,y)) \vee \exists x\,(R(y,x) \to S(x))$ 中, 自由变元是 y, 约束变元是 x.

习题 2.5. 设个体域 $D=\{a,b\}$, 消去公式中的量词, 则 $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x) \iff P(x) \wedge (Q(x) \vee \neg Q(x))$.

习题 2.6. 将下列命题符号化

- *某些实数是有理数*. 我们取论述域为实数域 $\mathbb{R}$, 那么该命题的符号化表示为 $\exists x \in \mathbb{R}\,(x \in \mathbb{Q})$.
- *所有的人都呼吸*. 这个问题不便于指定论述域, 我们先采取徐洁磐版教材既定的全总个体域的概念将该命题符号化, 再按照通用的数学教材中的谓词逻辑规则给出严格的表述. 设 $P(x)$ 表示 x 是人, $Q(x)$ 表示 x 会呼吸, 因此所有人都呼吸可以被符号化为

  $$\forall x\,(P(x) \to Q(x))\,.$$

  但正如本章引言中所述, 这种叙述方式是不严谨的, 不应该采用“全总个体域”的概念, 因此我们将该命题重新表述为

  $$\forall x \in A\,(Q(x))\,.$$

  这里沿用了本章引言中集合 A 表示全体人类的定义.

- 每个母亲都爱自己的孩子. 设 $P(x,y)$ 表示 x 是 y 的母亲, $Q(x,y)$ 表示 x 爱 y. 那么采用"全总个体域"概念时, 该命题可以被符号化为

$$\forall x \forall y\,(P(x,y) \to Q(x,y).)\,.$$

  或者可以重新表述为

$$\forall x, y \in A\,(P(x,y) \to Q(x,y))\,.$$

  此处的 $\forall x, y \in A$ 是 $\forall x \in A \forall y \in A$ 的缩写.

习题 2.7. 设个体域 $D = \{3,5,6\}$, 谓词 $F(x)$ 表示 x 是素数, 求 $\forall x\,(F(x))$ 的真值.

解. 显然 $\forall x\,(F(x)) = \mathrm{F}$, 这是因为

$$\exists 6 \in D \exists 2, 3 \in \mathbb{Z}\,(6 = 2 \times 3)\,,$$

即D 中存在这样的数 (如 6) 使得它拥有除了 1 和它自身以外的整数因子 (如 2 和 3), 即 6 不是素数.

习题 2.8. 将下列断言译为逻辑符号, 选用的谓词应使逻辑符号中至少含有一个量词.

- 有且仅有一个偶数素数. $\exists ! 2 \in \mathbb{Z}\,(\gcd(2,1) = 1)$.
- 没有一个奇数是偶数. $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}\,(n \equiv 1 \pmod 2)$. 其中 $2\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{Z} | n \equiv 0 \pmod 2\}$ 表示偶数集, 符号 $\setminus$ 表示差集运算.
- 每一火车都比某些卡车快. 设 T 表示火车的集合, S 表示所有卡车组成的集合, 这两个集合的构造都是合理的. $P(x,y)$ 表示 x 的速度比 y 快. 则原命题可以符号化为 $\forall x \in T \exists y \in S\,(P(x,y))$.
- 某些卡车慢于所有火车, 但至少有一火车, 快于每一卡车. 我们沿用先前的有关定义:

$$(\exists b \in S \forall a \in T (P(a,b))) \wedge (\exists c \in T \forall d \in S\,(P(c,d)))\,.$$

- 如果明天下雨, 那么某些人将淋湿. 设 R 为所有的日子组成的集合, 尽管时间是有序的, 但是我们依然可以把这无穷可列多天无序地罗列出来, 而且可以在整数集 $\mathbb{Z}$ 与 R 之间建立一个双射 (最简单的构造方式是令今天对应于整数 0, 明天对应于 1, 此后每过一天, 就取这一天对应的整数的下一个整数, 同理, 昨天为 -1, 每往前推一天, 这个整数就减 1), 因此这一定义是合理的. 设 $P(x)$ 表示 x 被淋湿, $Q(x)$ 表示 x 这一天下雨. 那么该命题可以符号化为

$$\forall d \in R\,(\forall d \in R\,(Q(d) \to \exists a \in A\,(P(a))))\,.$$

- 所有步行的、骑马的或乘车的人, 凡是口渴的, 都喝泉水. 设 $P(x), Q(x), R(x), U(x), V(x)$ 分别表示 x 步行、骑马、乘车、口渴、喝泉水. 则原命题可以符号化为

$$\forall x \in A\,(((P(x) \vee Q(x) \vee R(x)) \wedge U(x)) \to V(x))$$

习题 2.9. 试译出a 是 b 的外祖父, 只允许用以下谓词: $P(x)$ 表示 x 是人, $F(x,y)$ 和 $M(x,y)$ 分别表示 x 是 y 的父亲/母亲.

解. $\exists a, b, c\,(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge F(a,c) \wedge M(c,b))$.

2.2 谓词重言式 (2024.03.19)

习题 2.10. 证明下列关系式:

(1) $\forall x \forall y\,(p(x) \vee q(x)) \iff \forall x p(x) \vee \forall y q(y)$.

证明. $\square$

(2) $\exists x \exists y\,(p(x) \wedge q(y)) \Longrightarrow \exists x p(x)$.

(3) $\forall x \forall y\,(p(x) \wedge q(y)) \iff \forall x p(x) \wedge \forall y q(y)$,

(4) $\exists x \exists y\,(p(x) \to p(y)) \iff \forall x p(x) \to \exists y p(y)$.

(5) $\forall x \forall y\,(p(x) \to q(y)) \iff (\exists x p(x) \to \forall y q(y))$.

专题 3　集合

由于集合的交集、并集分别可以表示为 AB, $A+B$, 而集合 A 在 Ω 中的补集可以记作 $\bar{A}$, 因此我们在解决下述的问题时会使用这些记号代替 $\cap, \cup, \sim$. 此外, 为了避免与集合的对称差产生记号冲突, 我们用 $A \oplus B$ 来表示集合的对称差, 即 $A \oplus B = A\bar{B} + \bar{A}B$.

此外, 方便起见, 我们给出关于差集运算的一条重要的性质:

$$A \setminus B = A - B = A - AB,$$

当 $A, B \subset \Omega$ 时,

$$A - B = A\bar{B}.$$

证明. 这是显然成立的, 因为

$$\forall x \left(x \in A\bar{B} \equiv x \in A \wedge x \notin B \equiv x \in A - B \right).$$

□

习题 3.1. 设 $S_1 = \varnothing$, $S_2 = \{\varnothing\}$, $S_3 = \mathcal{P}(\{\varnothing\})$, $S_4 = \mathcal{P}(\varnothing)$. 以下命题为假的是 ____________.

A. $S_2 \in S_4$　　　　B. $S_1 \subset S_3$

C. $S_4 \subset S_2$　　　　D. $S_4 \in S_3$

评注. 根据幂集的定义, $S_3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $S_4 = \{\varnothing\}$. 这是因为空集只有一个子集, 即它自身, 而单元素集合 $\{\varnothing\}$ 的子集有空集和它自身.

A 选项, $\{\varnothing\} \in \{\varnothing\}$, 这是不正确的, 通常而言我们讨论的集合不会包括其自身, 因此本题选 A.

B 选项, $\varnothing \subset \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, 这是成立的, 因为空集是任何集合的 (平凡的) 子集.

C 选项, $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing\}$, 这是成立的, 因为任何集合都是它自身的一个 (平凡的) 子集.

D 选项, $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, 这是显然成立的.

习题 3.2. 已知集合 A, B 的对称差 $A \oplus B := (A - B) \cup (B - A)$. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{2, 3\}$, 则 $(A \cup B) \oplus C =$____________.

评注. 显然 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 于是 $(A \cup B) - C = \{1, 4, 5\}$, $C - (A \cup B) = \varnothing$, 所以 $\{1, 4, 5\}$ 即为所求.

习题 3.3. 设集合 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$, 那么 $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) =$ ____________, $\mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A) =$ ____________.

评注. 我们把 A, B 的子集对应到一个比特串, 我们约定在一个比特串的每一位分别对应元素 a, b, c 是否出现, 例如, 010 对应 A 的一个子集 $\{b\}$, 这是因为在这个子集中 b 出现而 a, c 不出现. 类似的, 比特串 10 对应 B 的一个子集 $\{a\}$, 但是为了后续方便运算, 我们人为的在集合 B 的每一个子集的比特串后面都附加一个 0. 所以 A 的子集所对应的比特串为

$$000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111,$$

B 的子集所对应的比特串为

$$000, 010, 100, 110,$$

为了计算 $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$, 我们从上述的第一组比特串中剔除掉第二组比特串, 得到

$$001, 011, 101, 111,$$

所以

$$\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \{\{c\}, \{c, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

同理, 从第二组比特串中剔除掉第一组比特串, 得到

$$\mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A) = \varnothing.$$

习题 3.4. 设 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d, e\}$, 则 $A - B =$__________, $A \oplus B =$__________.

评注. 令 $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$, 则 $A, B \in \Omega$. 并且 A, B 可以用比特串表示为

$$11100, 01011,$$

于是 $A - B = A\bar{B}$, 而 $\bar{B}$ 所对应的比特串就是 01011 的按位取反, 而 $A\bar{B}$ 就是它们所对应的比特串的按位与, 于是

$$A\bar{B} = 11100 \,\&\, 10100 = 10100 = \{a, c\}.$$

同理,

$$A \oplus B = A\bar{B} + B\bar{A} = 10100 \mid (01011 \,\&\, 00011) = 10100 \mid 00011 = 10111 = \{a, c, d, e\}.$$

习题 3.5. 化简 $\left(A + B\bar{C}\right) A + (B - (B - A))$.

解. 由于 $B - A = B\bar{A}$, 于是

$$\begin{aligned}
&\left(A + B\bar{C}\right) A + (B - (B - A)) = \left(A + B\bar{C}\right) A + (B - B\bar{A}) \\
&= \left(A + B\bar{C}\right) A + (B\overline{B\bar{A}}) = \left(A + B\bar{C}\right) A + B(\bar{B} + A) \\
&= AA + AB\bar{C} + B\bar{B} + AB = A + AB\left(\bar{C} + \Omega\right) = A + AB = A.
\end{aligned}$$

习题 3.6. 证明 $A - (B - C) = (A - B) + AC$.

证明. $A - (B - C) = A\overline{B - C} = A\overline{B\bar{C}} = A\left(\bar{B} + C\right)$, 而 $(A - B) + AC = A\bar{B} + AC = A\left(\bar{B} + C\right)$. □

习题 3.7. 设 A, B, C 是集合, 如果 $A \in B$ 且 $B \in C$, 那么 $A \in C$ 可能吗? $A \in C$ 恒为真吗?

评注. 考虑自然数集的 von Neumann 方案, 即

$$0 := \varnothing,$$

$$1 := \varnothing \cup \{\varnothing\},$$

$$2 := \varnothing \cup \{\varnothing\} \cup \{\varnothing \cup \{\varnothing\}\},$$

此后每一个自然数的后继, 都等于它自身与以它自身为元素的单元素集合的并集, 即 $n+1 := n \cup \{n\}$. 显然, 从这一角度出发, $0 \in 1$ 且 $1 \in 2$, 并且有 $0 \in 2$. 因此这是有可能成真的. 但这并不恒为真, 考虑实数轴上 0 的右邻域 $B_\delta := (0, \delta)$, 其中 $\delta > 0$, 若干的 $(0, \delta)$ 组成的集合记作 $\mathcal{B}_0$, 满足如下两个条件:

B_1) $\forall B \in \mathcal{B}\,(B \neq \varnothing)$,

B_2) $\forall B_1, B_1 \in \mathcal{B} \exists B \in \mathcal{B}\,(B \subset B_1 \cap B_2)$.

称为一个拓扑基或者**滤子基** (filter base). 把若干个实数 x 的滤子基 $\mathcal{B}_x$ 共同构成一个滤子基族, 那么这个时候一个具体的开区间就并不属于这个滤子基族了, 毕竟滤子基族中的元素是滤子基, 而不是滤子基中的一个具体的开区间.

习题 3.8. 指出下列各组集合中的集合有何不同, 列出每一集合的元素及其全部子集.

- $\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}$. 前者是一个单元素集合, 其元素为 $\varnothing$. 后者也是一个单元素集合, 但它的元素是单元素集合 $\{\varnothing\}$.

$$\mathcal{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},$$

$$\mathcal{P}(\{\{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}.$$

- $\{a, b, c\}, \{a, \{b, c\}\}$, $\{\{a, \{b, c\}\}\}$. 注意到第一个集合是三元素集合, 其元素为 a, b, c, 而第二个集合是双元素集合, 其中一个元素是 a, 另一个元素是集合 $\{b, c\}$, 第三个集合是一个单元素集合, 元素为集合 $\{a, \{b, c\}\}$.

  第一个集合的所有子集分别为 $\varnothing$, 单元素集合 $\{a\}, \{b\}, \{c\}$, 双元素集合 $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ 和三元素集合 $\{a, b, c\}$.

  第二个集合的子集分别为 $\varnothing$, 单元素集合 $\{a\}$, $\{\{b, c\}\}$ 和双元素集合 $\{a, \{b, c\}\}$.

  第三个集合是单元素集合, 所以它的子集分别为空集 $\varnothing$ 和它自己.

习题 3.9. $A \subset B$ 且 $A \in B$, 这可能吗? 证明你的断言.

评注. 再考虑自然数的 von Neumann 方案, $\varnothing \subset \varnothing^+$, 同时 $\varnothing \in \varnothing^+$. 其中 $\varnothing^+ = \varnothing \cup \{\varnothing\}$ 为 $\varnothing$ 的后继集.

习题 3.10. 确定下列各命题的真和假.

- $\varnothing \subset \varnothing$. 这是真命题, 因为空集是任何集合的子集.

  证明. 设 X 是一个集合, 那么我们能够分离出它的空子集 $\varnothing_X = \{x \in X | x \neq x\}$ 来. 设 Y 是另一个任意给定的集, 有 $\varnothing_Y = \{y \in Y | y \neq y\}$, 根据外延公理, $\varnothing_X = \varnothing_Y$. 由于我们的 X, Y 都是任意给定的集合, 这就是说, 空集是唯一的, 我们用 $\varnothing$ 来表示空集, 并且, 由于 X 的任意性, 任何集合都有空子集. □

- $\varnothing \in \varnothing$. 这是一个假命题, 因为我们知道空集当中不含任何的元素.

  证明. 如果 $\varnothing \in \varnothing$ 成立, 那么我们就会得到这样的一个集合关系式:

  $$\cdots \in \varnothing \in \varnothing \in \varnothing \in \cdots$$

  这显然是矛盾的. □

- $\varnothing \subset \{\varnothing\}$. 这是一个真命题, 空集是任何集合的子集.
- $\varnothing \in \{\varnothing\}$. 这是一个真命题, 因为 $\{\varnothing\}$ 就是以 $\varnothing$ 作为元素的单元素集合.
- $\{a, b\} \subset \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$. 这是一个真命题.
- $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$. 这是一个假命题, 因为 $\{a, b\}$ 并不作为元素出现在该集合中.
- $\{a, b, \{\{a, b\}\}\}$, 这是一个真命题.
- $\{a, b\} \in \{a, b, \{\{a, b\}\}\}$. 这是一个假命题, 因为 $\{a, b\}$ 并不作为元素出现在该集合中.

专题4　关系

习题 4.1. 设 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2\}$, 则

$$A\times B=\{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}\,,$$

$$A\times A=((0,0),(0,1),(1,0),(1,1))\,,$$

$$A^2\times B=\begin{Bmatrix}((0,0),1), & ((0,0),2),\\ ((0,1),1), & ((0,1),2),\\ ((1,0),1), & ((1,0),2),\\ ((1,1),1), & ((1,1),2)\end{Bmatrix},$$

$$B\times A=\{(1,0),(1,2),(2,0),(2,1)\}\,,$$

$$(A\times B)^2=\begin{Bmatrix}((0,1),(0,1)), & ((0,1),(0,2)), & ((0,1),(1,1)), & ((0,1),(1,2)),\\ ((0,2),(0,1)), & ((0,2),(0,2)), & ((0,2),(1,1)), & ((0,2),(1,2)),\\ ((1,1),(0,1)), & ((1,1),(0,2)), & ((1,1),(1,1)), & ((1,1),(1,2)),\\ ((1,2),(0,1)), & ((1,2),(0,2)), & ((1,2),(1,1)), & ((1,2),(1,2))\end{Bmatrix}$$

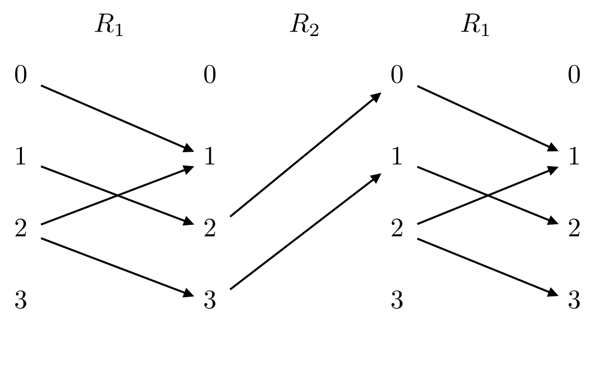
习题 4.2. 设 $X=\{0,1,2,3\}$, X 上有如下两个关系:

$$R_1=\{(i,j)|j=i+1\vee j=i/2\}\,,$$

$$R_2=\{(i,j)|i=j+2\}\,,$$

求复合关系 $R_1\circ R_2$, $R_2\circ R_1$, $R_1\circ R_2\circ R_1$.

解. 由下图可知,



$$R_1\circ R_2=\{(1,0),(2,1)\}\,.$$

$$R_2\circ R_1=\{(2,1),(3,2)\}\,,$$

$$R_1\circ R_2\circ R_3=\{(1,1),(2,2)\}\,.$$

习题 4.3. 设有 X 上的关系 R_1, R_2, R_3, 证明:

1° 如果 $R_1 \subset R_2$, 则 $R_1 \circ R_3 \subset R_2 \circ R_3$.

2° 如果 $R_1 \subset R_2$, 则 $R_2 \circ R_1 \subset R_3 \circ R_2$.

证明. 根据子集的定义, $R_1 \subset R_2 \equiv \forall (x, y) \in R_1 \left((x, y) \in R_2\right)$. 则

$$R_1 \circ R_3 := \left\{(x, z) \in X^2 | \exists y \in X \left(x R_1 y \wedge y R_3 z\right)\right\},$$

由于 $x R_1 y$ 必有 $x R_2 y$, 因此

$$\forall (x, z) \in R_1 \circ R_3 \left(x R_2 y \wedge y R_3 z\right),$$

即 $\forall (x, z) \left((x, z) \in R_1 \circ R_3 \Rightarrow (x, z) \in R_2 \circ R_3\right)$. 同理,

$$\forall x, y, z \left(z R_3 x \wedge x R_1 y \Rightarrow z R_3 x \wedge x R_2 y\right),$$

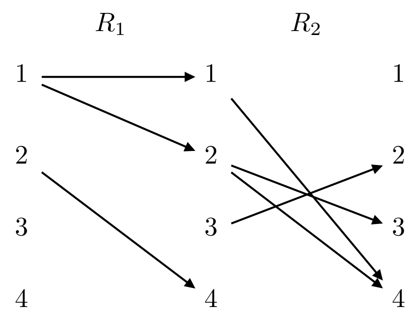
于是 $\forall (z, x) \left((z, x) \in R_3 \circ R_1 \Rightarrow (z, x) \in R_3 \circ R_2\right)$. □

习题 4.4. 设 $A = \{1, 2\}$, 求 $A \times \mathcal{P}(A)$.

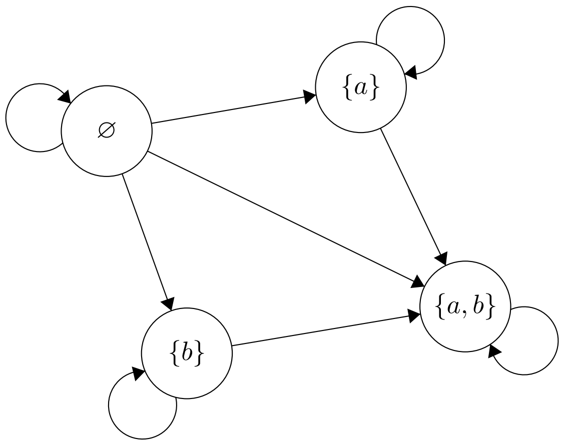
解. 容易得到 $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, 因此

$$A \times \mathcal{P}(A) = \begin{Bmatrix} (1, \varnothing), & (1, \{1\}), & (1, \{2\}), & (1, \{1, 2\}) \\ (2, \varnothing), & (2, \{1\}), & (2, \{2\}), & (2, \{1, 2\}) \end{Bmatrix}.$$

例 4.0.1. 设 R_1, R_2 是集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 上的二元关系, 其中 $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 4)\}$, $R_2 = \{(1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 2)\}$, 则 $R_1 \circ R_2 = \{(1, 4), (1, 3), (2, 2)\}$.



习题 4.5. 设集合 $A = \{a, b\}$, R 是 $\mathcal{P}(A)$ 上的包含关系, 由于 $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, 那么 $R = \subset$.



习题 4.6. 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$, A 上的二元关系

$$R_1=\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,4),(3,3),(4,4)\}\,,$$

$$R_2=\{(1,2),(1,3),(2,3),(4,4)\}\,,$$

$$R_3=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}\,,$$

则

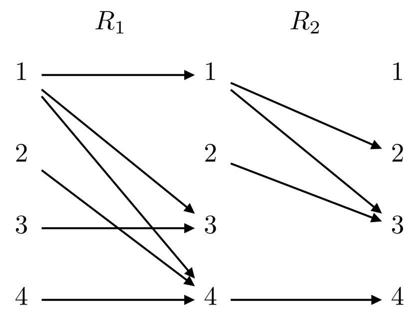
$$R_1\cap R_2=\{(1,3),(4,4)\}\,,$$

$$R_2\cup R_3=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(4,4)\}\,.$$

$$\sim R_1=A^2-R_1=\{(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}\,.$$

$$R_1-R_3=\{(1,3),(1,4),(2,4)\}\,,$$

$$R_1\circ R_2=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(4,4)\}\,.$$



习题 4.7. 设 X 上的关系 R 满足对称性和传递性, 问 R 是否一定满足反身性, 并说明理由.

评注. 由于 R 具有对称性, 因此如果 aRb 则一定有 bRa, 同时由于它具有传递性, 因此有 aRa. 看起来这似乎是成立的, 但我们可以构造这样的一个关系 R 来说明这其实并不成立, 它满足以下两个条件:

1° 不存在任何的元素 $b\in X$ 使得 aRb, 即在关系 R 的表示图中 a 是一个孤立点,

2° $(a,a)\notin R$.

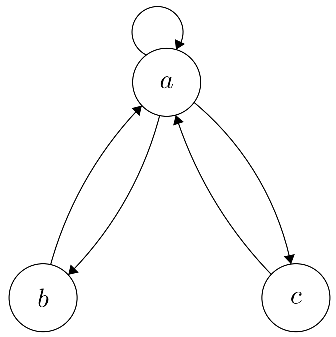
那么此时关系 R 就不具有自反性.

习题 4.8. 设 X 上的关系 R,S 是自反的, 试证明 $R\circ S$, $R\cap S$ 也是自反的.

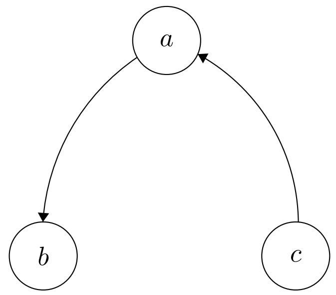
证明. 由于 R,S 自反, 所以 $\forall x\in X(xRx\wedge xSx)$, 那么 $(x,x)\in R\circ S$, 事实上, 只需取 $y=x$ 即有 xRy 且 ySx. 类似地, 由于 R,S 是自反的, 所以所有形如 (x,x) 的元组 (即两个分量相同的元组) 都在 R,S 中, 所以它们将全部出现在 $R\cap S$ 中. □

习题 4.9. 设集合 $A=\{a,b,c\}$, A 上的二元关系 $R=\{(a,a),(b,b)\}$ 不具备反身性. 这是因为 $\exists c\in A\,((c,c)\notin R)$, 因此它显然也不是等价关系. 同时, 由于同时不存在 $(x,y),(y,x)$ 这样的元组对, 因此它是反对称的.

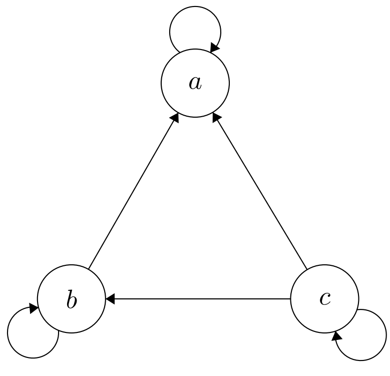
习题 4.10. 判断下列图中关系的性质.



该关系满足对称性, 但不满足传递性和自反性, 这是因为 $(c,a),(a,b) \in R$, 但 $(c,b) \notin R$. 它也不是反自反和和反对称的.



该关系不满足反身性、对称性和传递性. 但它是反自反和反对称的, 因为没有任何一个节点成环, 也没有成对的有向边, 能形成链条的有向边也并没有形成闭合的三角形. 但它是反对称的和反自反的, 因为没有形如 (x,x) 的元组, 也没有一对元组同时满足 $(x,y),(y,x) \in R$.



该关系是自反的, 同时不是反自反的, 因为每一个节点都成环, 同时是传递的, 因为 cRb, bRa 的同时也有 cRa. 但它不是对称的, 同时它是反对称的, 这是因为没有成对的有向边.

习题 4.11. 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$, 判定下列关系哪些是自反的、对称的、反对称的、传递的.

关系	自反性	对称性	反对称性	传递性
$R_1 = \{(a,a),(b,a)\}$	**F**	**F**	**T**	**T**
$R_2 = \{(c,d)\}$	**F**	**F**	**T**	**T**
$R_3 = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$	**T**	**T**	**T**	**T**

习题 4.12. 设 $X = \{a,b,c\}$ 上的关系

$$R_1 = \{(a,b),(a,c),(c,b)\},$$

$$R_2 = \{(a,b),(b,c),(c,c)\},$$

$$R_3 = \{(a,b),(b,a),(c,c)\},$$

$$R_4 = \{(a,b),(b,c),(c,a)\},$$

求它们的传递闭包.

解. 给定 X 中元素的一个排列 abc, 那么 R_1, R_2, R_3, R_4 关系的表示矩阵分别为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

我们使用 Warshall 算法来求它们的传递闭包, Warshall 算法的计算方式为, 对于关系矩阵中的每一列, 如果第 j 列、第 i 行处的元素 $a_{ij} = 1$, 就把第 j 行加到第 i 行, 即

```
procedure Warshall(M: Matrix) // M 为关系 R 的矩阵
for k = 1 ... n
    for i = 1 ... n
        // 如果 (i,j) 元为 1, 则将第 j 行加到第 i 行
        if (M[i,j] == 1) { M[i,:] += M[j,:] }
```

于是它们的传递闭包对应的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

习题 4.13. 设有 X 上的关系 R_1, R_2, 证明

1° $r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$.

2° $s(R_1 \cup R_2) = s(R_1) \cup s(R_2)$.

3° $t(R_1 \cup R_2) \supset t(R_1) \cup t(R_2)$.

证明. 由于关系 R 的自反闭包 $r(R)$ 是 $R \cup \Delta$, 其中 $\Delta = \{(a,a) | a \in X\}$ 称为 A 上的对角关系. 那么

$$r(R_1 \cup R_2) = R_1 \cup R_2 \cup \Delta,$$

$$r(R_1) \cup r(R_2) = (R_1 \cup \Delta) \cup (R_2 \cup \Delta) = R_1 \cup R_2 \cup \Delta,$$

因此 1° 成立. 关系 R 的对称闭包 $s(R)$ 是 $R\cup R^{-1}$, 其中 $R^{-1}=\{(b,a)|(a,b)\in R\}$ 称为 R 的逆, 因此

$$s(R_1+R_2)=(R_1+R_2)+(R_1+R_2)^{-1}=R_1+R_2+R_1^{-1}+R_2^{-1},$$

$$s(R_1)+s(R_2)=R_1+R_1^{-1}+R_2+R_2^{-1}.$$

因此 2° 成立. 由于关系 R 的传递闭包就是 R 的连通性关系 R^*, 因此

$$t(R_1\cup R_2)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(R_1\cup R_2)^{(n)},$$

集合 $(R_1\cup R_2)^{(n)}$ 是这样的元组 (a,b) 的集合: 在 $R_1\cup R_2$ 中至少有一条路径长度为 n 的从 a 到 b 的路径. 而 $\forall n\in\mathbb{N}^+\left(R_1^{(n)}\cup R_2^{(n)}\subset(R_1\cup R_2)^{(n)}\right)$, 因此 3° 成立. □

习题 4.14. 设 R_1, R_2 是集合 $A=\{a,b,c,d\}$ 上的关系, 其中

$$R_1=\{(b,b),(b,c),(c,a)\},$$

$$R_2=\{(b,a),(c,d),(c,a),(d,c)\}.$$

则 $R_1R_2=\{(b,a),(b,d)\}$, $R_2R_1=\{(d,a)\}$, $R_1^2=\{(b,b),(b,a)\}$, $E_2^3=\{(c,a),(c,d),(d,c)\}$.

习题 4.15. 设 R_1 是从 A 到 B 的关系, R_2, R_3 是从 B 到 C 的关系, 证明 $R_1(R_2\cup R_3)=R_1R_2\cup R_1R_3$.

证明. 考虑元组 $(a,c)\in R_1(R_2\cup R_3)$. 其中 $a\in A$ 且 $c\in C$ 且存在 $b\in B$ 使得

$$(b,c)\in R_2\cup R_3.$$

这就是说, $(a,c)\in R_2\vee(a,c)\in R_2$, 所以 $R_1(R_2\cup R_3)\subset R_1R_2\cup R_1R_3$. 反之同理. □

习题 4.16. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $R=\{(1,2),(3,4),(2,2)\}$, $S=\{(4,2),(2,5),(3,1),(1,3)\}$, 试求出 $\boldsymbol{M}_{RS}$.

解. 两个关系的合成的表示矩阵是它们矩阵的布尔积, 因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{RS}&=\boldsymbol{M}_R\odot\boldsymbol{M}_S\\&=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

习题 4.17. 设 $A=\{1,2,3,4\}$,

$$\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{M}_{R^n}$, $n\in\mathbb{N}$.

解.

$$\boldsymbol{M}_{R^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_{R^3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{M}_{R^4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

因此, 我们知道

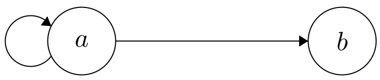
$$\boldsymbol{M}_{R^n} = \begin{cases} \boldsymbol{M}_R, & \text{if}\, n \equiv 0 \pmod 4, \\ \boldsymbol{M}_{R^1}, & \text{if}\, n \equiv 1 \pmod 4, \\ \boldsymbol{M}_{R^2}, & \text{if}\, n \equiv 2 \pmod 4, \\ \boldsymbol{M}_{R^3}, & \text{if}\, n \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

习题 4.18. 找出下列图中关系的自反、对称和传递闭包.

这个关系的矩阵及其自反闭包、对称闭包、传递闭包的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

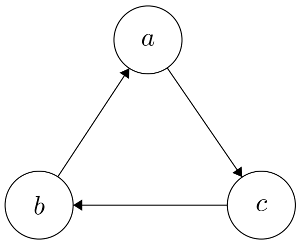
因此它的自反闭包为 Δ, 对称闭包和传递闭包为它本身.



这个关系的矩阵及其自反闭包、对称闭包、传递闭包的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此它的自反闭包为 $\{(a,a),(a,b),(b,b)\}$, 对称闭包为 $\{(a,a),(a,b),(b,a)\}$, 传递闭包为它本身.



这个关系的矩阵及其自反闭包、对称闭包、传递闭包的矩阵为

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

因此它的自反闭包为 $\{(a,a),(a,c),(c,c),(c,b),(c,c)\}$, 对称闭包为 $\{(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)\}$, 传递闭包为 $\{a,b,c\}^2$.

习题 4.19. 设 R 是 $A=\{1,2,3,4\}$ 上的二元关系, 其关系矩阵是

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&1&1\\1&0&1&0\\1&0&1&0\end{bmatrix},$$

则它的自反闭包、对称闭包的矩阵分别为

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&0&1&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&0\end{bmatrix},$$

传递闭包的矩阵 (根据 Warshall 算法) 为

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&0&1&1\\1&0&1&0\\1&0&1&0\end{bmatrix},$$

利用 Warshall 算法, 可以避免反复的计算关系的幂的矩阵, 进而大大提高运算效率. 一般地, 对于 n 阶的关系, 计算这些乘积需要 $n^2(2n-1)(n-1)$ 次比特运算, 复杂度为 $O(n^4)$, 但 Warshall 算法总的比特运算次数是 $2n^3$, 复杂度为 $O(n^3)$.

参考文献

[1] 徐洁磐. 离散数学导论: 第 5 版 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.

[2] 朱怀宏, 徐洁磐. 离散数学导论 (第 5 版) 学习指导与习题解析 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2017.

[3] [美] Kenneth H. Rosen. 离散数学及其应用: 原书第 8 版 (Discrete Mathematics and Its Applications, Eighth Edition)[M]. 徐六通, 杨娟, 吴斌译. 北京: 机械工业出版社, 2019.

[4] [俄罗斯] B.A.Zorich. 数学分析: 第 7 版. 第一卷 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.

I ♥ NPU

公诚勇毅　永矢毋忘
中华灿烂　工大无疆

2023 年　西北工业大学　中国西安