西北工業大學

离散数学作业集

Descrete Mathematics

数学与统计学院 **钱锋** 编

2024 年 4 月 13 日

目录

第一章 命题逻辑 **1**

1.1 第一讲 (2024.2.27) 1

1.2 第二讲 (2024.2.29) 2

1.3 第二周 4

第二章 谓词逻辑 **7**

2.1 第一讲 (2024.3.14) 8

2.2 谓词重言式 (2024.03.19) 10

参考文献 **11**

第 1 章　命题逻辑

1.1　第一讲 (2024.2.27)

习题 1.1.1. 设 p 为 2 是素数, q 为 3 是素数, r 为 $\sqrt{2}$ 为有理数. 下列符合命题中哪一个是假命题?

- $(p \vee q) \longrightarrow r$. 我们先判断一下 p, q, r 的真值, 显然 $p = 1, q = 1, r = 0$, 于是 $(p \vee q) = 1$, 根据蕴含式的真值规则, 前件为真, 后件为假, 该命题为假命题.
- $r \longrightarrow (p \vee q)$. 根据蕴含式的真值规则, 当前件为假时无论后件为真命题还是假命题, 蕴含式为真, 所以由 $r = 0$ 知这是一个真命题.
- $(p \wedge q) \longrightarrow p$. 根据合取式的真值表, $(p \wedge q) = 1$, 前件为真, 后件为真, 这是一个真命题.
- $(r \vee p) \longleftrightarrow q$. 根据 p, q, r 的真值可知, $(r \vee p) = 1, q = 1$, 于是根据等价式的真值规则, 这是一个真命题.

习题 1.1.2. 判断下列语句是否为命题, 如果是命题, 请指出其真值.

- **中国是一个人口众多的国家**. 这是一个陈述句, 并且在特定的语境下能够判断其陈述内容的真假, 例如在上下文中有关于"人口众多"的定义和明确的判定标准时, 这个陈述句就是可以明确判定真假的, 因此它是一个命题. 除此之外, 根据常识可知, 中国是目前人口最多的国家, 当然称得上是人口众多 (毕竟都已经是最多的那一个了, 再算不上众多的话说明众多的定义需要修正一下了), 所以这是一个真命题.
- **存在最大的素数**. 这是一个典型的数学命题, 根据素数的有关研究结果我们知道它是一个假命题.
- **这座楼可真高啊**. 这是一个感叹句, 因此它不是一个命题. 如果改成"这座楼有超过 50 层"的话就是一个命题了.
- **请你跟我走**. 这是一个祈使句, 它不是命题.
- **火星上也有人**. 这是一个陈述句, 并且是能够判断它的真假的——有人, 或者没有人, 必居其一且只居其一, 所以这是一个命题. 虽然目前我们的科学研究并不能严格的说明火星上是否有人存在, 但是按照目前的主流观点来看, 火星上是没有人的, 所以我们说这个命题在这意义下是一个假命题.

习题 1.1.3. 将下列命题符号化.

- "虽然交通堵塞, 但是老王还是准时到达火车站". 设 p 为交通拥堵, 设 q 为老王准时到达火车站. 显然这里的转折关系是表示这两件事情同时发生的, 因此应该取它们二者的合取命题, 即 $p \wedge q$.
- "张小宝是三好生, 它是北京人或河北人". 设 p 为张小宝是三好生, q 表示张小宝是北京人, r 表示他来自河北. 这里的逗号显然表示了并列关系, 因此应该取 $p \wedge (q \vee r)$.

- “除非天下雨, 否则我骑车上班”. 这句话的意思就是说, 如果天不下雨那么我就要骑车去上班, 设 p 表示雨天, q 表示我骑车去上班, 那么表示为 $(\neg p) \longrightarrow q$.

习题 1.1.4. 设命题 p, q 的真值为 F, 命题 r, s 的真值为 T, 求公式 $(p \longleftrightarrow r) \wedge ((\neg q) \vee s)$ 的真值.

解. 直接代入 p, q, r, s 的真值, 得到

$$(0 \leftrightarrow 1) \wedge ((\neg 0) \vee 1),$$

根据等价式和逻辑或的真值规则, 它实际上就是

$$0 \wedge 1,$$

根据逻辑与的运算规则, 原命题的真值应该为 F.

1.2　第二讲 (2024.2.29)

习题 1.2.1. 证明下列等价关系:

- $p \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv \neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$.

表 1.1: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ 和 $\neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ 的真值表

p	q	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg p \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1

证明. 容易验证它们所在的两列是完全相同的, 因此它们逻辑等价. 在下面几例中不再赘述, 仅列出真值表. □

- $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q) \equiv ((p \vee r) \rightarrow q)$.

p	q	r	$p \rightarrow q$	$r \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q)$	$p \vee r$	$(p \vee r) \rightarrow q$
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

- $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q)) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$.

p	q	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge q)$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p) \wedge q$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0

- $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$.

  证明. 这是显然成立的, 因为 $p \to q \equiv \neg p \vee q$, 我们只需要两边取反即可. □

习题 1.2.2. 求出下列公式的最简等价式:

- $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)) \wedge r$.

  解. 我们采用布尔代数的记号来简化我们的书写和计算, 我们**约定** $a + b$ **表示** $a \vee b$**,** $ab = a \cdot b$ **表示** $a \wedge b$**,** $\bar{a}$ **表示** $\neg a$. 由于布尔代数和命题逻辑都是同一个更一般的代数结构的具体形式, 因此这种符号的替代和运算的相互转换, 以及布尔恒等式和逻辑等价式的相互对应是显然成立的. 这样做的好处是, 在求复合命题的否定的时候, 可以利用上划线来减少括号的嵌套层数, 在视觉上让公式更加紧凑, 提高公式的可读性. 此外, 关于 $+$ 和 $\cdot$ 的有关运算律是我们所熟识的, 唯一不同的是在布尔代数中逻辑加对逻辑乘依然具有分配性, 即 $a + bc = (a + b)(a + c)$.

  由于布尔代数中并没有定义与 $\to$ 和 $\leftrightarrow$ 相对应的基本运算, 所以我们利用 $p \to q \equiv \neg p \vee q$ 和 $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$ 得到两个能表达相同含义的布尔表达式:

  $$\bar{p} + q, \quad pq + \bar{p}\bar{q}.$$

  现在考虑对原命题公式进行化简, 按照先前的结论, $p \leftrightarrow q$ 对应 $pq + \bar{p}\bar{q}$, 同理, $\neg q \to \neg p$ 对应 $q + \bar{p}$. 所以 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ 对应的布尔表达式为

  $$(pq + \bar{p}\bar{q})(q + \bar{p}) + (\overline{pq + \bar{p}\bar{q}} \cdot \overline{q + \bar{p}}).$$

  我们先考虑 $(pq + \bar{p}\bar{q})(q + \bar{p})$, 根据相关的布尔恒等式,

  $$(pq + \bar{p}\bar{q})(q + \bar{p}) = pq(q + \bar{p}) + \bar{p}\bar{q}(q + \bar{p}) = pqq + pq\bar{p} + \bar{p}\bar{q}q + \bar{p}\bar{q}\bar{p} = pq + \bar{p}\bar{q}.$$

  而

  $$\overline{pq + \bar{p}\bar{q}} = \overline{pq} \cdot \overline{\bar{p}\bar{q}} = (\bar{p} + \bar{q})(p + q) = (\bar{p} + \bar{q})p + (\bar{p} + \bar{q})q = \bar{p}p + \bar{q}p + \bar{p}q + \bar{q}q = \bar{p}(p + q),$$

  $$\overline{q + \bar{p}} = \bar{q}p,$$

  因此

  $$\overline{pq + \bar{p}\bar{q}} \cdot \overline{q + \bar{p}} = \bar{p}(p + q)\bar{q}p = 0.$$

  这就是说,

  $$(pq + \bar{p}\bar{q})(q + \bar{p}) + (\overline{pq + \bar{p}\bar{q}} \cdot \overline{q + \bar{p}}) = pq + \bar{p}\bar{q}.$$

  于是原命题对应的布尔表达式为

  $$pqr + \bar{p}\bar{q}r.$$

  于是原命题的最简等价式为 $(p \leftrightarrow q) \wedge r$.

- $p \vee \neg p \vee (q \wedge \neg q)$.

  解. 容易得到 $p + \bar{p} + (q\bar{q}) = 1 + 0 = 1$, 于是原命题的最简等价式为 T.

- $(p \wedge (q \wedge s)) \vee (\neg p \wedge (q \wedge s))$.

  解. 容易得到 $pqs + \bar{p}qs = (p + \bar{p})qs = qs$. 于是原命题的最简等价式为 $q \wedge s$.

习题 1.2.3. 证明下列蕴含式.

- $p \wedge q \Longrightarrow (p \to q)$.

  证明. 只需证明 $p \wedge q \to (p \to q)$ 是永真式即可. 它所对应的布尔表达式为 $\overline{pq} + (\bar{p} + \bar{q})$.

$$\overline{pq} + (\bar{p} + \bar{q}) = \bar{p} + \bar{q} + \bar{p} + q = \bar{p} + \bar{q} + q = \bar{p} + 1 = 1.$$

  于是上述蕴含式得证. □

- $p \Longrightarrow (q \to p)$.

  证明. $\neg p + (\bar{q} + p) = \bar{p} + \bar{q} + p = \bar{q} + 1 = 1.$ □

- $(p \to (q \to r)) \Longrightarrow (p \to q) \to (p \to r)$.

p	q	r	$p \to (q \to r)$	$(p \to q) \to (p \to r)$	$(p \to (q \to r)) \to (p \to q) \to (p \to r)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

1.3　第二周

例 1.3.1. 求下列各式的主析取范式和主合取范式.

- $(\neg p \vee \neg q) \to (p \leftrightarrow \neg q)$.

  解. 原命题对应的布尔表达式为 $\overline{\bar{p}\bar{q}} + (p\bar{q} + \bar{p}q)$. 根据 De Morgan 定律, 我们有

$$p + q + p\bar{q} + \bar{p}q$$

  补充变元,

$$p(q + \bar{q}) + (p + \bar{p})q + p\bar{q} + \bar{p}q = p\bar{q} + \bar{p}q + pq$$

  于是主析取范式为 $m_1 \vee m_2 \vee m_3$, 主合取范式为 M_0.

- $p \vee (\neg p \to (q \vee (\neg q \to r)))$.

  解. 原命题对应的布尔表达式为 $p + p + (q + q + r)$. 所以

  $$p(q+\bar{q})(r+\bar{r}) + (p+\bar{p})q(r+\bar{r}) + (p+\bar{p})(q+\bar{q})r = pqr + pq\bar{r} + p\bar{q}r + p\bar{q}\bar{r} + \bar{p}qr + \bar{p}q\bar{r} + \bar{p}\bar{q}r.$$

  因此主析取范式为 $m_1 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$. 主合取范式为 M_0.

例 1.3.2. 证明下列论证的有效性.

- $(A \to B) \wedge (A \to C), \neg(B \wedge C), D \vee A \vdash D$.

  1° 后续几例都是按照同样的推理规则来推理论证的, 因此我们仅在本例中较为详细地叙述整个推理的过程. 由前提条件得, $\neg(B \wedge C)$

  2° 同时, $(A \to B) \wedge (A \to C)$

  3° $\neg A$, 这是因为 B 与 C 都为假, 但要保证 $(A \to B)$ 和 $(A \to C)$ 为真, 所以 A 为假. 事实上, 在 $p \to q$ 的真值表中, 能保证 $p \to q$ 为真且 q 为假的只有 $p = 0, q = 0, p \to q = 1$ 这一行.

  4° 同时我们又有 $D \vee A$

  5° D, 这是因为先前已经论证过 A 为假了, 这时要保证 $D \vee A$ 为真就必须要有 D 为真.

- $p \to q, (\neg q \vee r) \wedge \neg r, \neg(\neg p \wedge s) \vdash \neg s$.

  1° $\neg(\neg p \wedge s)$

  2° $p \vee \neg s$

  3° $(\neg q \vee r) \wedge \neg r$,

  4° $(q \to r) \wedge \neg r$,

  5° $\neg q$

  6° $p \to q$

  7° $\neg p$

  8° $\neg s$

- $p \wedge q \to r, \neg r \vee s, \neg s \vdash \neg p \vee \neg q$.

  1° $\neg r \vee s$

  2° $r \to s$

  3° $\neg s$

  4° $\neg r$

  5° $\neg(p \wedge q)$

  6° $(\neg p) \vee (\neg q)$

第 2 章　谓词逻辑

引言：有关“全总个体域”概念严格性与合理性的问题

1. 课程相关参考文献中有关“全总个体域”概念的表述

在徐洁磐老师编著的《离散数学导论 (第 5 版)》[1] 中提到的“全总个体域”概念是并没有严格定义的, 其中的有关表述为: 个体的变化是有一定范围的, 个体的一定变化范围叫做个体域, 个体域可由若干个个体常量组成, 个体域中常量数可以有限, 也可以无限, 而所有个体常量聚集在一起所构成的个体域叫做全总个体域. 这一表述并没有给出明确的、严格的“全总个体域”的定义, 事实上, 要严格地定义这一概念是不可能的, 因为这会导致集合包含自身, 即集合的无限递归问题. 例如说, 如果存在这样的一个全总个体域, 那么这一个“全总个体域”作为一个个体 (元素) 本身也属于该个体域, 即全总个体域中有一个元素是它自身, 这就导致了无限的递归链. 换言之, “全总个体域”的概念不仅是不严格的, 也是不合理的.

在《离散数学及其应用》[3] 中并没有有关“全总个体域”的表述.

2. 通用的数学教材中的有关表述　笔者的主张

笔者主张按照 V.A.Zorich 著《数学分析: 第 7 版 (第一卷)》[4] 中有关谓词的相关表述来使用谓词逻辑, 即不采用“全体论述域”的概念, 而是对每一个谓词逻辑命题指定特定的论述域, 例如, 当指定论述域为实数域 $\mathbb{R}$ 的时候, 任意实数的平方都是非负的可以记作

$$\forall x \left(x^2 \geqslant 0\right),$$

简记作

$$\forall x \in \mathbb{R} \left(x^2 \geqslant 0\right).$$

对于确实不便指定论述域的命题, 例如所有演员都佩服某些老师, 可以按照既有的符号化的方法规定 $L(x)$ 表示 x 是演员、$J(x)$ 表示 x 是老师、$A(x,y)$ 表示 x 佩服 y, 然后将其表示为

$$\forall x \left(L(x) \to \exists y \left(J(y) \wedge A(x,y).\right)\right),$$

但不应在表述中采用“全总个体域”的概念. 或者定义所有人组成的集合为 A[1], 并确定论域为集合 A, 将其表示为

$$\forall x \in A \left(L(x) \to \exists y \left(J(y) \wedge A(x,y).\right)\right).$$

更进一步地, 可以在所有人组成的集合 A 的基础上根据分离公理确定出全体演员的集合 $P := \{x \in A | J(x)\}$ 和全体老师组成的集合 $Q := \{x \in A | L(x)\}$, 其中符号 $:=$ 表示定义, 冒号位于被定义的符号一侧. 然后将

[1] 全球所有人类的总数是有限的, 而且一个事物是否是人具有明确的标准, 并且人与人之间并没有任何的序关系, 而且没有两个完全相同的人. 因此, 全体人类组成的集合满足集合中元素的确定性、互异性、无序性, 是合理的.

该命题表述为

$$\forall x \in P \exists y \in Q\left(A(x, y)\right),$$

即对于演员集合 P 中任意给定的演员 x, 存在教师集合 Q 中的教师 y 使得 x 崇拜 y.

2.1 第一讲 (2024.3.14)

习题 2.1.1. 谓词公式 $\forall x\left(P(x) \wedge \exists y\left(R(y)\right)\right) \rightarrow Q(x)$ 中, 量词 $\forall x$ 的辖域是 ____________.

A. $\forall\left(P(x) \vee \exists y\left(R(y)\right)\right)$

B. $P(x)$

C. $P(x) \vee \exists y R(y)$

D. $Q(x)$

解. 本题选 C.

习题 2.1.2. 若个体域为整数集, 下列公式中真值为 T 的有哪几个?

- $\forall x \exists y(x+y=0)$. 这是真命题, 因为这是整数环的基本代数性质之一, 即*任意元素都存在加法负元*(其中加法零元的负元是它自身).
- $\exists y \forall x\left(x+y=0\right)$. 这是一个假命题, 这是因为, 它的否定是 $\forall y \exists x\left(x+y \neq 0\right)$, 而它的否定是显然为真的, 这是因为我们只需要取 $x=y+1$, 就有 $x+y=y+1+y=2y+1$, 而代数方程 $2y+1$ 在整数环内是无解的.
- $\forall x \forall y\left(x+y=0\right)$. 这是一个假命题, 只需要取 $x=y=1$, 此时 $x+y=1+1=2 \neq 0$.
- $\exists x \exists y\left(x+y=0\right)$. 这时一个真命题, 只需要取 $x=1, y=-1$, 则 $x+y=1+(-1)=0$.

习题 2.1.3. 设 $L(x)$ 表示 x 是演员, $J(x)$ 表示 x 是老师, $A(x, y)$ 表示 x 佩服 y. 那么命题*所有演员都佩服某些老师* 可以被符号化为

$$\forall x\left(L(x) \rightarrow \exists y\left(J(y) \wedge A(x, y).\right)\right)$$

习题 2.1.4. 在命题公式 $\forall x\left(P(x) \rightarrow Q(x, y)\right) \vee \exists x\left(R(y, x) \rightarrow S(x)\right)$ 中, 自由变元是 y, 约束变元是 x.

习题 2.1.5. 设个体域 $D=\{a, b\}$, 消去公式中的量词, 则 $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x) \iff P(x) \wedge(Q(x) \vee \neg Q(x))$.

习题 2.1.6. 将下列命题符号化

- *某些实数是有理数*. 我们取论述域为实数域 $\mathbb{R}$, 那么该命题的符号化表示为 $\exists x \in \mathbb{R}\left(x \in \mathbb{Q}\right)$.
- *所有的人都呼吸*. 这个问题不便于指定论述域, 我们先采取徐洁磐版教材既定的全总个体域的概念将该命题符号化, 再按照通用的数学教材中的谓词逻辑规则给出严格的表述. 设 $P(x)$ 表示 x 是人, $Q(x)$ 表示 x 会呼吸, 因此所有人都呼吸可以被符号化为

  $$\forall x\left(P(x) \rightarrow Q(x)\right).$$

  但正如本章引言中所述, 这种叙述方式是不严谨的, 不应该采用"全总个体域"的概念, 因此我们将该命题重新表述为

  $$\forall x \in A\left(Q(x)\right).$$

  这里沿用了本章引言中集合 A 表示全体人类的定义.

- 每个母亲都爱自己的孩子. 设 $P(x,y)$ 表示 x 是 y 的母亲, $Q(x,y)$ 表示 x 爱 y. 那么采用"全总个体域"概念时, 该命题可以被符号化为

$$\forall x \forall y \left(P(x,y) \to Q(x,y).\right).$$

  或者可以重新表述为

$$\forall x, y \in A \left(P(x,y) \to Q(x,y)\right).$$

  此处的 $\forall x, y \in A$ 是 $\forall x \in A \forall y \in A$ 的缩写.

习题 2.1.7. 设个体域 $D = \{3, 5, 6\}$, 谓词 $F(x)$ 表示 x 是素数, 求 $\forall x\left(F(x)\right)$ 的真值.

解. 显然 $\forall x\left(F(x)\right) = \mathrm{F}$, 这是因为

$$\exists 6 \in D \exists 2, 3 \in \mathbb{Z} \left(6 = 2 \times 3\right),$$

即D 中存在这样的数 (如 6) 使得它拥有除了 1 和它自身以外的整数因子 (如 2 和 3), 即 6 不是素数.

习题 2.1.8. 将下列断言译为逻辑符号, 选用的谓词应使逻辑符号中至少含有一个量词.

- 有且仅有一个偶数素数. $\exists ! 2 \in \mathbb{Z} \left(\gcd(2,1) = 1\right)$.
- 没有一个奇数是偶数. $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z} \left(n \equiv 1 \pmod 2\right)$. 其中 $2\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{Z} | n \equiv 0 \pmod 2\}$ 表示偶数集, 符号 $\setminus$ 表示差集运算.
- 每一火车都比某些卡车快. 设 T 表示火车的集合, S 表示所有卡车组成的集合, 这两个集合的构造都是合理的. $P(x,y)$ 表示 x 的速度比 y 快. 则原命题可以符号化为 $\forall x \in T \exists y \in S \left(P(x,y)\right)$.
- 某些卡车慢于所有火车, 但至少有一火车, 快于每一卡车. 我们沿用先前的有关定义:

$$\left(\exists b \in S \forall a \in T(P(a,b))\right) \wedge \left(\exists c \in T \forall d \in S \left(P(c,d)\right)\right).$$

- 如果明天下雨, 那么某些人将淋湿. 设 R 为所有的日子组成的集合, 尽管时间是有序的, 但是我们依然可以把这无穷可列多天无序地罗列出来, 而且可以在整数集 $\mathbb{Z}$ 与 R 之间建立一个双射 (最简单的构造方式是令今天对应于整数 0, 明天对应于 1, 此后每过一天, 就取这一天对应的整数的下一个整数, 同理, 昨天为 -1, 每往前推一天, 这个整数就减 1), 因此这一定义是合理的. 设 $P(x)$ 表示 x 被淋湿, $Q(x)$ 表示 x 这一天下雨. 那么该命题可以符号化为

$$\forall d \in R \left(\forall d \in R \left(Q(d) \to \exists a \in A \left(P(a)\right)\right)\right).$$

- 所有步行的、骑马的或乘车的人, 凡是口渴的, 都喝泉水. 设 $P(x), Q(x), R(x), U(x), V(x)$ 分别表示 x 步行、骑马、乘车、口渴、喝泉水. 则原命题可以符号化为

$$\forall x \in A \left(\left(\left(P(x) \vee Q(x) \vee R(x)\right) \wedge U(x)\right) \to V(x)\right)$$

习题 2.1.9. 试译出a 是 b 的外祖父, 只允许用以下谓词: $P(x)$ 表示 x 是人, $F(x,y)$ 和 $M(x,y)$ 分别表示 x 是 y 的父亲/母亲.

解. $\exists a, b, c \left(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge F(a,c) \wedge M(c,b)\right)$.

2.2 谓词重言式 (2024.03.19)

习题 2.2.1. 证明下列关系式:

(1) $\forall x \forall y\,(p(x) \vee q(x)) \iff \forall x p(x) \vee \forall y q(y)$.

证明. $\square$

(2) $\exists x \exists y\,(p(x) \wedge q(y)) \Longrightarrow \exists x p(x)$.

(3) $\forall x \forall y\,(p(x) \wedge q(y)) \iff \forall x p(x) \wedge \forall y q(y)$,

(4) $\exists x \exists y\,(p(x) \to p(y)) \iff \forall x p(x) \to \exists y p(y)$.

(5) $\forall x \forall y\,(p(x) \to q(y)) \iff (\exists x p(x) \to \forall y q(y))$.

参考文献

[1] 徐洁磐. 离散数学导论: 第 5 版 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.

[2] 朱怀宏, 徐洁磐. 离散数学导论 (第 5 版) 学习指导与习题解析 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2017.

[3] [美] Kenneth H. Rosen. 离散数学及其应用: 原书第 8 版 (Discrete Mathematics and Its Applications, Eighth Edition)[M]. 徐六通, 杨娟, 吴斌译. 北京: 机械工业出版社, 2019.

[4] [俄罗斯] B.A.Zorich. 数学分析: 第 7 版. 第一卷 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.

I ♥ NPU

公诚勇毅　永矢毋忘
中华灿烂　工大无疆

2023 年　西北工业大学　中国西安