矩阵代数

Matrix Algebra

钱锋*

2024 年 4 月 20 日

目录

摘要

现在还没有摘要

关键词.

1 矩阵运算

矩阵 (matrix) 是**二维数组** (2 dimentional array), 它由 $m \times n$ 个**元素** (element) 排列成 m **行** (row), n **列** (coloum) 组成. 矩阵通常用粗体的拉丁字母表示. 矩阵的行数与列数构成的二维向量 $[m, n]$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**形状** (shape). 记作 $\boldsymbol{A}$.shape, 形状为 $[m, n]$, 且所有元素取自数域 $\mathbb{K}$ 的矩阵称为数域 $\mathbb{K}$ 上的 $m \times n$ 矩阵, 这样的矩阵全体组成的集合记作 $\mathbb{K}^{m\times n}$, 称为 $m \times n$ **矩阵空间** (matrix space).

设矩阵 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 列交叉位置处的元素用 a_{ij} 或 $\boldsymbol{A}[i, j]$ 来表示. 即

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,0} & a_{m-1,0} & \cdots & a_{m-1,n-1} \end{bmatrix}.$$

为了方便将矩阵方程转变为高级程序设计语言代码, 我们在设计数学符号时使用了面向对象风格[1], 并规定矩阵中元素的行索引和列索引均从 0 开始, 而不是从 1 开始.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各列是 $\mathbb{R}^m$ 中的向量, 我们用黑体字母 $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ 来表示, 也可以采用高级程序设计语言中常见的记号, 使用 $\boldsymbol{A}[:, 0], \boldsymbol{A}[:, 1], \cdots, \boldsymbol{A}[:, n-1]$

*电子邮件: strik0r.qf@gmail.com

西北工业大学软件学院, School of Software, Northwestern Polytechnical University, 西安 710072

保密级别: public

[1]一般地, 与具体的对象有关的属性和函数采用面向对象风格的记号, 与具体的对象无关的属性和函数 (即静态的属性和函数) 和多元函数采用传统的函数记号.

来表示. 因此我们也可以写作

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{n-1}].$$

其中, $\boldsymbol{A}[i,j] = \boldsymbol{A}[:,j][i]$, 它表示元素 a_{ij} 是第 j 个列向量 $\boldsymbol{a}_j$ 的第 i 个元素. 在后续的行文中, 除非形如 a_{ij} 的表示法不便于表示 (例如 i 或 j 的表达式特别复杂), 或者需要将矩阵方程翻译为高级程序设计语言代码, 否则我们一般不采用符号 $\boldsymbol{A}[i,j]$.

$m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角线元素

2 矩阵的逆

3 可逆矩阵的特征

4 分块矩阵

5 矩阵分解

参考文献

[1] [美] David C. Lay, [美] Steven R. Lay, [美] Judi J. McDonald. 线性代数及其应用: 原书第 6 版 = Linear Algebra and Its Application, Sixth Edition [M]. 刘深泉等译. 北京: 机械工业出版社, 2023.