概率论与数理统计

任课教师：李丰兵

第1.1节 ——随机事件

- 基本概念;
- 随机事件的关系,运算及性质（5S）;

◆ 基本概念

- **随机现象**　事先无法准确判断结果的现象.

- **随机试验**　为了研究随机现象的统计规律所进行的试验.

- **样本空间**　随机试验所有可能的结果构成的集合.

例如：“打麻将抛一枚骰子”实验的样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

“抛一枚硬币”实验的样本空间 $S=\{\text{正面，反面}\}$

“120电话一天内被呼叫的次数”实验的样本空间 $S=\{0,1,2,\cdots\}$

◆ 基本概念

- 随机事件　　事先无法判断是否会发生的试验结果.

  例如，A：点数为偶数，B：点数大于3

- 必然事件　　一定会发生的试验结果.

  例如，S :点数小于7.

- 不可能事件　　不可能发生的试验结果.

  例如，Φ :点数等于9.

◆ 基本概念

● 随机事件的集合表示

例如： $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，

A: 点数为偶数 $\rightarrow A=\{2,4,6\}$

B: 点数大于3 $\rightarrow B=\{4,5,6\}$

即： 任何一个事件均可表示为 S的某一子集.

例如，C: 点数为大于2的奇数 $\rightarrow C=\{3,5\}$

◆ 基本概念

● 随机事件的发生

例如：$S=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{2,4,6\}$，$B=\{4,5,6\}$，$C=\{3,5\}$

若实验结果为骰子的点数为2，则称事件A发生了，事件B,C没发生。

● 基本事件与复合事件

例如：$A_1=\{2\}$，$A_2=\{4\}$，$A_3=\{5\}$均为基本事件.

$B_1=\{2,4\}$，$B_2=\{4,5,6\}$均为复合事件.

◆事件的关系和运算（5S）

- 子事件
- 事件相等
- 和事件
- 积事件
- 互不相容事件（互斥事件）
- 对立事件
- 差事件

要求：（1）能举例说明 （2）能从维恩图关系理解

（3）能从事件发生的角度理解

◆ 事件的关系和运算（5S）

● 子事件（关系）

定义： 若事件B包含事件A，即$A \subset B$，则称事件A是事件B的子事件.

例如： $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{2,4\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则A是B的子事件.

结论：若事件A发生了，则事件B一定发生了.

显然：对任事件A，必有$\Phi \subset A \subset S$.

◆ 事件的关系和运算（5S）

● 和事件（运算）

定义： 若$C = A \cup B$，则称事件C是事件A和事件B的和事件.

例如： $S = \{1,2,3,4,5,6\}$，$A = \{2,4\}, B = \{3,4\}, C = \{2,3,4\}$

$\Rightarrow C$是A和B的和事件.

结论：若事件C发生了，则事件A和B至少有一个发生.

注：可推广到三个及以上.

◆ 事件的关系和运算（5S）

● 积事件（运算）

定义： 若$C = A \cap B = AB$，则称事件C是事件A和事件B的积事件.

例如： $S = \{1,2,3,4,5,6\}$，$A = \{2,4,6\}$, $B = \{2,3,4,5\}$, $C = \{2,4\}$

$\Rightarrow C$是A和B的积事件.

结论：事件C发生当且仅当事件A和B同时发生.

注：可推广到三个及以上.

◆ 事件的关系和运算（5S）

● 差事件（运算）

定义： 若$C=A-B$，则称事件C是事件A和事件B的差事件.

例如： $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,2,4,6\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，$C=\{1,6\}$

$\Rightarrow C$是A和B的差事件.

结论：事件C发生当且仅当事件A发生，B不发生.

◆ 事件的关系和运算（5S）

● 互斥事件（关系）

定义：　若$A \cap B = AB = \Phi$，则称事件A和事件B互斥或互不相容.

例如：　$S = \{1,2,3,4,5,6\}$，$A = \{2,4,6\}$，$B = \{3,5\}$

$\Rightarrow A$和B互斥.

结论：A和B互斥等价于A和B不能同时发生.

◆ 事件的关系和运算（5S）

● 对立事件（关系）

定义： 若$AB=\Phi$且$A\cup B=S$，则称事件A和事件B互为对立事件，记为：

$$B=\bar{A}, A=\bar{B}$$

例如： $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}, B=\{2,4,6\}$ $\Rightarrow$ A和B对立.

结论1：A和B对立等价于A和B有且仅有一个发生.

结论2：$\bar{A}=S-A$.

◆ 重要结论

(1) $A\bar{A}=\Phi, A\cup\bar{A}=S, \bar{A}=S-A$

（2） 若$A\subset B\Rightarrow A\cup B=B, AB=A$

（3）$A-B=A\bar{B}=A-AB,\quad A\cup B=A\cup(B-A)=(A-B)\cup B$

◆ 完备事件组

定义：若A_1，$A_2,\cdots,A_n$满足：（1）对$\forall i\neq j$有$A_i\cap A_j=\Phi$ （2） $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=S$

则称A_1，$A_2,\cdots,A_n$是一个完备事件组，也称为样本空间S的一个划分.(可无限个)

例如：$\bar{A}$与A构成一个完备事件组.

◆ 事件的运算规律

（1）交换律

（2）结合律

（3）分配律

（4）自反律 $\overline{\overline{A}} = A$

（5）对偶律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

重点：对偶律推广 $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$$

第1.2节 ——随机事件的概率

- 概率的公理化定义（3S）；
- 概率的性质（5S）；

◆ 概率的公理化定义

定义：A为任一事件，$P(A)$为A的映射且$P(A)$为实数，若$P(\cdot)$满足

（1）非负性：$P(A) \geq 0$

（2）完备性：$P(S) = 1$

（3）可列可加性： 设A_1，$A_2, \cdots, A_n, \cdots$两两互斥，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$$

则称$P(A)$为A的概率.

◆ 概率的性质

性质1 $P(\Phi)=0$

注：$P(A)=0$不能推出$A=\Phi$，$P(A)=1$不能推出$A=S$

性质2 （有限可加性）设A_1，$A_2,\cdots,A_n$两两互斥，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

性质3 $P(\bar{A})=1-P(A)$

性质4 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

推论：若$B\subset A$, 则 （1）$P(A-B)=P(A)-P(B)$

（2）$P(B)\leq P(A)$

◆ 概率的性质

性质5 对任一事件A，$P(A)\leq 1$

性质6 对任两个事件$A,B,$均有：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

推论： $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)$
$+P(ABC)$

◆ 部分性质的证明

性质3 $\boldsymbol{P}\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)=1-\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{A}\right)$

证明：由于$\overline{A}$和A互斥，则由性质2得 $\boldsymbol{P}\left(\overline{\boldsymbol{A}}\cup\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{P}\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)+\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{A}\right)$

又 $\boldsymbol{P}\left(\overline{\boldsymbol{A}}\cup\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{S}\right)=1$ $\quad\Rightarrow\boldsymbol{P}\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)+\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{A}\right)=1$

$$\Rightarrow\boldsymbol{P}\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)=1-\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{A}\right)$$

◆ 部分性质的证明

性质4 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

证明：由于$A=(A-B)\cup(AB)$且$A-B$和AB互斥

$$\Rightarrow P(A)=P((A-B)\cup(AB))=P(A-B)+P(AB)$$

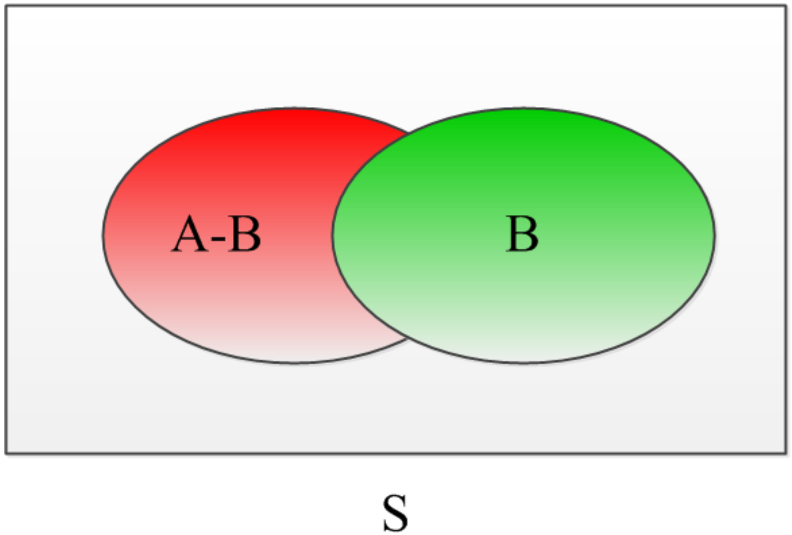
$$\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(AB)$$

当$B\subset A$时$\Rightarrow AB=B$, 故此时 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

由于$P(A-B)\geq 0$, 故此时 $P(A)-P(B)\geq 0$即$P(A)\geq P(B)$

◆ 部分性质的证明

性质6 对任两个事件A,B,均有： $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$



$$A\cup B=(A-B)\cup B$$

$$(A-B)\cap B=\Phi$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P((A-B)\cup B)=P(A-B)+P(B)$$

$$=P(A)-P(AB)+P(B)$$

◆ 部分性质的证明

性质6　对任两个事件A, B,均有：　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

证明：由于$A\cup B=(A-B)\cup B$, $A-B$和B互斥

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P((A-B)\cup B)=P(A-B)+P(B)$$

$$=P(A)-P(AB)+P(B)$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup D)=P(A)+P(D)-P(AD)$$
$$=P(A)+P(B\cup C)-P(A(B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)-P(AB\cup AC)$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(BC)-P(AB)-P(AC)+P(ABC)$$

◆ 作业

习题1-2（Page11）：2,3,4

◆ 作业解答

2 设事件A,B,C两两互斥，$P(A)=0.2, P(B)=0.3, P(C)=0.4$，求$P\left[(A\cup B)-C\right]$

解：$P\left[(A\cup B)-C\right]=P\left[(A\cup B)\bar{C}\right]$

$$=P\left(A\bar{C}\cup B\bar{C}\right)$$

$$=P\left(A\bar{C}\right)+P\left(B\bar{C}\right)$$

$$=P(A-C)+P(B-C)$$

$$=P(A)-P(AC)+P(B)-P(BC)$$

$$=P(A)+P(B)=0.2+0.3=0.5$$

◆ 作业解答

2 设事件A,B,C两两互斥，$P(A)=0.2, P(B)=0.3, P(C)=0.4$，求$P\left[(A\cup B)-C\right]$

解：$P\left[(A\cup B)-C\right]=P(A\cup B)-P\left[(A\cup B)C\right]$

$$=P(A\cup B)-P(AC\cup BC)$$

$$=P(A\cup B)-P(\Phi\cup\Phi)$$

$$=P(A\cup B)$$

$$=P(A)+P(B)$$

$$=0.2+0.3=0.5$$

◆ 作业解答

3 设$P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{1}{4},P(A\cup B)=\frac{1}{2}$，求$P(\bar{A}\cup\bar{B})$

解：$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)$

由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$$\Rightarrow P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

故 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

◆ 作业解答

3 设$P(A)=\dfrac{1}{3}, P(B)=\dfrac{1}{4}, P(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$，求$P(\bar{A}\cup\bar{B})$

解：$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\cap\bar{B})$

$$=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\overline{A\cup B})$$

$$=1-P(A)+1-P(B)-1+P(A\cup B)$$

$$=1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{4}-1+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{11}{12}$$

◆ 作业解答

4 已知$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，$P(AB)=0$

求A,B,C全不发生的概率.

解：$P(A,B,C\text{全不发生})=P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)=P\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)=1-P(A\cup B\cup C)$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

由$ABC\subset AB\Rightarrow P(ABC)\le P(AB)$

又由已知 $P(AB)=0\Rightarrow P(ABC)\le 0\Rightarrow P(ABC)=0$

故 $P(A\cup B\cup C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}-0+0=\frac{5}{8}$

$\Rightarrow P(A,B,C\text{全不发生})=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

◆ 作业解答

4 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$, $P(AB)=0$

求 A,B,C 全不发生的概率.

例 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$, $P(AB)=0$

求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

分析：$P(A,B,C\text{至少有一个发生})=P(A\cup B\cup C)$

$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

第1.3节 ——古典概型与几何概型

- 古典概率的定义（3S）；
- 几何概率的定义（2S）；

◆ 古典概型的定义

定义　若随机实验模型满足（1）只有有限个实验结果.

（2）每一个结果发生的可能性大小相同.

则称该概率模型为古典概型。

在古典概型中，事件A的发生概率为：$P(A)=\dfrac{n_A}{n_S}$

n_A – 集合A中元素个数

n_S – 集合S中元素个数

例：抛一枚骰子，观察骰子的点数，记 $A=\{3,4,5,6\},B=\{2,4,6\}$

计算：$P(A),P(B),P(AB)$

解：$S=\{1,2,3,4,5,6\}$　　$AB=\{4,6\}$

$$P(A)=\frac{n_A}{n_S}=\frac{4}{6}\qquad P(B)=\frac{n_B}{n_S}=\frac{3}{6}$$

$$P(AB)=\frac{n_{AB}}{n_S}=\frac{2}{6}$$

例：袋子中装有10个大小相同的球，其中3个黑球，7个白球，求：

（1）从袋子中任取一球，这个球是黑球的概率.

（2）从袋子中任取两球，刚好一个白球一个黑球的概率.

（3）从袋子中任取两球，两个都是黑球的概率.

◆ 几何概型的定义

定义 若随机实验模型满足

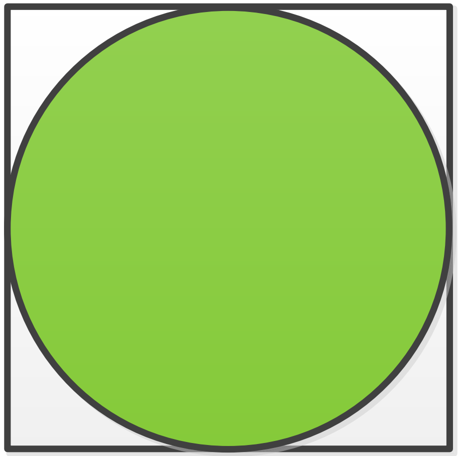
（1）样本空间可以用某种几何度量来表示.

（2）相同大小的几何度量对应的事件发生的可能性大小相同.

则称该概率模型为几何概型.

在几何概型中，事件A的发生概率定义为： $P(A)=\dfrac{\mu_A}{\mu_S}$

例：在边长为a的正方形内随机取一点，求该点取自圆内的概率.



解：$$P(A)=\frac{\mu_A}{\mu_S}=\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2}=\frac{\pi}{4}$$

◆ 作业

习题1-3（Page17）：1,2

◆ 作业解答

1. 袋中装有5个白球，3个黑球，从中一次任取2个，

（1）求取到的2个球颜色不同的概率；

（2）求取到的2个球中有黑球的概率.

解（1） $P(A)=\dfrac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\dfrac{15}{28}$

（2） $P(B)=P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)=\dfrac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}+\dfrac{C_3^2}{C_8^2}=\dfrac{15}{28}+\dfrac{3}{28}=\dfrac{18}{28}$

或 $P(B)=1-P(\bar{B})=1-\dfrac{C_5^2}{C_8^2}=1-\dfrac{10}{28}=\dfrac{18}{28}$

◆ 作业解答

2. 10把钥匙中有3把能打开门，今任取两把，求能打开门的概率.

解：$P(A)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)=\dfrac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}+\dfrac{C_3^2}{C_{10}^2}=\dfrac{21}{45}+\dfrac{3}{45}=\dfrac{8}{15}$

或：$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\dfrac{C_7^2}{C_{10}^2}=1-\dfrac{21}{45}=\dfrac{8}{15}$