第4. 4节 ——大数定理与中心极限定理

1. 切比雪夫不等式(*****)
2. 大数定律(****)
3. 中心极限定理(*****)

◆ 切比雪夫不等式（*****）

定理：设$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，对任意$\varepsilon>0$：$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

或 对任意$\varepsilon>0$：$P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

证明：（连续型情形）对任意$\varepsilon>0$：$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}=\displaystyle\int_{|x-\mu|\geq\varepsilon} f(x)dx$

$$\leq \int_{|x-\mu|\geq\varepsilon}\frac{|x-\mu|^2}{\varepsilon^2}f(x)dx \quad \leq\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx \quad =\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

◆ 切比雪夫不等式（*****）

定理：对任意$\varepsilon>0$：　$P\left\{\left|X-E\left(X\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{D\left(X\right)}{\varepsilon^{2}}$

或 对任意$\varepsilon>0$：　$P\left\{\left|X-E\left(X\right)\right|<\varepsilon\right\}\geq1-\dfrac{D\left(X\right)}{\varepsilon^{2}}$

例1：设$X\sim N\left(0,4\right)$，则由切比雪夫不等式可知：　$P\left\{\left|X\right|\geq4\right\}\leq(\qquad\qquad)$

例2：设$X\sim N\left(0,4\right)$，根据切比雪夫不等式：　$P\left\{\left|X\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\dfrac{1}{4}$，则$\varepsilon=(\qquad\qquad)$

答案：例1：0.25；　　例2：　4

◆ 切比雪夫不等式（*****）

定理：对任意$\varepsilon > 0$： $P\left\{\left|X - E\left(X\right)\right| \ge \varepsilon\right\} \le \dfrac{D\left(X\right)}{\varepsilon^2}$

或 对任意$\varepsilon > 0$： $P\left\{\left|X - E\left(X\right)\right| < \varepsilon\right\} \ge 1 - \dfrac{D\left(X\right)}{\varepsilon^2}$

例3：设$X \sim N\left(0,4\right)$，则由切比雪夫不等式可知： $P\left\{\left|X\right| < 4\right\} \ge \left(\qquad\right)$

答案： 0.75

◆ 大数定理（切比雪夫大数定理）（**）

设$X_1, X_2, \cdots X_n$相互独立，且有相同的期望和方差，$E\left(X_i\right)=\mu, D\left(X_i\right)=\sigma^2$则即对任意$\varepsilon>0$：

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\overline{X}-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1, \quad \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

称$\overline{X}$依概率收敛于μ，记为： $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu$

证明：$E(\bar{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}*n\mu=\mu$

$$D(\bar{X})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=(\frac{1}{n})^2\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}*n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

由切比雪夫不等式，可得：

$$1\geq P\{\left|\bar{X}-E(\bar{X})\right|<\varepsilon\}=P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\}$$

$$\geq 1-\frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2}=1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

即得：$\lim_{n\to\infty}P\{\left|\bar{X}-\mu\right|<\varepsilon\}=\lim_{n\to\infty}P\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\}=1$

第4. 4节：大数定律与中心极限定理

◆ 大数定理（切比雪夫大数定理）（**）

设$X_1,X_2,\cdots X_n$相互独立，且有相同的期望和方差，$E(X_i)=\mu,D(X_i)=\sigma^2$则

即对任意$\varepsilon>0$：

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\overline{X}-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1,\quad \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

称$\overline{X}$依概率收敛于μ，记为：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu$

◆ 推论（伯努利大数定理）（**）

在n重伯努利实验中，事件A发生的频率$\frac{n_A}{n}$依概率收敛于事件A发生的概率p

即对任意$\varepsilon>0$：$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1$

◆ 大数定理（辛钦大数定理）（****）

设$X_1, X_2, \cdots X_n$独立同分布，$E\left(X_i\right)=\mu$，则 即对任意$\varepsilon>0$：

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\overline{X}-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1, \quad \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

即$\overline{X}$依概率收敛于μ，记为：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} \mu$

即：独立同分布的随机变量序列它们的算术平均依概率收敛于它们的期望.

◆ 中心极限定理（*****）

设$X_1, X_2, \cdots X_n, \cdots$独立同分布，$E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2$，则当$n$充分大时

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu,\ n\sigma^2\right)$$

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

即：独立同分布的随机变量序列它们之和及算术平均近似服从正态分布（当n充分大时）.

◆ 例题讲解

P118_例2 一盒同型号螺钉共有100个,⋯

解：设X_i为第i颗螺丝钉的重量，记$E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2$,

则由中心极限定理得：一盒螺钉重量$X=\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$

$$\text{即}\quad X=\sum_{i=1}^{n}X_i \sim N(10000,10000)$$

所求概率为：　$P\{X>10200\}$

$$=1-P\{X\le 10200\}=1-F_X(10200)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{10200-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)=1-\Phi(2)$$

◆ 中心极限定理（*****）

设$X_1, X_2, \cdots X_n, \cdots$独立同分布，$E(X_i)=\mu, D(X_i)=\sigma^2$，则当$n$充分大时

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(n\mu,\ n\sigma^2\right)$$

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

◆ 推论

设$X \sim B(n,p)$，则当n充分大时

$$X \sim N\left(np,\ np(1-p)\right)$$

◆ 作业

习题4-4（Page123）：2,3,4

2 设$E(X)=-2, E(Y)=2, D(X)=1, D(Y)=4$, $\rho_{XY}=-0.5$,

根据切比雪夫不等式估计$P\{|X+Y|\geq 6\}$.

解： $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=-2+2=0.$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathbf{cov}(X,Y)=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}$$

$$=1+4+2\cdot(-0.5)\cdot\sqrt{1\cdot 4}=3$$

故$P\{|X+Y|\geq 6\}\leq \dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}.$

问题：$P\{|X+Y|<6\}\geq ?.$ 答案：$\dfrac{11}{12}.$

3 设$X_1, X_2, \cdots X_n$为随机变量序列，a为常数，则$\{X_n\}$依概率收敛于a是指____.

解：对任意$\varepsilon > 0$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - a| < \varepsilon\} = 1$

或 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n - a| \ge \varepsilon\} = 0$

3 设总体$X\sim e(2)$,$X_1,X_2,\cdots X_n$为样本，则当$n\to\infty$时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

依概率收敛于____.

解：$\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{X}_i^2\right)=\boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{X}_i\right)+\boldsymbol{E}^2\left(\boldsymbol{X}_i\right)=\boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{X}\right)+\boldsymbol{E}^2\left(\boldsymbol{X}\right)=\frac{1}{2^2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

故$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}\frac{1}{2}$