第2.1节 ——随机变量

- 什么是随机变量?
- 引入随机变量的意义；
- 随机变量的分类；

知识回顾

◆ 样本空间

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$S_2 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

$$S_3 = \{\text{正面，反面}\}$$

$$S_4 = \{\text{红色，绿色，蓝色}\}$$

知识回顾

◆ 样本空间数量化

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$S_2 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

$$S_3 = \{\text{正面，反面}\} \quad \rightarrow S_3 = \{0，1\}$$

$$S_4 = \{\text{红色，绿色，蓝色}\} \quad \rightarrow S_4 = \{1，2，3\}$$

◆什么是随机变量？

定义：“用来表示随机试验结果的变量即为随机变量”

注：随机变量通常用： $X,Y,Z,\cdots$表示。

例：$S=\{1,2,\cdots,6\}\rightarrow$用$X$表示骰子的点数；

$S=\{$正面，反面$\}\rightarrow S=\{0,\ 1\}\rightarrow$用$Y$来表示硬币着地情况。

◆什么是随机变量？

定义："用来表示随机试验结果的变量即为随机变量"

注：随机变量通常用： $X,Y,Z,\cdots$表示。

例：$S=\{1,2,\cdots,6\}\rightarrow$用$X$表示骰子的点数；

注：与普通变量的区别，如$\begin{cases}2x+y=7\\-x+2y=4\end{cases}$

◆ 引入随机变量的意义

“随机事件可用随机变量的运算关系式表示”

例：A:点数大于2

$\rightarrow A=\{3,4,5,6\}$

$\rightarrow X>2$

◆ 随机变量的分类

“离散型”和“连续型”

例：　用X表示骰子的点数，则X为离散型；

例：　用X表示某人随机到达的时间，则X为连续型。

第2.2节 ——离散型随机变量及其概率分布

- 什么是离散型随机变量?
- 离散型随机变量的分布律；
- 常用的离散型分布。

◆ 什么是离散型随机变量？

定义： 若X的全部可能取值为有限个或可数无穷个，则X为离散型。

例： 用X表示骰子的点数，X为离散型；

◆ 离散型随机变量的分布律

例：　用X表示骰子的点数，X的分布律为：

$$P\{X=1\}=\frac{1}{6},\ P\{X=2\}=\frac{1}{6},\cdots,\ P\{X=6\}=\frac{1}{6}$$

或：$P\{X=k\}=\frac{1}{6},\ k=1,2,\cdots,6$

也可

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

◆ 常用的离散型分布

（1）两点分布

（2）二项分布

（3）泊松分布

◆ 两点分布

若随机变量X只有两个可能取值，则称X服从两点分布，其分布律为：

$$P\{X=x_1\}=p, P\{X=x_2\}=1-p$$

◆ 0-1分布（两点分布的特例）

$$P\{X=0\}=p, P\{X=1\}=1-p$$

◆ 二项分布

若X分布律为： $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$

则称X服从二项分布，记为 $X\sim b(n,p)$或$X\sim B(n,p)$

注意：X，n,p 表示什么含义？

问：$P\{X=0\}=?$ $P\{X=n\}=?$

答：$P\{X=0\}=(1-p)^n, P\{X=n\}=p^n$

◆ 二项分布

若X分布律为： $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$

则称X服从二项分布，记为 $X\sim b(n,p)$或$X\sim B(n,p)$

问：X=？时概率最大。

◆ 二项分布

例： 重复抛一枚骰子6次，记X表示点数大于2的次数

（1）求X的分布律；

（2）点数大于2最有可能出现几次？

解： （1）$X \sim b\left(6, \frac{2}{3}\right)$，分布律为：

$$P\{X=k\}=C_6^k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{6-k}, k=0,1,2,\cdots,6$$

（2）由于$(n+1)p=\frac{14}{3}$，故点数大于2最有可能出现4次。

◆ 泊松分布

若X分布律为： $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\lambda>0,k=0,1,2,\cdots$

则称X服从泊松分布，记为 $X\sim P(\lambda)$或$X\sim\pi(\lambda)$

注意：X可以用来描述满足一定条件下随机事件发生的次数。

◆ 二项分布的泊松近似（略）

◆ 作业

习题2-2（Page43-44）: 1，2, 3,4,11

◆ 作业解答

1. 设随机变量X服从参数为λ的泊松分布，且$P\{X=1\}=P\{X=2\}$，求λ.

解. $P\{X=1\}=\dfrac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}=\lambda e^{-\lambda}$，$P\{X=2\}=\dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}=\dfrac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda}$

$$P\{X=1\}=P\{X=2\}\Rightarrow \lambda e^{-\lambda}=\frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda}\Rightarrow \lambda=2$$

2. 设随机变量X分布律为，$P\{X=k\}=\dfrac{k}{15},k=1,2,3,4,5.$

试求：（1）$P\left\{\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{5}{2}\right\}$；（2）$P\{1\le X\le 3\}$；（3）$P\{X>3\}$

解.（1）$P\left\{\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{5}{2}\right\}=P\{X=1\cup X=2\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}=\dfrac{1}{15}+\dfrac{2}{15}=\dfrac{1}{5}$

（2）$P\{1\le X\le 3\}=P\{X=1\cup X=2\cup X=3\}$

$$=P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{3}{15}=\frac{2}{5}$$

（3）$P\{X>3\}=P\{X=4\cup X=5\}=P\{X=4\}+P\{X=5\}=\dfrac{4}{15}+\dfrac{5}{15}=\dfrac{3}{5}$

3. 已知随机变量X只能取-1, 0, 1, 2四个值，相应的概率依次为$\frac{1}{2c},\frac{3}{4c},\frac{5}{8c},\frac{7}{16c}$

试确定常数c，并计算$P\left\{X<1 \middle| X\neq 0\right\}$

解. $\frac{1}{2c}+\frac{3}{4c}+\frac{5}{8c}+\frac{7}{16c}=1\Rightarrow c=\frac{37}{16}$

$$P\left\{X<1 \middle| X\neq 0\right\}=\frac{P\{X<1, X\neq 0\}}{P\{X\neq 0\}}=\frac{P\{X=-1\}}{P\{X\neq 0\}}=\frac{P\{X=-1\}}{1-P\{X=0\}}=\frac{\frac{1}{2c}}{1-\frac{3}{4c}}$$

$$=\frac{8}{25}=0.32$$

4. 袋子中装有5个球，编号为1, 2，3, 4, 5，在袋中同时取三个，以X表示取出的3个球中的最大号码，求X的分布律.

解法一. $$P\{X=3\}=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$$

$$P\{X=4\}=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$$

$$P\{X=5\}=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}$$

4. 袋子中装有5个球，编号为1, 2，3, 4, 5，在袋中同时取三个，以X表示取出的3个球中的最大号码，求X的分布律.

解法二.

X	3	4	5
P	1/10	3/10	6/10

11. 设随机变量 $X \sim b(2,p)$, $Y \sim b(3,p)$，若 $P\{X \geq 1\} = \dfrac{5}{9}$，求 $P\{Y \geq 1\}$.

解. $P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} = 1 - (1-p)^2 = \dfrac{5}{9} \Rightarrow p = \dfrac{1}{3}$

$$P\{Y \geq 1\} = 1 - P\{Y = 0\} = 1 - (1-p)^3 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}$$