第6章 ——参数估计

◆参数估计的思想

根据样本的观察值估计总体分布中的未知参数。

◆参数估计的分类

- 点估计：用一个数去估计未知参数的取值。
- 区间估计：用一个区间估计未知参数的取值范围。

第6.1节　——点估计问题概述

- 点估计的概念（*****）
- 点估计量的评价标准（*****）

第6.1节　点估计问题概述

◆ 点估计的概念

- **估计量**：用来估计未知参数的统计量；
- **估计值**：估计量的观测值；

例如：已知某种螺钉重量X的分布如下，确定其均值

$$X \sim N(\mu, 4)$$

现取样本：X_1, X_2, X_3，其观测值为：$x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 6$

作如下估计：$\hat{\mu} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = 5$　（估计值）

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) \qquad \text{(估计量)}$$

例如： **已知某种螺钉重量X的分布如下，确定其均值**

$$X \sim N(\mu, 4)$$

现取样本：X_1, X_2, X_3，其观测值为：$x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 6$

作如下估计：$\hat{\mu}=\frac{1}{3}\left(x_1+x_2+x_3\right)=5$　（估计值）

$$\tilde{\mu}=\frac{1}{3}\left(X_1+X_2+X_3\right) \qquad \text{(估计量)}$$

或作如下估计：$\hat{\mu}=0.3x_1+0.4x_2+0.3x_3=5$　（估计值）

$$\tilde{\mu}=0.3X_1+0.4X_2+0.3X_3 \qquad \text{(估计量)}$$

◆ 点估计的评选标准

➢ 无偏性（5S）

无偏估计量：$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$

➢ 有效性（5S）

设$E\left(\hat{\theta}_1\right)=\theta, E\left(\hat{\theta}_2\right)=\theta$，若$D\left(\hat{\theta}_1\right)<D\left(\hat{\theta}_2\right)$,则称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_1$有效。

➢ 相合性（一致性）（2S）

相合估计量：$\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|<\varepsilon\right\}=1$

◆ 定理（5S）

设任意总体X，以下结论均成立

$$(1)E\left(\bar{X}\right)=E\left(X\right)$$

$$(2)E\left(S^2\right)=D\left(X\right)$$

$$(3)E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)\neq D\left(X\right)$$

即：

- 样本均值是总体均值的无偏估计量；
- 样本方差是总体方差的无偏估计量；
- 样本二阶中心矩是总体方差的有偏估计量；

◆ 习题讲解

P158_4 设$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量，且$D\left(\hat{\theta}\right)>0$,试证：$\left(\hat{\theta}\right)^2$不是$\theta^2$无偏估计量。

DEMO

P158_5 设总体$X\sim P\left(\lambda\right)$,试求$\lambda^2$的无偏估计量。

DEMO

◆ 习题讲解

P158_3 设$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量，且$D\left(\hat{\theta}\right)>0$,试证：$\left(\hat{\theta}\right)^2$不是$\theta^2$无偏估计量。

证明： 即证明：$\mathrm{E}\left[\left(\hat{\theta}\right)^2\right]\neq\theta^2$

$$\mathrm{E}\left[\left(\hat{\theta}\right)^2\right]=D\left(\hat{\theta}\right)+\left[E\left(\hat{\theta}\right)\right]^2=D\left(\hat{\theta}\right)+\theta^2\neq\theta^2$$

注：设$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量，$\mathrm{g}(\theta)$是θ的函数，未必能推出$\mathrm{g}\left(\hat{\theta}\right)$是$\mathrm{g}(\theta)$无偏估计量。

RETURN

◆ 习题讲解

P158_5 设总体$X \sim P(\lambda)$，试求λ^2的无偏估计量。

分析：$E(\bar{X}) = E(X) = \lambda$，则$\left[E(\bar{X})\right]^2 = \lambda^2$

而 $$\left[E(\bar{X})\right]^2 = E(\bar{X}^2) - D(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \frac{D(X)}{n} = E(\bar{X}^2) - \frac{E(S^2)}{n}$$

$$= E(\bar{X}^2) - E\left(\frac{S^2}{n}\right) = E\left(\bar{X}^2 - \frac{S^2}{n}\right)$$

即：$E\left(\bar{X}^2 - \dfrac{S^2}{n}\right) = \lambda^2$

RETURN