第3.2节 ——条件分布与随机变量的独立性

（1）条件分布
- 条件分布函数（*）
- 条件分布律（***）
- 条件概率密度（**）

（2）独立性
- 离散型随机变量独立性判定
- 连续型随机变量独立性判定

（*****）

知识回顾

例：已知(X,Y)的概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases} kx, & 0<x<1, 0<y<x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k;

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$;

提示：$F(+\infty,+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=1$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

知识回顾

例：已知(X,Y)的概率密度为： $f(x,y)=\begin{cases} kx, & 0<x<1, 0<y<x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k；

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x kx\,dy=\frac{k}{3}=1 \Rightarrow k=3$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^x 3xdy, & 0<x<1 \\ 0, & else \end{cases}=\begin{cases} 3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_y^1 3xdx, & 0<y<1 \\ 0, & else \end{cases}=\begin{cases} \frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1 \\ 0, & else \end{cases}$$

◆ 分布函数

定义： $F_X(x) = P\{X \le x\}$， $x \in R$

◆ 条件分布函数（*）

定义： $F(x|A) = P\{X \le x|A\}$， $x \in R$

分析： $F(x|A) = P\{X \le x|A\} = \dfrac{P\{X \le x \cap A\}}{P(A)}$， $x \in R$

◆ 条件分布律（3S）

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1	1	2
-1	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0.3	0.2

（1）求X的分布律;

（2）求在$Y=1$的条件下，X的条件分布律.

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1	1	2
-1	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0.3	0.2

（1）求X的边缘分布律;

（2）求在$Y=1$的条件下，X的条件分布律.

$$P\{X=-1\}=0.3$$

$$P\{X=1\}=0.4$$

$$P\{X=2\}=0.3$$

$$P\{X=-1|Y=1\}=\frac{P\{X=-1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{0.1}{0.6}=\frac{1}{6}$$

$$P\{X=1|Y=1\}=\frac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{0.3}{0.6}=\frac{3}{6}$$

$$P\{X=2|Y=1\}=\frac{P\{X=2,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\frac{0.2}{0.6}=\frac{2}{6}$$

例：　已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1	1	2
-1	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0.3	0.2

（1）求X的边缘分布律;

（2）求在$Y=1$的条件下，X的条件分布律.

X	-1	1	2
P	0.3	0.4	0.3

X	-1	1	2
$P\{X=x_i \mid Y=1\}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1	1	2
-1	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0.3	0.2

（1）求X的边缘分布律;

（2）求在$Y=1$的条件下，X的条件分布律;

（3）求在$X=1$的条件下，Y的条件分布律.

X	-1	1	2
P	0.3	0.4	0.3

X	-1	1	2
$P\{X=x_i\|Y=1\}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

Y	-1	1
$P\{Y=y_j\|X=1\}$	0.25	0.75

◆ 条件概率密度（2S）

定义：在$X=x$条件下Y的条件概率密度为：

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},\quad f_X(x)>0\ y\in R$$

定义：在$Y=y$条件下X的条件概率密度为：

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\quad f_Y(y)>0,\ x\in R$$

例：已知(X,Y)的概率密度为： $f(x,y)=\begin{cases} kx, & 0<x<1, 0<y<x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k;

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$;

（3）求$f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$.

$$k=3$$

$$f_X(x)=\begin{cases} 3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}\left(1-y^2\right), & 0<y<1 \\ 0, & else \end{cases}$$

例：已知(X,Y)的密度为：$f(x,y)=\begin{cases} kx, & 0<x<1, 0<y<x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k；

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（3）求$f_{Y|X}(y|x)$，$f_{X|Y}(x|y)$.

$k=3$

$f_X(x)=\begin{cases} 3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1 \\ 0, & else \end{cases}$

当$0<x<1$时，$f_X(x)=3x^2>0$，此时有 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases} \dfrac{3x}{3x^2}, & 0<y<x \\ \dfrac{0}{3x^2}, & \text{else} \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0<y<x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

当$0<y<1$时，$f_Y(y)=\dfrac{3}{2}(1-y^2)>0$，此时有 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases} \dfrac{3x}{\frac{3}{2}(1-y^2)}, & y<x<1 \\ \dfrac{0}{\frac{3}{2}(1-y^2)}, & \text{else} \end{cases}=\begin{cases} \dfrac{2x}{1-y^2}, & y<x<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

第3.2节：条件分布与随机变量的独立性

例：已知$f(x,y)=\begin{cases} kx, & 0<x<1, 0<y<x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k；

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（3）求$f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x kxdy=\frac{k}{3}=1\Rightarrow k=3$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 3xdy, & 0<x<1 \\ 0, & else\end{cases}=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 3xdx, & 0<y<1 \\ 0, & else\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1 \\ 0, & else\end{cases}$$

当$0<x<1$时，$f_X(x)=3x^2>0$,此时有 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{3x}{3x^2}, & 0<y<x \\ \dfrac{0}{3x^2}, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x \\ 0, & \text{else}\end{cases}$

当$0<y<1$时，$f_Y(y)=\frac{3}{2}(1-y^2)>0$,此时有 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{3x}{\frac{3}{2}(1-y^2)}, & y<x<1 \\ \dfrac{0}{\frac{3}{2}(1-y^2)}, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-y^2}, & y<x<1 \\ 0, & \text{else}\end{cases}$

第3.2节：条件分布与随机变量的独立性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 dx\int_0^x kxdy = \frac{k}{3} = 1 \Rightarrow k = 3$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^x 3xdy, & 0<x<1 \\ 0, & else \end{cases} = \begin{cases} 3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_y^1 3xdx, & 0<y<1 \\ 0, & else \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1 \\ 0, & else \end{cases}$$

当$0<x<1$时，$f_X(x) = 3x^2 > 0$，此时有 $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \dfrac{3x}{3x^2}, & 0<y<x \\ \dfrac{0}{3x^2}, & \text{else} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0<y<x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

当$0<y<1$时，$f_Y(y) = \dfrac{3}{2}(1-y^2) > 0$，此时有 $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \dfrac{3x}{\frac{3}{2}(1-y^2)}, & y<x<1 \\ \dfrac{0}{\frac{3}{2}(1-y^2)}, & \text{else} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2x}{1-y^2}, & y<x<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

第3.2节：条件分布与随机变量的独立性

◆独立定义

若对任意x,y有：$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$,则称X,Y相互独立.

或若对任意x,y, 有$P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$，则称$X,Y$相互独立.

◆独立性质

1. 若X,Y独立，则由X,Y生成的任意事件也相互独立，亦即
 对任意实数集A,B,有：$P\{X\in A,Y\in B\}=P\{X\in A\}P\{Y\in B\}$.

2. 若X,Y独立，对任意函数$g_1(x),g_2(y)$均有$g_1(X),g_2(Y)$也相互独立.

◆ 相互独立判定(充要条件)

X,Y独立 $\Leftrightarrow$ 对任意x,y有：$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$.

$\Leftrightarrow$ 对任意x,y, 有$P\{X\le x,Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$.

$\Leftrightarrow$ 对任意A,B,有：$P\{X\in A,Y\in B\}=P\{X\in A\}P\{Y\in B\}$.

$\Leftrightarrow$ 对任意函数$g_1(x),g_2(y)$均有$g_1(X),g_2(Y)$也相互独立.

$\Leftrightarrow$ 对$\forall x_i,y_j$有$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}$.（离散型）

$\Leftrightarrow$ 对$\forall x,y$有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.（连续型）

例：　已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	1	2	3
0	0.1	0.2	0.2
1	0.1	0.2	0.2

（1）求(X,Y)关于X,Y的边缘分布律；

（2）判断X,Y的独立性，说明理由。

$Y \backslash X$	1	2	3	
0	0.1	0.2	0.2	0.5
1	0.1	0.2	0.2	0.5
	0.2	0.4	0.4	

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：（1）求(X,Y)关于X,Y的边缘分布律；

（2）判断X,Y的独立性，说明理由。

$Y \backslash X$	1	2	3	
0	0.1	0.2	0.2	0.5
1	0.1	0.2	0.2	0.5
	0.2	0.4	0.4	

X	1	2	3
P	0.2	0.4	0.4

Y	0	1
P	0.5	0.5

由于对$\forall x_i, y_j$有$P\left\{X=x_i, Y=y_j\right\}=P\left\{X=x_i\right\}P\left\{Y=y_j\right\}$，故$X,Y$相互独立.

例：　已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1	1	2
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	k	0.2

（1）求常数k;

（2）求(X,Y)关于X,Y的边缘分布律；

（3）求$F(1.2,0)$;

（4）求$P\{|X+Y|>1\}$;

（5）判断X,Y的独立性，说明理由。

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：（5）判断X,Y的独立性，说明理由。

$Y \backslash X$	-1	1	2	
-1	0.2	0.1	0.2	0.5
1	0.1	0.2	0.2	0.5
	0.3	0.3	0.4	

由于$P\{X=-1,Y=-1\}=0.2\neq P\{X=-1\}P\{Y=-1\}=0.3\times 0.5=0.15$

故X,Y不独立。

例：已知(X,Y)的概率密度为： $f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k;

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$;

（3）求$P\{X\geq Y\}$;

（4）判断X,Y的独立性，说明理由。

第3.2节：条件分布与随机变量的独立性

例：已知(X,Y)的概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k；

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（3）求$P\{X\ge Y\}$；

（4）判断X,Y的独立性，说明理由。

（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}ke^{-(2x+y)}dy=\frac{1}{2}k=1\Rightarrow k=2$

（2）$f_X(x)=\int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2e^{-(2x+y)}dy, & x>0 \\ 0, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0 \\ 0, & \text{else}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2e^{-(2x+y)}dx, & y>0 \\ 0, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{else}\end{cases}$

（3）$P\{X\ge Y\}=\iint\limits_{x\ge y} f(x,y)\,dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{x}2e^{-(2x+y)}dy=\frac{1}{3}$

例：已知(X,Y)的概率密度为： $f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k；

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（3）求$P\{X \geq Y\}$；

（4）判断X,Y的独立性，说明理由。

（2）$f_X(x)=\int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} 2e^{-2x}, & x>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（4）由于对$\forall x, y$有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故X,Y相互独立.

例：$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k；

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（3）求$P\{X\geq Y\}$；

（4）判断X,Y的独立性，说明理由。

（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}ke^{-(2x+y)}dy=\frac{1}{2}k=1\Rightarrow k=2$

（2）$f_X(x)=\int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2e^{-(2x+y)}dy, & x>0 \\ 0, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0 \\ 0, & \text{else}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}2e^{-(2x+y)}dx, & y>0 \\ 0, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{else}\end{cases}$

（3）$P\{X\geq Y\}=\iint\limits_{x\geq y} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{x}2e^{-(2x+y)}dy=\frac{1}{3}$

（4）由于对$\forall x,y$有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故X,Y相互独立.

例：已知(X,Y)的密度为：$f(x,y)=\begin{cases} kx, & 0<x<1, 0<y<x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k；

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（3）求$f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$；

（4）判断X,Y的独立性，说明理由。

$k=3$

$f_X(x)=\begin{cases} 3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{3}{2}\left(1-y^2\right), & 0<y<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（4）由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故X,Y不独立.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x kxdy=\frac{k}{3}=1 \Rightarrow k=3$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 3xdy, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_y^1 3xdx, & 0<y<1\\ 0, & else\end{cases}=\begin{cases}\frac{3}{2}\left(1-y^2\right), & 0<y<1\\ 0, & else\end{cases}$$

(3) 当$0<x<1$时，$f_X(x)=3x^2>0$，此时有$f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{3x}{3x^2}, & 0<y<x\\ \dfrac{0}{3x^2}, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

当$0<y<1$时，$f_Y(y)=\frac{3}{2}\left(1-y^2\right)>0$，此时有 $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{3x}{\frac{3}{2}\left(1-y^2\right)}, & y<x<1\\ \dfrac{0}{\frac{3}{2}\left(1-y^2\right)}, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2x}{1-y^2}, & y<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

(4) 由于 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，故X,Y不独立.

◆ 作业

1. 已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	1	2	3
0	0.1	0.2	0.2
1	0.1	0.2	0.2

（1）求(X,Y)关于X,Y的边缘分布律；

（2）判断X,Y的独立性，说明理由.

◆ 作业

2. 已知(X,Y)的密度为： $f(x,y)=\begin{cases} kx, & 0<x<1,0<y<x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k;

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$;

（3）求$f_{Y|X}(y|x), f_{X|Y}(x|y)$;

（4）判断X,Y的独立性，说明理由。