第1.4节 ——条件概率

- 条件概率公式（5S）；
- 乘法公式（5S）；
- 全概率公式（5S）；
- 贝叶斯公式（5S）；

知识回顾

◆ 完备事件组

事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$构成一个完备事件组要满足什么条件?

两个条件: $\begin{cases} \forall i \neq j, A_i A_j = \varnothing \\ A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S \end{cases}$

A和$\overline{A}$能构成一个完备事件组吗?　（可以）

知识回顾

◆ 古典概率的计算

抛一枚骰子，观察骰子的点数，记 $A=\{3,4,5,6\},B=\{2,4,6\}$

计算：$P(A),P(B),P(AB)$

解：$S=\{1,2,\cdots,6\}$，$AB=\{4,6\}$

$$P(A)=\frac{n_A}{n_S}=\frac{4}{6},\quad P(B)=\frac{n_B}{n_S}=\frac{3}{6},\quad P(AB)=\frac{n_{AB}}{n_S}=\frac{2}{6}$$

知识回顾

◆ 古典概率的计算

抛一枚骰子，观察骰子的点数，记 $\boldsymbol{A}=\{3,4,5,6\}$, $\boldsymbol{B}=\{2,4,6\}$

问题：已知A发生了，则B发生的概率是多少？

条件概率：$P(B|A)=\dfrac{2}{4}$

◆ 条件概率的定义

定义：已知A发生了，再求B发生的概率，此概率称为：

“B对A的条件概率”记为：

$$P\left(B\middle|A\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(A\right)},\ \left(P\left(A\right)>0\right)$$

而$P\left(B\right)$称为无条件概率。

注意：$P\left(B\middle|A\right)$与$P\left(B\right)$的区别。

第1.4节：条件概率

定义：已知A发生了，再求B发生的概率，此概率称为：

"B对A的条件概率"记为： $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

例：抛一枚骰子，观察骰子的点数，记 $A=\{3,4,5,6\},B=\{2,4,6\}$

问题：已知A发生了，则B发生的概率是多少？

条件概率：$P(B|A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{2/6}{4/6}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$

◆ 条件概率的性质（3s）

(1) 对任一事件B， $\mathbf{0} \le P(B|A) \le 1$

(2) $P(S|A) = 1$

(3) 设$B_1, B_2, \cdots, B_n$两两互不相容，则

$$P(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n | A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) + \cdots + P(B_n|A)$$

◆ 条件概率的计算方法（5S）

例：抛一枚骰子，观察骰子的点数，记 $\boldsymbol{A}=\{3,4,5,6\},\boldsymbol{B}=\{2,4,6\}$

问题：已知A发生了，求B发生的概率。

$$\text{条件概率：}P(B|A)=\frac{2}{4}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

(1) "直接法"：在缩减的样本空间A中求B发生的概率；

(2) 公式法： $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}.$

◆乘法公式（5S）

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB)=P(A)P(B|A)$$

同理：$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(AB)=P(B)P(A|B)$

乘法公式：$P(AB)=P(A)P(B|A)$

$$=P(B)P(A|B)$$

推广，如：$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)$

例1： 一袋中装有10个球，其中3个黑球，7个白球，先后两次从袋子中各取一球（不放回）

（1）已知第一次取到黑球，求第二次仍取到黑球的概率；

（2）已知第二次取到黑球，求第一次取到的球也是黑球的概率。

解： 记A_1, A_2分别表示第1，2次取到黑球, 则

（1）$P\left(A_2 | A_1\right)=\frac{2}{9}$

（2）$P\left(A_1 | A_2\right)=\frac{P\left(A_1 A_2\right)}{P\left(A_2\right)}$， $P\left(A_1 A_2\right)=P\left(A_1\right) P\left(A_2 | A_1\right)=\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}=\frac{1}{15}$

$$P\left(A_2\right)=P\left(A_2 S\right)=P\left[A_2\left(A_1 \cup \bar{A}_1\right)\right]=P\left(A_1 A_2 \cup \bar{A}_1 A_2\right)=P\left(A_1 A_2\right)+P\left(\bar{A}_1 A_2\right)$$

$$=P\left(A_1\right) P\left(A_2 | A_1\right)+P\left(\bar{A}_1\right) P\left(A_2 | \bar{A}_1\right)=\frac{3}{10} \times \frac{2}{9}+\frac{7}{10} \times \frac{3}{9}=\frac{3}{10}$$

例： 一袋中装有10个球，其中3个黑球，7个白球，先后三次从袋子中各取一球（不放回）

（1）求“三次均取到黑球”的概率；

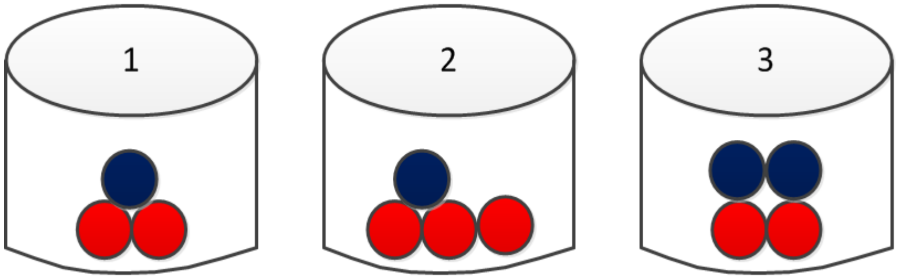
（2）求“第一次和第三次取到黑球第二次取到白球”的概率。

解： 记A_1, A_2, A_3分别表示第1,2,3次取到黑球，则

（1）$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}$

（2）$P(A_1\overline{A_2}A_3)=P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1)P(A_3|A_1\overline{A_2})=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{8}$

例6： 三个罐中都装有黑球和红球（具体如下图），某人从中随机取一罐，再从中任意取出一球，求取得红球的概率.



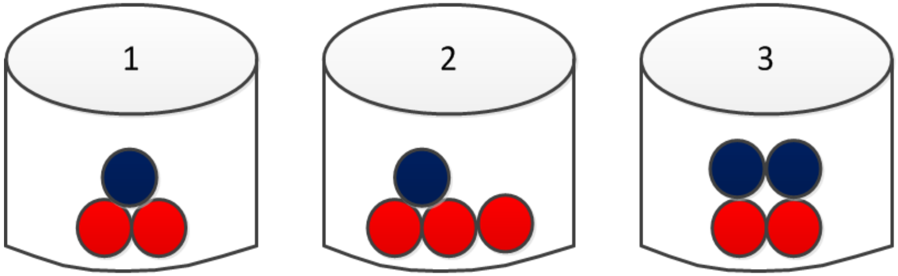
解： 记A_1, A_2, A_3分别表示取到第1，2，3罐，记B表示取到红球，则所求概率为$P(B)$

解：$P(B) = P(BS) = P\left(B\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right)\right)$

$$= P\left(BA_1 \cup BA_2 \cup BA_3\right) = P\left(BA_1\right) + P\left(BA_2\right) + P\left(BA_3\right)$$

$$= P\left(A_1\right)P\left(B|A_1\right) + P\left(A_2\right)P\left(B|A_2\right) + P\left(A_3\right)P\left(B|A_3\right)$$

例6： 三个罐中都装有黑球和红球（具体如下图），某人从中随机取一罐，再从中任意取出一球，求取得红球的概率.



解： 记A_1, A_2, A_3分别表示取到第1，2，3罐，记B表示取到红球，则所求概率为$P(B)$

解：$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}$$

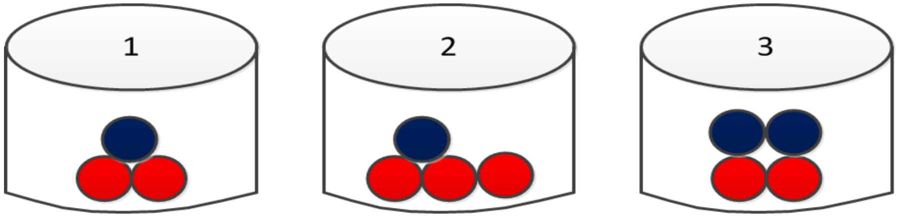
◆ 全概率公式（5S）

定理：设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是一个完备事件组，且$P(A_i)>0$,则对任一事件B, 有

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

例7：　三个罐中都装有黑球和红球（具体如下图），某人从中随机取一罐，再从中任意取出一球，若取到红球，则取到第一罐的概率是多少？

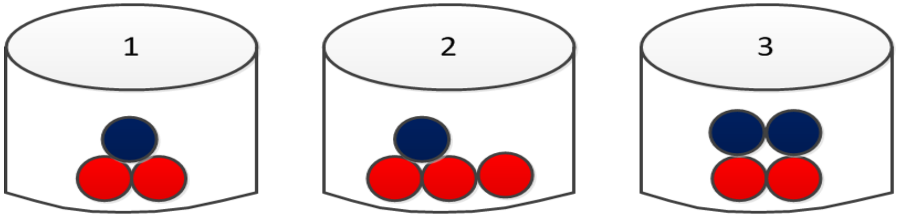


解：　记A_1, A_2, A_3分别表示取到第1，2，3罐，记B表示取到红球，则所求概率为$P(A_1|B)$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}}$$

例7： 三个罐中都装有黑球和红球（具体如下图），某人从中随机取一罐，再从中任意取出一球，若取到红球，则取到第一罐的概率是多少？



解： 记A_1, A_2, A_3分别表示取到第1，2，3罐，记B表示取到红球，则所求概率为$P\left(A_1 \middle| B\right)$

$$P\left(A_1 \middle| B\right)=\frac{P\left(A_1\right)P\left(B \middle| A_1\right)}{P\left(A_1\right)P\left(B \middle| A_1\right)+P\left(A_2\right)P\left(B \middle| A_2\right)+P\left(A_3\right)P\left(B \middle| A_3\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}}$$

◆ 贝叶斯公式（5S）

定理：设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是一个完备事件组，则对任一事件B, 有

$$P\left(A_k \middle| B\right)=\frac{P\left(A_k B\right)}{P(B)}=\frac{P\left(A_k\right)P\left(B \middle| A_k\right)}{\sum_{i=1}^{n}P\left(A_i\right)P\left(B \middle| A_i\right)}, k=1,2,\cdots,n$$

◆ 作业

习题1-4（Page24-25）: 3,4,7,9

◆ 作业解答

3. 已知$P(A)=\dfrac{1}{4}, P(B|A)=\dfrac{1}{3}, P(A|B)=\dfrac{1}{2}$,求$P(A\cup B)$

解. $P(AB)=P(A)P(B|A)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \quad \Rightarrow P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$

4. 设A, B为随机事件，$P(A)=0.7$，$P(B)=0.5, P(A-B)=0.3,$

求：$P(AB), P(B-A), P(\bar{B}|\bar{A})$.

解. $P(A-B)=P(A)-P(AB) \Rightarrow P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.7-0.3=0.4$

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.5-0.4=0.1$$

$$P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\bar{A})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}$$

$$=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(AB)]}{1-P(A)}=\frac{1-[0.7+0.5-0.4]}{1-0.7}=\frac{2}{3}$$

7. 用三部机床加工同一种零件，零件由各机床加工的概率分别为：0.5, 0.3, 0.2，各机床加工的零件为合格品的概率分别等于0.94, 0.9, 0.95 求全部产品的合格率.

解： 随机选一机床（三机床被选概率分别为0.5, 0.3, 0.2），再从该机床加工的零件中随机取一个产品，该产品合格的概率即为全部产品的合格率.

记A_1, A_2, A_3分别表示取到第1，2，3机床，记B表示所取产品合格, 则全部产品合格率为概率$P(B)$

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$=0.5\times0.94+0.3\times0.9+0.2\times0.95$$

9. 某仓库有同样规格的产品六箱，其中三箱是甲厂生产的，两箱是乙厂生产的，另一箱是丙厂生产的，且它们的次品率依次为：$\frac{1}{10},\frac{1}{15},\frac{1}{20}$，现从中任取一件产品，试求该产品是正品的概率.

解：记A_1,A_2,A_3分别表示所取产品为甲、乙、丙厂生产，记B表示所取产品为正品，则所求概率为$P(B)$

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)$$

$$=\frac{3}{6}\times\left(1-\frac{1}{10}\right)+\frac{2}{6}\times\left(1-\frac{1}{15}\right)+\frac{1}{6}\times\left(1-\frac{1}{20}\right)$$