第5.2节 ——常用统计分布

- ◆随机变量的分位数（*****）

- ◆三大统计分布（*****）

第5.2节　常用统计分布

◆ 分位数定义

上侧分位数：　$P\{X > F_{\alpha}\} = \alpha$

双侧分位数：　$P\{|X| > T_{\alpha/2}\} = \alpha$

◆ 标准正态的分位数

当X $\sim N(\mathbf{0},\mathbf{1})$时，记

上侧分位数：　$P\{X > u_{\alpha}\} = \alpha$

双侧分位数：　$P\{|X| > u_{\alpha/2}\} = \alpha$

性质1：　$u_{1-\alpha} = -u_{\alpha}$

性质2：　$P\{|X| < u_{\alpha/2}\} = 1-\alpha$

例：设$X \sim N(0,1)$，则

$P\{X > u_{0.05}\} = ($? $), P\{|X| > u_{0.05}\} = ($? $)$　　答案：0.05，0.1

$P\{|X| >$? $\} = 0.05$　　答案：$u_{0.025}$

$P\{|X| <$? $\} = 0.95$　　答案：$u_{0.025}$

◆ χ^2分布

➢ **定义**　设总体$X \sim N(0,1)$, $X_1, X_2, \cdots X_n$为样本,则称

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots X_n^2$$

服从自由度为n的χ^2分布，记为：$\chi^2 \sim \chi^2(n)$

问1：设$X \sim N(0,1)$,则$X^2 \sim \chi^2(1)$，对吗？　（答案：对）

问2：设X,Y独立同分布，且$X \sim N(0,1)$,则$X^2 + Y^2 \sim \chi^2(2)$，对吗？

（答案：对）

◆ χ^2分布

➢ **定义**　设总体$X \sim N(0,1)$, $X_1, X_2, \cdots X_n$为样本,则称

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots X_n^2$$

服从自由度为n的χ^2分布，记为： $\chi^2 \sim \chi^2(n)$

➢ **性质**

1. 若$\chi^2 \sim \chi^2(n)$，则 $E(\chi^2) = n, D(\chi^2) = 2n.$

2. 若$\chi_1^2 \sim \chi^2(m)$，$\chi_2^2 \sim \chi^2(n)$，且χ_1^2，χ_2^2相互独立，则 $\chi_1^2 + \chi_2^2 \sim \chi^2(m+n)$

分位数记号： $\chi_\alpha^2(n)$

◆ χ^2分布

➢ **定义**　设总体$X \sim N(0,1), X_1, X_2, \cdots X_n$为样本,则称

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots X_n^2$$

服从自由度为n的χ^2分布，记为：$\chi^2 \sim \chi^2(n)$

➢ **分位数**

上侧分位数记号：$\chi_\alpha^2(n)$　即：$P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \alpha$

例：设$X \sim \chi^2(n)$，则$P\{X < \chi_{1-\alpha/2}^2(n) \cup X > \chi_{\alpha/2}^2(n)\} = ?$　　答案：　α

◆ t分布

➢ **定义** 设$X \sim N(0,1), Y \sim \chi^2(n)$，且$X,Y$相互独立，则称

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$$

➢ **性质**

(1) 密度函数$f(x)$关于y轴对称.

(2) 当n充分大时，$T \sim N(0,1)$.

(3)**分位数性质：** $t_{1-\alpha}(n) = -t_{\alpha}(n)$

上侧分位数：	$P\{T > t_{\alpha}(n)\} = \alpha$
双侧分位数：	$P\{\lvert T\rvert > t_{\alpha/2}(n)\} = \alpha$

◆ F分布

➢ **定义**　设$X \sim \chi^2(m), Y \sim \chi^2(n)$，且$X, Y$相互独立，则称

$$F = \frac{X/m}{Y/n} = \frac{nX}{mY} \sim F(m,n)$$

➢ **性质**

(1) 若$T \sim t(n)$，则$T^2 \sim F(1,n)$.

(2) 若$F \sim F(m,n)$，则$\frac{1}{F} \sim F(n,m)$.

(3)分位数性质：$F_\alpha(m,n) = \dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}$.

上侧分位数：$P\{F > F_\alpha(m,n)\} = \alpha$

例：证明F分布分位数的性质：$F_\alpha(m,n)=\dfrac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}$.

证明：设$X\sim F(m,n)$,则由分位数的定义得：$P\{X>F_\alpha(m,n)\}=\alpha$

$$\Rightarrow P\left\{\frac{1}{X}<\frac{1}{F_\alpha(m,n)}\right\}=\alpha \quad \Rightarrow P\left\{\frac{1}{X}>\frac{1}{F_\alpha(m,n)}\right\}=1-\alpha$$

又$\dfrac{1}{X}\sim F(n,m)$,由分位数的定义得$P\left\{\dfrac{1}{X}>F_{1-\alpha}(n,m)\right\}=1-\alpha$

$$\Rightarrow \frac{1}{F_\alpha(m,n)}=F_{1-\alpha}(n,m) \quad \Rightarrow F_\alpha(m,n)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(n,m)}.$$

◆ 作业

P146: 1, 2, 3

◆ 习题讲解

P146：6 （2）

证明：由已知得： $X \sim F(n_1,n_2)$,则由分位数的定义得：

$$P\left\{X > F_{1-\alpha}(n_1,n_2)\right\} = 1-\alpha$$

从而 $P\left\{\frac{1}{X} < \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right\} = 1-\alpha \quad \Rightarrow P\left\{\frac{1}{X} \geq \frac{1}{F_{1-\alpha}(n_1,n_2)}\right\} = \alpha$

又 $\frac{1}{X} \sim F(n_2,n_1) \Rightarrow P\left\{\frac{1}{X} > F_\alpha(n_2,n_1)\right\} = \alpha \Rightarrow P\left\{\frac{1}{X} \geq F_\alpha(n_2,n_1)\right\} = \alpha$

故 $F_{1-\alpha}(n_1,n_2) = \frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$

◆ 由分位数定义思考如下题目

例：设$X \sim N(0,1)$，则

$$P\{X > u_\alpha\} = (\quad \alpha \quad),\ P\{|X| > u_{\alpha/2}\} = (\quad \alpha \quad)$$

$$P\{|X| < \ ?\ \} = (\quad 1-\alpha \quad)$$

$$P\{|X| < u_{\alpha/2}\} = (\quad 1-\alpha \quad)$$

$$P\{X > ?\} = 0.05,\quad P\{|X| > ?\} = 0.05$$

$$P\{X > u_{0.05}\} = 0.05,\quad P\{|X| > u_{0.025}\} = 0.05$$

◆ 由分位数定义思考如下题目

例：设$X \sim t(n-1)$，则$P\{|X| > \ ? \ \} = \alpha$

答：　由双侧分位数的定义：$P\{|X| > t_{\alpha/2}(n-1)\} = \alpha$

例：设$X \sim t(n-1)$，则$P\{|X| < \ ? \ \} = 1-\alpha$

答：$P\{|X| < t_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$

◆ 由分位数定义思考如下题目

例：设$X \sim \chi^2(n-1)$，则 $P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < X < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = ?$

答：　由上侧分位数的定义：$\begin{cases} P\{X > \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha/2 \\ P\{X > \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = \alpha/2 \end{cases}$

$$\Rightarrow P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < X < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = 1-\alpha$$

例：设$X \sim \chi^2(n-1)$，则 $P\{X < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \cup X > \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = ?$

答：　$P\{X < \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \cup X > \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\} = \alpha$

◆ 由分位数定义思考如下题目

例：$X \sim F(n_1-1, n_2-1)$，则 $P\{X < F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) \cup X > F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\} = ?$

答：$P\{X < F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) \cup X > F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\}$

$$= P\{X < F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\} + P\{X > F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\}$$

$$= 1 - P\{X > F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\} + P\{X > F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\}$$

$$= 1 - (1 - \alpha/2) + \alpha/2 \qquad = \alpha$$

$P\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) < X < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\} = ?$

答：$P\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) < X < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\} = 1 - \alpha$