第6.2节　——点估计的常用方法

◆矩估计法（*****）

◆最大似然估计法（*****）

第6.2节　点估计的常用方法

◆ 知识回顾

➢ 辛钦大数定理

设$X_1, X_2, \cdots X_n$独立同分布，$E(X_i)=\mu$，则即对任意$\varepsilon>0$：

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\overline{X}-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1, \quad \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

即$\overline{X}$依概率收敛于μ，记为：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} \mu$

统计学结论：样本均值依概率收敛于总体期望，即

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow{P} E(X)$$

第6.2节　点估计的常用方法

◆ 矩估计法

➢ 原理：大数定理

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}X_i^k\xrightarrow{P}\mu_k=E\left(X^k\right)$$

A_k ________ 样本k阶原点矩

μ_k ________ 总体k阶原点矩

注：当$k=1$时，$\bar{X}\xrightarrow{P}E\left(X\right)$

第6.2节　点估计的常用方法

◆矩估计法

➢ 原理：大数定理　$A_k = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} \mu_k = E\left(X^k\right)$

➢ 步骤：

(1) 确定要估计参数的个数：k.

(2) 计算$1\sim k$阶总体原点矩：　$\mu_m = E\left(X^m\right), m = 1,\cdots,k.$

(3) 建立k个方程：　$A_m = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i^m = \mu_m = E\left(X^m\right),\ m = 1,\cdots,k.$

(4)解方程得未知参数的矩估计量.

(5)将估计量中的X_i换成x_i得矩估计值.

◆ 矩估计法步骤（只有一个未知参数情形）

(1) 计算总体期望：$E(X)$.

(2) 建立方程：$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=E(X)$.

(3) 解方程得未知参数的矩估计量.

(4) 将估计量中的X_i换成x_i得矩估计值.

第6.2节 点估计的常用方法

例：已知X的分布律如下，X_1,X_2,X_3为一样本，其样本值为：$x_1=1,x_2=2,x_3=1$

求θ的矩估计量和矩估计值.

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

(1) 计算总体期望： $E(X)$.

(2) 建立方程： $\overline{X}=E(X)$.

(3)解方程得未知参数的矩估计量.

(4)将估计量中的X_i换成x_i得矩估计值.

第6.2节　点估计的常用方法

例：已知X的分布律如下，X_1,X_2,X_3为一样本，其样本值为：$x_1=1,x_2=2,x_3=1$

求θ的矩估计量和矩估计值.

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

解：由已知得：$E(X)=1\times\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=3-2\theta$

令 $\overline{X}=E(X)\Rightarrow\overline{X}=3-2\theta$

故θ的矩估计量为：$\tilde{\theta}=\dfrac{3-\overline{X}}{2}$，其中$\overline{X}$为样本均值.

θ的矩估计值为：$\hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{x}}{2}$，其中$\overline{x}$为样本均值的观察值.

由已知：$\overline{x}=\dfrac{1}{3}(1+2+1)=\dfrac{4}{3}$，从而$\theta$的矩估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{x}}{2}=\dfrac{5}{6}$

第6.2节　点估计的常用方法

例：已知X的密度为：$f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha}, & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，其中未知参数$\alpha>-1$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为一样本，求α的矩估计量和矩估计值.

(1) 计算总体期望：　$E(X)$.

(2) 建立方程：　$\overline{X}=E(X)$.

(3)解方程得未知参数的矩估计量.

(4)将估计量中的X_i换成x_i得矩估计值.

例：已知X的密度为：$f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha}, & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，其中未知参数$\alpha>-1$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$为一样本，求α的矩估计量和矩估计值.

(1) 计算总体期望： $E(X)=\int_0^1 x(\alpha+1)x^{\alpha}dx=\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}.$

(2) 建立方程： $\overline{X}=E(X)=\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}.$

(3)解方程得α的矩估计量：$\tilde{\alpha}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}.$

$(4)$$\alpha$矩估计值：$\tilde{\alpha}=\dfrac{2\overline{x}-1}{1-\overline{x}}$.

第6.2节　点估计的常用方法

例：已知总体X的期望μ和方差σ^2存在且未知，$X_1, X_2, \cdots,$ X_n为一样本，求期望μ和方差σ^2的矩估计量.

(1) 确定要估计参数的个数：k.

(2) 计算$1 \sim k$阶总体原点矩：$\mu_m = E\left(X^m\right), m = 1, \cdots, k$.

(3) 建立k个方程：$A_m = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i^m = \mu_m = E\left(X^m\right),\ m = 1, \cdots, k$.

(4) 解方程得未知参数的矩估计量.

(5) 将估计量中的X_i换成x_i得矩估计值.

第6.2节　点估计的常用方法

◆ 最大似然估计法

➢ 原理：

在一次实验中，通常认为概率较大的事件比概率较小的事件容易发生；

故在一次实验中，若某事件发生了，则有理由认为该事件发生的概率较大。

➢ 似然函数：“样本取样本值的概率”

（1）离散型： $L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}$

（2）连续型 $L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=f_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1,\cdots,x_n)$

第6.2节　点估计的常用方法

➤ 似然函数："样本取样本值的概率"

- 离散总体似然函数

$$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=P\{X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n\}=P\{X_1=x_1\}P\{X_2=x_2\}\cdots P\{X_n=x_n\}$$

$$=P\{X=x_1\}\cdot P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\}=\prod_1^n P\{X=x_i\}$$

- 连续总体似然函数

$$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=f_{X_1X_2\cdots X_n}(x_1,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)$$

$$=f_X(x_1)f_X(x_2)\cdots f_X(x_n)=\prod_1^n f_X(x_i)$$

注：　样本$X_1,\ldots,X_n$是独立同分布的并且与总体X同分布。

第6.2节　点估计的常用方法

➢ 似然函数：“样本取样本值的概率”

- 离散总体似然函数

离散型：$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=P\{X=x_1\}P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\}=\prod_1^n P\{X=x_i\}$

- 连续总体似然函数

连续型：$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=f_X(x_1)f_X(x_2)\cdots f_X(x_n)=\prod_1^n f_X(x_i)$

➢ 最大似然估计法步骤：

（1）由样本值x_i写出似然函数：$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)$

离散型： $L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=P\{X=x_1\}P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\}$

连续型： $L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=f_X(x_1)f_X(x_2)\cdots f_X(x_n)$

（2）求似然函数 $L(\theta_1,\cdots,\theta_k)$的最大值点，得$\theta_i$的似然估计值$\widehat{\theta_i}$

（3）将估计值中的x_i换成X_i得似然估计量.

第6.2节　点估计的常用方法

例：已知X的分布律如下，X_1, X_2, X_3为一样本，其样本值为：$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1$

求$\theta\ (0 < \theta < 1)$的最大似然估计值.

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

提示：

（1）由样本值x_i写出似然函数：$L(\theta_1, \cdots, \theta_k) = \prod_1^n P\{X = x_i\}$

（2）求似然函数 $L(\theta_1, \cdots, \theta_k)$的最大值点，得$\theta_i$的似然估计值$\hat{\theta}_i$

第6.2节　点估计的常用方法

例：已知X的分布律如下，X_1,X_2,X_3为一样本，其样本值为：$x_1=1,x_2=2,x_3=1$

求$\theta\ (0<\theta<1)$的最大似然估计值.

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

解：似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{3}P\{X=x_i\}=P\{X=x_1\}\cdot P\{X=x_2\}\cdot P\{X=x_3\}$

$$=P\{X=1\}\cdot P\{X=2\}\cdot P\{X=1\}$$

$$=\theta^2\times2\theta(1-\theta)\times\theta^2=2\theta^5-2\theta^6$$

由$\dfrac{dL(\theta)}{d\theta}=10\theta^4-12\theta^5=0\Rightarrow\theta$最大似然估计值$\hat{\theta}=\dfrac{5}{6}$

例：已知总体$X \sim \pi(\lambda)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为一样本，其样本值为：$x_1, x_2, \cdots, x_n$

记$\theta = P\{X = 0\}$，分别求λ和θ 的最大似然估计值.

提示：

（1）由样本值x_i写出似然函数：$L(\theta_1, \cdots, \theta_k) = \prod_{1}^{n} P\{X = x_i\}$

（2）求似然函数 $L(\theta_1, \cdots, \theta_k)$的最大值点，得$\theta_i$的似然估计值$\hat{\theta}_i$

例：已知总体$X \sim \pi(\lambda)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$为一样本，其样本值为：$x_1, x_2, \cdots, x_n$

记$\theta = P\{X = 0\}$，分别求λ和θ 的最大似然估计值.

解：由已知得似然函数：$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} P\{X = x_i\} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$

取对数得：$\ln L(\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \ln \lambda - n\lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i!$

令$\frac{d \ln L(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i - n = 0 \Rightarrow \lambda$的最大似然估计值为：$\tilde{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$

由$\theta = P\{X = 0\}$得$\theta = e^{-\lambda}$，故θ最大似然估计值$\tilde{\theta} = e^{-\tilde{\lambda}} = e^{-\bar{x}}$

例：已知总体X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，$X_1,X_2,X_3$为一样本，

其样本值为：$x_1=3, x_2=2, x_3=1$，求θ 的最大似然估计量和估计值.

离散型：$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=\prod_1^n P\{X=x_i\}=P\{X=x_1\}P\{X=x_2\}\cdots P\{X=x_n\}$

连续型：$L(\theta_1,\cdots,\theta_k)=\prod_1^n f_X(x_i)=f_X(x_1)f_X(x_2)\cdots f_X(x_n)$

例：已知总体X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\le x\le\theta\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，$X_1,X_2,X_3$为一样本，

其样本值为：$x_1=3,x_2=2,x_3=1$，求θ的最大似然估计量和估计值.

解：由已知得似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\theta}\right)^3, & 0\le x_1,x_2,x_3\le\theta\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

故θ最大似然估计值$\tilde{\theta}=\max\{x_1,x_2,x_3\}=\max\{3,2,1\}=3$

θ的最大似然估计量为：$\hat{\theta}=\max\{X_1,X_2,X_3\}$

◆ 作业

习题6-2（Page168）：2,3,5

2：已知总体$X \sim U(0,\theta)$

（1）求未知参数θ的矩估计量；

（2）当样本值为$0.3, 0.8, 0.27, 0.35, 0.62, 0.55$时，求$\theta$的矩估计值.

(1) 计算总体期望：　$E(X)$.

(2) 建立方程：　$\overline{X} = E(X)$.

(3)解方程得未知参数的矩估计量.

(4)将估计量中的X_i换成x_i得矩估计值.

2：已知总体$X \sim U(0,\theta)$

（1）求未知参数θ的矩估计量；

（2）当样本值为$0.3,0.8,0.27,0.35,0.62,0.55$时，求$\theta$的矩估计值.

(1) 计算总体期望：$E(X)=\dfrac{\theta}{2}$.

(2) 建立方程：$\overline{X}=E(X)=\dfrac{\theta}{2}$.

(3)解方程得θ的矩估计量：$\hat{\theta}=2\overline{X}$.

(4)θ矩估计值：$\tilde{\theta}=2\overline{x}=2\cdot\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=2\cdot\dfrac{1}{6}(0.3+0.8+0.27+0.35+0.62+0.55)=$.

3. 设总体X以等概率$\dfrac{1}{\theta}$取值$1,2,\cdots,\theta$,求θ的矩估计量和估计值.

（注：$X_1,X_2,\cdots,X_n$为样本，其观察值为$x_1,x_2,\cdots,x_n$）

(1) 计算总体期望：　$E(X)$.

(2) 建立方程：　$\overline{X}=E(X)$.

(3)解方程得未知参数的矩估计量.

(4)将估计量中的X_i换成x_i得矩估计值.

3：设总体X以等概率$\frac{1}{\theta}$取$1,2,\cdots,\theta$，求θ的矩估计量.

(1) 计算总体期望： $E(X)=\frac{1}{\theta}(1+2+\cdots+\theta)=\frac{1}{\theta}\cdot\frac{1+\theta}{2}\cdot\theta=\frac{1+\theta}{2}.$

(2) 建立方程： $\overline{X}=E(X)=\frac{1+\theta}{2}.$

(3) 解方程得θ的矩估计量：$\hat{\theta}=2\overline{X}-1.$

(4) 将估计量中的X_i换成x_i得矩估计值：$\tilde{\theta}=2\tilde{x}-1.$