第4章 ——随机变量的数字特征

◆数学期望（*****）

◆方差（*****）

◆协方差与相关系数（****）

◆大数定律与中心极限定理（****）

第4.1节 ——数学期望

1. X的期望$E(X)\begin{cases}\text{离散型}(*****)\\\text{连续型}(*****)\end{cases}$

2. $Y=g(X)$的期望$E(Y)\begin{cases}\text{离散型}(*****)\\\text{连续型}(*****)\end{cases}$

3. $Z=g(X,Y)$的期望$E(Z)\begin{cases}\text{离散型}(*****)\\\text{连续型}(*****)\end{cases}$

4. 期望的性质(*****)

例： 甲，乙两人进行打靶，所得分数记为X_1, X_2，其分布律分别为

X_1	0	1	2
P	0	0.2	0.8

X_2	0	1	2
P	0.6	0.3	0.1

问题： 怎么样评价他们的成绩好坏？

◆ 随机变量*X*的期望

（1）$E(X)=\sum_{i=1} x_i P\{X=x_i\}$ （离散型）

（2）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ （连续型）

例： 已知X的分布律如下，求X的期望。

X	-1	1	2
P	0.2	0.3	0.5

$$E(X)=\sum_{i=1} x_i P\{X=x_i\}=-1\times 0.2+1\times 0.3+2\times 0.5=1.1$$

例： 已知X的分布函数如下，求X的期望。

$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.2, & -1\le x<0\\ 0.3, & 0\le x<1\\ 0.6, & 1\le x<2\\ 1, & 2\le x\end{cases}$$

解： 由已知得X的分布律：

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.4

$$E(X)=\sum_{i=1}x_iP\{X=x_i\}=-1\times0.2+0\times0.1+1\times0.3+2\times0.4=0.9$$

例：　已知X的概率密度如下，求X的期望。

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$$

例： 已知X的分布函数如下，求X的期望。

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x}{6}, & 0<x<6\\ 1, & x\ge 6\end{cases}$$

解： X的密度函数为： $f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}, & 0<x<6\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx \quad =\int_0^6 x\cdot\frac{1}{6}dx \quad =3$$

◆ X的函数*Y=g(X)*的期望

（1）$E(Y)=E\big(g(X)\big)=\sum_{i=1} g(x_i)P\{X=x_i\}$ （离散型）

（2）$E(Y)=E\big(g(X)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ （连续型）

例： 已知X的分布律如下

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.4

（1）求$Y=X^2$的期望；

（2）求$Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$的期望。

例： 已知X的分布律如下，（1）求$Y=X^2$的期望；（2）求$Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$的期望。

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.4

解（1）由已知得$Y=X^2$的分布律为

Y	0	1	4
P	0.1	0.5	0.4

$$E(Y)=\sum_{i=1} y_i P\{Y=y_i\} = 0\times 0.1+1\times 0.5+4\times 0.4=2.1$$

例： 已知X的分布律如下，（1）求$Y=X^2$的期望；（2）求$Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$的期望。

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.4

解（2）由已知得$Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$的分布律为

Y	-1	0	1
P	0.2	0.5	0.3

$$E(Y)=\sum_{i=1} y_i P\{Y=y_i\} = -1\times 0.2+0\times 0.5+1\times 0.3=0.1$$

例：　已知X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求X的期望；

（2）求$Y=2X$的期望；

（3）求$Y=e^{-2X}$的期望。

（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \;=\int_{0}^{+\infty} x\cdot e^{-x}dx=1$

（2）$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \;=\int_{0}^{+\infty} 2x\cdot e^{-x}dx=2$

（3）$E(g(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx \;=\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\cdot e^{-x}dx=\frac{1}{3}$

◆ **(X,Y)的函数Z=g(X,Y)的期望**

（1）$E(Z)=E\left(g(X,Y)\right)=\sum_{i=1} g\left(x_i,y_j\right)P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}$ （离散型）

（2）$E(Z)=E\left(g(X,Y)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\,f(x,y)dxdy$ （连续型）

注： $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$

例：　已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0.3	0.2

（1）求$Z=\left|XY\right|$的期望;

（2）求$Z=\max\{X,Y\}$的期望;

（3）求$Z=\min\{X,Y\}$的期望.

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0.3	0.2

（1）求$Z=\left|XY\right|$的期望;

（2）求$Z=\max\left\{X,Y\right\}$的期望;

（3）求$Z=\min\left\{X,Y\right\}$的期望.

（1）$Z=\left|XY\right|$的分布律为：

$Z=\left\|XY\right\|$	0	1
P	0.4	0.6

故 $E(Z)=0\times0.4+1\times0.6=0.6$

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：

Y \ X	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0.3	0.2

（1）求$Z=\left|XY\right|$的期望;

（2）求$Z=\max\left\{X,Y\right\}$的期望;

（3）求$Z=\min\left\{X,Y\right\}$的期望.

（2）$Z=\max\left\{X,Y\right\}$的分布律为：

$Z=\max\{X,Y\}$	-1	0	1
P	0.2	0.1	0.7

故 $E(Z)=-1\times0.2+0\times0.1+1\times0.7=0.5$

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0.3	0.2

（1）求$Z=|XY|$的期望;

（2）求$Z=\max\{X,Y\}$的期望;

（3）求$Z=\min\{X,Y\}$的期望.

（3）$Z=\min\{X,Y\}$的分布律为：

$Z=\min\{X,Y\}$	-1	0	1
P	0.5	0.3	0.2

故 $E(Z)=-1\times0.5+0\times0.3+1\times0.2=-0.3$

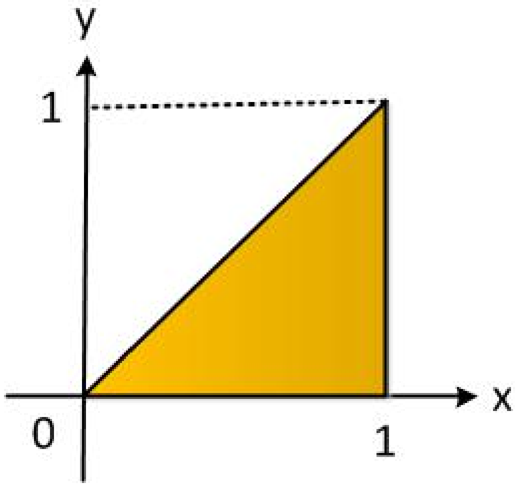
例： 已知(X,Y)的联合密度：$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \textbf{else}\end{cases}$

求$E(X),E(Y),E(XY),E(X^2+Y^2)$的期望.

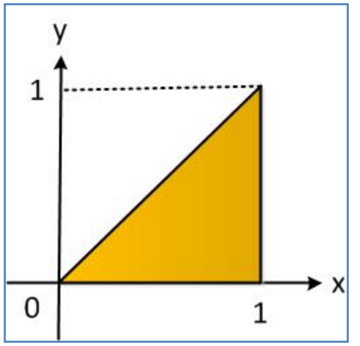
提示：$E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$



例： 已知(X,Y)的联合密度：$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$



求$E(X),E(Y),E(XY),E(X^2+Y^2)$的期望.

解：$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x x\cdot 12y^2dy=\frac{4}{5}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x y\cdot 12y^2dy=\frac{3}{5}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x xy\cdot 12y^2dy=\frac{3}{6}$$

$$E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x (x^2+y^2)\cdot 12y^2dy=\frac{16}{15}$$

◆ 期望的性质

(1) $E(C)=C$

(2) $E(CX)=CE(X)$

(3) $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$

(4) X,Y相互独立$\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

注：不能由$E(XY)=E(X)E(Y)\Rightarrow X,Y$相互独立

◆ 作业

习题4-1（Page99-100）：7,8

7：已知X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases} kx^a, & 0<x<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$，又已知$E(X)=0.75$，求$k,a$的值.

解：$E(X)=0.75 \Rightarrow E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot kx^a dx=\int_0^1 kx^{a+1}dx=\dfrac{k}{a+2}=0.75$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1 kx^a dx=\frac{k}{a+1}=1$$

$$\begin{cases} \dfrac{k}{a+2}=0.75 \\ \dfrac{k}{a+1}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ k=3 \end{cases}$$

8：已知X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}1-|1-x|, & 0<x<2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，求$E(X)$.

解：$f(x)=\begin{cases}1-|1-x|, & 0<x<2\\ 0, & \text{else}\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 2-x, & 1\le x<2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0}xf(x)dx+\int_{0}^{1}xf(x)dx+\int_{1}^{2}xf(x)dx+\int_{2}^{+\infty}xf(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0}x0dx+\int_{0}^{1}x\cdot xdx+\int_{1}^{2}x(2-x)dx+\int_{2}^{+\infty}x0dx$$

$$=\int_{0}^{1}x\cdot xdx+\int_{1}^{2}x(2-x)dx$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$