第4.2节 ——方差

1. 方差的定义及计算(*****)

2. 方差的性质(*****)

知识回顾

例1： 已知X的分布律如下，求X^2的期望$E\left(X^2\right)$.

X	-1	1	2
P	0.2	0.3	0.5

例2： 已知X的概率密度如下，求X^2的期望$E\left(X^2\right)$.

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

例1： 已知X的分布律如下，求X^2的期望$E\left(X^2\right)$.

X	-1	1	2
P	0.2	0.3	0.5

解：X^2的分布律为

X^2	1	4
P	0.5	0.5

故$E\left(X^2\right)=1\times0.5+4\times0.5=2.5$

例2： 已知X的概率密度如下，求X^2的期望$E\left(X^2\right)$.

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

分析：函数期望公式 $E\left(g(X)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$

解：$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2x dx=\frac{1}{2}$

◆方差的定义及计算

定义：$D(X)=E\left[X-E(X)\right]^2$

注：$\sqrt{D(X)}$称为标准差或均方差。

计算：$D(X)=E\left[X-E(X)\right]^2=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$

$$E\left(X^2\right)=D(X)+\left[E(X)\right]^2$$

例3： 已知X的分布律如下，求X的方差$D(X)$.

X	-1	1	2
P	0.2	0.3	0.5

提示：$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

解：$E(X)=-1\times 0.2+1\times 0.3+2\times 0.5=1.1$

$$E(X^2)=1\times 0.5+4\times 0.5=2.5$$

故$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2.5-1.1^2=1.29$

例4： 已知X的概率密度如下，求X的方差$D(X)$.

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

提示：$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx=\frac{1}{2}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

◆方差的性质

定义：$D(X)=E\left[X-E(X)\right]^2=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$

（1）$D(C)=0$

（2）$D(CX)=C^2D(X)$

（3）$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\left\{\left[X-E(X)\right]\left[Y-E(Y)\right]\right\}$

$$=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$$

（4）$D(X\pm C)=D(X)$

（5）X,Y独立时$\Rightarrow D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$ （注：反之不一定成立）

◆ 期望的性质

(1) $E(C)=C$

(2) $E(CX)=CE(X)$

(3) $E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$

(4) X,Y相互独立$\Rightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$

注：不能由$E(XY)=E(X)E(Y)\Rightarrow X,Y$相互独立

◆ 方差的性质

(1) $D(C)=0$

(2) $D(CX)=C^2D(X)$

(3) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

$=D(X)+D(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$

(4) $D(X\pm C)=D(X)$

(5) X,Y相互独立$\Rightarrow D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

注：不能由$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\Rightarrow X,Y$相互独立

例5： 已知X_1, X_2, X_3独立同分布，且$X_1 \sim N(1,4)$.

（1）求 $E(2X_1X_2 - 3X_3 + 4)$

（2）求 $D(X_1 + 2X_2 - 3X_3 + 4)$

◆ 期望的性质

(1) $E(C) = C$

(2) $E(CX) = CE(X)$

(3) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$

(4) X,Y相互独立$\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

注：不能由$E(XY) = E(X)E(Y) \Rightarrow X,Y$相互独立

◆ 方差的性质

(1) $D(C) = 0$

(2) $D(CX) = C^2 D(X)$

(3) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2E\{[X - E(X)][Y - E(Y)]\}$

$= D(X) + D(Y) \pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$

(4) $D(X \pm C) = D(X)$

(5) X,Y相互独立$\Rightarrow D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

注：不能由$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \Rightarrow X,Y$相互独立

例5： 已知X_1,X_2,X_3独立同分布，且$X_1 \sim N(1,4)$.

（1）求 $E(2X_1X_2-3X_3+4)$

（2）求 $D(X_1+2X_2-3X_3+4)$

解：$E(2X_1X_2-3X_3+4)=E(2X_1X_2)-E(3X_3)+E(4)$

$$=2E(X_1X_2)-3E(X_3)+4$$

$$=2E(X_1)E(X_2)-3E(X_3)+4$$

$$=2\times1\times1-3\times1+4=3$$

$$D(X_1+2X_2-3X_3+4)=D(X_1+2X_2-3X_3)$$

$$=D(X_1)+D(2X_2)+D(3X_3)$$

$$=D(X_1)+4D(X_2)+9D(X_3)$$

$$=4+4\times4+9\times4=56$$

◆ 作业

习题4-2（Page107）：7,8,11

7：已知$X \sim b(n,p)$，且$E(X)=3, D(X)=2$,求X的全部可能取值，计算$P\{X \le 8\}$.

解：由$X \sim b(n,p) \Rightarrow \begin{cases} E(X)=np=3 \\ D(X)=np(1-p)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=9 \\ p=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow X \sim b\left(9,\dfrac{1}{3}\right)$

故X的全部可能取值为： $0,1,2,3,\cdots,9$

$$P\{X \le 8\}=1-P\{X=9\}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^9$$

8：已知$X\sim N(1,2)$，Y服从参数为3的泊松分布，且X与Y独立，求$D(XY)$.

解：$E\left[(XY)^2\right]=E\left(X^2Y^2\right)=E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)$

$$=\left[D(X)+E^2(X)\right]\left[D(Y)+E^2(Y)\right]$$

$$=\left[2+1^2\right]\left[3+3^2\right]=36$$

$$E(XY)=E(X)E(Y)=1\times 3=3$$

$$D(XY)=E\left[(XY)^2\right]-E^2(XY)=36-3^2=27$$

11：设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，且都服从期望为1的指数分布，求$Z=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$的期望和方差.

解：由已知得$X_i \sim e(1)$，其分布函数为：$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

故Z的分布函数为：$F_Z(z)=1-[1-F(z)]^n=\begin{cases}1-e^{-nz}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$

故$Z\sim e(n)$，从而$E(Z)=\dfrac{1}{n}$，$D(Z)=\dfrac{1}{n^2}$