# 第1.5节　——事件的独立性

- 两个事件的独立性；
- 三个事件的独立性；
- 有限个事件的独立性；
- 伯努利概型；

# 知识回顾

## ◆ 条件概率

定义：已知*A*发生了，再求*B*发生的概率，此概率称为：“*B*对*A*的条件概率”记为：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

注：$P(B)$称为无条件概率。

# 知识回顾

例： 一袋中装有10个球，其中3个黑球，7个白球，先后两次从袋子中各取一球（不放回），记$A_1, A_2$分别表示第1，2次取到黑球，

问：$P(A_2|A_1)$与$P(A_2)$相等吗？

解： $P(A_2|A_1)=\frac{2}{9}$

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{3}{10}$$

注：一般情况下 $P(B|A)\neq P(B)$

问题：在什么情况下 $P(B|A)=P(B)$?

## ◆ 两个事件相互独立的定义（5S）

若两事件$A, B$满足

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称$A, B$相互独立或$A, B$独立。

**注：“$A, B$相互独立”与"$A, B$互不相容"的区别。**

## ◆ 两个事件相互独立的性质（5S）

(1) $A,B$独立 $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)(B)$;

(2) $A,B$独立 $\Leftrightarrow P(B|A)=P(B) \Leftrightarrow P(A|B)=P(A)$

(3) $A,B$独立 $\Leftrightarrow \bar{A},B$独立 $\Leftrightarrow A,\bar{B}$独立 $\Leftrightarrow \bar{A},\bar{B}$独立

例： 已知$A,B$相互独立，证明$\bar{A},\bar{B}$也是相互独立。

证明： 即须证 $P\left(\bar{A}\bar{B}\right)=P\left(\bar{A}\right)P\left(\bar{B}\right)$

左边$=P\left(\bar{A}\bar{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P\left(A\cup B\right)=1-\left[P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(AB\right)\right]$

$=1-P\left(A\right)-P\left(B\right)+P\left(A\right)P\left(B\right)$

右边$=P\left(\bar{A}\right)P\left(\bar{B}\right)=\left[1-P\left(A\right)\right]\left[1-P\left(B\right)\right]=1-P\left(A\right)-P\left(B\right)+P\left(A\right)P\left(B\right)$

故 左边=右边

## ◆ 三个事件相互独立的定义（4s）

若以下四个条件同时成立，则称$A,B,C$相互独立

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

注：若$A,B,C$中任何两个事件相互独立，则称$A,B,C$两两相互独立。

即：只须满足前三个条件即可。

显然：$A,B,C$相互独立$\Rightarrow$ $A,B,C$两两相互独立。

例：一箱子中装有4个球，3个为纯色球，颜色分别为红，绿，蓝，还有一个球同时带有红，绿，蓝三种颜色，现从箱子中随机取一个球，记$A,B,C$分别表示取到的球带有红，绿，蓝色。

问：$A,B,C$相互独立吗？$A,B,C$两两相互独立吗？

解：$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}, P(AB)=P(AC)=P(BC)=\frac{1}{4}, P(ABC)=\frac{1}{4}$

故：$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \end{cases}$ 成立，而$P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$

答：$A,B,C$只满足两两相互独立，不满足相互独立

## ◆ 三个事件相互独立的性质

(1) $A, B, C$相互独立$\Rightarrow A, B, C$中任何两个都相互独立；

(2) $A, B, C$相互独立$\Rightarrow$把$A, B, C$中任何事件换成对立事件后仍然相互独立；

例： 已知$A,B,C$相互独立，判断下列说法是否正确。

（1） $\bar{A},B,C$相互独立;

（2） $\bar{A},B,\bar{C}$相互独立;

（3） $\bar{A},\bar{B},\bar{C}$相互独立;

（4） $\bar{B},\bar{C}$相互独立;

答案：全部正确！

## ◆ N个事件相互独立的定义(1s)

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$为$n$个事件，若其中任意$k(1 < k \le n)$个事件均满足：

"积事件的概率等于概率的积"

即：

$$P(A_1A_2\cdots A_k) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k)$$

则称$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立。

## ◆ 伯努利概型

定义（伯努利试验）若随机试验只有两种可能的结果：事件A发生或事件A不发生，则称这样的试验为伯努利试验。

定义（n重伯努利试验） 在相同条件下独立重复n次伯努利试验。

## ◆ 伯努利概型

定理（伯努利定理） 在n重伯努利试验中，事件A发生k次的概率为：

$$P\{\text{事件}A\text{发生}k\text{次}\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$$

其中$p$为在一次试验中事件$A$发生的概率。

问：事件A发生0次和n次的概率分别是多少？（答：分别为$(1-p)^n$和$p^n$）

例： 独立重复抛一颗骰子6次，（1）求恰好有两次骰子点数大于4的概率。
（2）求至少有一次点数大于4的概率。
（3）求第4次才出现点数大于4的概率。

答案： （1）$C_6^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4$ （2）1-$\left(\frac{2}{3}\right)^6$ （3）$\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3}$

## ◆ 伯努利概型

**定理（伯努利定理）** 在n重伯努利试验中，事件A发生k次的概率为：

$$P\{\text{事件}A\text{发生}k\text{次}\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$$

其中$p$为在一次试验中事件$A$发生的概率。

**推论** 在n重伯努利试验中，事件A在第k次试验中才首次发生的概率为：

$$P\{\text{事件}A\text{在第}k\text{次试验中才首次发生}\}=p(1-p)^{k-1}, k=1,2,\cdots,n$$

## ◆ 作业

习题1-5（Page30）：2,3,6,12

## ◆ 作业解答

2.每次试验成功率为$p(0<p<1)$,进行重复试验，求直到第10次试验才取得4次成功的概率.

解：所求概率为 $\mathrm{C}_9^3 p^3(1-p)^6 \cdot p$, 即 $\mathrm{C}_9^3 p^4(1-p)^6$

## ◆ 作业解答

3.甲、乙两人射击，甲击中的概率为0.8，乙击中的概率为0.7，两人同时射击，并假定中靶与否是独立的，求

（1）两人都中靶的概率 （2）甲中乙不中的概率 （3）甲不中乙中的概率.

解：记A, B分别表示甲、乙击中靶，则由独立性

（1）$P(AB)=P(A)P(B)=0.8\cdot 0.7=0.56$

（2）$P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=0.8\cdot(1-0.7)=0.24$

（3）$P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)=(1-0.8)\cdot 0.7=0.14$

6 三人独立地破译一个密码，他们能破译的概率分别为$\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，问此密码被破译的概率是多少？

解：记$A_i$表示第$i$个人破译密码，$i=1,2,3$，则此密码被破译的概率为：

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_2A_3)-P(A_1A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

$$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1)P(A_2)-P(A_2)P(A_3)-P(A_1)P(A_3)$$

$$+P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}$$

6 三人独立地破译一个密码，他们能破译的概率分别为$\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$，问此密码被破译的概率是多少？

解：记$A_i$表示第$i$个人破译密码，$i=1,2,3$，则此密码被破译的概率为：

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right)=P\left(\overline{\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3}\right)=1-P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\right)=1-P\left(\bar{A}_1\right)P\left(\bar{A}_2\right)P\left(\bar{A}_3\right)$$

$$=1-\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{5}$$

12 随机地抛一枚骰子，连续6次，求（1）恰好有一次出现“6点”的概率；（2）恰好有两次出现“6点”的概率；（3）至少有一次出现“6点”的概率；

解：记$A$表示点数为6，则$P(A)=\frac{1}{6}$

（1） $P(\text{恰好有一次出现“6点”})=P(\text{事件A恰好发生一次})=C_6^1\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^5$

（2） $P(\text{恰好有两次出现“6点”})=P(\text{事件A恰好发生两次})=C_6^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^4$

（3） $P(\text{至少有一次出现“6点”})=P(\text{事件A至少发生一次})$

$=1-P(\text{事件A一次都没发生})=1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^6$