期中测试 1（40 分钟）

1. 某仓库有同样规格的产品 10 箱，其中 5 箱由甲生产，3 箱由乙生产，另 2 箱由丙生产，且它们的次品率依次为 0.1,0.2,0.3，现从中随机选择一箱，再从中任取一件产品，该产品为正品的概率是多少？若已知该产品为正品，则该产品是甲生产的概率又是多少？

解：记 A_1, A_2, A_3 分别表示产品由甲乙丙生产，B 表示产品为正品

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

$$= \frac{5}{10}\times(1-0.1) + \frac{3}{10}\times(1-0.2) + \frac{2}{10}\times(1-0.3) = 0.83$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)}$$

$$= \frac{\frac{5}{10}\times(1-0.1)}{\frac{5}{10}\times(1-0.1) + \frac{3}{10}\times(1-0.2) + \frac{2}{10}\times(1-0.3)} = \frac{45}{83}$$

2. 设离散型随机变量 X 的分布函数为： $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 0.2, & -2 \le x < -1 \\ 0.5, & -1 \le x < 1 \\ 0.8, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$

(1) 求 X 的分布律；(2) 求 $P\{X < 2 | X \ne 1\}$；（3）求 $D(X)$

解：（1） X 的分布律为

X	-2	-1	1	2
P	0.2	0.3	0.3	0.2

(2) 求 $P\{X < 2 | X \ne 1\} = \dfrac{P\{X < 2, X \ne 1\}}{P\{X \ne 1\}} = \dfrac{0.5}{1-0.3} = \dfrac{5}{7}$

（3） $E(X) = 0$，$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) = 2.2$

3. 设二维随机变量 (X,Y) 在矩形区域：$D: 0 < x < 2,\ 0 < y < 4$ 上服从均匀分布

（1）求 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)$；（2）求边缘概率密度 $f_X(x)$，$f_Y(y)$，并判断 X,Y 的独立性，给出判断理由；（3）求 $P\{X \ge Y\}$.

解（1）$\left(X,Y\right)$的联合概率密度为$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{1}{8},0<x<2,0<y<4\\0, \qquad \text{else}\end{cases}$

（2）边缘概率密度分别为$f_X\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{2},0<x<2\\0,\ \text{else}\end{cases}$，$f_Y\left(y\right)=\begin{cases}\frac{1}{4},0<x<4\\0,\ \text{else}\end{cases}$

显然$f\left(x,y\right)=f_X\left(x\right)f_Y\left(y\right)$，故$X,Y$独立.

（3）$P\left\{X\geq Y\right\}=\iint\limits_{x\geq y}f\left(x,y\right)dxdy=0.25$

4. 设X,Y的联合密度为$f(x,y)=\begin{cases}ky^2 & 0\leq y\leq x\leq 1\\0 & else\end{cases}$，

（1）求k；（2）求$f_X(x),f_Y(y)$；（3）求 $P\left\{X>2Y\right\}$；

解：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dxdy=\int_0^1dx\int_0^x ky^2dy=\frac{k}{12}=1\Rightarrow k=12$

（2）$f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dy=\begin{cases}\int_0^x 12y^2dy, & 0\leq x\leq 1\\ 0, & else\end{cases}=\begin{cases}4x^3, & 0\leq x\leq 1\\0, & \text{else}\end{cases}$

$f_Y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dx=\begin{cases}\int_y^1 12y^2dx, & 0\leq y\leq 1\\ 0, & else\end{cases}=\begin{cases}12y^2\left(1-y\right), & 0\leq y\leq 1\\0, & \text{else}\end{cases}$

（3）$P\left\{X>2Y\right\}=\iint\limits_{x>2y}f\left(x,y\right)dxdy=\int_0^1dx\int_0^{\frac{x}{2}}12y^2dy=\frac{1}{8}$

5. 设X,Y,Z相互独立，$E\left(X\right)=E\left(Y\right)=E\left(Z\right)=2$，$D\left(X\right)=D\left(Y\right)=D\left(Z\right)=1$，求（1）$E\left(X-2Y-3Z+2\right)$；（2）$D\left(X+2Y-3Z+3\right)$；（3）$\operatorname{cov}\left(X+Y,2X-Z\right)$。

解（1）$E\left(X-2Y-3Z+2\right)=E\left(X\right)-2E\left(Y\right)-3E\left(Z\right)+2=-6$

（2）$D\left(X+2Y-3Z+3\right)=D\left(X\right)+4D\left(Y\right)+9D\left(Z\right)=14$

（3） $\operatorname{cov}\left(X+Y,2X-Z\right)=\operatorname{cov}\left(X,2X\right)=2\operatorname{cov}\left(X,X\right)=2D\left(X\right)=2$

6. 设 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right),Y\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，且 X,Y 相互独立，$Z_1=3X+2Y+2$，$Z_2=3X-2Y-2$，求 Z_1,Z_2 的相关系数 $\rho_{Z_1Z_2}$

解：$\operatorname{cov}\left(Z_1,Z_2\right)=\operatorname{cov}\left(3X+2Y+2,3X-2Y-2\right)=3^2D\left(X\right)-2^2D\left(X\right)=5\sigma^2$

$$\sqrt{D\left(Z_1\right)}\sqrt{D\left(Z_2\right)}=\sqrt{D\left(3X+2Y\right)}\sqrt{D\left(3X-2Y\right)}=13\sigma^2$$

$$\rho_{Z_1Z_2}=\frac{\operatorname{cov}\left(Z_1,Z_2\right)}{\sqrt{D\left(Z_1\right)}\sqrt{D\left(Z_2\right)}}=\frac{5\sigma^2}{13\sigma^2}=\frac{5}{13}$$