第3.3节 ——二维随机变量函数的分布

（1）二维离散型函数的分布(*****)

（2）二维连续型函数的分布
$$\begin{cases} Z = X + Y\text{型}(***) \\ M = \max\{X,Y\}, N = \min\{X,Y\}(****) \\ \text{一般情形} Z = g(X,Y)(*) \end{cases}$$

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0.3	0.2

（1）求$Z=X+Y$的分布律;

（2）求$Z=\left|XY\right|$的分布律;

（3）求$Z=\max\left\{X,Y\right\}$的分布律;

（4）求$Z=\min\left\{X,Y\right\}$的分布律;

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0.3	0.2

（1）求$Z=X+Y$的分布律;

（2）求$Z=\left|XY\right|$的分布律;

（3）求$Z=\max\left\{X,Y\right\}$的分布律;

（4）求$Z=\min\left\{X,Y\right\}$的分布律;

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：

Y \ X	-1		0		1	
-1	0.2	-2	0.1	-1	0.1	0
1	0.1	0	0.3	1	0.2	2

（1）求$Z=X+Y$的分布律;

（2）求$Z=\left|XY\right|$的分布律;

（3）求$Z=\max\left\{X,Y\right\}$的分布律;

（4）求$Z=\min\left\{X,Y\right\}$的分布律;

$Z=X+Y$	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.2	0.3	0.2

例：　已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1		0		1	
-1	0.2	1	0.1	0	0.1	1
1	0.1	1	0.3	0	0.2	1

（1）求$Z=X+Y$的分布律;

（2）求$Z=\left|XY\right|$的分布律;

（3）求$Z=\max\left\{X,Y\right\}$的分布律;

（4）求$Z=\min\left\{X,Y\right\}$的分布律.

$Z=\lvert XY\rvert$	0	1
P	0.4	0.6

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：

(1) 求$Z=X+Y$的分布律;

(2) 求$Z=|XY|$的分布律;

(3) 求$Z=\max\{X,Y\}$的分布律;

(4) 求$Z=\min\{X,Y\}$的分布律.

$Y \backslash X$	-1		0		1	
-1	0.2	-1	0.1	0	0.1	1
1	0.1	1	0.3	1	0.2	1

$Z=\max\{X,Y\}$	-1	0	1
P	0.2	0.1	0.7

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1		0		1	
-1	0.2	-1	0.1	-1	0.1	-1
1	0.1	-1	0.3	0	0.2	1

（1）求$Z = X + Y$的分布律;

（2）求$Z = |XY|$的分布律;

（3）求$Z = \max\{X,Y\}$的分布律;

（4）求$Z = \min\{X,Y\}$的分布律.

$Z=\min\{X,Y\}$	-1	0	1
P	0.5	0.3	0.2

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0.3	0.2

（1）求$Z=X+Y$的分布律;

（2）求$Z=\|XY\|$的分布律;

（3）求$Z=\max\{X,Y\}$的分布律;

（4）求$Z=\min\{X,Y\}$的分布律.

（5）求 $P\{X+Y>0\}$

（6）求 $P\{X>Y\}$

答案： （5）$P\{X+Y>0\}=0.5$

（6）$P\{X>Y\}=0.2$

1： $Z=X+Y$的分布

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$$

当X,Y独立时：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

例：已知X,Y相互独立，且$X\sim U(0,1), Y\sim e(1)$

（1）求X,Y的联合概率密度；

（2）求$P\{X>Y\}$；

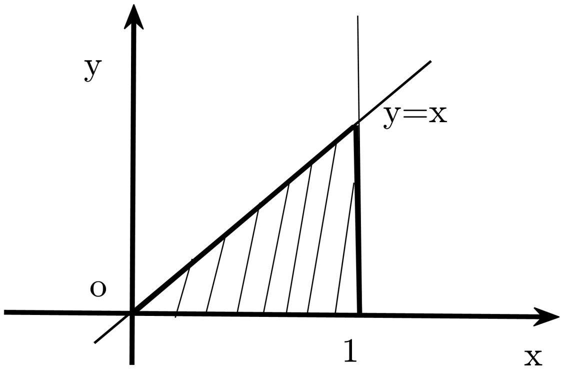
（3）求$Z=X+Y$的概率密度.

（1）由已知得：$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<1, y>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

（2）$P\{X>Y\}=\iint\limits_{x>y} f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x e^{-y}dy \;=\frac{1}{e}$$

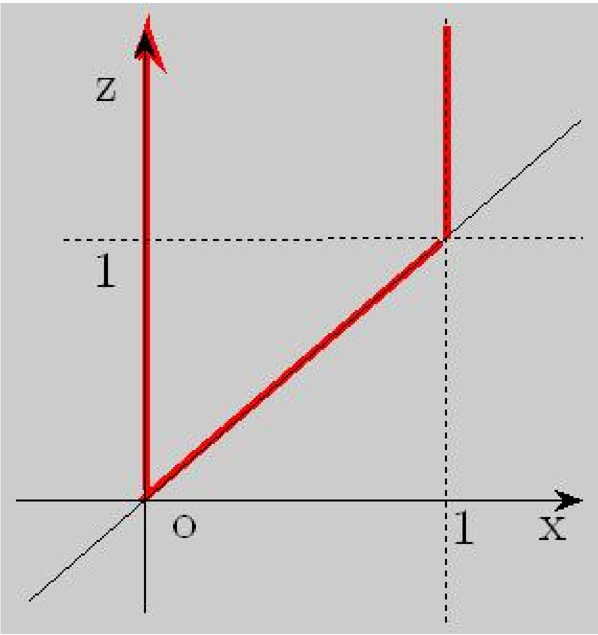


例：已知X,Y相互独立，且$X\sim U(0,1),Y\sim e(1)$

（1）求X,Y的联合概率密度；

（2）求$P\{X>Y\}$；

（3）求$Z=X+Y$的概率密度.



（1） $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$ $\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

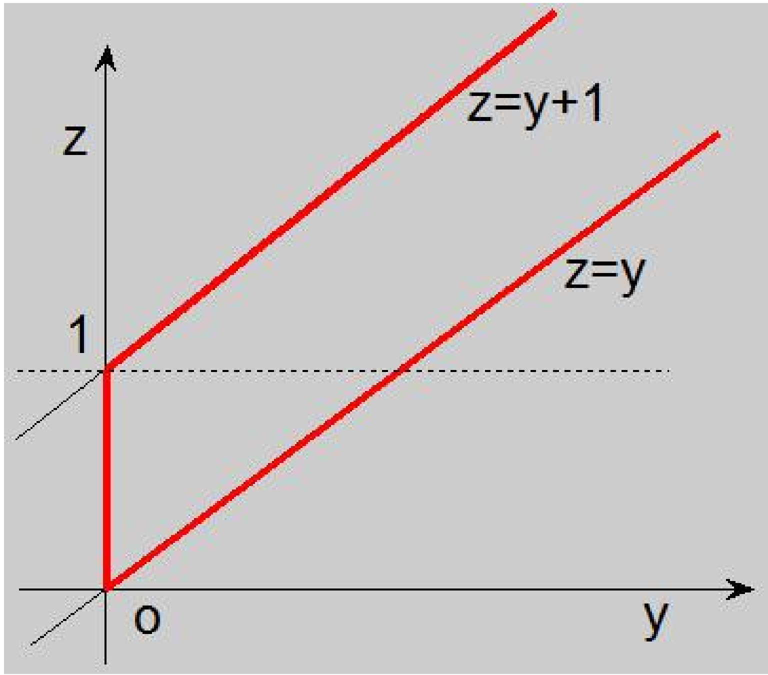
（3）$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \int_0^z e^{-z+x}dx, & 0<z<1\\ \int_0^1 e^{-z+x}dx, & z\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 1-e^{-z}, & 0<z<1\\ e^{-z}(e-1), & z\ge 1\end{cases}$

例：已知X,Y相互独立，且$X\sim U(0,1),Y\sim e(1)$

（1）求X,Y的联合概率密度；

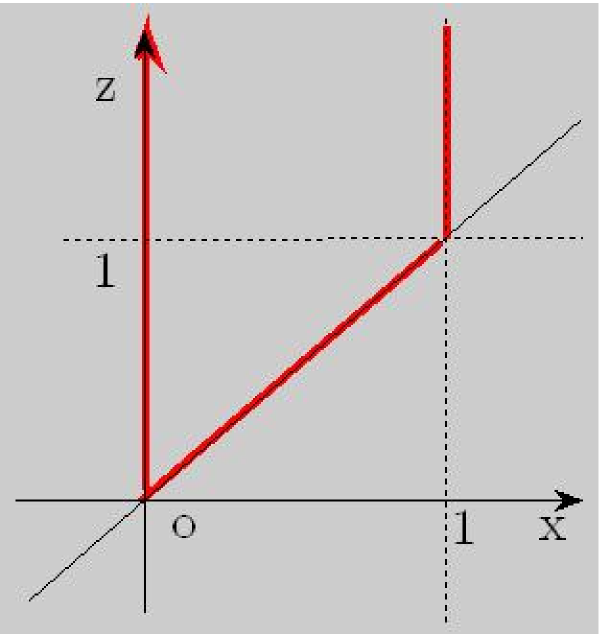
（2）求$P\{X>Y\}$；

（3）求$Z=X+Y$的概率密度.



（1） $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$ $\quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

（3） $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \int_0^z e^{-y}dy, & 0<z<1\\ \int_{z-1}^z e^{-y}dy, & z\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 1-e^{-z}, & 0<z<1\\ e^{-z}(e-1), & z\ge 1\end{cases}$



例：已知X,Y相互独立，且$X\sim U(0,1),Y\sim e(1)$

（1）求X,Y的联合概率密度；

（2）求$P\{X>Y\}$；

（3）求$Z=X+Y$的概率密度.

（1） $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$ $\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<1, y>0\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

（2） $P\{X>Y\}=\iint\limits_{x>y}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x e^{-y}dy=\frac{1}{e}$

（3） $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,dx=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \int_0^z e^{-z+x}dx, & 0<z<1\\ \int_0^1 e^{-z+x}dx, & z\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 1-e^{-z}, & 0<z<1\\ e^{-z}(e-1), & z\ge 1\end{cases}$

2： $M=\max\{X,Y\}, N=\min\{X,Y\}$的分布$(X,Y$独立$)$

$$F_M(z)=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_N(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

推广：当X,Y独立同分布时：

$$F_M(z)=[F(z)]^2，\quad F_N(z)=1-[1-F(z)]^2$$

推广：设$X_1,X_2,\cdots，X_n$独立同分布，$M=\max\{X_1,X_2,\cdots，X_n\}, N=\min\{X_1,X_2,\cdots，X_n\}$，则

$$F_M(z)=[F(z)]^n，\quad F_N(z)=1-[1-F(z)]^n$$

例：已知X,Y相互独立，且$X\sim U(0,1),Y\sim U(0,2)$,$U=\max\{X,Y\},V=\min\{X,Y\}$

（1）求U的概率密度$f_U(z)$.（2）求V的概率密度$f_V(z)$.

（1）由已知得： $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$, $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{y}{2}, & 0<y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$

$$F_U(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}0, & z\le 0\\ \dfrac{z^2}{2}, & 0<z<1\\ \dfrac{z}{2}, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}\Rightarrow f_U(z)=F_U'(z)=\begin{cases}z, & 0<z<1\\ \dfrac{1}{2}, & 1\le z<2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

例：已知X,Y相互独立，且$X\sim U(0,1), Y\sim U(0,2)$, $U=\max\{X,Y\}, V=\min\{X,Y\}$

（1）求U的概率密度$f_U(z)$.（2）求V的概率密度$f_V(z)$.

（2）由已知得：
$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0<x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases},\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{y}{2}, & 0<y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

$$F_V(z)=1-\left[1-F_X(z)\right]\left[1-F_Y(z)\right]=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 1-(1-z)\left(1-\dfrac{z}{2}\right), & 0<z<1\\ 1, & z\ge 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_V(z)=F_V'(z)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-z, & 0<z<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

3： 一般情形：$Z=g(X,Y)$

例：已知(X,Y)的密度为：$f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，求$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$的概率密度$f_Z(z)$.

解：
$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\left\{\sqrt{X^2+Y^2}\le z\right\}=\begin{cases}0, & z<0\\ \displaystyle\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le z} f(x,y)\,dxdy, & z\ge 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z<0\\ \displaystyle\iint_{x^2+y^2\le z^2}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dxdy, & z\ge 0\end{cases}=\begin{cases}0, & z<0\\ \displaystyle\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho\,d\rho & z\ge 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & z<0\\ 1-e^{-\frac{z^2}{2}} & z\ge 0\end{cases}\Rightarrow f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\mathbf{0}, & z<\mathbf{0}\\ ze^{-\frac{z^2}{2}}, & \text{else}\end{cases}$$

◆ 作业

习题3-3（Page88-89）：3,9

◆ 作业

3：设二维随机变量(X,Y)服从矩形区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$上的均匀分布，且

$$U=\begin{cases}0, & X\le Y\\ 1, & X>Y\end{cases},\quad V=\begin{cases}0, & X\le 2Y\\ 1, & X>2Y\end{cases}$$

求U与V的联合概率分布.

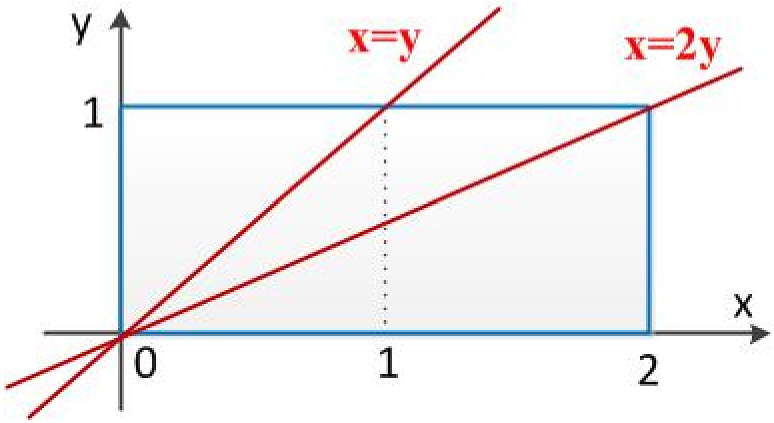
9：设随机变量X,Y相互独立，且服从同一分布，试证明：

$$P\{a<\min\{X,Y\}\le b\}=\left[P\{X>a\}\right]^2-\left[P\{X>b\}\right]^2$$

3：设二维随机变量(X,Y)服从矩形区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$上的均匀分布，且

$$U=\begin{cases}0, & X\le Y\\ 1, & X>Y\end{cases},\quad V=\begin{cases}0, & X\le 2Y\\ 1, & X>2Y\end{cases}$$

求U与V的联合概率分布.



解：$P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y, X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}=0.25$

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y, X>2Y\}=P\{\Phi\}=0$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y, X\le 2Y\}=0.25$$

$$P\{U=1,V=1\}=P\{X>Y, X>2Y\}=P\{X>2Y\}=0.5$$

3：设二维随机变量(X,Y)服从矩形区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$上的均匀分布，且

$$U=\begin{cases}0, & X\le Y\\ 1, & X>Y\end{cases},\quad V=\begin{cases}0, & X\le 2Y\\ 1, & X>2Y\end{cases}$$

求U与V的联合概率分布.

V \ U	0	1
0	0.25	0.25
1	0	0.5

9：设随机变量X,Y相互独立，且服从同一分布，试证明：

$$P\{a<\min\{X,Y\}\le b\}=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2$$

证明：设X,Y的分布函数分别为$F(x),F(y)$，记$Z=\min\{X,Y\}$,则

$$F_Z(z)=1-[1-F(z)]^2$$

故等式左边$=P\{a<\min\{X,Y\}\le b\}=P\{a<Z\le b\}=F_Z(b)-F_Z(a)$

$$=[1-F(a)]^2-[1-F(b)]^2$$

等式右边$=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2=[1-P\{X\le a\}]^2-[1-P\{X\le b\}]^2$

$$=[1-F(a)]^2-[1-F(b)]^2$$

$=$左边