第3.1节 ——二维随机变量及其分布

1. 联合分布函数与边缘分布函数(***)

2. 联合分布律与边缘分布律(*****)

3. 联合概率密度与边缘概率密度(*****)

◆ 什么是二维随机变量？

例：在平面上随机取一个点，其坐标用(X,Y)来表示，(X,Y)就是二维随机变量。

例：在空间中随机取一个点，其坐标用(X,Y,Z)来表示，(X,Y,Z)就是三维随机变量。

◆什么是分布函数？

定义：设X是一个随机变量，称：

$$F(x)=P\{X\le x\},\ x\in R$$

为X的分布函数，有时记为$X\sim F(x)$或$F_X(x)$

注：$F(x)$是一个普通函数，它表示随机事件$X\in(-\infty, x]$的概率。

◆联合分布函数

定义：　设(X,Y)是二维随机变量，称二元函数

$$F(x,y)=P\{X\le x\cap Y\le y\}=P\{X\le x,Y\le y\},\ (x,y)\in R^2$$

为(X,Y)的分布函数，或X和Y的联合分布函数。

问：联合分布函数$F(x,y)$从几何上表示什么含义？

◆联合分布函数

定义： 设(X,Y)是二维随机变量，称二元函数

$$F(x,y)=P\{X\le x\cap Y\le y\}=P\{X\le x,Y\le y\},\ (x,y)\in R^2$$

为(X,Y)的分布函数，或X和Y的联合分布函数。

◆边缘分布函数

$$\boldsymbol{F_X(x)=P\{X\le x\},\ x\in R}$$

$$\boldsymbol{F_Y(y)=P\{Y\le y\},\ y\in R}$$

问：联合分布函数$F(x,y)$与边缘分布函数$F_X(x),F_Y(y)$有什么关系？

$$\boldsymbol{F_X(x)=F(x,+\infty),\ F_Y(y)=F(+\infty,y)}$$

◆ 联合分布函数的性质

定义： $F(x,y)=P\{X\le x\cap Y\le y\}=P\{X\le x,Y\le y\},\ (x,y)\in R^2$

(1) $0\le \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\le 1$

(2) $\boldsymbol{F}_X(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},+\infty),\ \boldsymbol{F}_Y(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{F}(+\infty,\boldsymbol{y})$

(3) $\boldsymbol{F}(-\infty,-\infty)=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},-\infty)=\boldsymbol{F}(-\infty,\boldsymbol{y})=\mathbf{0},\ \boldsymbol{F}(+\infty,+\infty)=\mathbf{1}$

◆什么是离散型随机变量?

定义：若X的全部可能取值为有限个或可数无穷个，则X为离散型。

◆什么是二维离散型随机变量?

定义：若(X,Y)的全部可能取值为有限个或可数无穷个，则(X,Y)为离散型。

◆联合分布律与边缘分布律

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1	1	2
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	k	0.2

（1）求常数k;

（2）求(X,Y)关于X,Y的边缘分布律;

（3）求$F(1.2,0)$;

（4）求$P\{|X+Y|>1\}$.

◆联合分布律与边缘分布律

例： 已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1	1	2
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	k	0.2

（1）求常数k;

$$k=0.2$$

（2）求(X,Y)关于X,Y的边缘分布律;

X	-1	1	2
P	0.3	0.3	0.4

Y	-1	1
P	0.5	0.5

◆联合分布律与边缘分布律

例：　已知(X,Y)的联合分布律如下：

Y \ X	-1	1	2
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	k	0.2

（3）求$F(1.2,0)$;

$$F(1.2,0)=P\{X\le 1.2,Y\le 0\}=P\{(X,Y)=(-1,-1)\cup(1,-1)\}$$

$$=P\{(X,Y)=(-1,-1)\}+P\{(X,Y)=(1,-1)\}$$

$$=0.2+0.1=0.3$$

◆联合分布律与边缘分布律

例：　已知(X,Y)的联合分布律如下：

$Y \backslash X$	-1	1	2
-1	0.2	0.1	0.2
1	0.1	k	0.2

（4）求$P\{|X+Y|>1\}$.

$$P\{|X+Y|>1\}=P\{(X,Y)=(-1,-1)\cup(1,1)\cup(2,1)\}$$

$$=0.2+k+0.2=0.6$$

◆什么是连续型随机变量？

定义：若X的分布函数可表示为：

$$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$$

其中$f(x)\ge 0$,则称X为连续型随机变量，称$f(x)$为概率密度。

注：　密度函数$f(x)$与物理学上的线密度相似！

◆ 联合概率密度

定义：若(X,Y)的分布函数可表示为：

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\,dsdt$$

其中$f(x,y)\ge 0$,则称(X,Y)为二维连续型随机变量，称$f(x,y)$为联合概率密度。

注： 联合概率密度$f(x,y)$的意义！

◆ 联合概率密度

定义：若(X,Y)的分布函数可表示为：

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)dsdt$$

其中$f(x,y)\ge 0$,则称(X,Y)为二维连续型随机变量，称$f(x,y)$为联合概率密度。

◆ 边缘概率密度

X,Y各自的密度称为边缘概率密度，即为：$f_X(x),f_Y(y)$

◆ 二维连续型的性质

定义：$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)dsdt$

(1) $f(x,y)\ge 0$

(2) $F(+\infty,+\infty)=P\{X\le +\infty,Y\le +\infty\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$

(3) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy,\quad D\subseteq R^2$

(4) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

(5) $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

◆ 二维连续型的性质

定义：$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)dsdt$

(1) $f(x,y)\ge 0$

(2) $F(+\infty,+\infty)=P\{X\le +\infty,Y\le +\infty\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$

(3) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy,\ D\subseteq R^2$

(4) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

(5) $\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$

◆ 连续型随机变量的性质

(1) $f(x)\ge 0$

(2) $F(+\infty)=P\{X\le +\infty\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

(3) $P\{X=x_0\}=0$

(4) 设$x_1<x_2$，则

$P\{x_1<X\le x_2\}=F(x_2)-F(x_1)$

$=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx=P\{x_1\le X<x_2\}=P\{x_1\le X\le x_2\}$

(5) 若$f(x)$在x处连，则：$F'(x)=f(x)$

◆ 二维连续型最重要的性质

(2) $F(+\infty,+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dxdy=1$

(3) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)\,dxdy,\quad D\subseteq R^2$

(4) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy,\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx$

◆ 二维连续型最重要的性质

(2) $F(+\infty,+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$

(3) $P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy,\ D\subseteq R^2$

(4) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy,\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$

◆ 连续型随机变量最重要的性质

(1) $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

(3) $P\{x_1<X\le x_2\}=P\{x_1\le X<x_2\}=P\{x_1\le X\le x_2\}$

$=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$

(4) $F'(x)=f(x)$

例：已知(X,Y)的概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases} kx, & 0<x<1, 0<y<x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k；

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（3）求$P\{X>2Y\}$.

提示：$F(+\infty,+\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D f(x,y)dxdy,\quad D\subseteq R^2$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

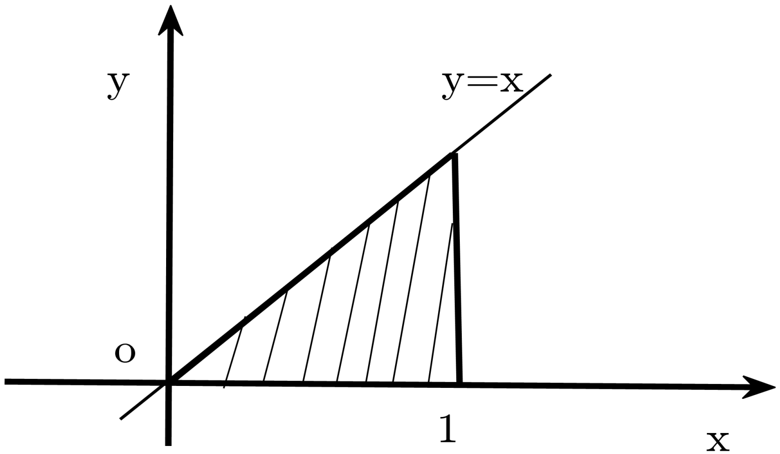
例：已知 $f(x,y)=\begin{cases} kx, & 0<x<1,0<y<x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k；

（2）求：$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（3）求$P\{X>2Y\}$.

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x kxdy \quad =\frac{k}{3}=1\Rightarrow k=3$



第3.1节：二维随机变量及其分布

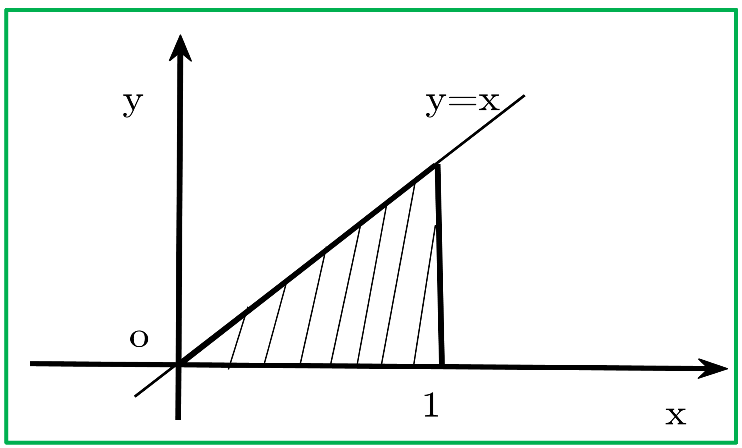
例：已知 $f(x,y)=\begin{cases} kx, & 0<x<1, 0<y<x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k;

（2）求：$f_X(x)$，$f_Y(y)$;

（3）求$P\{X>2Y\}$.

（2）$f_X(x)=\int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ $=\begin{cases} \int_0^x 3xdy, & 0<x<1 \\ 0, & else \end{cases}$ $=\begin{cases} 3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$



$f_Y(y)=\int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$ $=\begin{cases} \int_y^1 3xdx, & 0<y<1 \\ 0, & else \end{cases}$ $=\begin{cases} \frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

例：已知 $f(x,y)=\begin{cases} kx, & 0<x<1, 0<y<x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

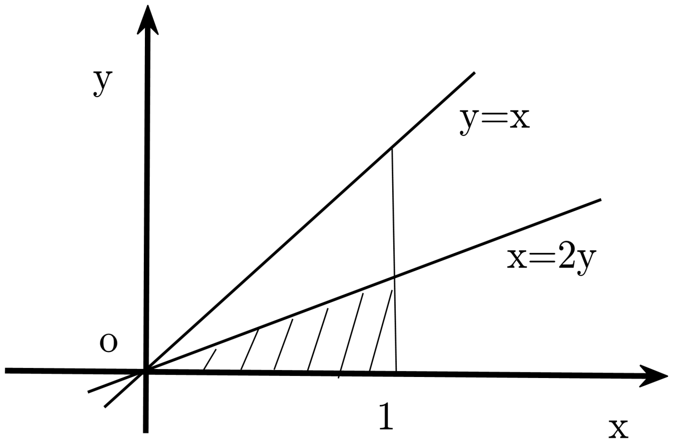
（1）求常数k；

（2）求：$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（3）求$P\{X>2Y\}$.

（4）$P\{X<0.5\}$

（3）$P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y} f(x,y)dxdy \ =\int_0^1 dx\int_0^{\frac{x}{2}} 3xdy=0.5$



例：已知 $f(x,y)=\begin{cases} kx, & 0<x<1,0<y<x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

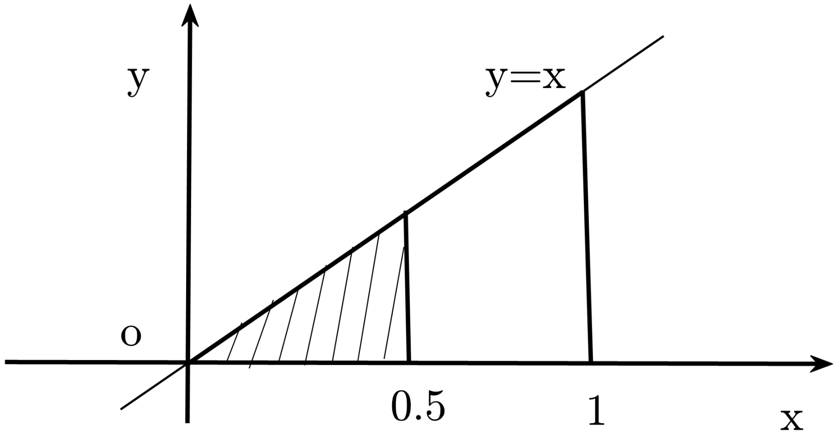
（1）求常数k；

（2）求：$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（3）求$P\{X>2Y\}$.

（4）$P\{X<0.5\}$

（4）$P\{X<0.5\}=\iint\limits_{x<0.5} f(x,y)dxdy \quad =\int_0^{0.5}dx\int_0^x 3xdy=\dfrac{1}{8}$



$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$$P\{X\in L\}=\int_L f_X(x)dx$$

（4）$P\{X<0.5\}=\int\limits_{x<0.5} f_X(x)dx=\int_0^{0.5}3x^2dx=\dfrac{1}{8}$

例：已知 $f(x,y)=\begin{cases} kx, & 0<x<1,0<y<x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k；

（2）求：$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（3）求$P\{X>2Y\}$.

（1）$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x kxdy=\frac{k}{3}=1 \Rightarrow k=3$

（2）$f_X(x)=\int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^x 3xdy, & 0<x<1 \\ 0, & else \end{cases}=\begin{cases} 3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_y^1 3xdx, & 0<y<1 \\ 0, & else \end{cases}=\begin{cases} \frac{3}{2}\left(1-y^2\right), & 0<y<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（3）$P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{x}{2}} 3xdy=0.5$

◆ 二维均匀分布

定义：若(X,Y)的概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(D)}, & (x,y)\in \mathbf{D} \\ 0, & \text{else}\end{cases}$ $,D\subseteq R^2$

则称(X,Y)在D上服从均匀分布。

例：在平面某区域D上随机取一点，该点坐标(X,Y)就服从D上的均匀分布。

注：若(X,Y)在矩形区域$D=\{(x,y)|a\le x\le b,c\le y\le d\}$上服从均匀分布，则两个边缘分布仍服从均匀分布，即：

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b \\ 0, & \text{else}\end{cases}\quad,\quad f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, & c\le y\le d \\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

例：已知(X,Y)在区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 4,0\le y\le 2\}$上服从均匀分布

（1）求联合概率密度：$f(x,y)$;

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$;

（3）求$P\{X>Y\}$.

答案：（1）$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & 0\le x\le 4,0\le y\le 2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

（2）$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0\le x\le 4\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le y\le 2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

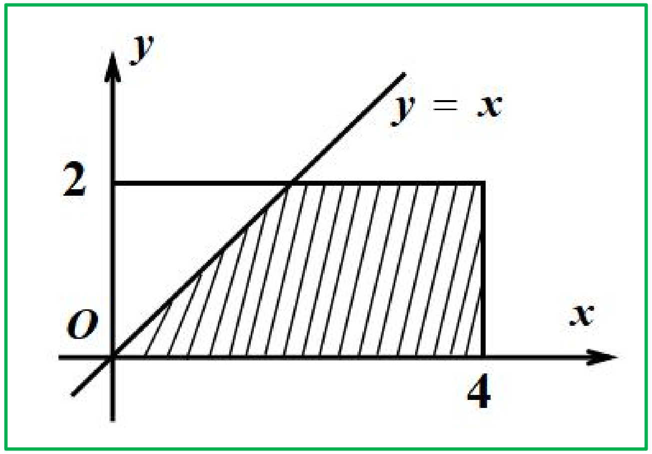
例：已知(X,Y)在区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 4,0\le y\le 2\}$上服从均匀分布

（1）求联合概率密度：$f(x,y)$;

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$;

（3）求$P\{X>Y\}$.

答案：（3）$P\{X>Y\}=\iint\limits_{x>y} f(x,y)dxdy \; =\int_0^2 dy\int_y^4 \frac{1}{8}dx=\frac{3}{4}$



或：$P\{X>Y\}=\dfrac{2\times4-\frac{1}{2}\times2\times2}{2\times4}=\dfrac{3}{4}$

◆ 二维正态分布

定义：若(X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

则称(X,Y)服从二维正态分布，记为：

$$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$$

注：若$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$，则两个边缘分布仍为正态分布，即：

$$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),\quad Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$$

◆ 作业

1. 已知(X,Y)的概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k；

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（3）求$P\{X \ge Y\}$.

2：已知$P\{X \ge 0, Y \ge 0\}=\dfrac{3}{7}$, $P\{X \ge 0\}=P\{Y \ge 0\}=\dfrac{4}{7}$

（1）求$P\{\max\{X,Y\} \ge 0\}$；

（2）求$P\{\min\{X,Y\} < 0\}$.

3：设(X,Y)在曲线$y=x^2, y=x$所围成的区域G内服从均匀分布，求联合概率密度和边缘概率密度.

1：已知 $f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(2x+y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求常数k；

（2）求边缘概率密度：$f_X(x)$，$f_Y(y)$；

（3）求$P\{X\geq Y\}$.

（1） $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}ke^{-(2x+y)}dy=\frac{1}{2}k=1\Rightarrow k=2$

（2）$f_X(x)=\int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} \int_0^{+\infty}2e^{-(2x+y)}dy, & x>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}=\begin{cases} 2e^{-2x}, & x>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{+\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} \int_0^{+\infty}2e^{-(2x+y)}dx, & y>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（3）$P\{X\geq Y\}=\iint\limits_{x\geq y} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{x}2e^{-(2x+y)}dy=\frac{1}{3}$

2：已知$P\{X\geq 0,Y\geq 0\}=\frac{3}{7}$，$P\{X\geq 0\}=P\{Y\geq 0\}=\frac{4}{7}$

（1）求$P\{\max\{X,Y\}\geq 0\}$；

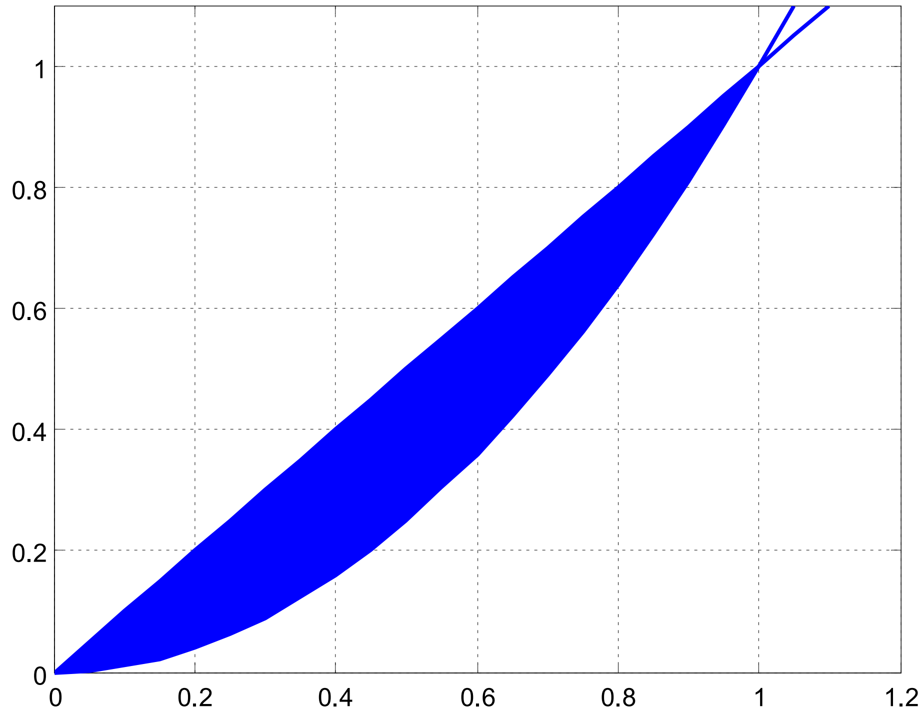
（2）求$P\{\min\{X,Y\}<0\}$

解（1）$P\{\max\{X,Y\}\geq 0\}=P\{X\geq 0\cup Y\geq 0\}=P\{X\geq 0\}+P\{Y\geq 0\}-P\{X\geq 0,Y\geq 0\}$

$$=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$$

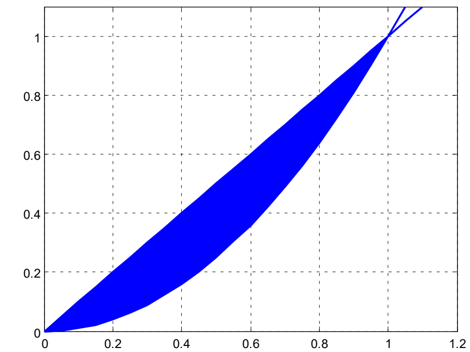
（2）$P\{\min\{X,Y\}<0\}=1-P\{\min\{X,Y\}\geq 0\}=1-P\{X\geq 0,Y\geq 0\}=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

3：设(X,Y)在曲线$y=x^2$，$y=x$所围成的区域G内服从均匀分布，求联合概率密度和边缘概率密度.



$$S(G)=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\frac{1}{6}$$

3：设(X,Y)在曲线$y=x^2,y=x$所围成的区域G内服从均匀分布，求联合概率密度和边缘概率密度.



解：$S(G)=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\frac{1}{6}$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S(G)}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}6, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}6, & 0<x<1,x^2<y<x\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

（2）$$f_X(x)=\int_{+\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6dy, & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}6\left(x-x^2\right), & 0<x<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{+\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}}6dx, & 0<y<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}6\left(\sqrt{y}-y\right), & 0<y<1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$