第7章 ——假设检验

◆假设检验的概念

对总体分布形式或分布中的未知参数作出假设并通过样本进行检验.

◆假设检验的分类

假设检验
- 参数假设检验
- 非参数假设检验

参数假设检验：总体分布已知，检验未知参数的某个假设：如 $\mu=5$

非参数假设检验：总体分布类型未知时检验总体服从某一分布：如 $X \sim P(\lambda)$

第7章 ——假设检验

◆假设检验的基本概念

◆正态总体的假设检验

➢ 单正态总体的假设检验（*****）

➢ 双正态总体的假设检验（***）

第7.1节 ——假设检验的基本概念

◆假设检验的原理（*****）.

◆假设检验的相关概念（*****）.

◆假设检验的步骤（***）.

第7.1节　假设检验的基本概念

◆ 引例

箱子中有红白两种颜色球共100个，甲说里面有98个是白球，他的说法对吗？

◆ 小概率原理

- 在一次实验中，通常认为小概率事件不会发生。
- 若在一次实验中，小概率事件发生了，则认为不合常理。

第7.1节　假设检验的基本概念

◆ 假设检验的思想

- 对总体分布中的未知参数作出某种假设H_0 .
- 在该假设成立的条件下构造一个小概率事件.
- 对总体进行抽样，由样本值判断小概率事件是否发生.
- 若小概率事件发生了，则认为假设 H_0不成立, 否则接受 H_0.

第7. 1节　假设检验的基本概念

◆ 假设检验中的基本概念

- 原假设H_0：即要检验的假设，也称为零假设和基本假设。
- 对立假设H_1：即原假设的对立面，也称为备择假设。
- 检验统计量：用来构造小概率事件的统计量。
- 拒绝域：检验统计量在该范围内取值时，小概率事件发生。
- 检验的显著性水平：即小概率α。
- 双侧假设检验及单侧假设检验。

第7.1节　假设检验的基本概念

◆ 假设检验中的步骤

(1)根据问题提出原假设H_0及对立假设H_1;

(2)在原假设H_0成立条件下选取恰当的检验统计量;

(3)由检验统计量构造一个小概率事件并由此确定拒绝域;

(4) 由样本值判定检验统计量是否在拒绝域里面，并对原假设H_0作出拒绝或接受的判断。

第7.1节　假设检验的基本概念

◆ 假设检验中的步骤

（1）根据问题提出假设：H_0，　H_1

（2）　选择合适的检验统计量 Q

（3）构造小概率事件：$P\{Q\in W\}=\alpha$

　　　由此得Q观察值Q_0的拒绝域 W

（4）由样本值计算Q观察值Q_0

（5）判断：　若$Q_0\in W$，拒绝H_0成立，若$Q_0\notin W$，接受H_0成立

第7.1节　假设检验的基本概念

◆ 假设检验中的步骤

（1）提出假设：H_0，　H_1

（2）选择检验统计量 Q

（3）确定拒绝域 W

（4）计算Q观察值Q_0

（5）判断：$Q_0 \in W$ ？

例1: 在某洗衣粉工厂，包装机正常工作时，洗衣粉的包装重量

$$X \sim N\left(500, 2^2\right)$$

每天开工后须先检查包装机工作是否正常，某天开工后随机抽取9袋样品，测出其平均值为：$\overline{x} = 502g$. 假设总体方差不变，试问这天包装机工作是否正常？$\left(\text{设}\alpha = 0.05\right)$

第7.1节　假设检验的基本概念

例1: 在某洗衣粉工厂，包装机正常工作时，洗衣粉的包装重量 $X \sim N\left(500, 2^2\right)$，每天开工后须先检查包装机工作是否正常，某天开工后随机抽取9袋样品，测出其平均值为：$\bar{x} = 502g$. 假设总体方差不变，试问这天包装机正常是否正常？$\left(设\alpha = 0.05\right)$

解：（1）建立假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 500$ ，$H_1: \mu \neq \mu_0 = 500$

(2)选择统计量：$U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

（3）确定拒绝域：W ：$|u| > u_{\alpha/2}$ 或 $W = \left(-\infty, -u_{\alpha/2}\right) \cup \left(u_{\alpha/2}, +\infty\right)$

由 $u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$ 得，　$W = (-\infty, -1.96) \cup (1.96, +\infty)$

（4）带入已知检验：$u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{502 - 500}{2/\sqrt{9}} = 3$ ，从而 $|u| > u_{\alpha/2}$（即 $u \in W$），

故拒绝原假设 H_0，认为工作不正常。

第7.1节　假设检验的基本概念

◆ 假设检验中的两类错误

➢ 第一类错误：”弃真”

$$P(\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真})=\alpha$$

➢ 第二类错误：”取伪”

$$P(\text{接受}H_0 \mid H_0\text{为假})=\beta$$

◆ 假设检验中的两类错误

➢ 第一类错误："弃真"　$P(\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真})=\alpha$

➢ 第二类错误："取伪"　$P(\text{接受}H_0 \mid H_0\text{为假})=\beta$

注1：（1）α是一个小概率.（2）$\alpha+\beta$不一定等于1.

注2：样本容量n固定时，α，β不能同时小，减小一个必增大另一个.

注3：处理原则：保护原假设，控制犯第一类错误的概率，通过增大样本容量n来减小β.

第7. 2节　正态总体参数的假设检验

- 单正态总体
  - 均值
    - 方差σ^2已知
    - 方差σ^2未知
  - 方差
    - 均值μ已知
    - 均值μ未知
- 双正态总体
  - 均值差
    - 方差σ_1^2，σ_2^2已知
    - 方差σ_1^2，σ_2^2未知
  - 方差相等
    - 均值μ_1，μ_2已知
    - 均值μ_1，μ_2未知

- 双侧检验
- 单侧检验

第7.2节　正态总体参数的假设检验

- 单正态总体
  - 均值
    - 方差σ^2已知 $\rightarrow$ u检验法
    - 方差σ^2未知 $\rightarrow$ t检验法
  - 方差
    - 均值μ已知
    - 均值μ未知 $\rightarrow$ χ^2检验法
- 双正态总体
  - 均值差
    - 方差σ_1^2，σ_2^2已知 $\rightarrow$ u检验法
    - 方差σ_1^2，σ_2^2未知
  - 方差相等
    - 均值μ_1，μ_2已知
    - 均值μ_1，μ_2未知 $\rightarrow$ F检验法

第7.2节　正态总体参数的假设检验

- 单总体
  - 均值
    - σ^2已知 $\xrightarrow{U} U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)\to |u|>u_{\alpha/2}$
    - σ^2未知 $\xrightarrow{T} T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)\to |t|>t_{\alpha/2}(n-1)$
  - 方差
    - μ已知
    - μ未知 $\xrightarrow{\chi^2} \chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim \chi^2(n-1)\to \begin{cases}\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\\ \chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\end{cases}$
- 双总体
  - 均值差
    - σ_1^2，σ_2^2已知 $\xrightarrow{U} U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)\to |u|>u_{\alpha/2}$
    - 方差σ_1^2，σ_2^2未知
  - 方差相等
    - μ_1，μ_2已知
    - μ_1，μ_2未知 $\xrightarrow{F} F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)\to \begin{cases}F<F_{1-\alpha/2}(\cdot)\\ F>F_{\alpha/2}(\cdot)\end{cases}$

第7.2节　正态总体参数的假设检验

单

$\dfrac{H_0:\mu=\mu_0}{H_1:\mu\neq\mu_0}$

- σ^2已知 $\xrightarrow{U} U=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \to |u|>u_{\alpha/2}$
- σ^2未知 $\xrightarrow{T} T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \to |t|>t_{\alpha/2}(n-1)$

$\dfrac{H_0:\sigma^2=\sigma_0^2}{H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2}$

- μ 已知
- μ未知 $\xrightarrow{\chi^2} \chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \to \begin{cases}\chi^2<\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\\ \chi^2>\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\end{cases}$

双

$\dfrac{H_0:\mu_1-\mu_2=\mu_0}{H_1:\mu_1-\mu_2\neq\mu_0}$

- σ_1^2，σ_2^2知 $\xrightarrow{U} U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \to |u|>u_{\alpha/2}$
- 方差σ_1^2，σ_2^2未知

$\dfrac{H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2}{H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2}$

- μ_1，μ_2已知
- μ_1，μ_2未知 $\xrightarrow{F} F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(\cdot) \to \begin{cases}F<F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\\ F>F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\end{cases}$

第7.2节　正态总体参数的假设检验

例2： 某水泥厂用自动包装机包装水泥，每包水泥额定重量是50kg，某天开工后随机抽查了9包水泥，称得重量如下：

49.6, 49.3, 50.1, 50, 49.2, 49.9, 49.8, 51, 50.2

设每包水泥重量服从正态分布，问这天包装机工作是否正常？（α=0.05）

$$\frac{H_0: \mu = \mu_0}{H_1: \mu \neq \mu_0} \begin{cases} \sigma^2\text{已知} \xrightarrow{U} U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \rightarrow |u| > u_{\alpha/2} \\ \sigma^2\text{未知} \xrightarrow{T} T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \rightarrow |t| > t_{\alpha/2}(n-1) \end{cases}$$

第7.2节　正态总体参数的假设检验

例2：某水泥厂用自动包装机包装水泥，每包水泥额定重量是50kg，某天开工后随机抽查了9包水泥，称得重量如下：

49.6, 49.3, 50.1, 50, 49.2, 49.9, 49.8, 51, 50.2

设每包水泥重量服从正态分布，问这天包装机工作是否正常？（α=0.05）

解：（1）建立假设 $H_0: \mu = \mu_0 = 50$ ，$H_1: \mu \neq \mu_0 = 50$

(2)选择统计量：$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

（3）确定拒绝域：$W: \ |t| > t_{\alpha/2}(n-1)$ 或 $W = \left(-\infty, -t_{\alpha/2}\right) \cup \left(t_{\alpha/2}, +\infty\right)$

（4）带入已知检验：$t = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{49.9 - 50}{s/\sqrt{9}} \approx -0.56$ ，$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(8) = 2.306$

故：$|t| > t_{\alpha/2}(n-1)$不成立或$t \notin W$，接受原假设H_0.

例3： 设甲乙两厂生产同样的灯泡，其寿命X,Y分别服从$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，已知它们寿命的标准差分别为84小时和96小时，现从甲乙两厂生产的灯泡中各取60只，测得其平均寿命分别为1295小时和1230小时，能否认为两厂生产的灯泡寿命无显著差异（α=0.05）

$$
\text{双}\begin{cases}
\dfrac{H_0:\mu_1-\mu_2=\mu_0}{H_1:\mu_1-\mu_2\neq\mu_0} & \begin{cases}\sigma_1^2,\ \sigma_2^2\text{知}\xrightarrow{U} U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\rightarrow |u|>u_{\alpha/2} \\ \text{方差}\sigma_1^2,\ \sigma_2^2\text{未知}\end{cases} \\
\dfrac{H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2}{H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2} & \begin{cases}\mu_1,\ \mu_2\text{已知} \\ \mu_1,\ \mu_2\text{未知}\xrightarrow{F} F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(\cdot)\rightarrow\begin{cases}F<F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1) \\ F>F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\end{cases}\end{cases}
\end{cases}
$$

第7.2节　正态总体参数的假设检验

例3：设甲乙两厂生产同样的灯泡，其寿命X,Y分别服从$N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，已知它们寿命的标准差分别为84小时和96小时，现从甲乙两厂生产的灯泡中各取60只，测得其平均寿命分别为1295小时和1230小时，能否认为两厂生产的灯泡寿命无显著差异（α=0.05）

解：（1）建立假设 $H_0:\mu_1-\mu_2=0$ ，$H_1:\mu_1-\mu_2\neq 0$

(2)选择统计量：$U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\sim N(0,1)$

（3）确定拒绝域：W： $|u|>u_{\alpha/2}$ 或$W=\left(-\infty,-u_{\alpha/2}\right)\cup\left(u_{\alpha/2},+\infty\right)$

（4）带入已知检验：$u=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}}\approx$ -3.95 ，$u_{\alpha/2}=1.96$

故：$|u|>u_{\alpha/2}$成立，拒绝原假设H_0. 即两厂生产灯泡寿命有显著差异。

例4： 设甲乙两厂生产同样的电阻，现从中分别随机抽取12个和10个样品，测出它们的电阻值后，分别计算得样本方差为$s_1^2=1.4$，$s_2^2=4.38$. 假设电阻值服从正态分布，在显著性水平α=0.1下，是否可以认为两厂生产的电阻值的方差相等？

双

$\dfrac{H_0:\mu_1-\mu_2=\mu_0}{H_1:\mu_1-\mu_2\neq\mu_0}$

- σ_1^2，σ_2^2知 $\xrightarrow{U} U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-\mu_0}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \to |u|>u_{\alpha/2}$
- 方差σ_1^2，σ_2^2未知

$\dfrac{H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2}{H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2}$

- μ_1，μ_2已知
- μ_1，μ_2未知 $\xrightarrow{F} F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(\cdot)\to \begin{cases} F<F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1) \\ F>F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1) \end{cases}$

第7.2节　正态总体参数的假设检验

例4： 设甲乙两厂生产同样的电阻，现从中分别随机抽取12个和10个样品，测出它们的电阻值后，分别计算得样本方差为 $s_1^2=1.4$，$s_2^2=4.38$. 假设电阻值服从正态分布，在显著性水平 $\alpha=0.1$下，是否可以认为两厂生产的电阻值的方差相等？

解：（1）建立假设 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ ，$H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$

(2)选择统计量：$F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

（3）确定拒绝域：$W:$ $F<F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$或$F>F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

（4）带入已知检验：$F_0=\dfrac{s_1^2}{s_2^2}=\dfrac{1.4}{4.38}\approx0.32$

$$F_{0.05}(9,11)=2.9\Rightarrow F_{0.95}(11,9)=\frac{1}{F_{0.05}(9,11)}=\frac{1}{2.9}\approx0.34$$

由于$F_0<F_{0.95}(11,9)$，故拒绝原假设H_0. 即两厂生产电阻值方差不等。