第5.3节　——正态总体的抽样分布

◆单正态总体的抽样分布定理（*****）

◆双正态总体的抽样分布定理（****）

◆ 单正态总体的抽样分布

定理： 设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$, $X_1,X_2,\cdots X_n$为一样本,则

（1）$\bar{X} \sim N\left(\mu,\sigma^2/n\right)$

（2）$U=\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

（3）$\chi^2=\dfrac{n-1}{\sigma^2}S^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$

（4）$\bar{X}$与S^2相互独立.

◆ 单正态总体的抽样分布

定理： 设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right), X_1, X_2, \cdots X_n$为一样本，则

（5）$\chi^2 = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2\left(n\right)$

（6）$T = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t\left(n-1\right)$

第5.3节 正态总体的抽样分布

◆ 单正态总体的抽样分布

定理：设总体$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right), X_1, X_2, \cdots X_n$为一样本,则

(1) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$

(2) $U = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

(3) $\chi^2 = \dfrac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$

(4)$\bar{X}$与S^2相互独立

(5) $\chi^2 = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$

(6) $T = \dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

◆ 双正态总体的抽样分布

定理： 设总体$X \sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),Y \sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$,且$X,Y$独立，则

（1） $$U=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-\left(\mu_1-\mu_2\right)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1)$$

（2） $$F=\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F\left(n_1-1,n_2-1\right)$$

第5章部分习题讲解

例：设$X_1,X_2,\cdots X_n$是总体$X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$的一个样本，证明

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)^2=\left(n^2-1\right)\sigma^4$$

证明：由单正态抽样定理知：$\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2\left(n-1\right)$

故：$E\left[\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=n-1,\ D\left[\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=2\left(n-1\right)$

从而：$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=\sigma^2\left(n-1\right),\ D\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]=2\sigma^4\left(n-1\right)$

从而：$E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)^2=D\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]+\left\langle E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right]\right\rangle^2$

$$=2\sigma^4\left(n-1\right)+\left(\sigma^2\left(n-1\right)\right)^2=\left(n^2-1\right)\sigma^4$$