第2.5节 ——随机变量函数的分布

- 离散型随机变量函数的分布；
- 连续型随机变量函数的分布。

◆ 离散型随机变量函数的分布

例：　已知X的分布律如下：

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.1	0.4

（1）求$Y_1 = X^2$及$Y_2 = \sin\left(\frac{1}{2}\pi X\right)$的分布律；

（2）求$Y_3 = |X|$的分布函数；

（3）求$P\{|X-1|>1\}$；

例： 已知X的分布律如下：

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.1	0.4

$Y_1 = X^2$	0	1	4
P	0.3	0.3	0.4

$Y_2 = \sin\left(\frac{1}{2}\pi X\right)$	-1	0	1
P	0.2	0.7	0.1

$Y_3 = \lvert X \rvert$	0	1	2
P	0.3	0.3	0.4

$$\Rightarrow \quad F_{Y_3}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 0.3, & 0 \le y < 1 \\ 0.6, & 1 \le y < 2 \\ 1, & 2 \le y \end{cases}$$

$$P\{|X-1|>1\} = P\{X=-1\} = 0.2$$

例：　已知X的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.2, & -1\le x<0\\ 0.5, & 0\le x<1\\ 0.6, & 1\le x<2\\ 1, & 2\le x\end{cases}$

（1）求$Y_1=X^2$及$Y_2=\sin\left(\frac{1}{2}\pi X\right)$的分布律；

（2）求$Y_3=|X|$的分布函数；

（3）求$P\{|X-1|>1\}$；

◆ 连续型随机变量函数的分布

例： 已知X的概率密度为：$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & \textbf{else}\end{cases}$

求$Y=2X+8$的概率密度。

解法一： "分布函数法"

解法二： "公式法"

例： 已知 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & \text{else}\end{cases}$,求 $Y=2X+8$ 的概率密度.

解法一： "分布函数法"

当 $y\in(8,16)$ 时， $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+8\le y\}=P\left\{X\le\dfrac{y-8}{2}\right\}=F_X\left(\dfrac{y-8}{2}\right)$

此时， $f_Y(y)=F_Y'(y)=\left(F_X\left(\dfrac{y-8}{2}\right)\right)'=f_X\left(\dfrac{y-8}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{y-8}{32}$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y-8}{32}, & y\in(8,16)\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

例： 已知 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，求 $Y=2X+8$ 的概率密度.

解法二："公式法"

由 $y=2x+8 \Rightarrow x=h(y)=\dfrac{y-8}{2}$

当 $y\in(8,16)$ 时，$f_Y(y)=f_X(h(y))\cdot|h'(y)|=f_X\left(\dfrac{y-8}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{y-8}{32}$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{y-8}{32}, & y\in(8,16)\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

例：已知X的密度为： $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \textbf{else} \end{cases}$,求$Y=e^X$的概率密度。

解法一："分布函数法"

当$y>1$时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{e^X\le y\}=P\{X\le \ln y\}=F_X(\ln y)$

此时，$f_Y(y)=F_Y'(y)=\left(F_X(\ln y)\right)'=f_X(\ln y)\cdot\dfrac{1}{y}=e^{-\ln y}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{y^2}$

故$f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y^2}, & y>1 \\ 0, & \textbf{else} \end{cases}$

例：已知X的密度为： $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$,求$Y=e^X$的概率密度。

解法二： "公式法"

由$y=e^x \Rightarrow x=h(y)=\ln y$

当$y>1$时，$f_Y(y)=f_X(h(y))\cdot|h'(y)|=f_X(\ln y)\cdot\frac{1}{y}=e^{-\ln y}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{y^2}$

故 $f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{y^2}, & y>1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

◆ 作业

习题2-5（Page62）：2,3,4

◆ 作业解答

2：已知X的分布律$P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^k}$，$k=1,2,\cdots$，求$Y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}X\right)$的分布律。

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{Y}=1\}=\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=1\cup\boldsymbol{X}=5\cup\boldsymbol{X}=9\cup\cdots\}=\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=1\}+\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=5\}+\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=9\}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^9}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^4}}=\frac{8}{15}$$

$$\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{Y}=0\}=\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=2\cup\boldsymbol{X}=4\cup\boldsymbol{X}=6\cup\cdots\}=\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=2\}+\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=4\}+\boldsymbol{P}\{\boldsymbol{X}=6\}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots=\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{3}$$

2：已知X的分布律$P\{X=k\}=\dfrac{1}{2^k}$，$k=1,2,\cdots$，求 $Y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}X\right)$的分布律。

$$P\{Y=1\}=P\{X=1\cup X=5\cup X=9\cup\cdots\}=P\{X=1\}+P\{X=5\}+P\{X=9\}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^9}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^4}}=\frac{8}{15}$$

$$P\{Y=0\}=P\{X=2\cup X=4\cup X=6\cup\cdots\}=P\{X=2\}+P\{X=4\}+P\{X=6\}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots=\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{3}$$

$$P\{Y=-1\}=P\{X=3\cup X=7\cup X=11\cup\cdots\}=P\{X=3\}+P\{X=7\}+P\{X=11\}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^{11}}+\cdots=\frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2^4}}=\frac{2}{15}$$

◆ 作业解答

2：已知X的分布律$P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}$，$k=1,2,\cdots$，求$Y=\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$的分布律。

Y	-1	0	1
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$

3：已知X服从$[a,b]$的均匀分布，求$Y=cX+d\,(c>0)$的概率密度。

解：由已知得 $$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

由$y=cx+d\Rightarrow x=h(y)=\dfrac{y-d}{c}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))|h'(y)|, & ca+d\le y\le cb+d\\ 0, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}f_X\left(\dfrac{y-d}{c}\right)\left|\dfrac{1}{c}\right|, & ca+d\le y\le cb+d\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{c(b-a)}, & ca+d\le y\le cb+d\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

4：已知X服从$[0,1]$的均匀分布，求$Y=e^X$的概率密度。

解 由已知得 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{else}\end{cases}$

由$y=e^x \Rightarrow x=h(y)=\ln y$

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X(h(y))|h'(y)|, & 1\le y\le e\\ 0, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}f_X(\ln y)\left|\frac{1}{y}\right|, & 1\le y\le e\\ 0, & \text{else}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 1\le y\le e\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$