第2.4节 ——连续型随机变量及其概率密度

1. 连续型随机变量的定义及性质(******)

2. 三种常用的连续型分布(*****)

知识回顾

◆ 什么是离散型随机变量？

定义：　用若X的全部可能取值为有限个或可数无穷个，则X为离散型。

例：　用X表示骰子的点数，X为离散型；

问：　在$[0,1]$区间上随机取一点，用X表示该点坐标，

X是离散型随机变量吗？

答：　X不是离散型随机变量，而是连续型随机变量。

◆什么是连续型随机变量?

定义：若X的分布函数可表示为：

$$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

其中$f(x)\ge 0$,则称X为连续型随机变量，称$f(x)$为概率密度。

注： 密度函数$f(x)$与物理学上的线密度相似!

问： $f(x_0)=0$表示什么含义?

◆ 连续型随机变量的性质（5S）

(1) $f(x) \geq 0$

(2) $F(+\infty) = P\{X \leq +\infty\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

(3) $P\{X = x_0\} = 0$

(4) 设$x_1 < x_2$,则 $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = P\{x_1 \leq X < x_2\} = P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = P\{x_1 < X < x_2\}$$

推广: $P\{X \in L\} = \int_L f(x)dx$, L为某区间.

(5) 若$f(x)$在x处连，则: $F'(x) = f(x)$

◆ 连续型随机变量最常用的性质（5S）

（1）$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

（3）$P\{x_1<X\le x_2\}=P\{x_1\le X<x_2\}=P\{x_1\le X\le x_2\}=P\{x_1<X<x_2\}$

$$=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$$

推广：$P\{X\in L\}=\int_L f(x)dx$，$L$为某区间.

（4）$F'(x)=f(x)$

注： 性质（2）的几何含义（以密度曲线为曲边的曲边梯形的面积等于1）！

第2.4节：连续型随机变量及其概率密度

例：已知X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases} kx, & 0<x<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求k;

（2）求$P\{X=0.5\},P\{X<0.5\},P\{X\ge 0.5\}$;

（3）求$F(x)$

提示：（1）$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

（3）$P\{x_1<X\le x_2\}=P\{x_1\le X<x_2\}=P\{x_1\le X\le x_2\}$

$=P\{x_1<X<x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

推广：$P\{X\in L\}=\int_L f(x)dx$，$L$为某区间.

例:已知X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases} kx, & 0<x<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求k;

（2）求$P\{X=0.5\}, P\{X<0.5\}, P\{X\geq 0.5\}$;

（3）求$F(x)$

解（1）由$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1 kxdx=\left.\frac{kx^2}{2}\right|_0^1=\frac{k}{2}=1 \Rightarrow k=2$

（2）$P\{X=0.5\}$=0

$$P\{X<0.5\}=\int_{-\infty}^{0.5} f(x)dx=\int_0^{0.5} 2xdx=0.25$$

$$P\{X\geq 0.5\}=\int_{0.5}^{+\infty} f(x)dx=\int_{0.5}^{1} 2xdx=0.75$$

例：已知：$f(x)=\begin{cases} kx, & 0<x<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求k;

（2）求$P\{X=0.5\}, P\{X<0.5\}, P\{X\geq 0.5\}$;

（3）求$F(x)$

解（3）$F(x)=P\{X\leq x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

当$x\leq 0$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0$

当$0<x<1$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x} 2tdt=x^2$

当$x\geq 1$时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{1} f(t)dt+\int_{1}^{x} f(t)dt$

$$=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{1} 2tdt+\int_{1}^{x} 0dt=1$$

例：已知X的概率密度为：$f(x)=\begin{cases} kx, & 0<x<1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

（1）求k;

（2）求$P\{X=0.5\},P\{X<0.5\},P\{X\geq 0.5\}$;

（3）求$F(x)$

解（3）$F(x)=P\{X\leq x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

$$=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dt, & x\leq 0 \\ \int_{0}^{x} 2tdt, & 0<x<1 \\ \int_{0}^{1} 2tdt, & x\geq 1 \end{cases} =\begin{cases} 0, & x\leq 0 \\ x^2, & 0<x<1 \\ 1, & x\geq 1 \end{cases}$$

◆ 常用的连续型分布

(1) 均匀分布；

（2）指数分布；

（3）正态分布。

◆ 均匀分布

定义：若X的概率密度为 $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

则称X在区间(a,b)上服从均匀分布，记为$X\sim U(a,b)$.

X的分布函数为： $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b\\ 1, & x\ge b\end{cases}$$

特征：X落在(a,b)内某区间L里面的概率与L的长度成正比.

第2.4节：连续型随机变量及其概率密度

例:若X在$(0,2)$上服从均匀分布，（1）写出其概率密度及分布函数；
（2）求$P\{X>0.5\}$，$P\{0.5<X<3\}$

提示：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & \text{else}\end{cases}$，$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x<b \\ 1, & x\ge b\end{cases}$

$$P\{x_1<X\le x_2\}=P\{x_1\le X<x_2\}=P\{x_1\le X\le x_2\}=P\{x_1<X<x_2\}$$
$$=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$$

推广: $P\{X\in L\}=\int_L f(x)dx$，$L$为某区间.

例:若X在$(0,2)$上服从均匀分布，（1）写出其概率密度及分布函数；

（2）求$P\{X>0.5\}$，$P\{0.5<X<3\}$

解：（1）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \mathbf{0}<x<2 \\ 0, & \textbf{else}\end{cases}$，$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0 \\ \dfrac{x}{2}, & \mathbf{0}<x<2 \\ \mathbf{1}, & x\ge 2\end{cases}$

例:若X在$(0,2)$上服从均匀分布，（1）写出其概率密度及分布函数；（2）求$P\{X>0.5\}$，$P\{0.5<X<3\}$

解：（1）$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2\\ 0, & \text{else}\end{cases}$，$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x}{2}, & 0<x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$

（2）$P\{X>0.5\}=P\{0.5<X<2\}=\frac{2-0.5}{2-0}=\frac{3}{4}$

$$P\{X>0.5\}=\int_{0.5}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0.5}^{2}f(x)dx=\int_{0.5}^{2}\frac{1}{2}dx=\frac{3}{4}$$

$$P\{X>0.5\}=P\{0.5<X<2\}=F(2)-F(0.5)=1-\frac{0.5}{2}=\frac{3}{4}$$

$$P\{X>0.5\}=1-P\{X\le 0.5\}=1-F(0.5)=1-\frac{0.5}{2}=\frac{3}{4}$$

$$P\{0.5<X<3\}=P\{0.5<X<2\}=\frac{2-0.5}{2-0}=\frac{3}{4}$$

◆ 指数分布

定义：若X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\lambda>0$$

则称X服从参数为λ的指数分布，记为$X\sim e(\lambda)$.

X的分布函数为：$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

◆ 指数分布的无记忆性（2S）

对任意$s,t>0$,有

$$P\left\{X>s+t \middle| X>s\right\}=P\left\{X>t\right\}$$

◆ 正态分布

定义：若X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad x\in R$$

则称X服从正态分布，记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

X的分布函数为：$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt,\quad x\in R$$

特征：密度函数关于$x=\mu$对称，故$P\{X\le\mu\}=P\{X\ge\mu\}=0.5$.

◆ 标准正态分布

正态分布当$\mu=0,\sigma=1$时：$X\sim N(0,1)$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad x\in R$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

特征：密度函数为偶函数，故$P\{X\le 0\}$=$P\{X\ge 0\}=0.5.$

◆ 正态分布的性质

（1）若$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则$Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N\left(0,1\right)$.

（2）若$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则：$F_X\left(x\right) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

（3）$\Phi\left(x\right)+\Phi\left(-x\right)=1$.

例：若$X \sim N(1,4)$求（1）$F(5)$　（2）$P\{0 < X \le 1.6\}$　（3）$P\{|X-1| \le 2\}$

解：　（1）$F(5) = \Phi\left(\frac{5-1}{2}\right) = \Phi(2) = 0.9772$

（2）$P\{0 < X \le 1.6\} = F(1.6) - F(0) = \Phi\left(\frac{1.6-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-1}{2}\right)$

$$= \Phi(0.3) - \Phi(-0.5) = \Phi(0.3) - \left(1 - \Phi(0.5)\right) = 0.6179 - (1 - 0.6915)$$

（3）$P\{|X-1| \le 2\} = P\{-2 \le X - 1 \le 2\} = P\{-1 \le X \le 3\} = F(3) - F(-1)$

$$= \Phi\left(\frac{3-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-1}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1$$

◆ 作业

习题2-4（Page55-56）： 3,4,7

◆ 作业解答

3:设连续型随机变量X的分布函数为：$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-2x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

求（1）A,B的值；（2）$P\{-1<X<1\}$；（3）概率密度函数$f(x)$.

解：（1）$F(+\infty)=1\Rightarrow A=1$

$$F(0^{+})=F(0)\Rightarrow A+B=0 \quad \Rightarrow B=-1$$

（2）$P\{-1<X<1\}=F(1)-F(-1)=A+Be^{-2}=1-e^{-2}$

（3）$F'(x)=f(x)\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 2e^{-2x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$

4:设随机变量X的概率密度$f(x)=Ae^{-|x|}$，求系数A及分布函数$F(x)$.

解：（1）$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-|x|}dx=2\int_{0}^{+\infty} Ae^{-x}dx$

$$=2Ae^{-x}\Big|_{+\infty}^{0}=2A=1\Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

解（3）$F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} Ae^{-|t|}dt$

$$=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x} Ae^{t}dt, & x\le 0\\ \int_{-\infty}^{0} Ae^{t}dt+\int_{0}^{x} Ae^{-t}dt, & x>0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x\le 0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x>0\end{cases}$$

7:设随机变量$X \sim U(1,4)$，现对X进行三次独立试验，求至少有两次观察值大于2的概率.

解：（1）$P\{X>2\}=P\{X\in(2,4)\}=\dfrac{4-2}{4-1}=\dfrac{2}{3}$

记Y表示三次独立试验中，观察值大于2发生的次数，则有 $Y\sim b\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$

故所求概率为

$$P\{Y\geq 2\}=P\{Y=2\cup Y=3\}=P\{Y=2\}+P\{Y=3\}$$

$$=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}$$