

# 第2.3节 —— 随机变量的分布函数

- 分布函数的定义；
- 分布函数的性质；
- 离散型随机变量的分布函数。

## ◆ 分布律

例： 用 $X$ 表示骰子的点数， $X$ 的分布律为：

$$P\{X=1\}=\frac{1}{6}, P\{X=2\}=\frac{1}{6}, \dots, P\{X=6\}=\frac{1}{6}$$

也可

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6



### ◆ 什么是分布函数？

定义：设 $X$ 是一个随机变量，称：

$$F(x) = P\{X \leq x\}, -\infty < x < +\infty$$

为 $X$ 的分布函数，有时记为 $X \sim F(x)$ 或 $F_X(x)$

注： $F(x)$ 是一个普通函数，它表示随机事件 $X \in (-\infty, x]$ 的概率。

问：若 $X$ 表示你这门课程的考核分数，那么 $F(52)$ ， $F(60)$ ， $F(80)$ 表是什么？



### ◆ 分布函数的性质

(1)  $0 \leq F(x) \leq 1$

(2) 单调非减：若  $x_1 < x_2$  , 则  $F(x_1) \leq F(x_2)$

(3) 设  $x_1 < x_2$  , 则  $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

分析：记  $A: X \leq x_2$ ,  $B: X \leq x_1$ , 则： $A - B: x_1 < X \leq x_2$ ,  $B \subset A$

又当  $B \subset A$  时,  $P(A - B) = P(A) - P(B)$

则  $P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1)$   
 $= F(x_2) - F(x_1)$



### ◆ 分布函数的性质

(1)  $0 \leq F(x) \leq 1$

(2) 单调非减：若  $x_1 < x_2$  , 则  $F(x_1) \leq F(x_2)$

(3) 设  $x_1 < x_2$  , 则  $P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$

(4)  $P\{X \leq a\} = F(a)$ ,  $P\{X > a\} = 1 - F(a)$

(5)  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = 1$

(6) 右连续性： $F(x_0^+) = F(x_0)$



### ◆ 离散型随机变量的分布函数

例： 已知 $X$ 的分布律如下，求 $X$ 的分布函数 $F(x)$

$X$	1	2	3
$P$	0.3	0.4	0.3

$$\text{解： } F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.3, & 1 \leq x < 2 \\ 0.7, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x \end{cases}$$



### ◆ 离散型随机变量的分布函数

例： 已知 $X$ 的分布函数 $F(x)$ 如下，求 $X$ 的分布律

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.2, & -1 \leq x < 0 \\ 0.5, & 0 \leq x < 1 \\ 0.7, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & 2 \leq x \end{cases}$$

答案：

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.3	0.2	0.3



### ◆ 作业

习题2-3 (Page47-48) : 3,4,5,6





### ◆ 作业解答

3: 已知离散型随机变量 $X$ 的概率分布如下, 求 $X$ 的分布函数 $F(x)$

$$P\{X=1\}=0.3, P\{X=3\}=0.5, P\{X=5\}=0.2$$

$$\text{解: } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.3, & 1 \leq x < 3 \\ 0.8, & 3 \leq x < 5 \\ 1, & 5 \leq x \end{cases}$$



## 第2.3节：随机变量的分布函数

4: 已知离散型随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.4, & -1 \leq x < 1 \\ 0.8, & 1 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \leq x \end{cases}$

求 (1)  $X$  的概率分布; (2)  $P\{X < 2 | X \neq 1\}$

解: (1)

$X$	-1	1	3
$P$	0.4	0.4	0.2

$$(2) P\{X < 2 | X \neq 1\} = \frac{P\{X < 2, X \neq 1\}}{P\{X \neq 1\}} = \frac{P\{X = -1\}}{1 - P\{X = 1\}} = \frac{0.4}{1 - 0.4} = \frac{2}{3}$$



## 第2.3节：随机变量的分布函数

5: 已知随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/2, & 0 \leq x < 1 \\ x - 1/2, & 1 \leq x < 1.5 \\ 1, & 1.5 \leq x \end{cases}$

求 (1)  $P\{0.4 < X \leq 1.3\}$  (2)  $P\{X > 0.5\}$  (3)  $P\{1.7 < X \leq 2\}$

解: (1)  $P\{0.4 < X \leq 1.3\} = F(1.3) - F(0.4) = 1.3 - \frac{1}{2} - \frac{0.4}{2} = 0.6$

(2)  $P\{X > 0.5\} = 1 - P\{X \leq 0.5\} = 1 - F(0.5) = 1 - \frac{0.5}{2} = 0.75$

(3)  $P\{1.7 < X \leq 2\} = F(2) - F(1.7) = 1 - 1 = 0$



## 第2.3节：随机变量的分布函数

6: 已知随机变量 $X$ 的分布函数 $F(x) = A + B \arctan x$ ,  $(-\infty < x < +\infty)$   
求 (1) 系数 $A$ 与 $B$ ; (2)  $X$ 落在 $(-1, 1]$ 内的概率.

$$\text{解: (1) } F(+\infty) = 1 \Rightarrow A + \frac{\pi}{2}B = 1 \quad F(-\infty) = 0 \Rightarrow A - \frac{\pi}{2}B = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{\pi}$$

$$(2) P\{X \in (-1, 1]\} = P\{-1 < X \leq 1\} = F(1) - F(-1)$$

$$= A + B \cdot \frac{\pi}{4} - \left( A - B \cdot \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

