第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形
5.2 二项式定理
5.3 二项式系数的单峰性
5.4 多项式定理
5.5 牛顿二项式定理
5.6 再论偏序集

回顾：集合的组合

- $\boldsymbol{n}$元素集合的 $\boldsymbol{r}$ 子集的数目

$$\binom{n}{r} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{r}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!} = \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\ldots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})\ldots\mathbf{1}}$$

例: 有10位专家，从中选取5位构成专家小组，一共可构成多少个专家小组?

$\binom{10}{5}$个专家小组

例：$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

证明：

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

另一种证明方式：组合证明

问题：从 n 个不同的球中取出 k 个球，有多少种方法？

方法1：直接取，共有$\binom{n}{k}$种取法。

方法2：取出 n-k 个球丢弃，留下剩下的 k 个球，共有$\binom{n}{n-k}$种取法。

因此，得$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$。

组合证明

- 是一种依靠计数原理构建代数事实的证明方法
- 基本框架：
  1. 定义一个集合S；
  2. 通过一种计数方式得出 $|S|= n$；
  3. 通过另一种计数方式得出 $|S|= m$；
  4. 得出结论 $n = m$。

二项式定理

令 ***n*** 是一个正整数, 那么对于所有的 ***x***, ***y***有:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\boxed{\binom{n}{k}}x^{n-k}y^k$$

二项式系数　　***n***元素集合的 ***r*** 子集的数目

$$\boxed{\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)\,!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots1}}$$

本章的目的主要是讨论二项式系数一些相关等式和性质。

第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形

5.2 二项式定理

5.3 二项式系数的单峰性

5.4 多项式定理

5.5 牛顿二项式定理

5.1 帕斯卡三角形

定理5.1.1(Pascal公式) 对于满足$1\le k \le n$的所有整数 k 和 n, 有

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

n元素集合的k子集的数目

n-1元素集合的k子集的数目

n-1元素集合的k-1子集的数目

设集合 $S=\{1, 2, \ldots, n\}$, S的k子集分为两类:

- ✓ 不包含1 的k子集 $\binom{n-1}{k}$个
- ✓ 包含1 的k子集 $\binom{n-1}{k-1}$个

(组合证明)

定理5.1.1(Pascal公式) 对于满足$1\le k\le n$的所有整数 k 和 n, 有

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

证明：设 S 的 k子集的集合为X，那么$|X|=\binom{n}{k}$。

设 x是 S的一个元素,

令A是不含 x 的 k 子集的集合,

B是包含 x 的 k 子集的集合,

那么，$X=A\cup B$, 且$A\cap B=\varnothing$。

由加法原理，$|X|=|A|+|B|$。

计算得：$|A|=\binom{n-1}{k}$，$|B|=\binom{n-1}{k-1}$

因此，$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$。证毕。

Pascal三角形

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

$\binom{n}{k}$的规律

- ❑对角线上元素全为1
- ❑第一列上元素全为1
- ❑对角线以外各项都是其上一行的两项的和：
  - 直接上方的项
  - 直接上方的项的直接左邻的项

$$\binom{6}{2}=\binom{5}{2}+\binom{5}{1}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
0	1									…
1	1	1								…
2	1	2	1							…
3	1	3	3	1						…
4	1	4	6	4	1					…
5	1	$\boxed{5}$	$\boxed{10}$	10	5	1				…
6	1	6	$\boxed{15}$	20	15	6	1			…
7	1	7	21	35	35	21	7	1		…
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	…
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

n=9,10的两行分别是多少？

Pascal三角形

每一行相加:
(第n行)

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=2^1$$

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4$$

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	⋯
0	1									⋯
1	1	1								⋯
2	1	2	1							⋯
3	1	3	3	1						⋯
4	1	4	6	4	1					⋯
5	1	5	10	10	5	1				⋯
6	1	6	15	20	15	6	1			⋯
7	1	7	21	35	35	21	7	1		⋯
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

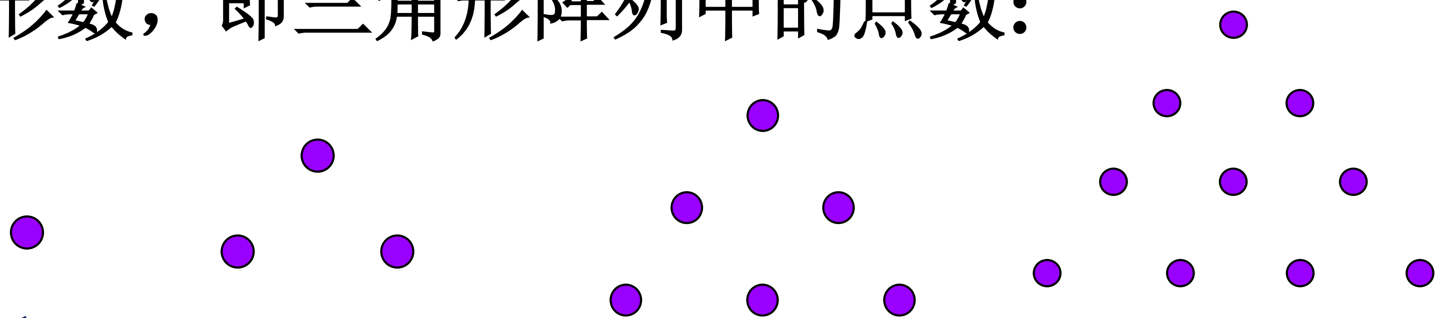
$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

第1列:

$\binom{n}{1}=n$

- **第2列是三角形数，即三角形阵列中的点数:**

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$



1 n=2 3 n=3 6 n=4 10 n=5

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

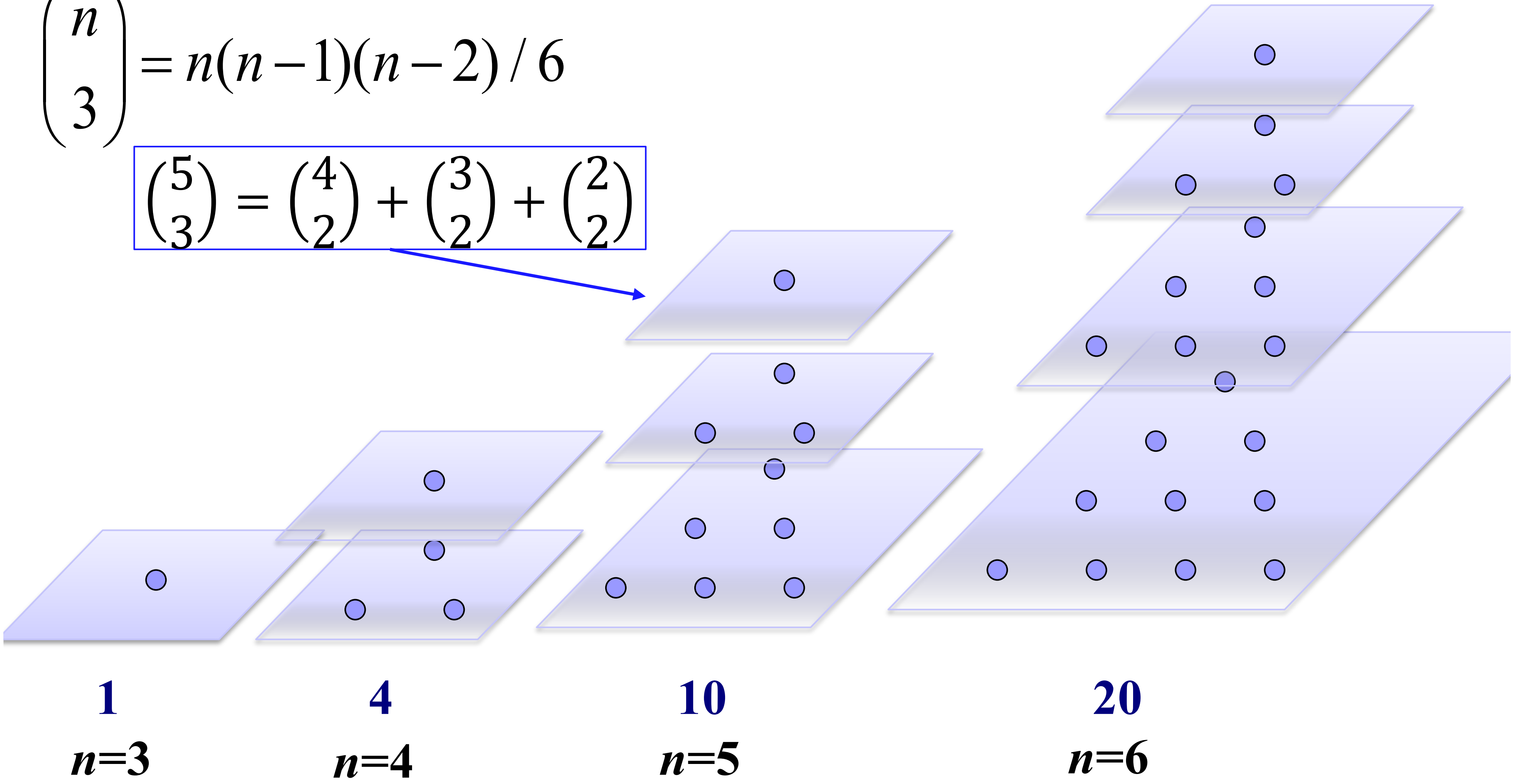
- 第3列是四面体数：$\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/6$

K=3

- 第3列是四面体数，即四面体阵列中的点数

$$\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/6$$

$$\boxed{\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}}$$



二项式系数的另一种组合解释

$p(n,k)$：从$\binom{0}{0}$项到$\binom{n}{k}$项的路径的数目

两种移动方向：

$p(n,0)=1$

$p(n,n)=1$

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

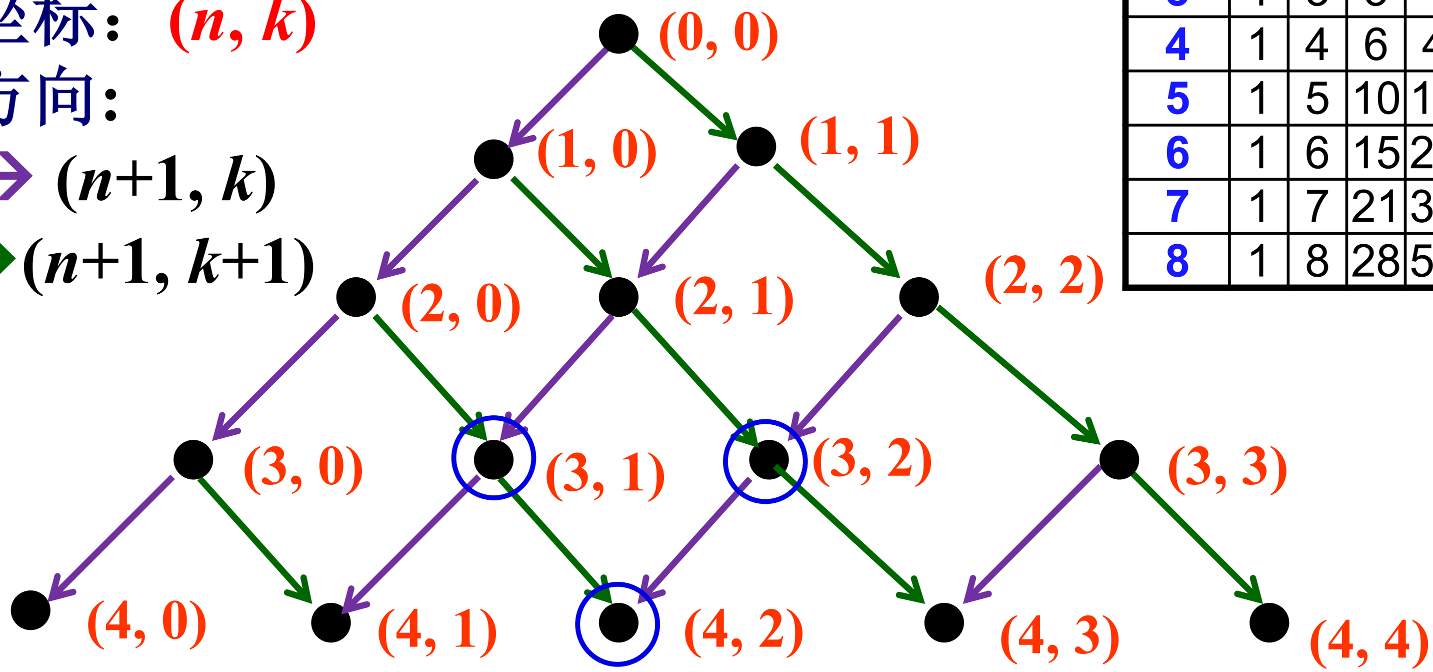
二项式系数的另一种组合解释

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

- 顶点坐标：**(n, k)**
- 移动方向：

$(n, k) \rightarrow (n+1, k)$

$(n, k) \rightarrow (n+1, k+1)$



令 $p(n, k)$ 表示从 $(0,0)$到 (n,k) 的路径数,

- 规定 $p(0, 0)=1$
- 由加法原理，$p(n, k) = p(n-1, k)+p(n-1, k-1)$, 其中，$n\geq 1$.

用数学归纳法可证 $p(n,k)=\binom{n}{k}$

第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形
5.2 二项式定理
5.3 二项式系数的单峰性
5.4 多项式定理
5.5 牛顿二项式定理

5.2 二项式定理

定理5.2.1 令n是一个正整数, 那么对于所有的x, y有：

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

证明：（组合证明）将 $(x+y)^n$ 写成 n 个$x+y$ 因子的乘积形式： $(x+y)^n=(x+y)(x+y)\ldots(x+y)$

用分配律将乘积展开，再合并同类项。

展开时，对于每个因子 $x+y$，或者选择 x，或者选择y，所以展开结果有2^n项，其中，每一项具有形式 $x^{n-k}y^k$, $k=0,1,\ldots,n$。

合并同类项时， $x^{n-k}y^k$的系数相当于在 n 项因子中选 k 个 y, 余下 n-k 项因子是 x ,

因此，等于组合数 $\binom{n}{k}$。

二项式定理的等价形式

令n是一个正整数, 那么对于所有的x, y有:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$(y+x)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$$

定理5.2.1 令n是一个正整数, 那么对于所有的x, y有:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

例：用二项式定理求下列式子

(1) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$ $=(1+2)^n=3^n$

(2) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}3^{n-k}$ $=(3+(-1))^n=2^n$

(3) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}9^{n-k}$ $=(9+(-1))^n=8^n$

(4) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}9^k$ $=(1+9)^n=10^n$

二项式定理及等价形式

令n是一个正整数, 那么对于所有的x, y有：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k}$$

$(y+x)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{k} y^{n-k}$$

二项式系数的其他等式

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

- 例：n个人中选 k 人组成足球队，其中 一人为队长，有多少种不同选法？
  - 先选足球队，然后从足球队中选队长，选法数目为:

    $$\binom{n}{k}\binom{k}{1}=k\binom{n}{k}$$

  - 先选队长，再在剩下的n-1人中选k-1个足球队员,选法数目为:

    $$\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}$$

二项式系数的其他等式

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

例：证明下列等式：

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n,\ n\geq 0$$

方法 1：对二项式令 $x = y = 1$即得。

方法 2（组合证明）：

令 S={1, 2, …, n}, 如下构造 S 的子集：

对于每个 i，可放进子集，也可不放入;

一共有 2^n 种构造方法。

例：证明以下等式 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$，（$n\geq 0$）

$$\binom{n}{k}^2=\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

第一个n元素集合选 k 个，
第2个n 元素集合选 n-k 个，
一共从 $2n$ 个元素中选 n个

关键：（加法原理）两个n元素集合相交为空。

例：证明以下等式 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$，（$n\geq 0$）

证明：设$A=\{1, 2, \ldots, n\}$, $B=\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$。

令$S=A\cup B$，S的n子集数是$\binom{2n}{n}$，其中，每个n子集含有A的元素为k个，含有B的元素为$n-k$个, $k=0,1,\ldots, n$。

令 C_k 是含有 k个A的元素的S的n子集的集合，

则 S的所有n子集可划分为 $C_0, C_1,\ldots, C_n$，有

$$\binom{2n}{n}=|C_0|+|C_1|+\ldots+|C_n|$$

其中，$|C_k|=\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}^2$。

因此，$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$。

证毕。

二项式系数的其他等式

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

例：证明下列等式：

(1) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0,\ n \geq 1$

(2) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots = 2^{n-1},\ n \geq 1$

偶数个元素的子集的个数
= 奇数个元素的子集的个数

方法一：对二项式公式令 $x = 1, y = -1$ 即得。

方法二：组合证明 (2) 成立。

二项式系数的其他等式

例：证明下列等式：

偶数个元素的子集的个数
= 奇数个元素的子集的个数

(2) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots=2^{n-1},\ n\geq 1$

证明：（组合证明）

设集合$S=\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}$是 n 元素集合，则可以把 S 的子集看成是以下选择过程：对每个 x_i 有两种选择：放入子集或不放入子集。

构造具有偶数个元素的子集时，$x_1,\ldots,x_{n-1}$中每个元素有2种选择，但 x_n只有一种选择：

- 当选择了$x_1,\ldots,x_{n-1}$中的偶数个，x_n不能被选择；
- 当选择了$x_1,\ldots,x_{n-1}$中的奇数个，x_n必须被选择。

因此，S的偶数个元素的子集个数为 2^{n-1}。

同理可证 S 的奇数个元素的子集个数为 2^{n-1}。证毕。

例：证明以下等式

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1},\ n\geq 1$$

证明：方法1

由 $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ 得，

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}$$

$$=n\binom{n-1}{0}+n\binom{n-1}{1}+\ldots+n\binom{n-1}{n-1}$$

$$=n(\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\ldots+\binom{n-1}{n-1})=n2^{n-1}$$

例：证明以下等式

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1},\ n\geq 1$$

方法2　求导法

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{k}x^k+\ldots+\binom{n}{n}x^n$$

例：证明以下等式

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1},\ n\geq 1$$

方法2 求导法

对等式

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{k}x^k+\ldots+\binom{n}{n}x^n$$

两边对 x 求导得：

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+\ldots+k\binom{n}{k}x^{k-1}+\ldots+n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

取 $x=1$ 即得等式。

组合证明？

例：用求导法证明以下等式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}\text{（}n\geq 1\text{）}$$

证明：等式 $(1+x)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$ 两边对 x 求导得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1},$$

两边同乘 x 得， $nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k$。

上式两边再对 x 求导数得

$$n(1+x)^{n-1} + nx(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^{k-1},$$

将 $x=1$ 代入得

$$n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

$$= n(n+1)2^{n-2}。$$

证毕。

- 证明等式的方法
  - 利用已有等式：帕斯卡公式
  - 求导法、积分法
  - 组合推理法

组合定义扩展

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!(n-k)}, n, k \text{ 为非负整数}$$

扩展： n 扩展为任意实数，

k 扩展为任意整数。

例：$\binom{5/2}{4}$，$\binom{-3.3}{3}$，$\binom{5/2}{0}$，$\binom{-3.3}{-3}$

组合定义扩展

令 r 可取任意实数，k 可取任意整数（正的、负的或零），定义二项式系数 $\binom{r}{k}$ 为

$$\binom{r}{k}=\begin{cases}\dfrac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}, & 若 k\ge 1\\ 1, & 若\ k=0\\ 0, & 若\ k\le -1\end{cases}$$

例：$\dbinom{5/2}{4}=\dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{4!}=-\dfrac{5}{128}$

$$\binom{-3.3}{3}=\frac{(-3.3)(-4.3)(-5.3)}{3!}=\text{-}12.5345$$

$$\binom{5/2}{0}=1 \qquad \binom{-3.3}{-3}=0$$

组合定义扩展

- 扩展定义 $\binom{r}{k}$ 仍使Pascal公式成立。
- 令 r 可取任意实数，k可取任意整数，有

$$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}$$

$$k\binom{r}{k}=r\binom{r-1}{k-1}$$

根据定义验证即可。