第8章 特殊计数序列

8.1 Catalan数

8.2 差分序列和Stirling数

8.3 分拆数

例：对于如下序列，给出第6项合适的值？

- 1 6 15 28 45 66 91

1	6	15	28	45	66	91………	
	5	9	13	17	21	25	……….
		4	4	4	4	4	……….
			0	0	0	0	………

差分原理

差分序列

设 $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$是一个序列。定义新序列:

$$\Delta h_0, \Delta h_1, \Delta h_2, \ldots, \Delta h_n, \ldots,$$

称为$h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$的（一阶）差分序列，其中

$\Delta h_n = h_{n+1} - h_n \ (n \geq 0)$，是序列的相邻项的差。

一阶差分序列

$$\Delta h_0 = h_1 - h_0$$
$$\Delta h_1 = h_2 - h_1$$
$$\Delta h_2 = h_3 - h_2$$
$$\ldots$$
$$\Delta h_n = h_{n+1} - h_n$$
$$\ldots$$

二阶差分序列

$$\Delta^2 h_0 = \Delta h_1 - \Delta h_0$$
$$\Delta^2 h_1 = \Delta h_2 - \Delta h_1$$
$$\Delta^2 h_2 = \Delta h_3 - \Delta h_2$$
$$\ldots$$
$$\Delta^2 h_n = \Delta h_{n+1} - \Delta h_n$$
$$\ldots$$

三阶
差分序列
…

差分序列的递归定义

0阶差分序列：$h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots,$

1阶差分序列：$\Delta^1 h_n = h_{n+1} - h_n \ (n=0,1,2,\ldots)$

2阶差分序列：$\Delta^2 h_n = \Delta\ (\Delta^1 h_n)$

$= \Delta^1 h_{n+1} - \Delta^1 h_n = (h_{n+2} - h_{n+1}) - (h_{n+1} - h_n)$

$= h_{n+2} - 2h_{n+1} + h_n \ (n \geq 0)$

k阶差分序列：

$$\Delta^k h_n = \Delta(\Delta^{k-1} h_n) = \Delta^{k-1} h_{n+1} - \Delta^{k-1} h_n \ (n=0, 1, 2,\ldots)$$

类比：微积分中导数

差分表

设序列$h_n(n=0,1,2,\ldots)$

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\text{第0行} & h_0 & & h_1 & & h_2 & & h_3 & & h_4 \ \cdots \\
\text{第1行} & & \Delta^1 h_0 & & \Delta^1 h_1 & & \Delta^1 h_2 & & \Delta^1 h_3 \cdots & \\
\text{第2行} & & & \Delta^2 h_0 & & \Delta^2 h_1 & & \Delta^2 h_2 \cdots & & \\
\text{第3行} & & & & \Delta^3 h_0 & & \Delta^3 h_1 \cdots & & & \\
 & & & & & \cdots & & & &
\end{array}
$$

- $\Delta^p h_n = \Delta^{p-1} h_{n+1} - \Delta^{p-1} h_n$
- 序列 $h_n\ (n=0,1,2,\ldots)$的差分表由第0行确定

差分表:示例

例：求序列{ h_n}的差分表，其中 $h_n=2n^2+3n+1(n\geq 0)$

h_n:	1		6		15		28		45		66		91	....
$\Delta^1 h_n$:		5		9		13		17		21		25		....
$\Delta^2 h_n$:			4		4		4		4		4			....
$\Delta^3 h_n$:				0		0		0		0				....
$\Delta^4 h_n$:					0		0		0					

等差序列

如何确定第几阶开始为0？

- 3阶差分序列全部由0组成
- 所有更高阶的差分序列也都由0组成

定理8.2.1：设序列的通项 h_n是n的p次多项式：

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \ldots\ldots + a_1 n + a_0,$$

则对于所有的$n \geq 0$，必有: $\Delta^{p+1} h_n = 0$。

证明: 对多项式的次数 p 实施数学归纳法。

(1) 当 $p = 0$ 时，$h_n = a_0$，对所有的 $n \geq 0$均为一常数，

因此，$\Delta^{p+1} h_n = \Delta^1 h_n = h_{n+1} - h_n = a_0 - a_0 = 0$，

结论成立。

(2) 假设 $p \geq 1$且当 h_n为n的最多p-1次多项式时，

定理成立，

则有$\Delta^p h_n = 0$对所有的$n \geq 0$成立。

定理8.2.1：设序列的通项 h_n是n的p次多项式：

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \ldots\ldots + a_1 n + a_0,$$

则对于所有的$n \geq 0$，必有: $\Delta^{p+1} h_n = 0$。

可用于求解 n次多项式的序列通项

证明(续)：当h_n是 n的p次多项式时，

由于$\Delta h_n = h_{n+1} - h_n$

$= a_p(n+1)^p + a_{p-1}(n+1)^{p-1} + \ldots + a_1(n+1) + a_0$

$- (a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_0)$

$= \underline{a_p((n+1)^p - n^p)} + a_{p-1}((n+1)^{p-1} - n^{p-1}) \ldots + a_1 + 0$ (1)

把$(n+1)^p$ 按二项式定理展开后得，

最大次数为n^{p-1}

$[(n+1)^p - n^p] = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} n^{p-k} - n^p = \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k} n^{p-k}$, 代入(1)式得，

Δh_n最多为n的p-1次多项式，

由归纳假设知， $\Delta^p(\Delta h_n)=0$, 即$\Delta^{p+1} h_n = 0$。因此，定理成立。

差分表的性质

- 差分表由第 0 行上元素的值就能决定
- 差分表也可由第 0 条对角线决定

设序列$h_n(n=0,1,2,\ldots)$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
h_0 & & h_1 & & h_2 & & h_3 & & h_4 & \cdots \\
 & \Delta^1 h_0 & & \Delta^1 h_1 & & \Delta^1 h_2 & & \Delta^1 h_3 & \cdots & \\
 & & \Delta^2 h_0 & & \Delta^2 h_1 & & \Delta^2 h_2 & \cdots & & \\
 & & & \Delta^3 h_0 & & \Delta^3 h_1 & \cdots & & & \\
 & & & \cdots & & & & & &
\end{array}
$$

第 0 条对角线

首先考虑特殊情况的第0条对角线

第1条对角线：

$h_1=\Delta^0 h_1=\Delta^1 h_0+\Delta^0 h_0$

$=\Delta h_0+h_0$

$\Delta^1 h_1=\Delta^2 h_0+\Delta^1 h_0$

$\Delta^2 h_1=\Delta^3 h_0+\Delta^2 h_0$

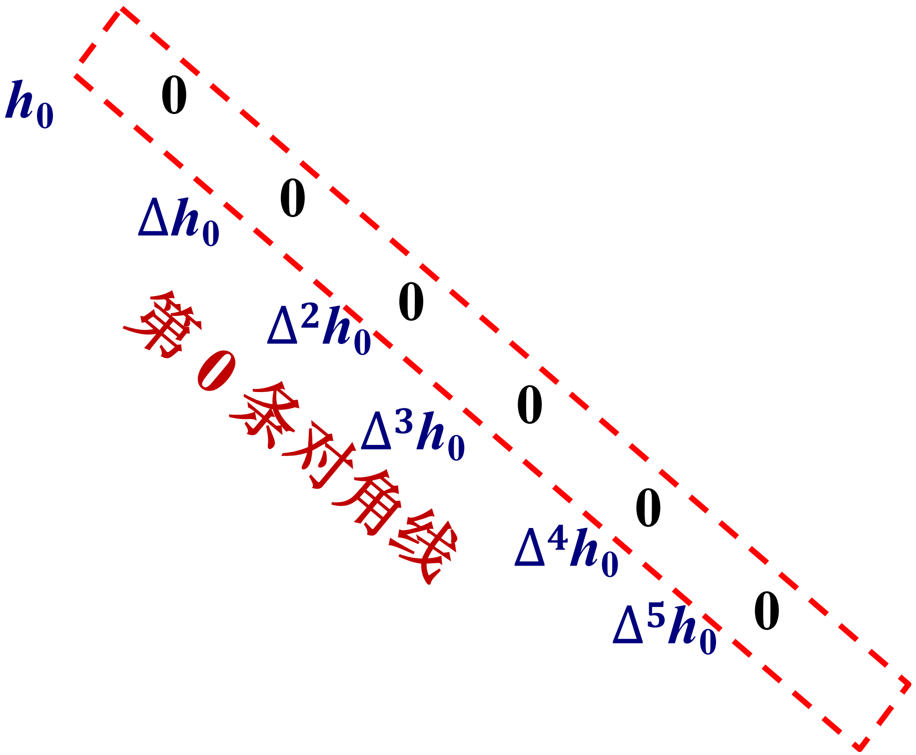
$\Delta^3 h_1=\Delta^4 h_0+\Delta^3 h_0$

…

问题：如何由第0条对角线上的值推导出h_n?

例：一种简单的差分表

- 若第 0条对角线全为0



第1条对角线：

$h_1 = \Delta^0 h_1 = \Delta^1 h_0 + \Delta^0 h_0$

$= \Delta h_0 + h_0$

$\Delta^1 h_1 = \Delta^2 h_0 + \Delta^1 h_0$

$\Delta^2 h_1 = \Delta^3 h_0 + \Delta^2 h_0$

$\Delta^3 h_1 = \Delta^4 h_0 + \Delta^3 h_0$

…

问题：如何由第0条对角线上的值推导出h_n?

例：一种简单的差分表

- 若第 0条对角线全为0

$$
\begin{array}{lcccccc}
h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
\Delta h_0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\Delta^2 h_0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\Delta^3 h_0 & & & & 0 & 0 & 0 \\
\Delta^4 h_0 & & & & & 0 & 0 \\
\Delta^5 h_0 & & & & & & 0
\end{array}
$$

第 0 条对角线

第1条对角线：

$h_1 = \Delta^0 h_1 = \Delta^1 h_0 + \Delta^0 h_0$

$= \Delta h_0 + h_0$

$\Delta^1 h_1 = \Delta^2 h_0 + \Delta^1 h_0$

$\Delta^2 h_1 = \Delta^3 h_0 + \Delta^2 h_0$

$\Delta^3 h_1 = \Delta^4 h_0 + \Delta^3 h_0$

…

问题：如何由第0条对角线上的值推导出h_n？

例：一种简单的差分表

- 若第 0条对角线全为0

$$
\begin{array}{ccccccccc}
h_0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \cdots \\
& \Delta h_0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \cdots \\
& & \Delta^2 h_0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots \\
& & & \Delta^3 h_0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots \\
& & & & \Delta^4 h_0 & & 0 & & 0 & & \cdots \\
& & & & & \Delta^5 h_0 & & 0 & & \cdots \\
& & & & & & \cdots
\end{array}
$$

第 0 条对角线

第1条对角线：

$h_1 = \Delta^0 h_1 = \Delta^1 h_0 + \Delta^0 h_0$

$= \Delta h_0 + h_0$

$\Delta^1 h_1 = \Delta^2 h_0 + \Delta^1 h_0$

$\Delta^2 h_1 = \Delta^3 h_0 + \Delta^2 h_0$

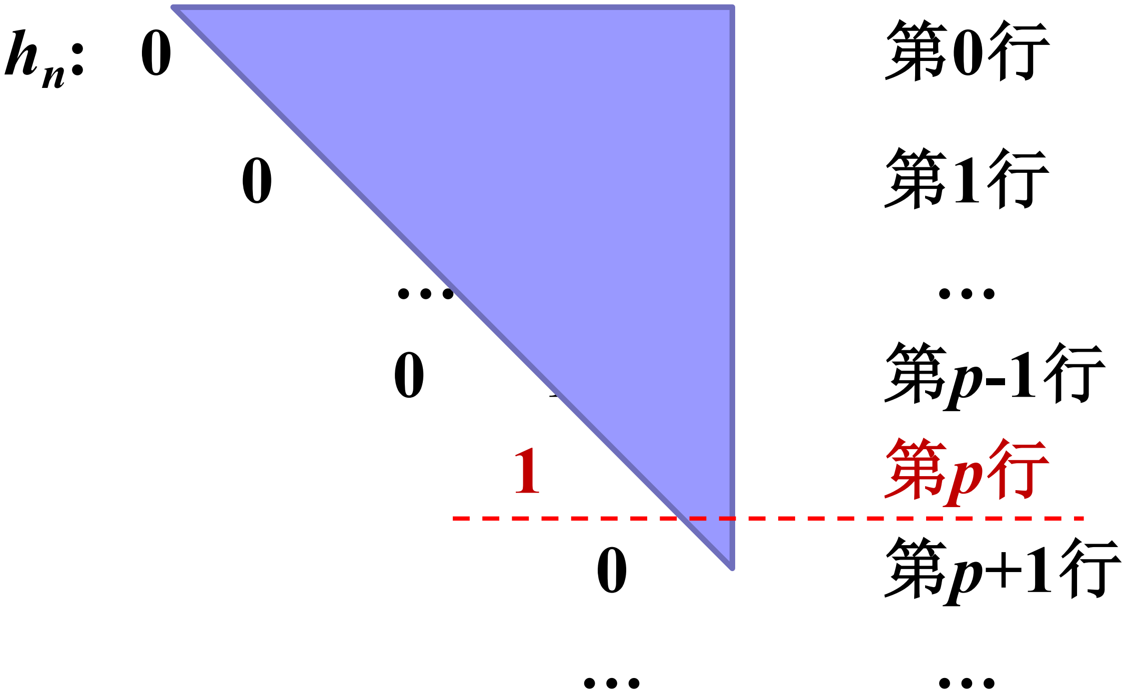
$\Delta^3 h_1 = \Delta^4 h_0 + \Delta^3 h_0$

…

问题：如何由第0条对角线上的值推导出h_n？

例：一种简单的差分表

- 第0条对角线除一个1外都是0：
  - 1在第 p 行，前 p 个元素就都为0，从 p+1行开始的所有行的元素都是0



问题：对应的差分表及 h_n 是什么形式？

例：一种简单的差分表：$p=4$ 时

- 第0条对角线上的元素是：0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, …

h_n:	0								第0行
		0							第1行
			0						第2行
				0					第3行
					1				第4行
						0			第5行
							0		第6行
								0	第7行

例：一种简单的差分表：p=4 时

- 第0条对角线上的元素是：0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, …

h_n:	0	0	0	0	1	5	15	35	第0行
		0	0	0	1	4	10	20	第1行
			0	0	1	3	6	10	第2行
				0	1	2	3	4	第3行
					1	1	1	1	第4行
						0	0	0	第5行
							0	0	第6行
								0	第7行

第3行为等差序列

第4行全为 1

第5行全为0

问题：怎么计算h_n?

例：一种简单的差分表：$p=4$ 时

设$h_n = a_4n^4+a_3n^3+a_2n^2+a_1n+a_0$，满足

$$\Delta^{p+1}h_n = \Delta^5 h_n = 0$$

0	0	0	0	1	5	15	35
	0	0	0	1	4	10	20
		0	0	1	3	6	10
			0	1	2	3	4
				1	1	1	1
					0	0	0
						0	0
							0

由于$h_0=h_1=h_2= h_3=0$，$h_4=1$，

可知，多项式 h_n有$n = 0, 1, 2, 3$四个根；

于是， h_n的多项式中应该有$(n-0),(n-1), (n-2), (n-3)$这四个因子。

设待定系数c， 那么： $h_n= c\, n(n-1)(n-2)(n-3)$

将$h_4=1$ 代入：$1=c\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1= c\cdot 4!$，因此 $c =1/4!$,

从而，$h_n = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \dbinom{n}{4}$

例：一种简单的差分表

假设对于任意的 p, 序列$\{h_n\}$差分表中第0条对角线为以下形式：

$$\overbrace{0, 0, 0, 0 \ldots 0}^{p\text{个}0}, 1, 0, \ldots, 0, \ldots$$

则，h_n是 n的 p 次多项式，表示如下：

$$h_n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(p-1))}{p!} = \binom{n}{p}$$

问题：如果第0条对角线为：

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p, 0, 0, 0, \ldots \quad (\text{其中} c_p \neq 0)$$

是否有通项？通项是什么？

差分表的线性性

差分表的线性性

设 g_n 和 f_n 分别是两个序列的通项，如果 $h_n = g_n + f_n$ ，

则 $\Delta h_n = h_{n+1} - h_n = (g_{n+1} + f_{n+1}) - (g_n + f_n)$

$$= (g_{n+1} - g_n) + (f_{n+1} - f_n) = \Delta g_n + \Delta f_n$$

对于任何常数 c, d ，如果 $b_h = c\, g_n + d\, f_n$

$\Delta b_n = b_{n+1} - b_n = (c\, g_{n+1} + d\, f_{n+1}) - (c\, g_n + d\, f_n)$

$$= (c\, g_{n+1} - c\, g_n) + (d\, f_{n+1} - d\, f_n) = c\, \Delta g_n + d\, \Delta f_n$$

- 一般的： $\Delta^p h_n = \Delta^p g_n + \Delta^p f_n$ ， $p \geq 0$
- 更一般的，对于任何常数 c, d 来说，

$$\Delta^p(c\, g_n + d\, f_n) = c\, \Delta^p g_n + d\, \Delta^p f_n \quad (p \geq 0, n \geq 0)$$

定理8.2.2 差分表的**第0条对角线**等于

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p, 0, 0, 0, \ldots, \qquad \text{其中} c_p \neq 0$$

的序列的通项满足：

$$h_n = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + c_2\binom{n}{2} + \ldots + c_p\binom{n}{p}$$

的关于n的p次多项式。

证明思想：(线性性+简单差分表)

$$\begin{matrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_p \\ 0 \\ \ldots \end{matrix} = \begin{matrix} c_0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \end{matrix} + \begin{matrix} 0 \\ c_1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \end{matrix} + \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ c_2 \\ \ldots \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \end{matrix} + \ldots + \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ c_p \\ 0 \\ \ldots \end{matrix} + \ldots$$

p 次多项式与差分表

定理8.2.1：设序列的通项 h_n是n的p次多项式：

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \ldots\ldots + a_1 n + a_0,$$

则对于所有的$n \geq 0$，必有：$\Delta^{p+1} h_n = 0$。

定理8.2.2　差分表的第0条对角线等于

$$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p, 0, 0, 0, \ldots, \qquad \text{其中} c_p \neq 0$$

的序列的通项满足：

$$h_n = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + c_2\binom{n}{2} + \ldots + c_p\binom{n}{p}。$$

可用于求序列$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$,的部分和

例：考虑通项为$h_n=n^3+3n^2-2n+1(n\geq 0)$的序列。

解：计算差分，我们得到

$n=0$	1	3	17	49
$n=1$		2	14	32
$n=2$			12	18
$n=3$				6

$$h_n = c_0\binom{n}{0}+c_1\binom{n}{1}+c_2\binom{n}{2}+\ldots\ldots+c_p\binom{n}{p}$$

因为h_n是n的3次多项式，因此差分表的第0条对角线是：

1, 2, 12, 6, 0, 0,….

由定理8.2.2知，$h_n = 1\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+12\binom{n}{2}+6\binom{n}{3}$

应用：求序列的部分和

例：考虑通项为$h_n=n^3+3n^2-2n+1(n\geq 0)$的序列。

解：由上例知，$h_n = 1\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 12\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}$，

因此，

1	3	17	49
	2	14	32
		12	18
			6

$$\sum_{k=0}^{n} h_k = h_0 + h_1 + \ldots + h_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(1\binom{k}{0} + 2\binom{k}{1} + 12\binom{k}{2} + 6\binom{k}{3}\right)$$

$$=1\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{0} + 2\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1} + 12\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{2} + 6\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{3}$$

$$= 1\binom{n+1}{1} + 2\binom{n+1}{2} + 12\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4}。$$

(由于$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$)

定理 8.2.3 假设序列$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$的差分表的第0条对角线等于

$$c_0, c_1, \ldots, c_p, 0, 0, \ldots$$

那么

$$\sum_{k=0}^{n} h_k = c_0\binom{n+1}{1} + c_1\binom{n+1}{2} + \ldots + c_p\binom{n+1}{p+1}$$

- 差分序列的应用
  - 一般项为多项式的序列的部分和

例：求前n个正整数的4次方的和。

解：设$h_n=n^4$, $n\geq 0$, 计算差分得

0	1	16	81	256
	1	15	65	175
		14	50	110
			36	60
				24

可推广到前n个正整数的p次方的和

因为h_n是4次多项式，其差分表第0条对角线是:

0, 1, 14, 36, 24, 0, 0,….

得 $\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1\binom{n+1}{2} + 14\binom{n+1}{3} + 36\binom{n+1}{4} + 24\binom{n+1}{5}$。

体现了一定的组合意义

差分表的第0条对角线的组合意义：n^p的表示

对于序列 $h_n = n^p$,设其差分表中第0条对角线上的元素

为 $c_0, c_1, \ldots, c_p, 0, 0, \ldots$， 引入标记：

$$c(p, 0) = c_0,\ c(p, 1) = c_1,\ \ldots,\ c(p, p) = c_p,\ 0,\ 0,\ \ldots;$$

其中$c(p, k)$是差分表中第0条对角线上的 第k个元素；

则有：

$$h_n = n^p = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + \ldots\ldots + c_p\binom{n}{p}$$

$$= c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \ldots\ldots + c(p,p)\binom{n}{p}$$

$c(p, k)$的特殊值：$k = 0$

$$h_n = n^p = c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p}$$

1	1	1	1 …
	0	0	0 …
		0	0…
		…	

(1) 当 p=0 时，则 $h_n = n^p = n^0 = 1$

是一个常数，$n \geq 0$

此时，差分表的第一行全为1，从第二行开始全为0

因此，$h_n = 1 = 1\binom{n}{0} = c(0,0)\binom{n}{0}$，

得 $c(0,0)=1$。

(2) 当 $p \geq 1$ 时，由于$h_0 = 0$，所以 $c(p,0)=0$。

因此，$c(p,0) = \begin{cases} 1 & ,当p = 0时 \\ 0 & ,当p \geq 1时 \end{cases}$

$c(p,k)$的特殊值：$p=k\neq 0$

$$h_n = n^p = c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p}$$

上式右侧中 n^p 项只出现在$c(p,p)\binom{n}{p} = c(p,p)\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}$中，

由上式两边 n^p 项前系数相等得，$1=\frac{c(p,p)}{p!}$，

因此， $c(p,p)=p!$。

例如：$h_n = n^4$ 的差分表：

0	1	16	81	256
	1	15	65	175
		14	50	110
			36	60
				24

$c(4,4)=24=4!$

$$h_n = n^p = c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p}$$

令 $[n]_k = \begin{cases} n(n-1)\ldots(n-k+1), & \text{若 } k \geq 1 \\ 1, & \text{若 } k = 0 \end{cases}$

则，$[n]_k = n$个不同元素中取k个元素的排列数$P(n, k)$

$[n]_k$的递推关系：

$$[n]_{k+1} = n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)(n-(k+1)+1)$$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)(n-k)$$

$$= (n-k)[n]_k$$

$$h_n = n^p = c(p,0)\binom{n}{0} + c(p,1)\binom{n}{1} + \cdots + c(p,p)\binom{n}{p}$$

由于，$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{[n]_k}{k!}$，

所以，$[n]_k = k!\binom{n}{k}$。则有

$$h_n = n^p = c(p,0)\frac{[n]_0}{0!} + c(p,1)\frac{[n]_1}{1!} + c(p,2)\frac{[n]_2}{2!} + \ldots\ldots + c(p,p)\frac{[n]_p}{p!}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} c(p,k)\frac{[n]_k}{k!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{c(p,k)}{k!}[n]_k$$

令 $S(p,k) = \frac{c(p,k)}{k!}$ $(0 \le k \le p)$，称为第二类Stirling数。

$h_n = n^p$ 的展开式就变为：$h_n = n^p = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k$

第二类Stirling数

$$h_n = n^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{c(p,k)}{k!}[n]_k = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k$$

$$S(p,0) = \frac{c(p,0)}{0!}$$

$$= c(p,0) = \begin{cases} 1\text{，当}p = 0\text{时} \\ 0\text{，当}p \geq 1\text{时} \end{cases}$$

由于 $[n]_k = k!\binom{n}{k}$是关于n的k次多项式，因此$[n]_p$是关于n的p次多项式，得 $S(p,p) = 1\ (p \geq 1)$

第二类Stirling的递推公式

定理8.2.4 : 如果$1 \le k \le p$-1 则

$$S(p,k) = kS(p-1,k) + S(p-1,k-1)$$

类比二项式公式中：

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

定理8.2.4：如果$1 \le k \le p-1$ 则

$$S(p, k) = k\, S(p-1,k) + S(p-1, k-1)$$

证明：已知

$$n^p = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k, \quad n^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_k$$

$$n^p = n \times n^{p-1} = n\sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_k$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)\, n[n]_k$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)(n-k+k)[n]_k$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)(n-k)[n]_k + \sum_{k=0}^{p-1} kS(p-1,k)[n]_k$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_{k+1} + \sum_{k=0}^{p-1} kS(p-1,k)[n]_k$$

$$n^p=\sum_{k=0}^{p-1}S(p-1,k)[n]_{k+1}+\sum_{k=0}^{p-1}kS(p-1,k)[n]_k$$

对上式等号右边的求和项 $\sum_{k=0}^{p-1}S(p-1,k)[n]_{k+1}$，用$k$-1替换$k$后得到：

$$n^p=\sum_{k=1}^{p}\underline{S(p-1,k-1)[n]_k}+\sum_{k=0}^{p-1}kS(p-1,k)[n]_k$$

$$=S(p\text{-}1,p\text{-}1)[n]_p+\sum_{k=1}^{p-1}S(p-1,k-1)[n]_k+\sum_{k=0}^{p-1}kS(p-1,k)[n]_k$$

$$=S(p-1,p-1)\,[n]_p$$

$$+\sum_{k=1}^{p-1}(S(p-1,k-1)+kS(p-1,k))[n]_k \qquad (*)$$

已知 $n^p=\sum_{k=0}^{p}S(p,k)[n]_k=S(p,p)[n]_p+\sum_{k=0}^{p-1}S(p,k)[n]_k \quad (**)$

对于$1\le k\le p\text{-}1$ 的每一个k，比较(*)式与(**)式中$[n]_k$的系数，得

$$S(p,k)=k\,S(p\text{-}1,k)+S(p\text{-}1,k\text{-}1)$$

第二类Stirling数的类Pascal三角形

$$S(p,k) = k\,S(p-1,k) + S(p-1,k-1),\ 1 \le k \le p-1$$

$p \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

直接上方的元素乘以k再加上其左上方的元素

$25=6\cdot 3+7$

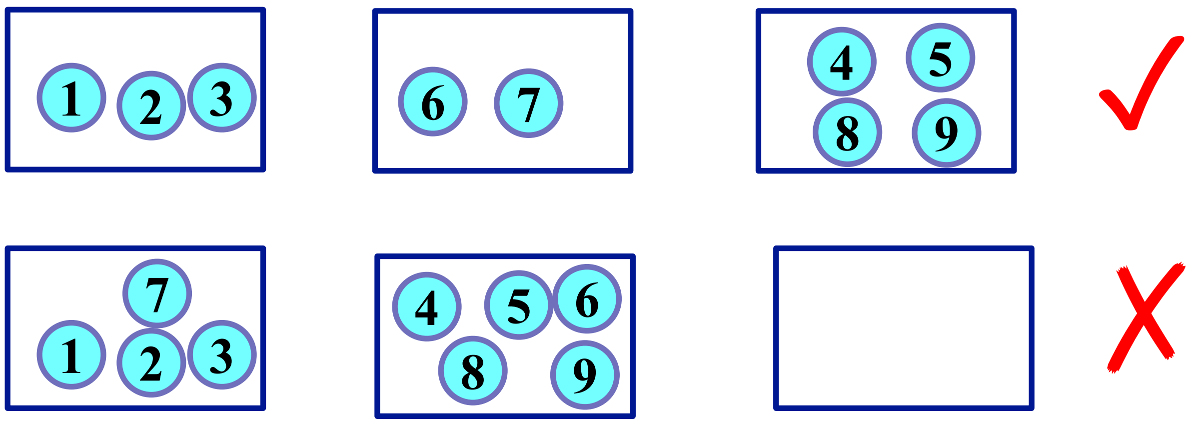
$\boxed{S(p,1) = 1 \quad (p \geqslant 1)}$

$\boxed{S(p,2) = 2^{p-1} - 1 \quad (p \geqslant 2)}$

$\boxed{S(p,p-1) = \binom{p}{2} \quad (p \geqslant 1)}$

第二类Stirling数的组合解释：投球入盒

定理8.2.5： 第二类Stirling数 $S(p, k)$ 计数的是把 p元素集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。



定理8.2.5：　第二类Stirling数 $S(p, k)$ 计数的是把 p元素集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

证明：令 $S^*(p, k)$ 是将p元素的集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

下面证明：　$S^*(p, k) = S(p, k)$。

显然$S^*(p, p) =1$ $(p\geq 0)$ 而且 $S^*(p, 0) =0$ $(p\geq 1)$ 。

下面只需证明$S^*(p, k)$ 满足递推式

$$S^*(p, k) =kS^*(p\text{-}1, k) + S^*(p\text{-}1, k\text{-}1)\text{，} 1\leq k \leq p\text{-}1.$$

把$\{1, 2,\ldots p\}$分到时 k个非空且不可区分的盒子有两种类型：

(1)　p 独占一个盒子的划分；或者

(2)　p 不独占一个盒子的划分。此时该盒子元素多于1个；

定理8.2.5：　第二类Stirling数 $S(p, k)$ 计数的是把 p元素集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

证明(续)：　(1) 当 p独占一个盒子时，

当把 p 从盒子中拿走时，得到剩下的$\{1, 2, \ldots, p-1\}$划分到k-1个非空且不可区分的盒子的划分。

因此，存在$S^*(p-1, k-1)$ 种对$\{1, 2, \ldots, p\}$的满足条件的划分。

(2) 当 p 不独占一个盒子时，

相当于先将$\{1, 2,\ldots, p-1\}$ 放到 k 个盒子，不允许空盒，

共有$S^*(p-1, k)$ 种方案，然后将 p 放进其中一盒，

由乘法原理得方案数为 $kS^*(p-1, k)$ 。

因此，$S^*(p, k) = kS^*(p-1, k) + S^*(p-1, k-1)$，$1\leq k \leq p-1$。

证毕。

例：将红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的两个盒子里，且无空盒，共有多少种不同方案?

解：满足题意的方案数为第二类Stirling数$S(5, 2)$。

由递推关系 $S(p, k) = kS(p-1, k) + S(p-1, k-1)$得：

$$S(5, 2) = 2S(4, 2) + S(4,1)$$
$$= 2(2S(3, 2) + S(3, 1)) +1$$
$$= 2(2\times3+1) +1 = 15$$

因此，共有15种不同方案。

问题：1. 如果2个盒子颜色有区别，方案数是多少？

$2!\ S(5, 2)$

2. 如果盒子无区别，允许空盒方案数是多少？

Bell 数

盒子无区别

定理8.2.5： 第二类Stirling数 $S(p, k)$ 计数的是把 p元素集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

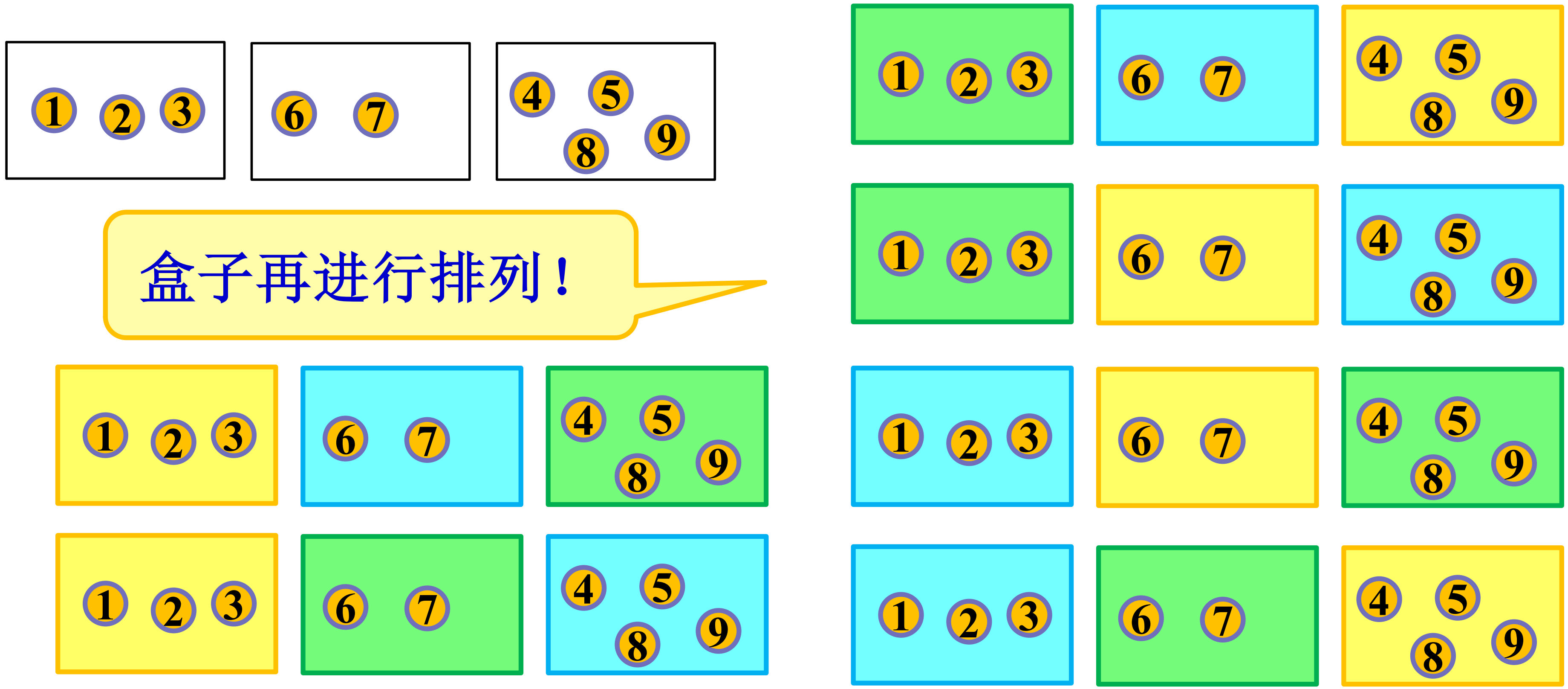
定理8.2.4 : 如果$1 \le k \le p-1$ 则

$$S(p, k) = kS(p-1, k) + S(p-1, k-1)$$

盒子有区别

令$S^{\#}(p, k)$表示把$\{1, 2, \ldots, p\}$分到 k 个非空且可区分的盒子的划分个数，则

$$S^{\#}(p, k) = k!\, S(p, k)。$$



定理8.2.6 对每一个满足 $0\le k\le p$的整数 k，都有

$$S^{\#}(p,k)=\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{t}(k-t)^p,$$

从而 $S(p,k)=\frac{1}{k!}\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{t}(k-t)^p$。

$S^{\#}(p,k)$：把$\{1,2,\ldots,p\}$分到 k 个非空且可区分的盒子的划分个数

证明: (容斥原理) 设 U 是把 $\{1,2,\ldots,p\}$分到 k 个可区分盒子B_1, $B_2,\ldots,B_k$的所有划分的集合。

设 A_i表示盒子 B_i是空盒的划分组成的子集。则

$$S^{\#}(p,k)=|\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A}_k|。$$

对任意 $0\le t\le p$，$|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_t}|$ 是把 $\{1,2,\ldots,p\}$ 划分到 k-t 个可区分盒子的划分个数（盒子可为空），得

$$|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_t}|=(k-t)^p。$$

由容斥原理公式得 $S^{\#}(p,k)=\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{t}(k-t)^p$。

- p 个有区别的物品放入k个无区别的盒子且没有空盒的放法：$S(n, k)$
- p 个有区别的物品放入k个有区别的盒子且没有空盒的放法：$S^{\#}(p, k)=k!\ S(n, k)$

p 个物品	k 个盒子	空盒	
有区别	无区别	没有	$S(p, k)$
有区别	有区别	没有	$S^{\#}(p, k)$

- Bell数是将 p个元素的集合划分到非空、不可区分的盒子的划分数，记为B_p

Bell数（以Eric Temple Bell命名）

- **Bell数是将 p个元素的集合划分到非空、不可区分的盒子的划分数，记为B_p，则**

盒子数≤ p

$$B_p = S(p, 0)+S(p, 1)+\ldots+S(p, p),$$

是第二类Stirling数三角形的一行的元素和

$S(p, k)$

$p \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	…
0	1								
1	0	1							
2	0	1	1						
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

定理 8.2.7（Bell数的递推式）如果$p\geq 1$，则

$$B_p=\binom{p-1}{0}B_0+\binom{p-1}{1}B_1+\binom{p-2}{2}B_2\ldots+\binom{p-1}{p-1}B_{p-1}$$

证明：假设把 $\{1, 2, \ldots, p\}$划分到非空且不可区分的盒子且包含 p的盒子还包含 $\{1, 2, \ldots, p-1\}$的子集 X（可能为空）。

假设 $|X|= t$, 则 $0\leq t \leq p-1$。

由于选择子集 X有$\binom{p-1}{t}$种方式,

把$\{1, 2, \ldots, p-1\}$中不属于X的 $p-1-t$ 个元素划分到非空且不可区分的盒子中有B_{p-1-t}种方式,

因此有 $B_p=\sum_{t=0}^{p-1}\binom{p-1}{t}B_{p-1-t}$

$$=\sum_{t=0}^{p-1}\binom{p-1}{p-1-t}B_{p-1-t}=\sum_{t=0}^{p-1}\binom{p-1}{t}B_t\text{。}$$

小结

- p 个有区别的物品放入k个无区别的盒子且没有空盒的放法：$S(n, k)$
- p 个有区别的物品放入k个有区别的盒子且没有空盒的放法：$S^{\#}(p, k)=k!\,S(n, k)$
- p 个有区别的物品放入非空无区别的盒子且没有空盒的放法： $B_p = S(p, 0)+S(p, 1)+\ldots+S(p, p)$

第一类Stirling数

$$h_n = n^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{c(p,k)}{k!} [n]_k$$

$$[n]_k = \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1), & 若\ k \geq 1 \\ 1 & ,若\ k = 0 \end{cases}$$

- 第二类Stirling数 $S(n, p)$
  - 指出如何用$[n]_0, [n]_1, [n]_2, \dots [n]_p$写出$n^p$。
  - 把 p个元素的集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒的划分的个数
- 第一类Stirling数 $s(n, p)$
  - 如何用$n^0, n^1, n^2, \dots, n^p$ 写出$[n]_p$。
  - 将p个物品排成 k个非空的循环排列方法数

第一类Stirling数

由于，$[n]_p = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(n-(p-1))$

$= (n-0)(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(n-(p-1))$

因此，$[n]_0 = 1$

$[n]_1 = n$

$[n]_2 = n(n-1) = n^2 - n$

$[n]_3 = n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n$

$[n]_4 = n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n$

……………………

一般地，$[n]_p$展开式有p个因子。

乘开后得到n的幂多项式，$n^p, n^{p-1}, \ldots\ldots, n^1, n^0$,

其系数的符号正负相间；故:

$$[n]_p = a_n^p n^p - a_n^{p-1} n^{p-1} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{p-1} a_n^1 n^1 + (-1)^p a_n^0 n^0$$

第一类Stirling数

$$[n]_p = a_n^p n^p - a_n^{p-1} n^{p-1} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{p-1} a_n^1 n^1 + (-1)^p a_n^0 n^0$$

n^k 前的系数 a_n^k 称为第一类Stirling数，记为 $s(p, k)$，

即

$$[n]_p = s(p, p)n^p - s(p, p-1)n^{p-1} + \ldots + (-1)^{p-1} s(p, 1)n^1 + (-1)^p s(p, 0)\, n^0$$

$$= \sum_{k-0}^{p} s(p, k)n^k$$

由于 $[n]_p = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(n-(p-1))$

得到以下第一类Stirling数:

$s(p, 0) = 0;\ (p\geq 1)$　　$s(p, p) = 1;\ (p\geq 0)$

第一类Stirling数的递推式

定理8.2.8如果 $1\le k \le p-1$则:

$$s(p, k) = (p-1)s(p-1, k) + s(p-1, k-1)$$

- 第二类Stirling数递推关系式的区别:

$$S(p, k) = kS(p-1, k) + S(p-1, k-1)$$

  - 初值一样，但递推关系不同。

定理8.2.9 第一类Stirling数$S_1(p, k)$是将p个物品排成 k个非空的循环排列的方法数。

证明：令$s^{\#}(p, k)$是将p个物品排成k个非空循环排列的方法数。

(1) 当$k = p$时，p个物品排成 p个非空的循环排列，

每个循环排列只有一个物品，因此 $s^{\#}(p, p) = 1$ $(p \geq 0)$。

(2) 当$k = 0$时，显然 $s^{\#}(p, 0) = 0$ $(p \geq 1)$。

下面只需证明$s^{\#}(p, k)$满足递推关系

$$s(p, k) = (p-1)s(p-1, k) + s(p-1, k-1)。$$

设p个物品记为 1, 2, 3, …, p。

将1, 2, 3, …, p 排成 k 个圆圈有两种类型：

(1) 存在一个循环排列只有p 自己，共有$s^{\#}(p-1, k-1)$种；

(2) p 至少和另一个物品在一个循环排列，

定理8.2.9 第一类Stirling数$S_1(p, k)$是将p个物品排成 k个非空的循环排列的方法数。

证明:（续）

(2) p 至少和另一个物品在一个循环排列中，

则可以通过把 1, 2, …, p-1 排成 k 个循环排列，

并把 p 放在1, 2, …, p-1任何一个物品的左边得到，

因此共有 $(p-1)\, s^{\#}(p-1, k)$种。

综上，把 p个物品排成 k 个非空的循环排列的方法数为

$$s^{\#}(p, k) = (p-1)s^{\#}(p-1, k) + s^{\#}(p-1, k-1)。$$

满足$s(p, k)$的递推式。

综上所述，定理成立。

小结

<table>
<tr><th>p 个球</th><th>k 个盒</th><th>是否为空</th><th>方案个数</th></tr>
<tr><td rowspan="7">有区别</td><td>有区别</td><td>有空盒</td><td>k^p</td></tr>
<tr><td>无区别</td><td>无空盒</td><td>$S(p, k)$</td></tr>
<tr><td>有区别</td><td>无空盒</td><td>$k!\, S(p, k)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">无区别</td><td rowspan="2">有空盒</td><td>$S(p, 1)+S(p, 2)+\ldots+S(p, k),\ p \geq k$</td></tr>
<tr><td>$S(p, 1)+S(p, 2)+\ldots+S(p, p),\ p \leq k$</td></tr>
<tr><td>k个循环排列</td><td>非空</td><td>$s(p, k)$</td></tr>
</table>

第8章 特殊计数序列

8.3 分拆数

举例

例: 有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？ 对能称出的重量有几种可称量方案？

- 若有1克的砝码3枚，2克的砝码4枚，4克的砝码2枚。问能称出哪些重量？有几种方案？
- 设有1、 2、 4、 8、 16、32克砝码各一枚，问能称出哪些重量？ 分别有几种方案？

整数拆分

例：把整数 6 拆分成若干非零整数和的形式，

可得以下拆分方式：

6,

5+1,4+2，3+3，

4+1+1，3+2+1，2+2+2，

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1，

1+1+1+1+1+1

- 讨论对整数n的进行两种拆分的组合计数问题

（1）无限制地拆分，

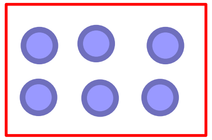
（2）限制拆分块数量的拆分。

不同拆分法的计数叫做拆分数(或者分拆数)。

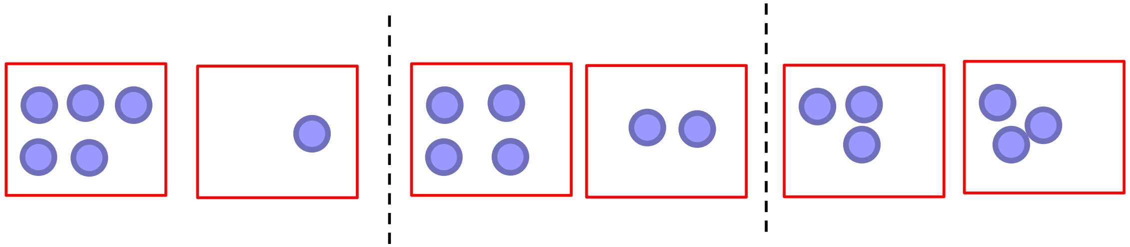
整数拆分

例：把6个无区别的球放入无区别盒子，且无空盒

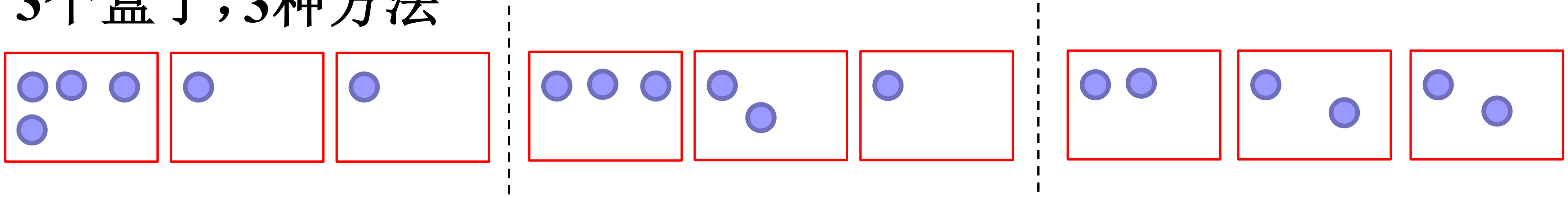
1个盒子
1种方法



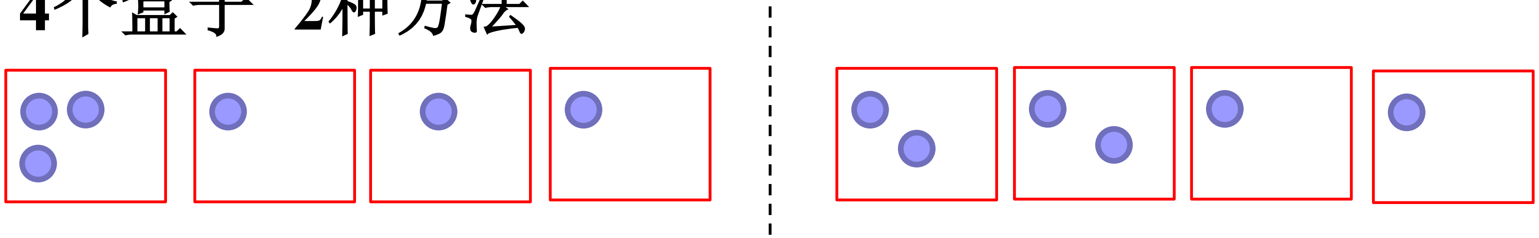
2个盒子
3种方法



3个盒子，3种方法

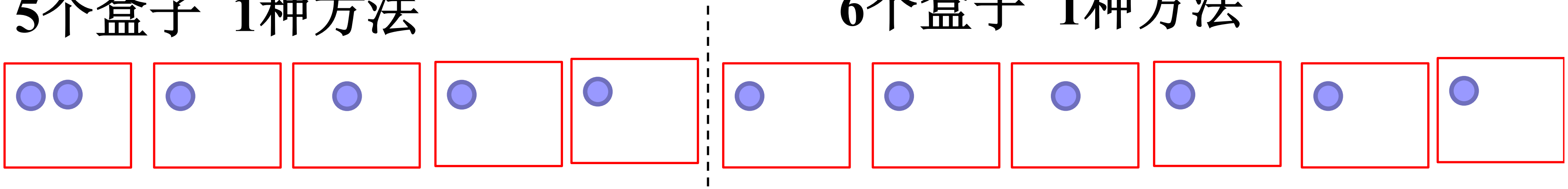


4个盒子　2种方法



5个盒子　1种方法

6个盒子　1种方法



分拆数

设一个正整数 n，若存在正整数集 $\{n_1, n_2,\ldots, n_k\}$ （$1\leq k\leq n$，$1\leq n_i\leq n$），使得

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

则称 $\{n_1, n_2,\ldots, n_k\}$ 是n的一个分拆。

称每个 n_i 为 n的一个部分（或类）。

记 n的所有包含k个部分的不同分拆的个数为 p_n^k，

n的所有不同分拆的个数记为 p_n，称为n的分拆数。

$$p_n^1 + p_n^2 + \cdots + p_n^n = p_n$$

6
5+1,4+2，3+3
4+1+1，3+2+1，2+2+2
3+1+1+1，2+2+1+1
2+1+1+1+1
1+1+1+1+1+1

例：{2, 2, 1, 1}为整数 6的一个分拆。

$p_6^1=1$, $p_6^2=3$，$p_6^3=3$

$p_6^4=2$，$p_6^5=p_6^6=1$

$p_6=11$

问题：分拆数的通项公式和递推公式

分拆数

设一个正整数 n，若存在正整数集 $\{n_1, n_2,\ldots, n_k\}$ （$1\leq k \leq n$，$1 \leq n_i \leq n$)，使得

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

则称 $\{n_1, n_2,\ldots, n_k\}$ 是n的一个分拆。

$$p_n^1 + p_n^2 + \cdots + p_n^n = p_n$$

称每个 n_i 为 n的一个部分（或类）。

记 n的所有包含k个部分的不同分拆的个数为 p_n^k，

n的所有不同分拆的个数记为 p_n，称为n的分拆数。

对于 n 的分拆 $\{n_1, n_2,\ldots, n_k\}$，

- ✓ $1 \leq n_i \leq n$，$1\leq k \leq n$
- ✓ $n_1, n_2,\ldots, n_k$ 中可能有重复的数

  $\{2, 2, 1, 1\}$为整数 6的一个分拆。

分拆的表示举例

整数 6的所有分拆

	6	5	4	3	2	1
6						
5+1						
4+2						
3+3						
4+1+1						
3+2+1						
2+2+2						
3+1+1+1						
2+2+1+1						
2+1+1+1+1						
1+1+1+1+1+1						

分拆的表示举例

整数 6的所有分拆

	6	5	4	3	2	1
6	1					
5+1		1				1
4+2			1		1	
3+3				2		
4+1+1			1		2	
3+2+1						
2+2+2						
3+1+1+1						
2+2+1+1						
2+1+1+1+1						
1+1+1+1+1+1						

分拆的表示举例

整数 6的所有分拆

	6	5	4	3	2	1	
6	1						6^1
5+1		1				1	$5^1 1^1$
4+2			1		1		$4^1 2^1$
3+3				2			3^2
4+1+1			1		2		$4^1 1^2$
3+2+1				1	1	1	$3^1 2^1 1^1$
2+2+2					3		2^3
3+1+1+1				1		3	$3^1 1^3$
2+2+1+1					2	2	$2^2 1^2$
2+1+1+1+1					1	4	$2^1 1^5$
1+1+1+1+1+1						6	1^6

分拆的表示

假设$a_1, a_2, \ldots, a_n$是 n个非负整数，且

$$n = na_n + (n\text{-}1)\, a_{n\text{-}1} + \ \ldots + 2a_2 + 1a_1$$

则上式对应 n的一个分拆记作：

$$\lambda = n^{a_n} \ldots 2^{a_2}\ 1^{a_1}。$$

注意：拆分中的部分的顺序不重要，因此总可以排列这些部分使得它们被排列成从大到小的顺序。

分拆数 p_n 的等价表示

假设$a_1, a_2, \ldots, a_n$是 n个非负整数，且

$$n = na_n + (n-1)\,a_{n-1} + \ldots + 2a_2 + 1a_1$$

则上式对应 n的一个分拆记作：

$$\lambda = n^{a_n} \ldots 2^{a_2}\ 1^{a_1}\text{。}$$

n的分拆数 p_n 等价于方程

$$na_n + (n-1)a_{n-1} + \ldots + 2a_2 + a_1 = n$$

的非负整数解 $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$的个数。

与多重集的组合数的区别是什么？

分拆数与多重集组合数的区别

多重集 $S=\{\infty\cdot b_1, \infty\cdot b_2, \ldots, \infty\cdot b_k\}$的 n组合数 等于方程

$$e_1+e_2+\ldots+e_k=n$$ 个数

的非负整数解个数.

$S=\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, \ldots, \infty\cdot n\}$

n的分拆数 p_n 等价于方程

$$na_n+(n-1)a_{n-1}+\ldots+2a_2+a_1=n$$ 值

的非负整数解 $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$的个数。

定理：n 的分拆数 p_n^k 满足下列递推关系：

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k,\quad p_n^1 = p_n^n = 1。$$

（p_n^j：n的所有包含j个部分的分拆的个数）

证明：把 n分拆成1个部分和 n个部分，显然均只有一种可能，即 $p_n^1 = p_n^n = 1$。

设 E 是将 n分成不多于k个部分的分拆的集合，有$|E| = \sum_{j=1}^{k} p_n^j$。

属于 E 的每个分拆可看成是一个 k元组（其分量用 0 补足k位）：

$$\alpha = (\overbrace{a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0}^{k})\quad (n = a_1+a_2+\ldots+a_m,\ 1\leq m\leq k).$$

定义映射 φ，使得 对 E中的每个分成 m个部分的拆分

$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0)$（即 $n = a_1+a_2+\ldots+a_m$），

有 $\varphi(\alpha) = \alpha' = (a_1+1, a_2+1, \ldots, a_m+1, 1, 1, \ldots, 1)$。

则 α' 是 $n+k$ 的一个包含 k个部分的分拆。

令 $E' = \{\varphi(\alpha) \mid \alpha \in E\}$。

定理：n 的分拆数 p_n^k 满足下列递推关系：

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k,\quad p_n^1 = p_n^n = 1。$$

（p_n^j：n的所有包含j个部分的分拆的个数）

$$E=\{\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0) \mid 1 \le m \le k\}$$

$$E' = \{\varphi(\alpha) = \alpha' = (a_1+1, a_2+1, \ldots, a_m+1, 1, 1, \ldots, 1) \mid \alpha \in E\}$$

证明(续)：显然有：

(1) $\alpha_1, \alpha_2 \in E$ 且 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 当且仅当$\alpha_1', \alpha_2' \in E'$且$\alpha_1' \neq \alpha_2'$；

(2) 对任意 $\alpha' \in E'$，有 $\alpha \in E$ 使 $\varphi(\alpha)=\alpha'$。

因此 φ 为双射，得 $|E| = |E'|$。

定理：n 的分拆数 p_n^k 满足下列递推关系：

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k,\quad p_n^1 = p_n^n = 1。$$

（p_n^j：n的所有包含j个部分的分拆的个数）

$$E=\{\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_m, 0, 0, \dots, 0) \mid 1 \le m \le k\}$$

$$E'=\{\varphi(\alpha) = \alpha' = (a_1+1, a_2+1, \dots, a_m+1, 1, 1, \dots, 1) \mid \alpha \in E\}$$

证明：（续）下面证明$|E'| = p_{n+k}^k$。

只需证明：对任意一个$n+k$的包含k个部分的划分α'，

都能找到一个$\alpha \in E$，使得$\varphi(\alpha)=\alpha'$。

设$\alpha' = (b_1, b_2, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_k)$，

(1) 若b_i全大于1，$i=1, \dots, k$, 则$\alpha= (b_1-1, b_2-1, \dots, b_k-1)$ 为n的k个部分的划分；

(2) 否则，设$\alpha'=(b_1, b_2, \dots, b_m, 1, \dots, 1)$，则$\alpha= (b_1-1, \dots, b_m-1, 0, \dots, 0)$为$n$的$m$个部分的划分。

因此，$|E'| = p_{n+k}^k$。

综上，定理得证。

利用定理给出的公式，可递归地推算p_n^k如下表：

p_n^k	k=1	2	3	4	5	6	7	8
n=1	1							
2	1	1						
3	1	1	1					
4	1	2	1	1				
5	1	2	2	1	1			
6	1	3	3	2	1	1		
7	1						1	
8	1							1

$$p_{n+k}^k = \sum_{j=1}^{k} p_n^j\text{，}\quad p_n^1 = p_n^n = 1$$

$$p_n^k = p_{n-k+k}^k = \sum_{j=1}^{k} p_{n-k}^j$$

即将第n-k行中前k个数相加。

利用定理给出的公式，可递归地推算p_n^k如下表：

p_n^k	k=1	2	3	4	5	6	7	8	$p_n = \sum_{k=1}^{n} p_n^k$
n=1	1								1
2	1	1							2
3	1	1	1						3
4	1	2	1	1					5
5	1	2	2	1	1				7
6	1	3	3	2	1	1			11
7	1	3	4	3	2	1	1		15
8	1	4	5	5	3	2	1	1	22

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。

设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且

$q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 n-r 的分拆数量，

则 $p_n(r) = q_n(r)$。

6

5+1,4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

$p_6(4)$

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。

设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且

$q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 $n-r$ 的分拆数量，

则 $p_n(r) = q_n(r)$。

6

5+1,4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

$p_6(4)$

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。

设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且

$q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 $n-r$ 的分拆数量，

则 $p_n(r) = q_n(r)$。

6

5+1,4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

$p_6(4) = 2$：**4+2，4+1+1**

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。

设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且

$q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 $n-r$ 的分拆数量，

则 $p_n(r) = q_n(r)$。

6

5+1,4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

$p_6(4) = 2$：4+2，4+1+1

$q_6(4)$

分拆各部分不大于 4 的 2 的分拆数量

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。

设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且

$q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 $n-r$ 的分拆数量，

则 $p_n(r) = q_n(r)$。

6

5+1,4+2，3+3

4+1+1，3+2+1，2+2+2

3+1+1+1，2+2+1+1

2+1+1+1+1

1+1+1+1+1+1

$p_6(4) = 2$：4+2，4+1+1

$q_6(4) = 2$：2， 1+1

分拆各部分不大于 4 的 2 的分拆数量

构建两种情况的分拆的一一对应

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且 $r \le n$。
设 $p_n(r)$ 是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数，且
$q_n(r)$ 是满足分拆各部分不大于 r 的 $n-r$ 的分拆数量，
则 $p_n(r) = q_n(r)$。

证明：如下建立两种分拆的一一对应：

(1) 任取 n的一个最大部分为 r 的分拆 λ_1，

去掉 λ_1的一个等于 r 的部分，得到 $n-r$ 的一个分拆 λ_1'，且 λ_1' 的任何部分都不大于r；

(2) 反过来，任取 $n-r$ 的分拆 λ_2，其任何部分都不大于 r，

插入一个等于r的部分，从而得到一个 n 的分拆λ_2'。

因此，得 $p_n(r) = q_n(r)$。

分拆的几何图示：Ferrers图

设 λ 是 n 的分拆 $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$，其中$n_1 \geq n_2\ldots \geq n_k >0$。$\lambda$ 的Ferrers图（Ferrers diagram），是一个左对齐的点组，该组有 k 行，第 i 行有 n_i 的点 （$1\leq i \leq k$）。

例：10的分拆 λ 为 10＝4＋2＋2＋1＋1，可记作 $4^1 2^2 1^2$,

λ 的Ferrers图为：

● ● ● ●
● ●
● ●
●
●

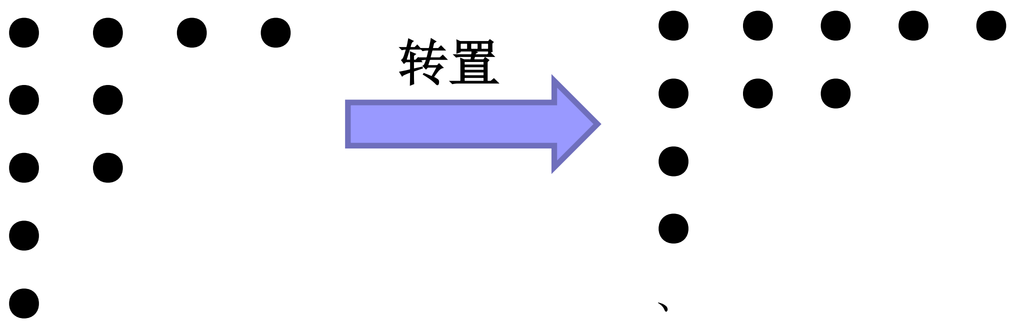
- 对于任何正整数n，其每个分拆可由Ferrers图唯一确定。

分拆的几何图示：Ferrers图

将分拆 λ 的Ferrers图 看成一个矩阵，其 转置矩阵称为 λ 的共轭分拆，记为 λ^*。

例：10的分拆 λ 为 10＝4＋2＋2＋1＋1，可记作 $4^1 2^2 1^2$,

λ 的Ferrers图为：　　　　λ^* 的Ferrers图为：



10 = 5+3+1+1

λ^*： 531^2

- λ^*的行数等于 λ 的最大部分。
- λ的行数等于 λ^* 的最大部分。
- 分拆 λ的共轭的共轭就是它本身，即$(\lambda^*)^* = \lambda$。

- λ^*的行数等于 λ 的最大部分。
- λ的行数等于 λ^* 的最大部分。

问题：当 n=10，以 5 作为最大部分的拆分有多少个？

10 = 5+5 = 5+4+1 = 5+3+2 = 5+3+1+1 = 5+2+2+1

= 5+2+1+1+1 = 5+1+1+1+1+1 7 个

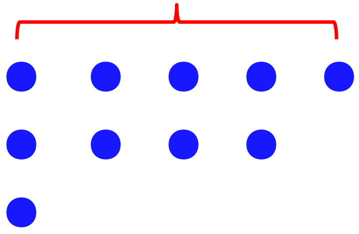
联系？

分成 5个部分的拆分有多少个？

10 = 6+1+1+1+1 = 5+2+1+1+1 =4+3+1+1+1= 4+2+2+1+1+

= 3+3+2+1+1 = 3+2+2+2+1 = 2+2+2+2+2 7 个

以5作为最大部分



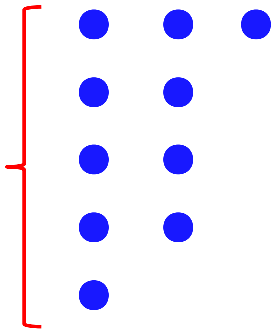
5+4+1

转置

（一一对应）

分成

5个部分



3+2+2+2+1

- λ^*的行数等于 λ 的最大部分。
- λ的行数等于 λ^* 的最大部分。

问题：当 n=10，以 5 作为最大部分的拆分有多少个？

10 = 5+5 = 5+4+1 = 5+3+2 = 5+3+1+1 = 5+2+2+1

= 5+2+1+1+1 = 5+1+1+1+1+1　　　　7 个

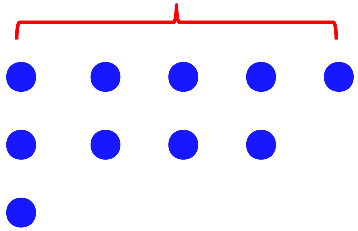
联系？

分成 5个部分的拆分有多少个？

10 = 6+1+1+1+1 = 5+2+1+1+1 =4+3+1+1+1= 4+2+2+1+1+

= 3+3+2+1+1 = 3+2+2+2+1 = 2+2+2+2+2　　　　7 个

以5作为最大部分



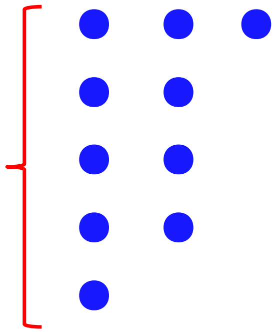
5+4+1

转置

（一一对应）

分成

5个部分



3+2+2+2+1

- λ^*的行数等于 λ 的最大部分。
- λ的行数等于 λ^* 的最大部分。

问题：当 n=10，以 5 作为最大部分的拆分有多少个？

10 = 5+5 = 5+4+1 = 5+3+2 = 5+3+1+1 = 5+2+2+1

= $\boxed{5+2+1+1+1}$ = 5+1+1+1+1+1　　　　7 个

联系？

分成 5个部分的拆分有多少个？

10 = 6+1+1+1+1 = $\boxed{5+2+1+1+1}$ =4+3+1+1+1= 4+2+2+1+1+

= 3+3+2+1+1 = 3+2+2+2+1 = 2+2+2+2+2　　　　7 个

定理（拆分数定理）：正整数 n 分成 k个部分的拆分个数，等于 n 分成以 k为最大部分的拆分个数。

自共轭分拆

- 当某个分拆 λ 与它的共轭分拆 λ^* 完全相同时，即 $\lambda = \lambda^*$ 时，λ 称为自共轭分拆。
  - 此时，λ的Ferrers图是一个对称方阵。

例如：将10拆分成：12= 5+2+1+1+1； $\lambda = 5^1 2^1 1^3$;

其Ferrers图如下：

● ● ● ● ●
● ●
●
●
●

✓ 它的转置与自身一样。
✓ 关于主对角线对称

定理8.3.2 设 n 是正整数，

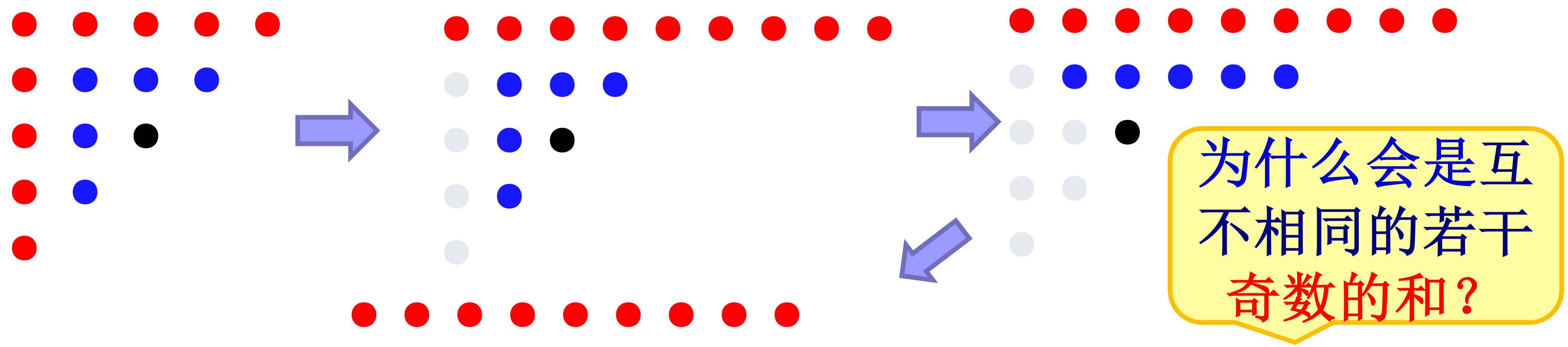
设 p_n^s 为 n 的自共轭分拆个数，

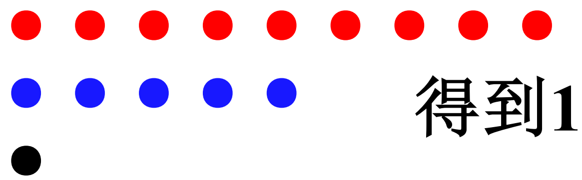
p_n^t 为分拆成互不相同的若干奇数的和的分拆个数，

则有 $p_n^s = p_n^t$。

分析：利用Ferrers图建立两种分拆的一一对应。

例：考虑15的自共轭分拆 λ： $15 = 5+4+3+2+1$，其图为





得到15的分拆 λ' ：$15 = 9 + 5 + 1$。

把以上过程反过来，可得从 λ' 得到 λ。

定理8.3.3（欧拉恒等式）设 n 是正整数，
设p_n^o是把 n 分成奇数部分的分拆个数，
p_n^d 是把n 分成不同部分的分拆个数，则有

$$p_n^o = p_n^d。$$

例：考虑32的奇数和分拆 32 = 7+5+5+5+3+3+1+1+1+1。

32 = 7+5+5+5+3+3+1+1+1+1
　= 7+10+5+3+3+1+1+1+1
　= 7+10+5+6+1+1+1+1
　= 7+10+5+6+2+1+1
　= 7+10+5+6+2+2
　= 7+10+5+6+4

迭代地把两个相同部分合并成一个部分，最终产生不同部分的分拆

定理8.3.3（欧拉恒等式）设 n 是正整数，

设p_n^o是把 n 分成奇数部分的分拆个数，

p_n^d 是把n 分成不同部分的分拆个数，则有

$$p_n^o = p_n^d。$$

考虑 32 的分成不同部分的分拆

$$32 = 11+9+6+4+2。$$

$$\begin{aligned}32 &= 11+9+6+4+2\\ &= 11+9+3+3+2+2+1+1\\ &= 11+9+3+3+1+1+1+1+1+1\end{aligned}$$

迭代地把偶数部分平分成两个相等部分，直至产生奇数部分的分拆。

定理8.3.3（欧拉恒等式）设 n 是正整数，

设p_n^o是把 n 分成奇数部分的分拆个数，

p_n^d 是把n 分成不同部分的分拆个数，则有

$$p_n^o = p_n^d。$$

证明：如下建立两种分拆的一一对应：

(1) 考虑把n分成奇数和的一个分拆λ。

- 若 λ 的所有部分互不相同，则 λ 是一个把n分成不同部分的分拆；
- 如果存在两个相同的部分，则把这两部分合并成一个部分。

持续以上过程，直到所有部分都互不相同。

由于每次合并两个部分时，都相应减少了部分的数量，

因此以上过程最终会终止，得到一个把n分成不同部分的分拆。

定理8.3.3（欧拉恒等式）设 n 是正整数，
设p_n^o是把 n 分成奇数部分的分拆个数，
p_n^d 是把n 分成不同部分的分拆个数，则有

$$p_n^o = p_n^d。$$

证明：如下建立两种分拆的一一对应：

(2) 考虑把n分成不同部分的一个分拆λ。

- 如果λ的所有部分都是奇数，则λ是一个把n分成奇数和的分拆；
- 否则至少存在一个偶数部分，则把每一个偶数部分分成两个相同的部分。

重复以上过程，直到所有部分都是奇数。

如何计算分拆数?

- 方法一：

定理：n分拆数 p_n^k 满足下列递推关系：

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k,\quad p_n^1 = p_n^n = 1。$$

n 分拆数 $p_n = \sum_{i=1}^{n} p_n^i$

- 方法二：生成函数

分拆数与生成函数

定理8.3.4 数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$.的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}。$$

证明：由 $(1- x^k)^{-1} = 1+ x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{a_k k}+\ldots.$， 得

$$\frac{1}{1-y} = 1+ y + y^2 + y^3 + \ldots + y^n+\ldots.$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}$$

$$= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \ldots \times \frac{1}{1-x^k} \times \ldots$$

$$= (1+ x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} +\ldots.) \times (1+ x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2} + \ldots.) \times \ldots$$

$$(1+ x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k}+\ldots.) \times \ldots$$

每一个项 x^n 由通过从第一个因子选择x^{1a_1}，从第二个因子选择项x^{2a_2}，从第三个因子选择项x^{3a_3}，以此类推，得到，其中，

$$1a_1+2a_2+3a_3+\ldots ka_k +\ldots = n \quad (0\le a_i \le n) \quad (1)$$

显然，方程(1)的每个正整数解均对应 n的一个拆分，因此，x^n的系数，即方程(1)的非负整数解的个数，就是 n的分拆数。

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$.的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}。$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \boxed{\frac{1}{1-x^k}} \cdot \ldots$$

对应为 k的部分

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots) \times (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2} + \ldots)$$

$$\times \ldots \times (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k} + \ldots) \times \ldots$$

- 多重集合 $S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$的$n$组合数数列$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$. 的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{e_1} + \ldots) \times (1 + x + x^2 + \ldots + x^{e_2} + \ldots) \times \ldots \times$$

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{e_k} + \ldots)$$

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$.的生成函数是

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}$。

$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \ldots$

$= (1+x+x^2+\ldots+x^{1a_1}+\ldots) \times (1+x^2+x^4+\ldots+x^{2a_2}+\ldots)$

$\times\ldots\times (1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots+x^{ka_k}+\ldots) \times\ldots$

问题：

- n 分成 k 个部分的分拆数 p_n^k 的生成函数？
- n 分成奇数和的分拆数 p_n 的生成函数？
- n 分成互不相等的部分的拆分数 p_n 的生成函数？
- n 分成互不相等的奇数部分的拆分数 p_n 的生成函数？

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$.的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{-1}。$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \cdots$$

$$= (1+ x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots.) \times (1+ x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2} + \ldots.)$$

$$\times \ldots \times (1+ x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k} + \ldots.) \times \ldots$$

- n 分成 k个部分的分拆数p_n^k的生成函数

$$g(x)= x^k(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}\ldots(1-x^k)^{-1}$$

保证至少存在一个部分k

保证最大部分为 k

定理（拆分数定理）：正整数 n 分成 k个部分的拆分个数，等于 n 分成以 k为最大部分的拆分个数。

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$.的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}。$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \ldots$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots.) \times (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2} + \ldots.)$$

$$\times \ldots \times (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k} + \ldots.) \times \ldots$$

- n 分成奇数和的分拆数 p_n 的生成函数?

$$g(x) = (1\text{-}x)^{-1}(1\text{-}x^3)^{-1}(1\text{-}x^5)^{-1}(1\text{-}x^7)^{-1}\ldots$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots.) \times$$

$$(1 + x^3 + x^6 + \ldots + x^{3a_2} + \ldots.) \times$$

$$(1 + x^5 + x^{10} + \ldots + x^{5a_k} + \ldots.) \ldots$$

保证每个部分都为奇数

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$.的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)^{-1}。$$

$$= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-x^k}\cdot\ldots$$

$$= (1+x+x^2+\ldots+x^{1a_1}+\ldots)\times(1+x^2+x^4+\ldots+x^{2a_2}+\ldots)$$

$$\times\ldots\times(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots+x^{ka_k}+\ldots)\times\ldots$$

- n 分成互不相等的部分的拆分数 p_n 的生成函数?

分拆中1, 2, …, n只能出现 一次

$$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots(1+x^n)\ldots$$

分拆数与生成函数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$.的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}。$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \ldots$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots) \times (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2} + \ldots)$$

$$\times \ldots \times (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k} + \ldots) \times \ldots$$

- n 分成互不相等的奇数部分的拆分数 p_n 的生成函数？

分拆中不超过n 的奇数只能出现 1次

$$g(x) = (1+x)(1+x^3)(1+x^5)\ldots(1+x^{2k-1})\ldots$$

例 1 有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？ 对能称出的重量有几种可称量方案？

分析： 与{1, 2, 3, 4}的组合数有区别：

{1, 2, 4}, {3, 4}是两个不同的组合，但称出同样的重量。

(1) {1, 2, 3, 4}的组合数的生成函数为：

$G_1(x)=(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)$

(2) {1, 2, 3, 4}的能称出的重量数的生成函数为

$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$

例 1 有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？ 对能称出的重量有几种可称量方案？

分析：$\{1, 2, 3, 4\}$的能称出的重量数的生成函数为

$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$。

例 1 有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？对能称出的重量有几种可称量方案？

分析：{1, 2, 3, 4}的能称出的重量数的生成函数为

$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$。

把四个因子中的x用x_1, x_2, x_3, x_4替换，得

$$(x_1^0+x_1^1)(x_2^0+x_2^2)(x_3^0+x_3^3)(x_4^0+x_4^4)=$$

$$x_1^0x_2^0x_3^0x_4^0+x_1^0x_2^0x_3^0x_4^4+x_1^0x_2^0x_3^3x_4^0+x_1^0x_2^0x_3^3x_4^4+$$

$$x_1^0x_2^2x_3^0x_4^0+x_1^0x_2^2x_3^0x_4^4+x_1^0x_2^2x_3^3x_4^0+x_1^0x_2^2x_3^3x_4^4+$$

$$x_1^1x_2^0x_3^0x_4^0+x_1^1x_2^0x_3^0x_4^4+x_1^1x_2^0x_3^3x_4^0+x_1^1x_2^0x_3^3x_4^4+$$

$$x_1^1x_2^2x_3^0x_4^0+x_1^1x_2^2x_3^0x_4^4+x_1^1x_2^2x_3^3x_4^0+x_1^1x_2^2x_3^3x_4^4$$

例 1 有1、2、3、4克的砝码各一枚，问能称出哪几种重量？ 对能称出的重量有几种可称量方案？

分析： {1, 2, 3, 4}的能称出的重量数的生成函数为

$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$。

把四个因子中的x用x_1, x_2, x_3, x_4替换，得

$$(x_1^0+ x_1^1)(x_2^0 + x_2^2)(x_3^0 + x_3^3)(x_4^0 + x_4^4) =$$

$$x_1^0\,x_2^0\,x_3^0\,x_4^0+ x_1^0\,x_2^0\,x_3^0\,x_4^4+ x_1^0\,x_2^0\,x_3^3\,x_4^0+ x_1^0\,x_2^0\,x_3^3x_4^4+$$

$$x_1^0x_2^2x_3^0\,x_4^0+ x_1^0x_2^2x_3^0\,x_4^4+ x_1^0x_2^2x_3^3\,x_4^0+ x_1^0x_2^2x_3^3x_4^4+$$

$$x_1^1x_2^0\,x_3^0\,x_4^0+x_1^1x_2^0\,x_3^0\,x_4^4+ x_1^1\,x_2^0\,x_3^3\,x_4^0+x_1^1x_2^0\,x_3^3x_4^4+$$

$$x_1^1x_2^2x_3^0\,x_4^0+x_1^1x_2^2x_3^0\,x_4^4+x_1^1x_2^2x_3^3\,x_4^0+x_1^1x_2^2x_3^3x_4^4$$

把x_1, x_2, x_3, x_4替换成x，得

$$g(x) = 1+ x+ x^2+ 2x^3 +2x^4+2x^5+2x^6+2x^7 + x^8 +x^9 + x^{10}$$

从$G(x)$展开式中x的幂次项知，可称出1~10克的重量，系数即为对应的称量方案数。

例： 若有 1 克的砝码 3 枚，2克的砝码 4 枚，4克的砝码2枚。问能称出哪些重量？各有几种方案？

有 序 拆 分

- 以上讨论的整数n的拆分都是无序拆分
  - 即在定义中强加了一种次序，即

$$n=\sum_{i=1}^{k}a_i,\ a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_k\geq 1$$

例：5=3+1+1，5=1+3+1，5=1+1+3 是5的同一无序拆分。

- 当考虑有序拆分时，定义可改写如下：

$$n=\sum_{i=1}^{k}a_i,\ a_i\geq 1,\ \ i=1,2,\ldots,k$$

例：5=3+1+1，5=1+3+1，5=1+1+3 是 5的不同的有序拆分。

n的有序拆分的个数？

小结

- 分拆数相关定理

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ 的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}。$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \dots$$

$$= (1 + x + x^2 + \dots + x^{1a_1} + \dots) \times (1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2a_2} + \dots)$$

$$\times \dots \times (1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \dots + x^{ka_k} + \dots) \times \dots$$