

北京航空航天大学

2011—2012 学年 第二学期期末

离散数学3

《组合数学》

班 级 \_\_\_\_\_ 学 号 \_\_\_\_\_

姓 名 \_\_\_\_\_ 成 绩 \_\_\_\_\_

2012 年 6 月 4 日

班号\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 成绩\_\_\_\_\_

## 《组合数学》期末考试卷

注意事项：1、考试时间 120 分钟、闭卷。

2、第一题的答案直接填写在题目留出的空白，第二题之后，答题写在后面的空白页上，请标明**题号**。

### 一、填空题（每空 5 分，共 35 分）

(1) 7 颗不同颜色珠子做成一条项链，其中有 3 颗红、黄、绿珠子任意 2 个都不能相邻，共能够有\_\_\_\_\_种项链构成样式。

(2) 构造 $\{1, 2, \dots, 8\}$ 的排列\_\_\_\_\_，其逆序列是 6, 6, 1, 4, 2, 1, 0, 0.

(3) 对于大小为  $2n$  的多重集 $\{n \cdot a, 1, 2, 3, \dots, n\}$ ，求它的  $n$ -组合数 =\_\_\_\_\_。

(4) 方程  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ ，共有\_\_\_\_\_个满足 $x_1 \geq 2$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_3 \geq -5$ ,  $x_4 \geq 9$  的整数解。

(5) 一个厨师会做  $n$  种菜品，要想用这  $n$  种菜品做成 100 桌酒席，且任何一桌酒席的菜品不会完全出现在另一桌上，则  $n$  最少为\_\_\_\_\_。

(6) 设 $h_n$ 是方程 $e_1 + e_2 + \dots + e_k = n$ 的正整数解的个数，序列 $h_0, h_1, \dots, h_n, \dots$ 的生成函数是\_\_\_\_\_。

(7) 令  $m$  和  $n$  是非负整数  $m \geq n$ 。有  $m+n$  个人排成一队进入电影院，电

影票为 50 元，这  $m+n$  人中有  $m$  个人只有 50 元纸币， $n$  个人只有 100 元纸币。售票处采用一个空的售票箱。人们能够排队总有零钱可找的队伍方式数为\_\_\_\_\_。

二、证明：证明对任意给定的 52 个整数，存在其中的两个整数，要么两者的和能被 100 整除，要么两者的差能被 100 整除。（共 10 分）

三、有两台机器 A 和 B 以及若干项需要运行的任务，每个任务在一台机器上运行。采用  $(k: a, b)$  表示编号  $k$  任务可以在机器 A 的  $a$  模式或机器 B 的  $b$  模式运行，每台机器切换模式需要重启一次。当机器初始为关机状态，每台机器有 9 种不同的模式，需要执行 11 项任务： $(0:0,1)$ 、 $(1:0,4)$ 、 $(2:1,2)$ 、 $(3:1,5)$ 、 $(4:3,6)$ 、 $(5:4,7)$ 、 $(6:4,8)$ 、 $(7:5,4)$ 、 $(8:5,8)$ 、 $(9:6,7)$ 、 $(10:8,7)$  时，这 11 项任务按照一定顺序在 2 台机器上调度，机器启动的最小次数是多少？（给出求解过程）。（共 10 分）

四、求多重集  $\{1 \cdot a, 2 \cdot b, 3 \cdot c, 4 \cdot d\}$  存在多少种循环排列，对除  $a$  以外每种类型的字母，该类型的所有字母不连续出现，即不出现包含  $bb$ 、 $ccc$ 、 $dddd$  的循环排列（求出最后数值）。（12 分）

五、确定方程  $5x_1+6x_2+x_3+x_4=289$ ，满足  $x_1\geq 0, x_2\geq 0, 0\leq x_3\leq 4, 0\leq x_4\leq 5$  的整数解个数。（8 分）

六、求解初始值为  $h_0=0$  的递推关系  $h_n=2h_{n-1}-n+2^n$  ( $n\geq 1$ )。（12 分）

七、用匹配算法确定图 1 中二分图的最大匹配，并找出使得  $|S|=|M|$  的覆盖  $S$ 。（共 13 分）

（1）假设  $M^1=\{(x_3,y_3), (x_4,y_4), (x_5,y_5)\}$ ，给出计算最大匹配  $M^*$  过程（需要给出每步二分图标注结果、交错路径  $\gamma$  及匹配  $M^i$ ）。（10 分）

（2）给出求解过程（1）得出的最大匹配  $M^*$  以及使得  $|S|=|M|$  覆盖集  $S$ 。（3 分）

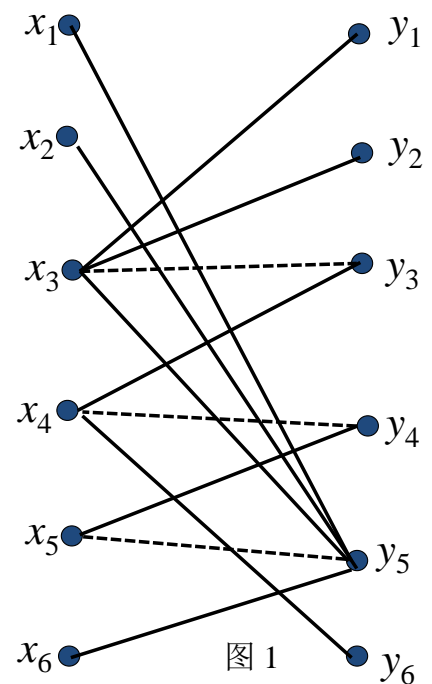


图 1