第十四章Pólya计数

4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

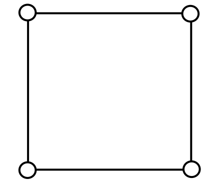
- 组合计数问题中的两类困难
  - 问题通解的表达式：生成函数
  - 区分所讨论的问题中哪些应该看成相同的，哪些是不同的
    - 在计算过程中避免重复或遗漏

George Poly
(1887-1985)
匈牙利裔美国数学家

在前人研究同分异构体计数问题的基础上，波利亚在1937年以《关于群、图与化学化合物的组合计算方法》（KombinatorischeAnzahlbestimmungen fr Gruppen，Graphen und ChemischeVerbindungen）为题，发表了长达110页、在组合数学中具有深远意义的著名论文。

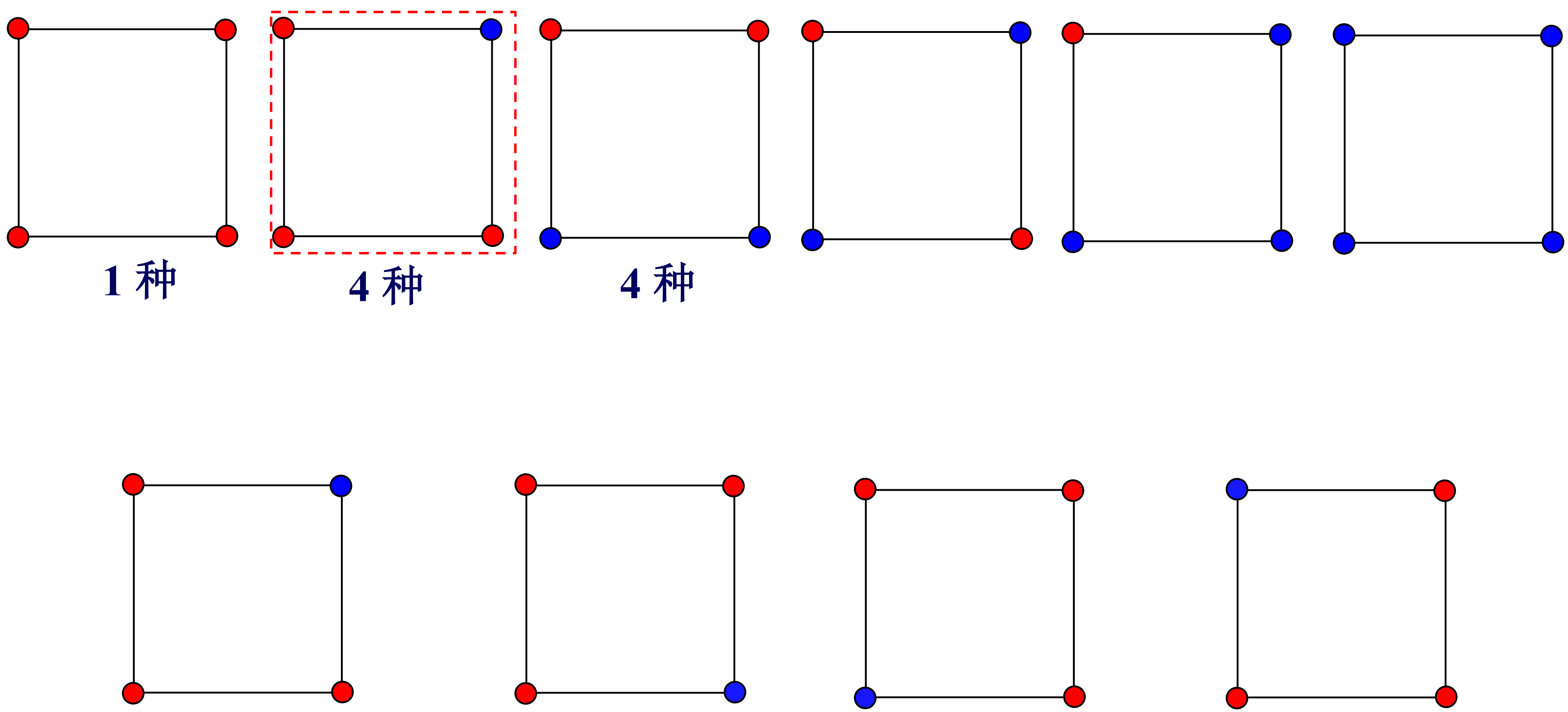
“波利亚计数定理”
（**Polya's enumeration theorem**）

例（正方形着色问题）：用红、蓝两种颜色给一个正方形的4个顶点着色，试问存在多少种不同的着色方法数。

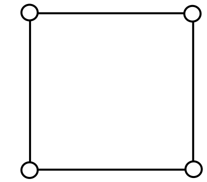


(1) 正方形位置固定：16种

(2) 允许正方形转动：6种



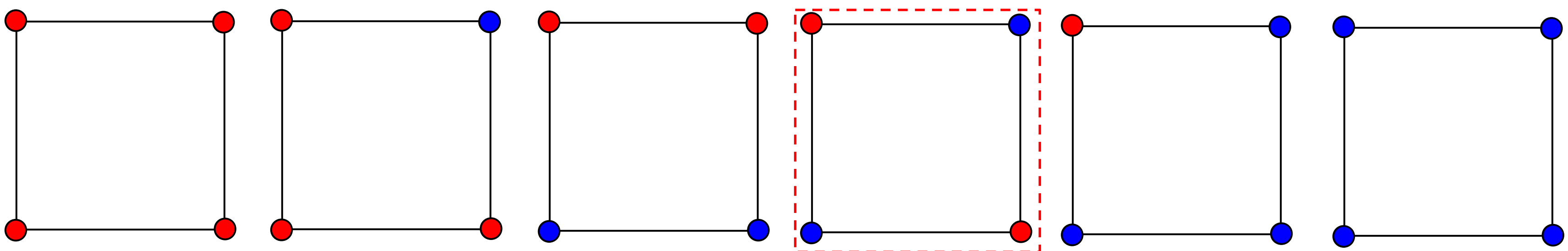
例（正方形着色问题）：用红、蓝两种颜色给一个正方形的4个顶点着色，试问存在多少种不同的着色方法数。



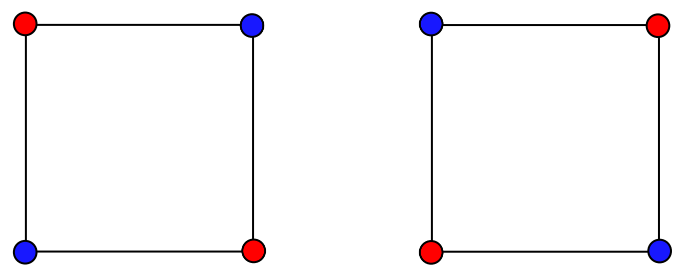
(1) 正方形位置固定：16种

(2) 允许正方形转动：6种

- 把16种方法分成 6部分，同一部分中的两种着色被视为等价



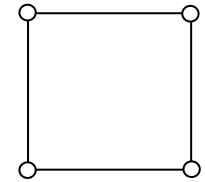
1 种　4 种　4 种　2 种　4 种　1 种



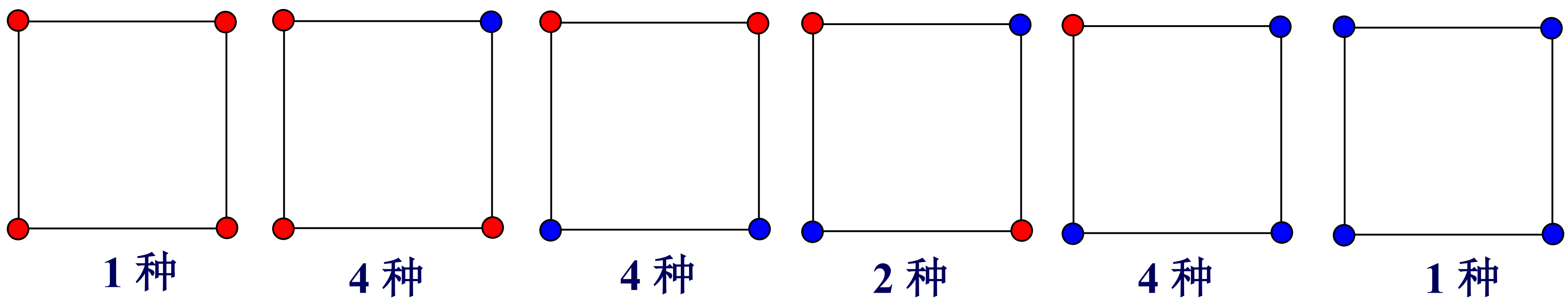
例（正方形着色问题）：用红、蓝两种颜色给一个正方形的4个顶点着色，试问存在多少种不同的着色方法数。

(1) 正方形位置固定：16种

(2) 允许正方形转动：6种

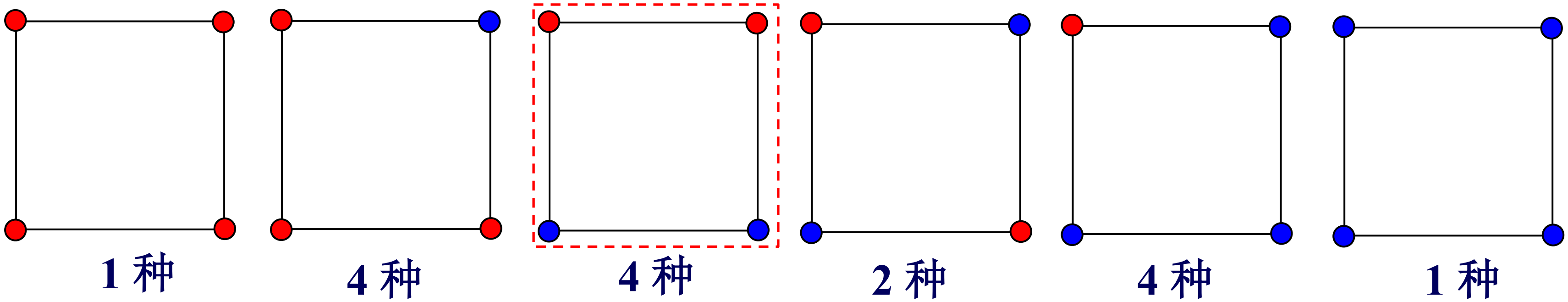


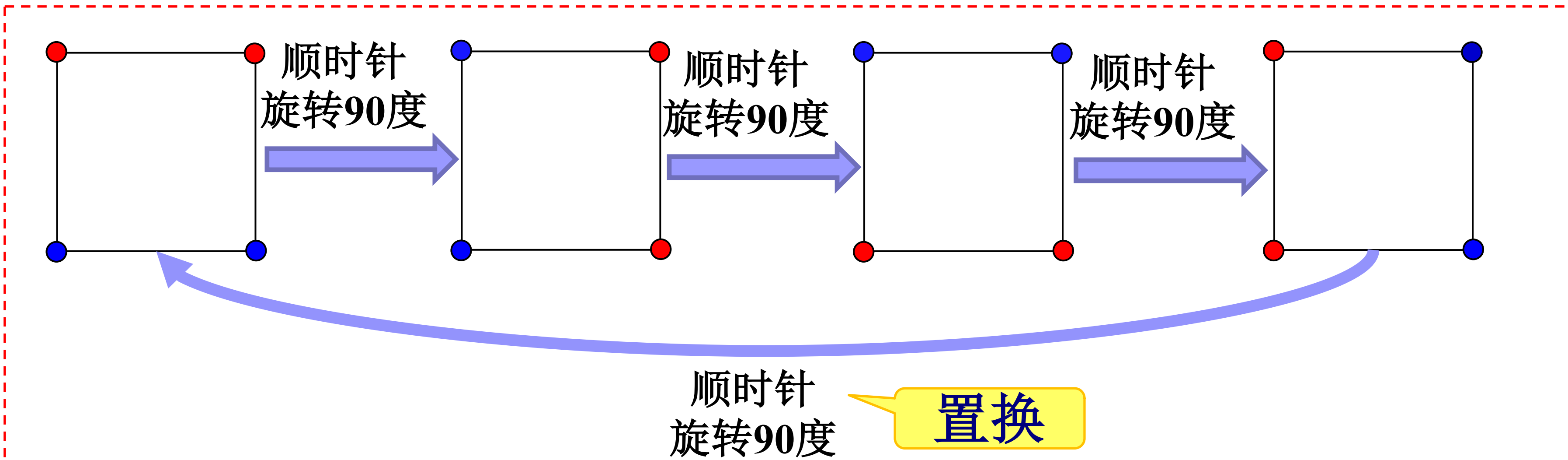
- 把16种方法分成 6部分，同一部分中的两种着色被视为等价



$$1 + 4 + 4 + 2 + 4 + 1 = 16 \text{ 种}$$

- 本章目的：建立和阐明在对称情形下计算非等价着色的技术
  - 明确给出两种着色方案异同的数学定义
  - 如果规定了每种颜色出现的次数，对着色方案数给出统一的表达式





- 着色c_1与c_2等价：c_1可通过一个置换转化为c_2

考虑两个着色在一个置换群下的等价性

主要内容

4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

主要内容

4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

群的基本知识

给定集合 G 和 G 上的二元运算“•”，如果以下四个条件满足，则称代数结构$(G, \bullet)$为群:

(1) 封闭性：“•”运算在 G 上是封闭的，即

对于任意 $a, b \in G$，都有 $a \bullet b \in G$;

(2) 结合律成立：“•”运算满足结合律，即

对于任意$a, b, c \in G$，都有 $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$。

(3) 存在单位元：存在 $e \in G$，对于任意 $a \in G$，满足$e \bullet a = a \bullet e = a$ ，e 称为G的单位元；

(4) 存在逆元：对于任意 $a \in G$, 存在 $a^{-1} \in G$, 满足 $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$, a^{-1}称为a的逆元。

群的基本知识

- $a \bullet b$ 可简记为 ab。
- 由于结合律成立，$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$，记为$abc$；

推广到n个元素乘积$a_1a_2 \ldots a_n$，等于任意一种结合。

- 当$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ 时， $a_1a_2 \ldots a_n$可简记为 a^n。

例：1. G={1, -1} 在乘法运算下是一个群。

2. 整数集 Z 在加法运算下是一个群。

3. 二维欧几里得空间的刚体旋转变换集合 $T = \{ T_\alpha \}$ 构成群，其中

$$T_\alpha:\ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

群的基本知识

- **有限群**：如果 G 是有限集合，则称 G 为有限群。
- **群的阶**：有限群 G 的元素个数称为群的阶，记为 $|G|$。
- **循环群的与生成元**：在群$(G,\bullet)$中，若存在 $a \in G$，G中任任意元素 b 均可以表示成 a 的方幂，则
  - 称G为循环群，
  - a 称为该群的生成元。

置 换

- 设 X 是一个有限集。不失一般性，取 X 为包含前n个正整数的集合$X=\{1, 2, \ldots, n\}$。
- X 的每个置换 $i_1, i_2, \ldots, i_n$ 可视为 X 到其自身的一个一对一（one-to-one）的函数 $f: X \to X$（即单射）， 其中，

$$f(1) = i_1, f(2) = i_2, \ldots, f(n) = i_n。$$

根据鸽巢原理，$f: X \to X$ 为满射，因此 f 为双射。

可以用如下 $2\times n$ 阵列来表示置换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

1, 2, …, n 一个排列

- 集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$ 的置换个数为 $n!$。
- 将 X 的所有$n!$个置换构成的集合记为 S_n。

例：{1, 2, 3}的 3!=6个置换为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- S_3是由上述6个置换构成的集合
- 置换是函数，因此可以合成。

置换的合成（composition）

合成运算：设 f 和 g 为$\{1, 2, \ldots, n\}$上的两个置换:

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}, \quad g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

f与g的合成按照先 f 后 g 的顺序放置得到一个新的置换:

$$g\circ f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

其中$(g\circ f)(k) = g(f(k)) = j_{i_k}$.

$(j_{i_1}, j_{i_2}, \ldots, j_{i_n})$是$\{1, 2, \ldots, n\}$的一个排列

- 函数的合成定义了 S_n 上的一个二元运算:

  如果 f 和 g属于S_n，则 $g\circ f$ 也属于 S_n。

- 二元运算$\circ$的性质：
  - ✓ 满足结合律：$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$
  - ✓ 通常不满足交换律

例：

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\quad g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

$$g\circ f= \qquad\qquad f\circ g=$$

- 二元运算∘的性质：
  - ✓ 满足结合律：$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$
  - ✓ 通常不满足交换律

例： $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$

$g\circ f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $f\circ g=$

- 二元运算 ∘ 的性质：
  - ✓ 满足结合律：$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
  - ✓ 通常不满足交换律

例：$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

几种特殊置换

- 自身合成运算：

$f^1=f$，$f^2=f\circ f$，$f^3=f\circ f\circ f$，…, $f^k= f\circ f\circ \ldots \circ f$ (k个f)

- 恒等置换：各整数对应到它自身的置换

$$\iota(k) = k，对所有k = 1, 2, \ldots, n$$

等价于

$$\iota=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

单位元

✓ 恒等置换性质：

$\iota\circ f=f\circ\iota=f$，对 S_n中的所有置换 f 均成立。

几种特殊置换

- **逆置换：** S_n中的每个置换f是一对一的函数，所以存在逆函数$f^{-1} \in S_n$，满足：

  逆元

  如果 $f(s) = k$，那么 $f^{-1}(k) = s$。

例：$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

交换 $2 \times n$ 矩阵的第一行与第二行

重新排列列使得第一行的整数以自然顺序 1, 2, …, n 出现

- **性质1：** 恒等置换的逆是它自身：$\iota^{-1} = \iota$。
- **性质2：** 任意置换与它的逆满足：$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \iota$。

置换群

令 S_n 为$X=\{1, 2, \ldots, n\}$的所有$n!$个置换构成的集合。设G是S_n的非空子集，$(G, \circ)$是否是群？

如果 S_n 的非空子集 G 满足如下四个性质，则定义 G 为 X 的一个置换的群，简称置换群：

(1) 封闭性：对G中任意置换 f 与 g，$f\circ g$ 也属于G。

(2) 满足结合律：对G中任意置换 f, g, h，$(f\circ g)\circ h = f\circ (g\circ h)$

(3) 存在单位元：S_n中的恒等置换 ι 属于G。

(4) 存在逆元：对G中的每一个置换f，它的逆 f^{-1} 也属于G。

置换群

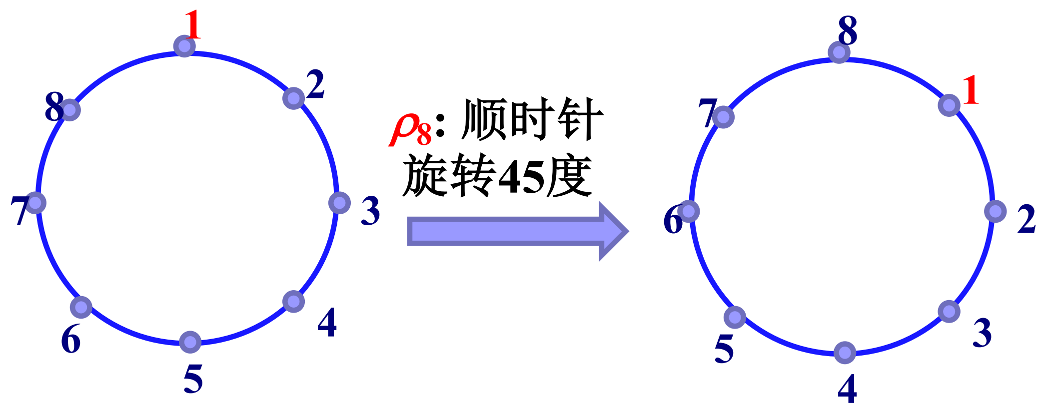
- $X=\{1, 2, \ldots, n\}$的所有置换的集合S_n是一个置换群，称为 n 阶对称群。
- 仅含恒等置换的集合$G=\{\iota\}$是一个置换群。
- 每个置换群满足消去律：$f\circ g = f\circ h$，则 $g = h$

例： 设 n 是一个正整数，ρ_n 表示 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的置换：

$$\rho_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$$

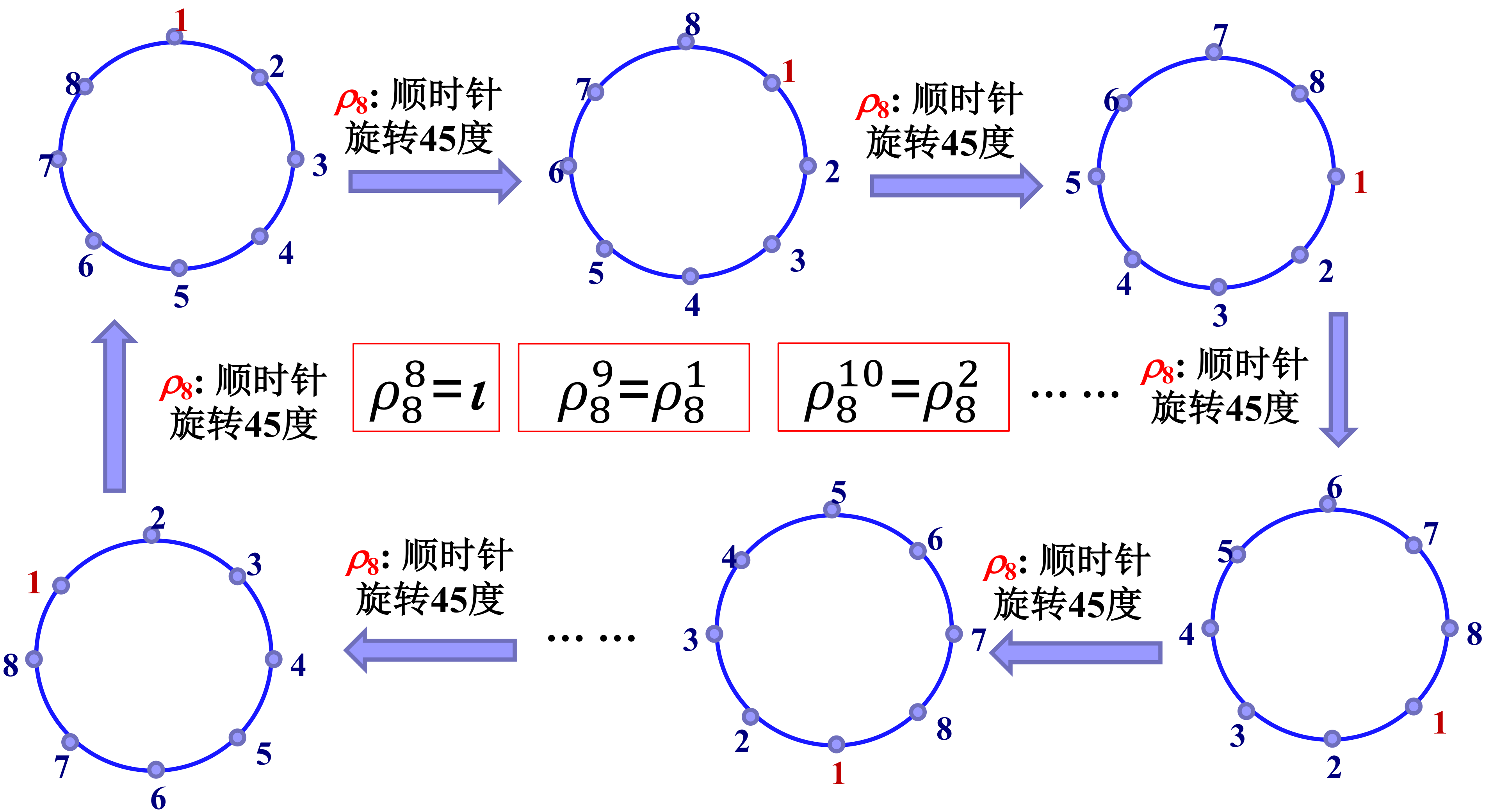
即 当 $i = 1, 2, \ldots, n-1$时，有$\rho_n(i) = i+1$且 $\rho_n(n) = 1$。

把1, 2, …, n 均等地放到圆周上或正n角形上(n=8):



- ρ_n 按照顺时针方向将各整数传到随后的整数。

$$\rho_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$$

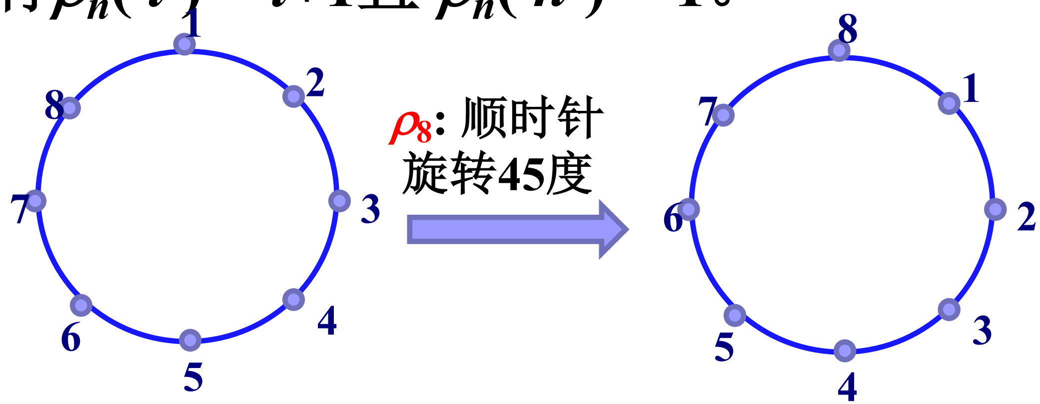


例： 设 n 是一个正整数，ρ_n 表示 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的置换：

$$\rho_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$$

即 当 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ 时，有 $\rho_n(i) = i+1$ 且 $\rho_n(n) = 1$。

把1, 2, …, n 均等地放到圆周上或正n角形上：



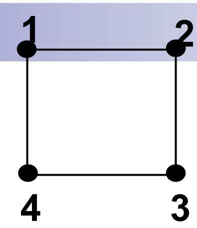
- ρ_n 按照顺时针方向将各整数传到随后的整数。
- 可将置换 ρ_n 视为圆的 360/n度 的旋转，

  ρ_n^2 视为圆的 $2\times(360/n)$ 度的旋转，…，

  ρ_n^k 视为圆的 $k\times(360/n)$度 的旋转：

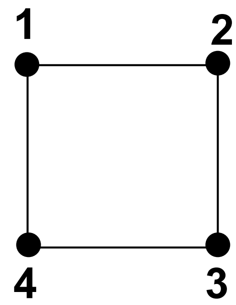
$$\rho_n^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-k & n-k+1 & \ldots & n \\ k+1 & k+2 & \ldots & n & 1 & & k \end{pmatrix} \qquad \rho_n^k(i) = (i+k) \bmod n$$

例如：当n=4时，有

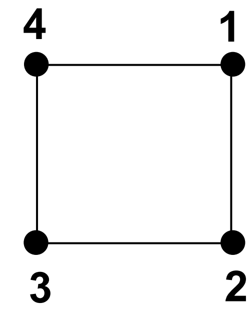


$$\rho_4^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

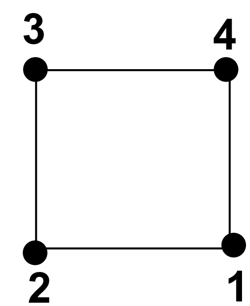
恒等置换



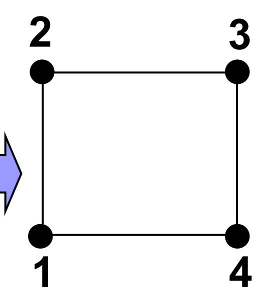
$$\rho_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$



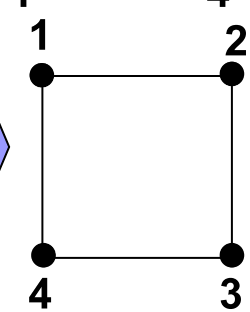
$$\rho_4^2 = \rho_4^1 \circ \rho_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\rho_4^3 = \rho_4^1 \circ \rho_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



$$\rho_4^4 = \rho_4^1 \circ \rho_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \rho_4^0$$



$$\rho_4^4=\rho_4^1\circ\rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\rho_4^0$$

$$\rho_4^5=\rho_4^1\circ\rho_4^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\rho_4^1$$

$$\rho_4^6=\rho_4^1\circ\rho_4^5=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\rho_4^2$$

$$\rho_4^7=\rho_4^1\circ\rho_4^6=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\rho_4^3$$

$$\rho_4^8=\rho_4^1\circ\rho_4^7=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\rho_4^0$$

$\boldsymbol{\rho_4^k=\rho_4^r}$, 其中 $\boldsymbol{k=r \bmod 4}$

$$\rho_n^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-k & n-k+1 & \ldots & n \\ k+1 & k+2 & \ldots & n & 1 & & k \end{pmatrix}$$

性质：设 $0 \le k \le n-1$, $r \ge n$, 如果 $k = r \bmod n$，则 $\rho_n^k = \rho_n^r$。

- 仅有ρ_n的n个不同的幂，即

$$\rho_n^0 = \iota, \rho_n, \rho_n^2, \ldots, \rho_n^{n-1}$$

- $\rho_n^k \circ \rho_n^{n-k} = \rho_n^n = \iota$，$k=0, 1, .., n-1$，得

$$(\rho_n^k)^{-1} = \rho_n^{n-k}, k = 0, 1, .., n-1$$

结论：$C_n = \{ \rho_n^0 = \iota, \rho_n^1, \rho_n^2, \ldots, \rho_n^{n-1} \}$ 是一个置换群。

- ✓ C_n是一个循环群。

$$\rho_n^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-k & n-k+1 & \ldots & n \\ k+1 & k+2 & \ldots & n & 1 & & k \end{pmatrix}$$

性质: $(C_n, \circ)$ 是一个置换群，其中$C_n=\{\rho_n^0=\iota, \rho_n^1, \rho_n^2, \ldots, \rho_n^{n-1}\}$。

证明：置换群的四个条件：合成运算的封闭性，满足结合律，存在单位元和逆元。

(1) 设ρ_n^i和$\rho_n^j(0 \le i, j \le n\text{-}1)$是$C_n$中的任意两个置换，则有

$$\rho_n^i \circ \rho_n^j = \rho_n^{i+j} \ ,$$

✓如果$0 \le i+j \le n\text{-}1$，则$\rho_n^{i+j} \in C_n$;

✓如果$n \le i+j$，则一定存在k $(0 \le k \le n\text{-}1)$，满足

$k = (i+j) \bmod n$，所以，$\rho_n^{i+j} = \rho_n^k \in C_n$。

(2) 置换的合成满足结合律。

(3) $\rho_n^0 = \iota \in C_n$。

(4) 对于任意$\rho_n^k \in C_n$，$(\rho_n^k)^{-1} = \rho_n^{n-k}$ 。

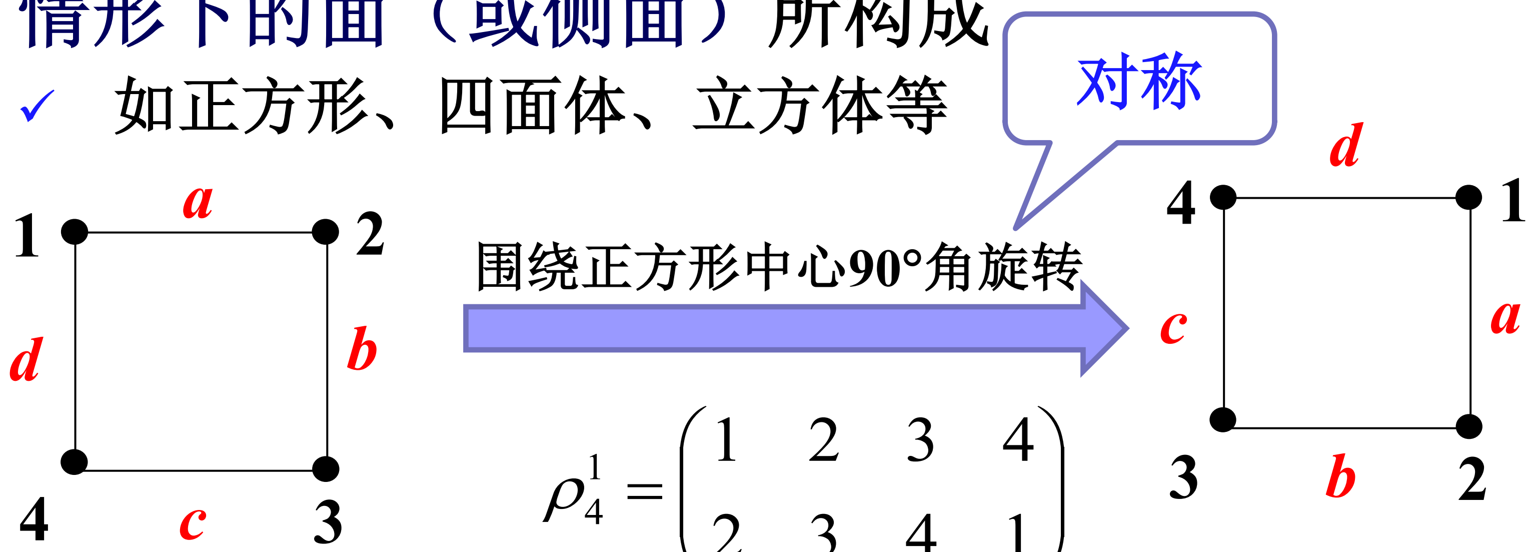
因此，$(C_n, \circ)$ 是置换群。

小结

- 群 $(G, \bullet)$
  - 封闭性、存在单位元与逆元
- 置换 $i_1, i_2, \ldots, i_n$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$
- 置换群
  - $(C_n, \circ)$ 是一个置换群，其中$C_n=\{\rho_n^0=\iota, \rho_n^1, \rho_n^2, \ldots, \rho_n^{n-1}\}$，其中 $\rho_n^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-k & n-k+1 & \ldots & n \\ k+1 & k+2 & \ldots & n & 1 & & k \end{pmatrix}$
  - 可将置换 ρ_n^k 视为圆的 $k\times(360/n)$度 的旋转
- 隐含了用于计算把 n个不同的对象安置到一个圆周上的方法数

几何图形的对称

- 对称：设Ω是一个几何图形，Ω到它自身的一个(几何)运动（**motion**）或全等（**congruence**）称为Ω的一个对称。
- 考虑的几何图形是由角点（顶点）、边、及三维情形下的面（或侧面）所构成
  - ✓ 如正方形、四面体、立方体等



$$\rho_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

几何图形的对称

- 对称：设Ω是一个几何图形，Ω到它自身的一个(几何)运动（motion）或全等（congruence） 称为Ω的一个对称。
- 考虑的几何图形是由角点（顶点）、边、及三维情形下的面（或侧面）所构成
  - ✓ 如正方形、四面体、立方体等
- 每个对称可以看作是顶点、边以及三维情形下的面上的一个置换。
  - ✓ 两个对称的合成仍得一个对称
  - ✓ 一个对称的逆也是一个对称
  - ✓ 使所有对象固定不动的运动也是一个对称，即恒等对称

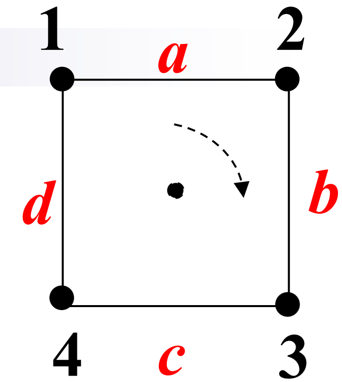
几何图形的对称

- 对称：设Ω是一个几何图形，Ω到它自身的一个(几何)运动或全等称为Ω的一个对称。
- 考虑的几何图形是由角点（顶点）、边、及三维情形下的面（或侧面）所构成
  - ✓ 如正方形、四面体、立方体等
- 对称构成置换群，称为Ω的对称群
  - ✓ 顶点对称群：Ω的角点上的置换群G_C
  - ✓ 边对称群：Ω的边上的置换群G_E
  - ✓ 面对称群：Ω是三维情形下的面上的置换群G_F

例：考虑如右图所示正方形 Ω：

角点：1, 2, 3, 4

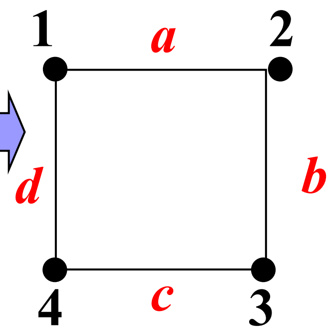
边：*a*, *b*, *c*, *d*



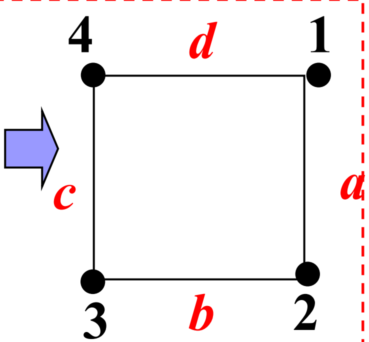
Ω的对称：　两种类型

(1) 4个平面对称: 围绕正方形中心 **0°, 90°, 180 °, 270 °角**的4个**旋转**

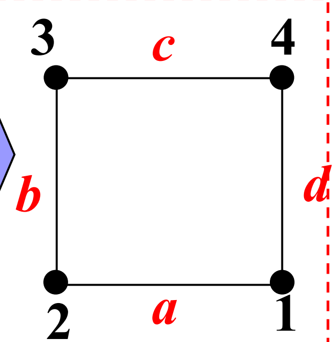
$$\rho_4^0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



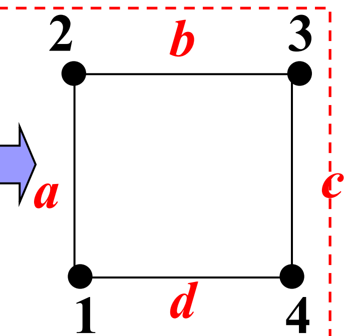
$$\rho_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\rho_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



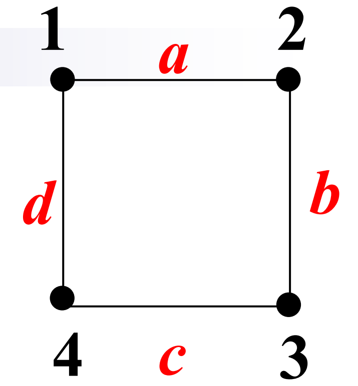
$$\rho_4^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



例：考虑如右图所示正方形 Ω：

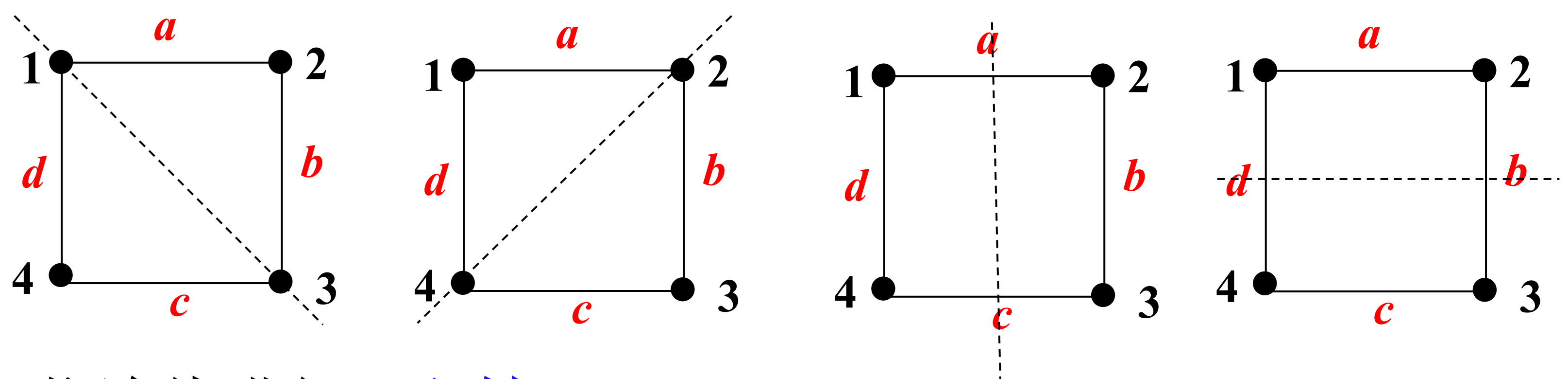
角点：1, 2, 3, 4

边：*a*, *b*, *c*, *d*



Ω的对称： 两种类型

(2) 4个反射：对角点连线 (2个)、对边中点连线 (2个)

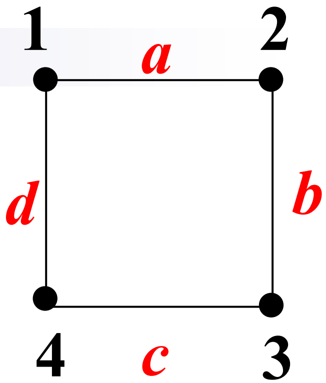


- 依连线进行"翻转"；
- 运动是在空间进行，"翻转"正方形需要离开它所在的平面。

例：考虑如右图所示正方形Ω：

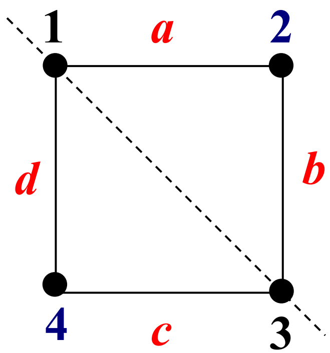
角点：1, 2, 3, 4

边：*a*, *b*, *c*, *d*

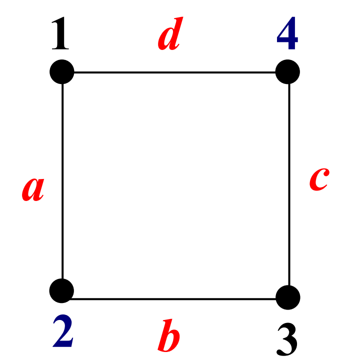


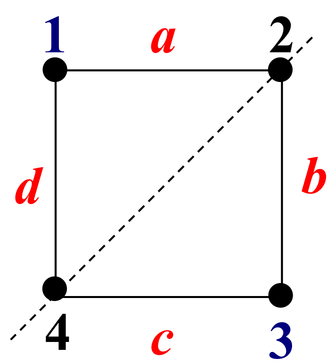
Ω的对称： 两种类型

(2) 4个反射：对角点连线 (2个)、对边中点连线 (2个)

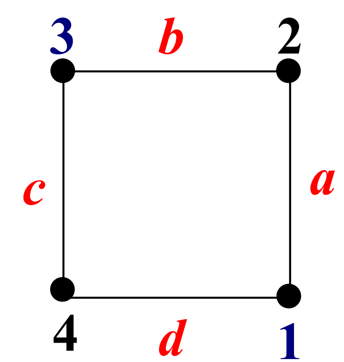


$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$





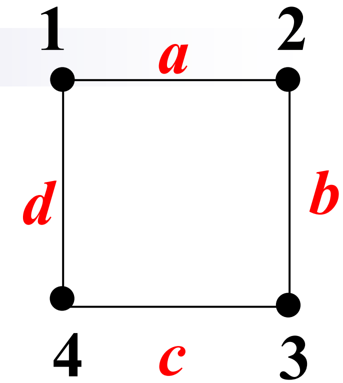
$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$



例：考虑如右图所示正方形 Ω：

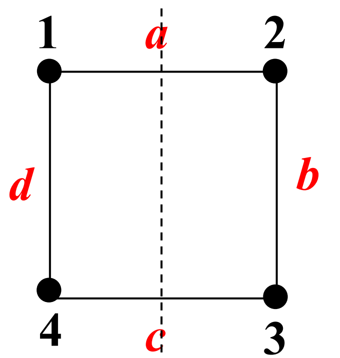
角点：**1, 2, 3, 4**

边：***a, b, c, d***

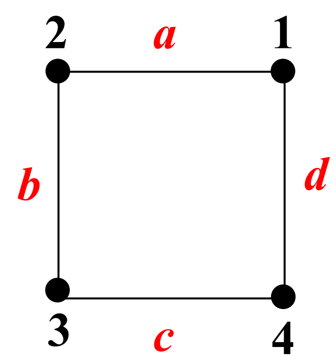


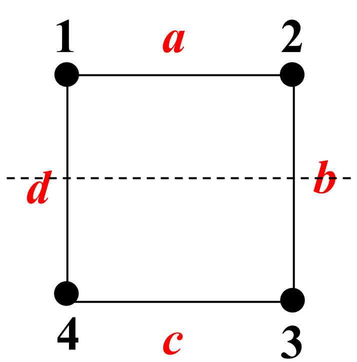
Ω的对称：　两种类型

(2) 4个反射：对角点连线 (2个)、对边中点连线 (2个)

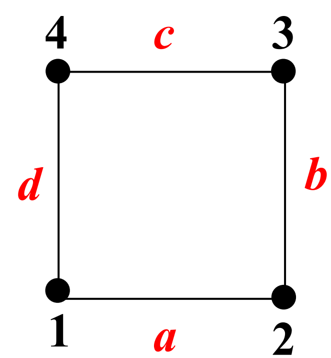


$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$



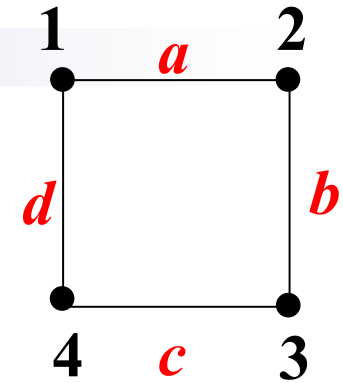


$$\tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



例：考虑如右图所示正方形Ω：

顶点1, 2, 3, 4，边 *a*, *b*, *c*, *d*。



作用在角点上的两类对称：

(1) 4个平面对称：

$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\quad \rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\quad \rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\quad \rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

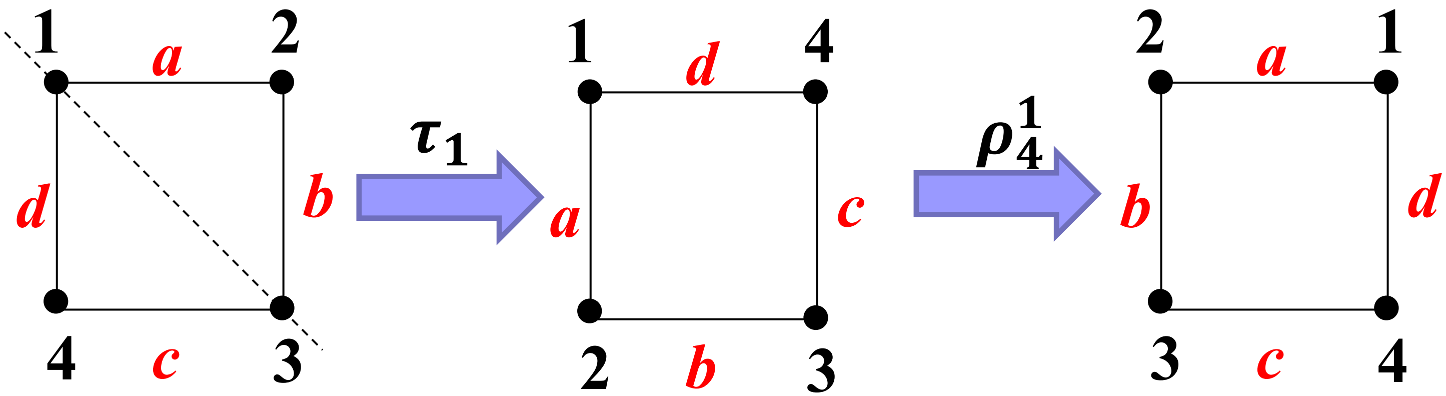
(2) 4个反射：

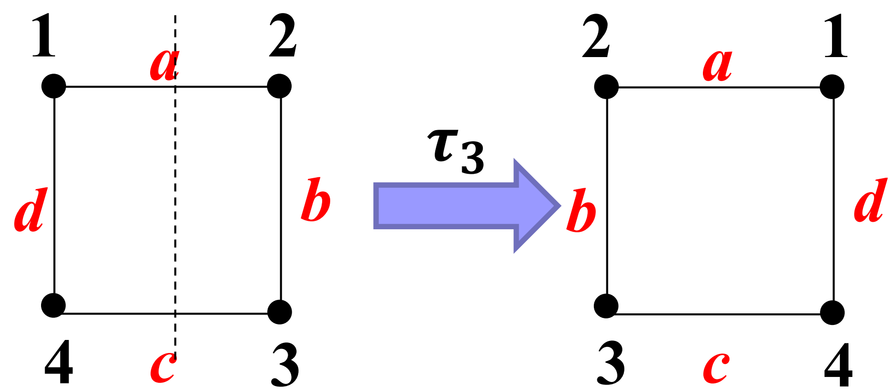
$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\quad \tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\quad \tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\quad \tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

- 以上8个对称定义了顶点对称群 G_c
  - 封闭性、结合律、存在单位元和逆元
- $G_c=\{\rho_4^0=\iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$称为Ω的顶点对称群。

Ω的顶点对称群： $G_c=\{\rho_4^0=\iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$

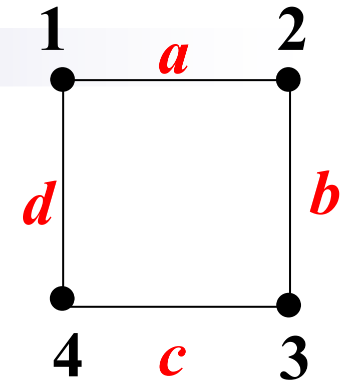
- 可验证：$\tau_3=\rho_4^1\circ\tau_1$， $\tau_2=\rho_4^2\circ\tau_1$， $\tau_4=\rho_4^3\circ\tau_1$





因此，$G_c=\{\rho_4^0=\iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \rho_4^2\circ\tau_1, \rho_4\circ\tau_1, \rho_4^3\circ\tau_1\}$

■ 正方形的顶点对称群：

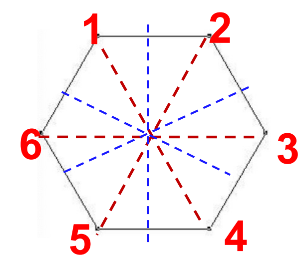


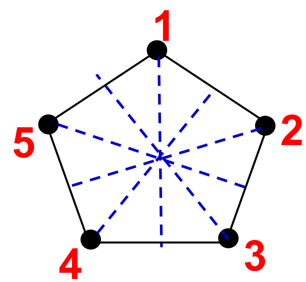
$$G_c = \{ \rho_4^0 = \iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \}$$

例：推广至任意正 n 角形对称群 ($n \geq 3$)

(1) n个旋转： $\rho_n^0 = \iota, \rho_n, \rho_n^2, \ldots, \rho_n^{n-1}$

(2) n个反射： $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$





- n为偶数： $\frac{n}{2}$个关于对角点的反射

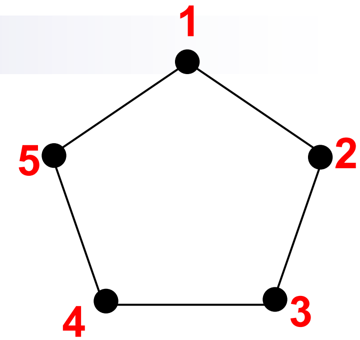
  $\frac{n}{2}$个关于对边中点连线的反射
- n为奇数： n个关于角点与其对边中点的连线的反射

所以，关于{1, 2, …, n}的$2n$个置换形成的群：

$$D_n = \{\rho_4^0 = \iota, \rho_n^1, \rho_n^2, \ldots, \rho_n^{n-1}, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$$

是一个阶为 $2n$ 的二面体群的一个实例。

例（10阶二面体群）：考虑顶点标以1，2，3，4，5的正五角形。



它的（角点）对称群 D_5 包含5个旋转和5个反射。

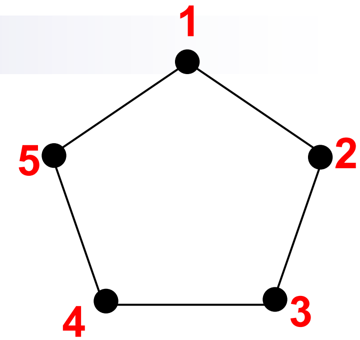
- 5个旋转：

$$\rho_5^0 = \iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \rho_5^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\rho_5^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_5^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

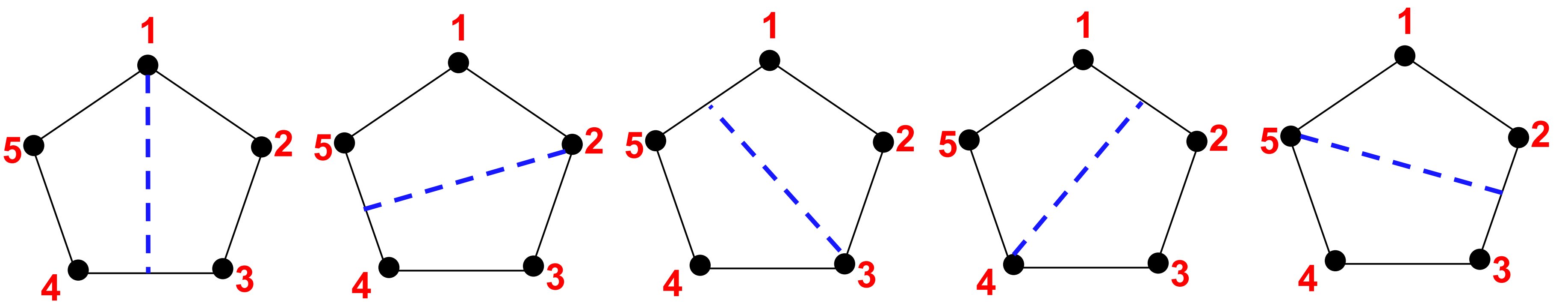
$$\rho_5^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

例（10阶二面体群）：考虑顶点标以1，2，3，4，5的正五角形。



它的（角点）对称群 D_5 包含5个旋转和5个反射。

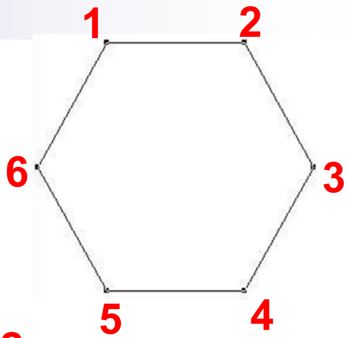
- **5个反射** (5为奇数：5个关于角点与其对边中点的连线的反射)



$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&5&4&3&2\end{pmatrix}\quad \tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&5&4\end{pmatrix}\quad \tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

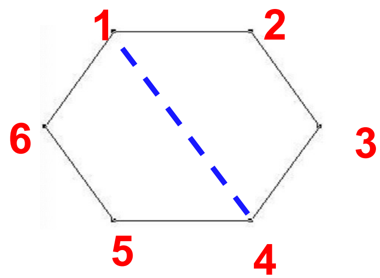
$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&5&4&3\end{pmatrix}\quad \tau_5=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&2&1&5\end{pmatrix}$$

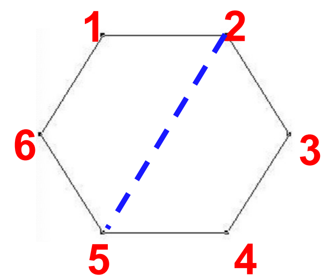
例：12阶二面体群：考虑顶点标以1，2，3，4，5，6的正六角形。

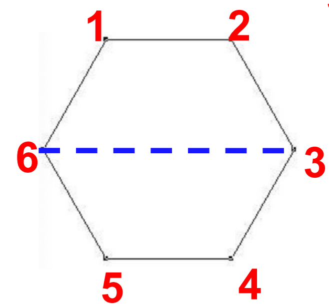


它的（角点）对称群 D_5 包含6个旋转和6个反射。

- 6个反射：3个关于对角点的反射

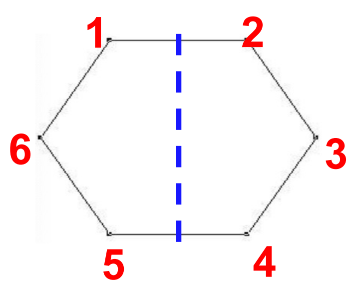


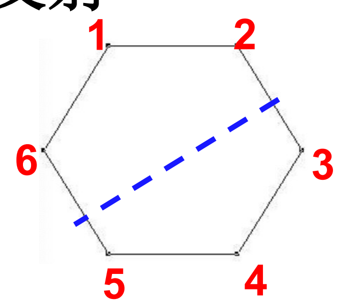


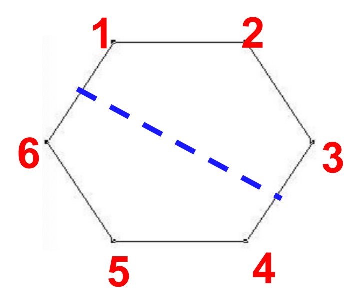


$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 1\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 3\ 2\ 1\ 6\ 5\ 4 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 6 \end{pmatrix}$$

3个关于对边中点连线的反射



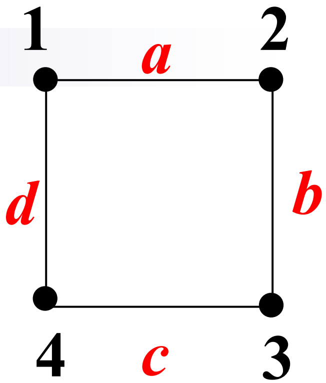




$$\tau_4 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 2\ 1\ 6\ 5\ 4\ 3 \end{pmatrix} \quad \tau_5 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 4\ 3\ 2\ 1\ 6\ 5 \end{pmatrix} \quad \tau_6 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1 \end{pmatrix}$$

例：考虑如右图所示正方形Ω：

顶点1, 2, 3, 4，边 *a*, *b*, *c*, *d*。



作用在边上的两类对称：

(1) 4个平面对称：

$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$

$$\rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$$

$$\rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$$

$$\rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&b&c&d\end{pmatrix}$$

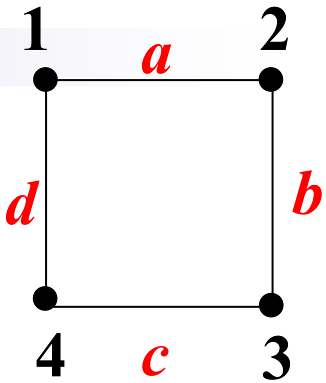
$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&c&d&a\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&d&a&b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&a&b&c\end{pmatrix}$$

例：考虑如右图所示正方形Ω：

顶点1, 2, 3, 4，边 *a*, *b*, *c*, *d*。



作用在边上的两类对称：

(2) 4个反射：

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&c&b&a\end{pmatrix}$$

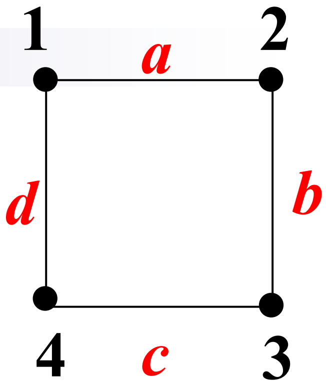
$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&d&c&b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&b&a&d\end{pmatrix}$$

例：考虑如右图所示正方形Ω：

顶点1, 2, 3, 4，边 a, b, c, d。



作用在边上的两类对称：

(1) 4个平面对称：

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$$

(2) 4个反射：

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & a & d \end{pmatrix}$$

- 以上8个置换关于合成构成了一个转换群，称为Ω的边对称群，记为 G_E 。

小结

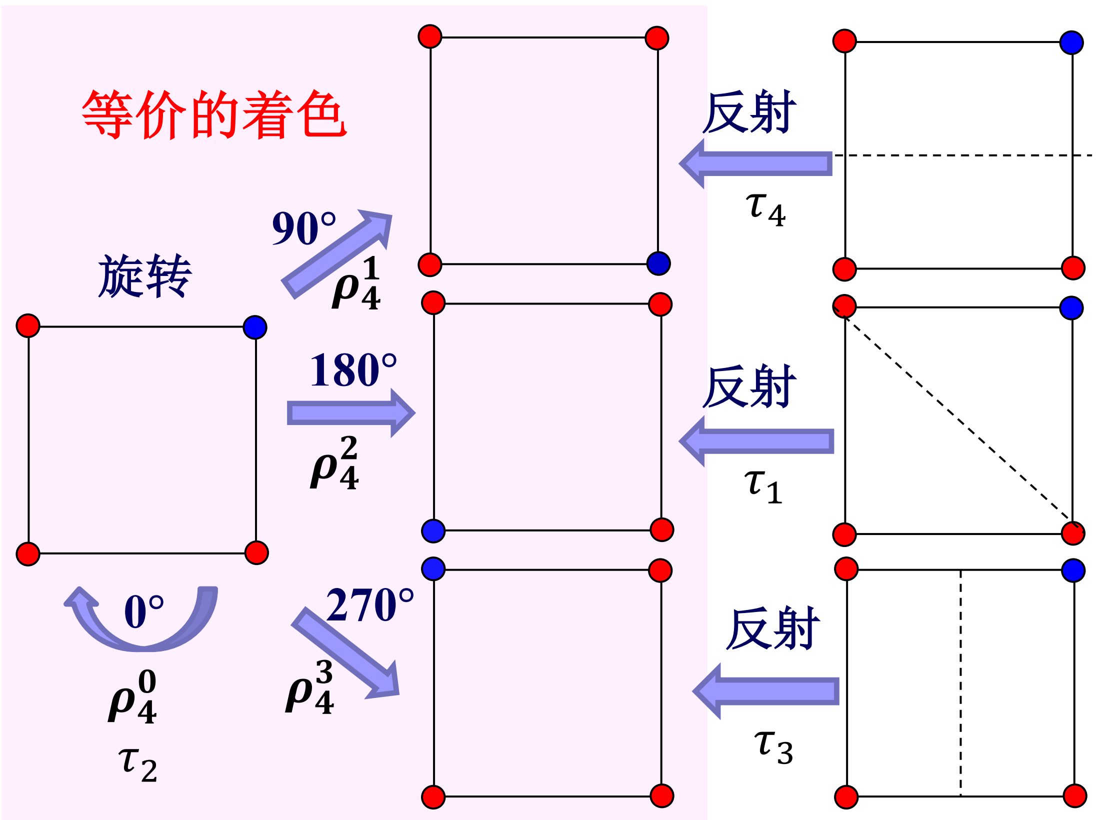
- 几何图形的对称构成的置换群
- 正 n 角形角点对称群
  - n个旋转、n个反射
  - n 分奇偶

置换群与着色

例：用红、蓝两种颜色给正方形的顶点着色，有多少种着色方法?

(1) 位置固定：2^4=16种

(2) 位置不固定：6种（依据每种颜色的顶点个数判断）



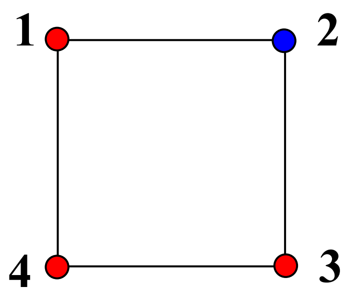
- “不同”着色实际是等价的
- 一个着色可由一个对称（即置换）得到与其等价的另一个着色

Ω的顶点对称群：

$$G_c = \{ \rho_4^0 = \iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \}$$

假设集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$， 及 X 的置换群 G，

- X的一种着色 c 是对 X 的每一个元素指定一种颜色的方案
- 令 c 表示 X 的一种着色，$c(i)$ 表示 i 的颜色 $(i=1, 2, \ldots, n)$



$c(1)$= “红色”
$c(2)$= “蓝色”
$c(3)$= “红色”
$c(4)$= “红色”

假设集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$， 及 X 的置换群 G，

- X的一种着色 c 是对 X 的每一个元素指定一种颜色的方案
- 令 c 表示 X 的一种着色，$c(i)$ 表示 i 的颜色 $(i=1, 2, \ldots, n)$

令 C 表示 X 的所有着色的集合。

要求 G 按以下方法把 C 中一种着色对应到 C 中另一种着色：

令 $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & k & & n \\ i_1 & i_2 \ldots & i_k & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 是 G 中的一个置换，

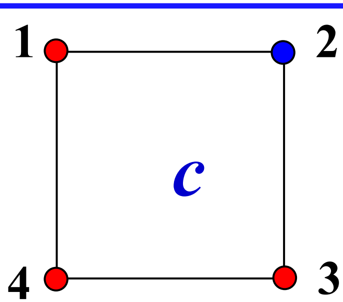
定义 $f*c$ 是使 i_k 具有颜色 $c(k)$ 的着色，

$$k \xrightarrow{f} i_k \xrightarrow{c} c(i_k) = c(k),\ k\in X$$

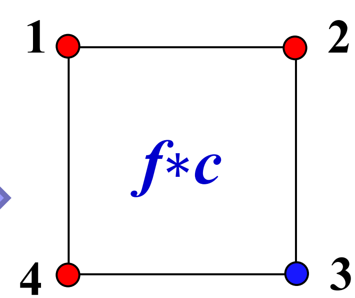
即 $(f*c)(i_k) = c(k)$，$(k=1, 2, \ldots, n)$ (1)

即：f 将 k 变 到 i_k, 则 k的颜色$c(k)$ 移到 $f(k)=i_k$ 并且成为 i_k 的颜色。

$c(1)=$ R
$c(2)=$ B
$c(3)=$ R
$c(4)=$ R



$$\rho_4^1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}*c$$



$f*c(1)=$ R
$f*c(2)=$ R
$f*c(3)=$ B
$f*c(4)=$ R

假设集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$， 及 X 的置换群 G，

- X的一种着色 c 是对 X 的每一个元素指定一种颜色的方案
- 令 c 表示 X 的一种着色，$c(i)$ 表示 i 的颜色 ($i=1, 2, \ldots, n$)

令 C 表示 X 的所有着色的集合。

要求 G 按以下方法把 C 中一种着色对应到 C 中另一种着色：

令 $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & k & & n \\ i_1 & i_2 \ldots & i_k & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 是 G 中的一个置换，

定义 $f*c$ 是使 i_k 具有颜色 $c(k)$ 的着色， $k \xrightarrow{f} i_k \xrightarrow{c} c(i_k) = c(k),\ k\in X$

即 $(f*c)(i_k) = c(k)$，$(k=1, 2, \ldots, n)$ (1)

即：f 将 k 变 到 i_k, 则 k的颜色$c(k)$ 移到 $f(k)=i_k$ 并且成为 i_k 的颜色。

- 若 $i_k=l$， 式 (1)可写作：

$$(f*c)(l) = c(f^{-1}(l))$$

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix}\in G,\quad c\in C,\ (f*c)(i_k)=c(k),\quad (k=1,2,\dots,n)$$

- 着色集 C 需要具备如下性质：

对于 G 中任意置换 f 和 C 中任意着色 c，$f*c$ 仍属于 C。
即：f 把 C 中的每一个着色移动到 C 中的另一种着色（可以是相同的着色）

例如：令 C 是相对于给定的颜色集，对集合 X 的所有着色的集合。

如用红色和蓝色对集合 $X=\{1, 2, \dots, n\}$ 进行着色，则共有 2^n 种着色。

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix}\in G\text{，}\quad c\in C\text{，}\quad (f*c)(i_k)=c(k)\text{，}\quad (k=1,2,\dots,n)$$

- 结论： $(g\circ f)*c=g*(f*c)$

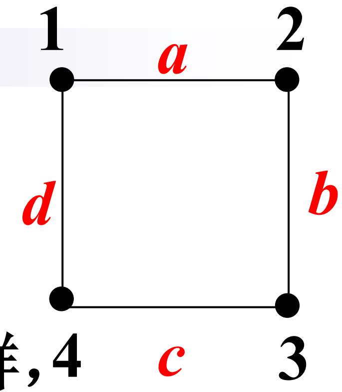
证明：对任意的 $k\in\{1,2,\dots,n\}$，

$(g\circ f)*c(k)$ 是用 k 的颜色对 $(g\circ f)(k)$进行着色，

而 $g*(f*c)\ (k)$ 是用 k 的颜色给$f(k)$进行着色，然后再用 $f(k)$ 的颜色给 $g(f(k))$ 进行着色，即用 k 的颜色给$g(f(k))$ 进行着色。

由合成运算的定义，有 $(g\circ f)(k)=g(f(k))$，

所以， $(g\circ f)*c=g*(f*c)$。



例：用红、蓝两种颜色给右图所示的正方形 Ω 的4个顶点着色。考虑置换群：

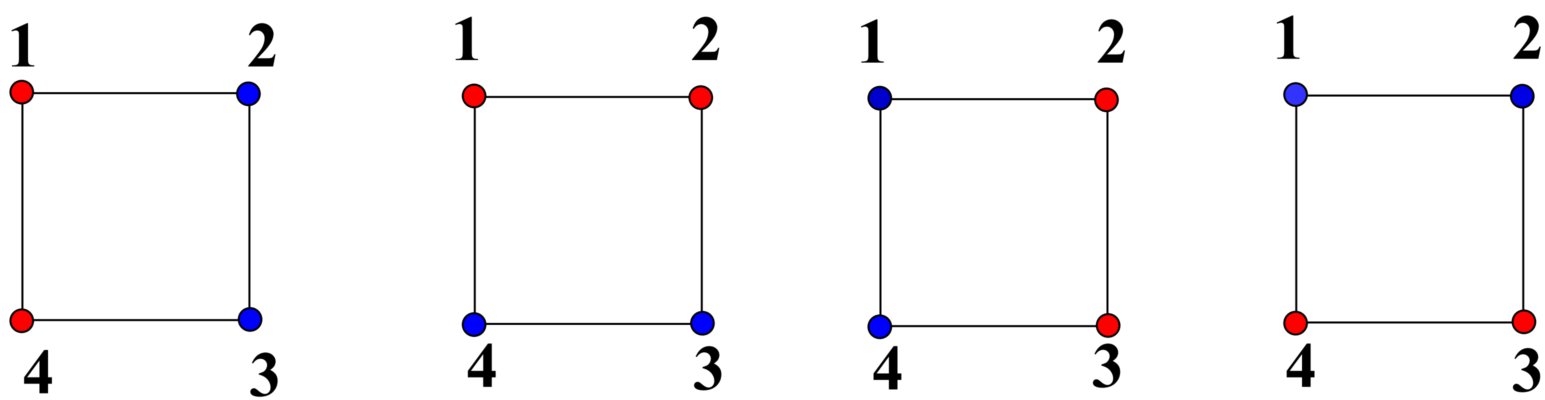
$G_c=\{\ \rho_4^0=\iota,\ \rho_4^1,\ \rho_4^2,\ \rho_4^3,\ \tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\ \}$是Ω的顶点对称群，

C是 Ω的角点1, 2, 3, 4 颜色为红色或蓝色的所有着色的集合，

此时， $|G_C|=8$, $|C|=16$

问题：有多少种“非等价”的着色方法数？

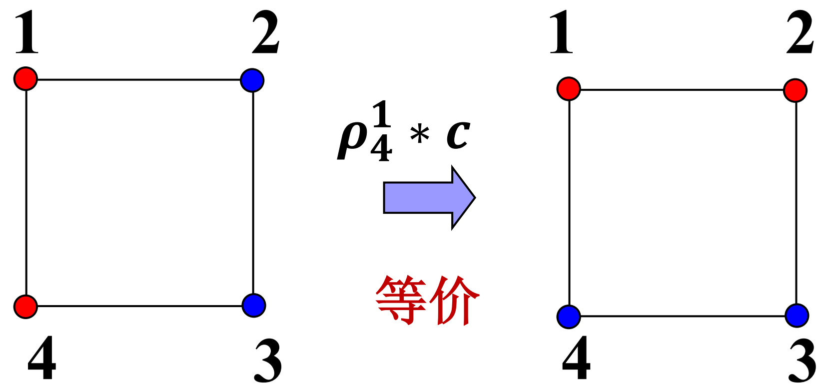
例如：4个“等价”的着色：



$G_C = \{\rho_4^0 = \iota, \rho_4, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$

问题：有多少种“不等价”的着色方法数？

例如：



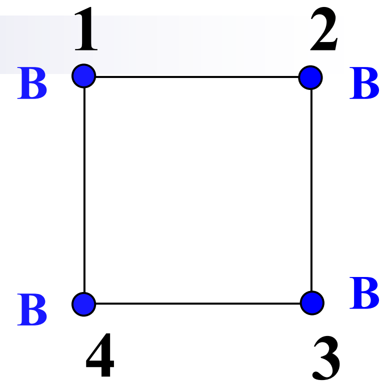
使 i_k 具有颜色 $c(k)$

$$\rho_4^1 = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} k \\ i_k \end{array}$$

c=(R, B, B, R)　　$\rho_4^1 * \mathbf{c} = $ (R, R, B, B)

- 置换不会改变一个着色中各颜色的角点个数。
  - ✓ 正方形中红色的角点个数可以为：0，1，2，3，4
- 两种着色等价的一个必要条件是它们包含相同数目的红色角点和相同数目的蓝色角点。
  - ✓ 但一般情况下不是充分条件

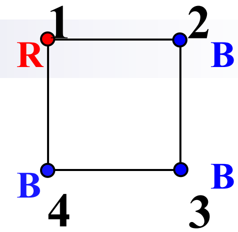
$$G_C = \{\rho_4^0 = \iota, \rho_4, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$$

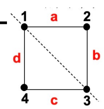
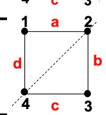
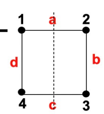
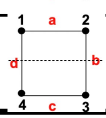


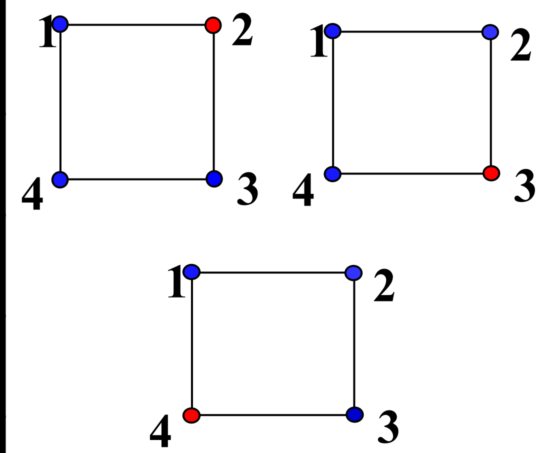
G_C中的置换	作用在着色(B, B, B, B)上的结果
$\rho_4^0 = \iota$	(B, B, B, B)
ρ_4^1	(B, B, B, B)
ρ_4^2	(B, B, B, B)
ρ_4^3	(B, B, B, B)
τ_1	(B, B, B, B)
τ_2	(B, B, B, B)
τ_3	(B, B, B, B)
τ_4	(B, B, B, B)

1种着色，出现8次

$$G_C = \{\rho_4^0 = \iota, \rho_4, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$$

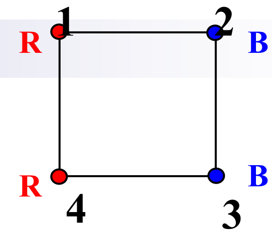


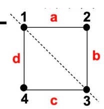
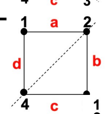
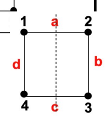
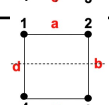
G_C中的置换	作用在着色(R, B, B, B)上的结果
$\rho_4^0 = \iota$	(R, B, B, B)
ρ_4^1	(B, R, B, B)
ρ_4^2	(B, B, R, B)
ρ_4^3	(B, B, B, R)
τ_1 	(R, B, B, B)
τ_2 	(B, B, R, B)
τ_3 	(B, R, B, B)
τ_4 	(B, B, B, R)

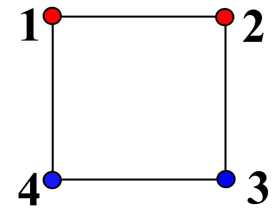


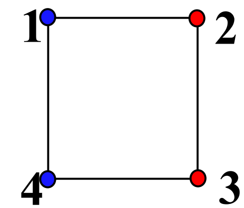
- 4种着色，每种出现2次
- 这4种着色是等价的

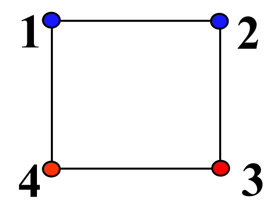
$$G_C = \{\rho_4^0 = \iota, \rho_4, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$$



G_C中的置换	作用在着色（R, B, B, R）上的结果
$\rho_4^0 = \iota$	(R, B, B, R)
ρ_4^1	(R, R, B, B)
ρ_4^2	(B, R, R, B)
ρ_4^3	(B, B, R, R)
τ_1 	(R, R, B, B)
τ_2 	(B, B, R, R)
τ_3 	(B, R, R, B)
τ_4 	(R, B, B, R)

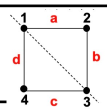
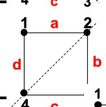
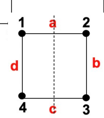
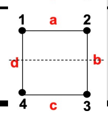


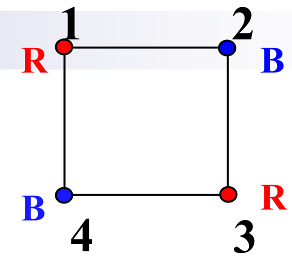


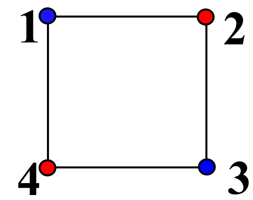


- ✓ 4种着色，每种出现两次
- ✓ 这4种着色是等价的

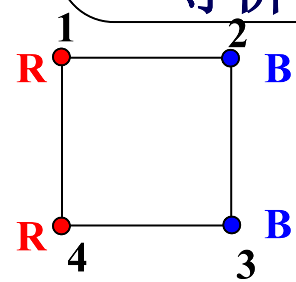
$$G_C = \{\rho_4^0 = \iota, \rho_4, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$$

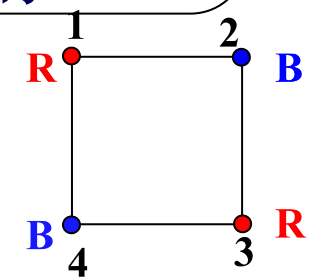
G_C中的置换	作用在着色(R, B, R, B)上的结果
$\rho_4^0 = \iota$	(R, B, R, B)
ρ_4^1	(B, R, B, R)
ρ_4^2	(R, B, R, B)
ρ_4^3	(B, R, B, R)
τ_1 	(R, B, R, B)
τ_2 	(R, B, R, B)
τ_3 	(B, R, B, R)
τ_4 	(B, R, B, R)





- ✓ 2种着色，每种出现四次
- ✓ 这2种着色是等价的

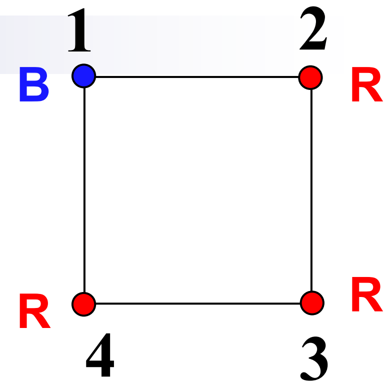


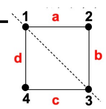
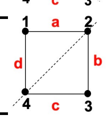
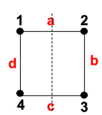
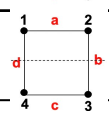


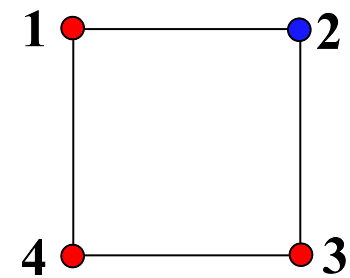
是否等价？

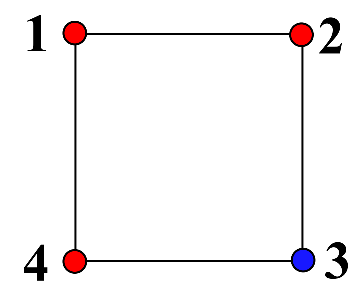
不等价：不存在G_C中的置换使得其中一个变为另一个

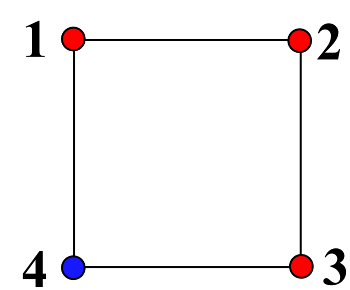
$$G_C=\{\rho_4^0=\iota,\rho_4,\rho_4^2,\rho_4^3,\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\}$$



G_C中的置换	作用在着色(B, R, R, R)上的结果
$\rho_4^0=\iota$	(B, R, R, R)
ρ_4^1	(R, B, R, R)
ρ_4^2	(R, R, B, R)
ρ_4^3	(R, R, R, B)
τ_1 	(B, R, R, R)
τ_2 	(R, R, R, B)
τ_3 	(R, B, R, R)
τ_4 	(R, R, R, B)

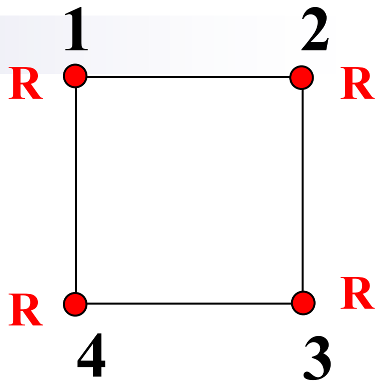






- ✓ 4种着色，每种出现2次
- ✓ 这4种着色是等价的

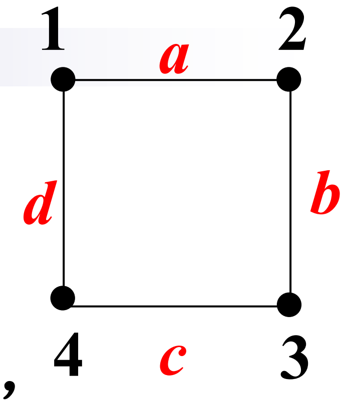
$$G_C = \{\rho_4^0 = \iota, \rho_4, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$$



G_C中的置换	作用在着色(R, R, R, R)上的结果
$\rho_4^0=\iota$	(R, R, R, R)
ρ_4^1	(R, R, R, R)
ρ_4^2	(R, R, R, R)
ρ_4^3	(R, R, R, R)
τ_1	(R, R, R, R)
τ_2	(R, R, R, R)
τ_3	(R, R, R, R)
τ_4	(R, R, R, R)

✓ 1种着色，出现8次

例：用红、蓝两种颜色给右图所示的正方形 Ω 的4个顶点着色。已知：



$G_c=\{\rho_4^0=\iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$是Ω的顶点对称群，

C是 Ω的角点1, 2, 3, 4 颜色为红色或蓝色的所有着色的集合，

此时， $|G_C|=8$, $|C|=16$

在G_c作用下，用两种颜色对Ω进行着色，非等价的着色方法共有 6 种：

红色顶点数	0	1	2		3	4	总数
非等价着色方法数	1	1	2		1	1	6
代表的着色方法数	1	4	4	2	4	1	16

等价类

着色等价关系

令 G 是作用在集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$上的一个置换群，

C 为 X 的一个着色集合，使得对于 G 中的任意置换 f 和 C 中任意着色 c，X 的着色 $f*c$ 仍属于C。

- 定义 C 中的关系 ～：设 c_1 与 c_2 是 C 中的任意两种着色，
  - ✓如果存在G中的一个置换 f，使得 $f*c_1 = c_2$，则称 c_1 等价于 c_2，记为$c_1 \sim c_2$，反之
  - ✓如果在 G中不存在置换使得它们相等，则称 c_1与c_2不等价
- 关系～ 满足：
  - ✓ 自反性：对于任意c，$c \sim c$。
  - ✓ 对称性：如果$c_1 \sim c_2$，则$c_2 \sim c_1$。
  - ✓ 传递性：如果$c_1 \sim c_2$， $c_2 \sim c_3$，则$c_1 \sim c_3$。

～是C上的等价关系

着色等价关系

令 G 是作用在集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$上的一个置换群，C 为 X 的一个着色集合，使得对于 G 中的任意置换 f 和 C 中任意着色 c，X 的着色 $f*c$ 仍属于C。

- 定义 C 中的关系 ～：设 c_1 与 c_2 是 C 中的任意两种着色，
  - ✓如果存在G中的一个置换 f，使得 $f*c_1 = c_2$，则称 c_1 等价于 c_2，记为$c_1 \sim c_2$，反之
  - ✓如果在 G中不存在置换使得它们相等，则称 c_1与c_2不等价
- ～是 C 上的等价关系
  - ✓ C 关于～的每个等价类是 C 的一个由等价着色构成的子集。

等价类：与 c 等价的着色集合
$\{f*c \mid f\in G\}$

问题：如何计算非等价的着色数？

Burnside定理、Polya计算公式

回顾：置换

- 设 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$，X 的每个置换 $i_1, i_2, \ldots, i_n$ 可视为 X 到其自身的双射， 其中，

$$f(1) = i_1, f(2) = i_2, \ldots , f(n) = i_n。$$

可以用如下 $2\times n$ 阵列来表示置换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

- $X=\{1, 2, \ldots, n\}$的 $n!$ 个置换的集合S_n关于合成运算构成一个置换群，称为 n 的对称群。

回顾：几何图形的对称

- 对称：设Ω是一个几何图形，Ω到它自身的一个(几何)运动或全等称为Ω的一个对称。
- 考虑的几何图形是由角点（顶点）、边、及三维情形下的面（或侧面）所构成
  - ✓ 如正方形、四面体、立方体等
- 对称构成置换群，称为Ω的对称群
  - ✓ 顶点对称群：Ω的角点上的置换群G_C
  - ✓ 边对称群：Ω的边上的置换群G_E
  - ✓ 面对称群：Ω是三维情形下的面上的置换群G_F

第十四章Pólya计数

4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

Burnside定理

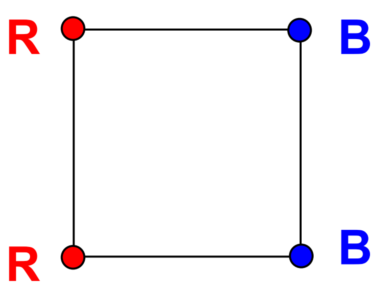
- 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且 G 作用在C上，满足：对于 G 中任意置换 f 与 C 中任意着色 c， $f*c \in C$

- 在集合X 的置换群G的作用下，计算 X 的非等价着色数的Burnside公式

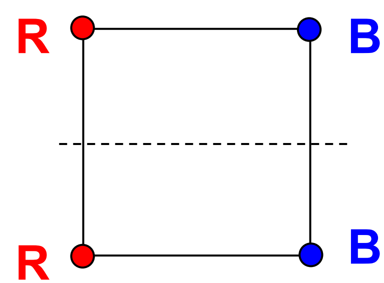
稳定核与不变着色集

- 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且 G 作用在 C 上，满足：对于 G 中任意置换 f 与 C 中任意着色 c，$f*c \in C$

例：



ι 保持了原着色。



τ_4保持了原着色。

保持原着色的置换构成该着色的稳定核。

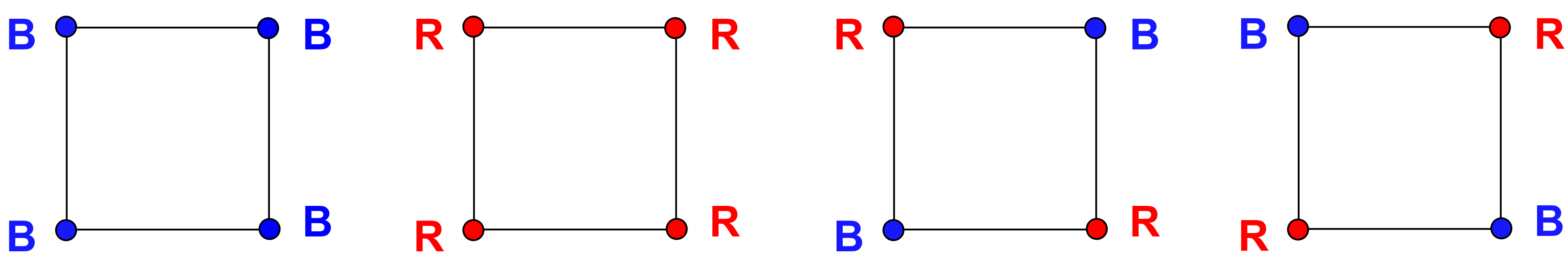
稳定核与不变着色集

- 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且 G 作用在C上，满足：对于 G 中任意置换 f 与 C 中任意着色 c，$f*c \in C$

例：

$$\rho_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

以下 4种着色在ρ_4^2作用下保持不变



在一个置换作用下保持不变的着色构成该置换的不变着色集。

稳定核与不变着色集

设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且G作用在C上。

- 使着色 c 保持不变的G中所有置换的集合

$$G(c) = \{ f \mid f \in G, f * c = c \},\ c \in C$$

$G(c) \subseteq G$

称为 c 的稳定核。

结论：任何着色 c 的稳定核也形成一个置换群。

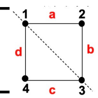
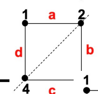
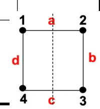
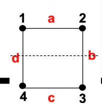
- 在置换 f 作用下保持不变的C中所有着色的集合：

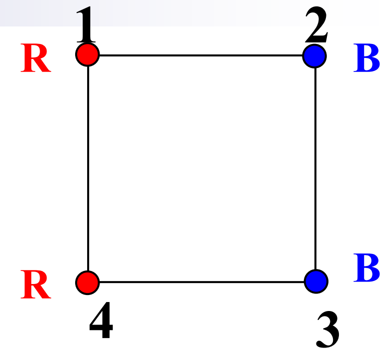
$C(f) \subseteq C$

$$C(f) = \{ c \mid c \in C, f * c = c \}, f \in G$$

称为 f 的不变着色集。

例：

G_C中的置换	作用在着色 $c=(R, B, B, R)$ 上的结果
$\rho_4^0=\iota$	$\boxed{(R, B, B, R)}$
ρ_4^1	(R, R, B, B)
ρ_4^2	(B, R, R, B)
ρ_4^3	(B, B, R, R)
τ_1 	(R, R, B, B)
τ_2 	(B, B, R, R)
τ_3 	(B, R, R, B)
τ_4 	$\boxed{(R, B, B, R)}$



着色 $c=(R, B, B, R)$ 的稳定核 $G(c)=\{\rho_4^0=\iota, \tau_4\}$。

注意到：(1) $\iota\circ\tau_4=\tau_4\circ\iota=\tau_4$， $\tau_4\circ\tau_4=\iota$ (合成运算封闭性)

(2) $\iota\in G(c)$ (单位元)

(3) $\tau_4^{-1}=\tau_4$ (逆元封闭性)

(4) 显然有结合律

因此，$G(c)$是置换群。

定理14.2.1 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且G作用在C上。

$$G(c) = \{ f \mid f \in G, f*c = c \}$$

(1) 对C中任意着色c，c的稳定核 $G(c)$ 是一个置换群，且

(2) 对G中任意置换 f 与 g，$g*c = f*c$ 当且仅当 $f^{-1} \circ g \in G(c)$。

证明：(1) 置换群的四个条件：合成运算的封闭性，满足结合律，单位元和逆元运算的封闭性。

(a)设$f, g \in G(c)$，则$(g \circ f)*c = g*(f*c) = g*c = c$，所以$g \circ f \in G(c)$，即在合成运算下，$G(c)$具有封闭性。

(b)由于置换的合成满足结合律，因此，$G(c)$关于合成满足结合律。

(c)恒等置换 ι 必属于$G(c)$，使所有着色不变，为单位元。

(d) 设$f \in G(c)$，有$f*c = c$，则 $f^{-1} * c = f^{-1} * f(c) = (f^{-1} \circ f)(c) = \iota(c) = c$，得$f^{-1} \in G(c)$，

因此，$G(c)$对逆元具有封闭性。

综上，$G(c)$是一个置换群。

定理14.2.1 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且G作用在C上。

$$G(c) = \{ f \mid f \in G, f*c = c \}$$

(1) 对C中任意着色c，c的稳定核 $G(c)$ 是一个置换群，且

(2) 对G中任意置换 f 与 g，$g*c = f*c$ 当且仅当 $f^{-1}\circ g \in G(c)$。

$(f^{-1}\circ g)*c = c$

证明：(2) ($\Rightarrow$) 如果 $g*c = f*c$，则

$(f^{-1}\circ g)*c = f^{-1}*(g*c) = f^{-1}*(f*c) = (f^{-1}\circ f)*c = \iota*c = c$。

所以 $f^{-1}\circ g$ 使 c 不变，因此，$f^{-1}\circ g \in G(c)$。

($\Leftarrow$) 如果 $f^{-1}\circ g \in G(c)$，则$(f^{-1}\circ g)*c = c$，

所以 $g*c = ((f\circ f^{-1})\circ g)*c = (f\circ(f^{-1}\circ g))*c = f*((f^{-1}\circ g)*c) = f*c$。

定理14.2.1 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且G作用在C上。

$$G(c) = \{ f \mid f \in G, f*c = c \}$$

(1) 对C中任意着色c，c的稳定核 $G(c)$ 是一个置换群，且

(2) 对G中任意置换 f 与 g，$g*c = f*c$ 当且仅当 $f^{-1} \circ g \in G(c)$。

问题：如何求在置换群 G 作用下的与 c 等价的着色数 ？

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数 $|\{f*c \mid f \in G\}|$ 等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数，

即 $|\{f*c \mid f \in G\}| = \dfrac{|G|}{|G(c)|}$ 。

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数 $|\{f*c \mid f\in G\}|$ 等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数，

即 $|\{f*c \mid f \in G\}| = \dfrac{|G|}{|G(c)|}$ 。

证明：由定理14.2.1知，

$g*c = f*c \iff (f^{-1}\circ g)*c = c \iff f^{-1}\circ g \in G(c)$

$\iff \exists\, h \in G(c)$, s.t., $f^{-1}\circ g = h$, 即 $g = f\circ h$。

因此，与 f 作用在 c 上有同样效果的置换集合为：

$$\{g \mid g \in G,\ g*c=f*c\} \subseteq \{f\circ h \mid h\in G(c)\}。$$

对任意 $f\circ h$, 其中$h\in G(c)$， 由于

$$(f\circ h)*c = f*(h*c) = f*c，$$

得 $f\circ h\in \{g \mid g \in G,\ g*c=f*c\}$。

因此，有$\{g \mid g \in G,\ g*c=f*c\} = \{f\circ h \mid h\in G(c)\}$。

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数 $|\{f*c \mid f\in G\}|$ 等于 G 的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数，

即 $|\{f*c \mid f \in G\}| = \frac{|G|}{|G(c)|}$ 。

证明（续）：因此，有 $\{g \mid g\in G,\ g*c=f*c\} = \{f\circ h \mid h\in G(c)\}$。

对任意的 $h, h' \in G(c)$，若 $f\circ h= f\circ h'$ ，由消去律知 $h= h'$ ，

得 $|\{f\circ h \mid h\in G(c)\}| = |G(c)|$。

因此，$|\{g \mid g \in G,\ g*c=f*c\}| = |\{f\circ h \mid h\in G(c)\}| = |G(c)|$。

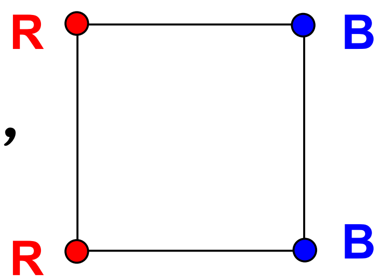
从而，对于每个置换 f，恰好存在 $|G(c)|$ 个置换，这些置换作用在 c 上与 f 有同样的效果。

而总共有 $|G|$ 个置换，所以，与 c 等价的着色数为

$$|\{f*c \mid f \in G\}| = \frac{|G|}{|G(c)|}\text{。}$$

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数 $|\{f*c \mid f\in G\}|$ 等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数，即 $|\{f*c \mid f \in G\}| = \frac{|G|}{|G(c)|}$ 。

例：与 c_1=(R, B, B, R)等价的着色：



(R, B, B, R)、(R, R, B, B)、(B, R, R, B)、(B, B, R, R)，即等价数目为4。

$G_c=\{ \rho_4^0= \iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4 \}$

$G_c(c_1) = \{\iota , \tau_4\}$

在G_c作用下，与c_1等价等价的着色数为

$$\frac{|G_c|}{G_c(c_1)} = \frac{8}{2} = 4$$

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中

$$C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}$$

- 设 $G=\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$，则 $N(G, C) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|C(f_i)|$。

证明思想：（组合证明）采用两种不同方式进行计数，然后使计数相等。

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f * c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f \in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中

$$C(f) = \{ c \mid c \in C, f*c = c \}$$

证明：计数使 f 保持c不变（即$f * c=c$）的对偶 (f, c)的个数。

存在两种计数方式：

- f 是保持 c 不变的置换
- c 是在置换f 作业下保持不变的着色

$$f * c = c \iff c \in C(f) \iff f \in G(c)$$

$$\left|\sum_{f \in G, c \in C(f)}(f, c)\right| = \left|\sum_{c \in C, f \in G(c)}(f, c)\right|$$

$$\sum_{f \in G}|C(f)| \qquad\qquad \sum_{c \in C}|G(c)|$$

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f * c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中

$$C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}$$

证明：计数使 f 保持c不变（即$f * c=c$）的对偶 (f, c)的个数。存在两种计数方式：

(1)方式1：考察G中每个 f，计算 f 保持不变的着色数，然后相加，得对偶数为 $\sum_{f\in G}|C(f)|$。

(2)方式2：考察C中的每个c，计算满足$f*c=c$的置换数，然后相加所有的量，得对偶数为 $\sum_{c\in C}|G(c)|$。

则有 $\sum_{f\in G}|C(f)| = \sum_{c\in C}|G(c)|$。

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中

$$C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}$$

证明：由推论14.2.2得 $|G(c)| = \dfrac{|G|}{|\{f*c \mid f \in G\}|}$，

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数 $|\{f*c \mid f\in G\}|$ 等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数，

即 $|\{f*c \mid f \in G\}| = \dfrac{|G|}{|G(c)|}$。

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中

$$C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}$$

证明：由推论14.2.2得 $|G(c)| = \dfrac{|G|}{|\{f*c \mid f \in G\}|}$，

因此，$\sum_{c\in C}|G(c)| = |G| \sum_{c\in C}\dfrac{1}{|\{f*c \mid f \in G\}|}$。

证明：（续）因此，$\sum_{c\in C}|G(c)| = |G|\sum_{c\in C}\frac{1}{|\{f*c \mid f\in G\}|}$

由于非等价着色数 $N(G, C)$等于等价着色构成的等价类个数，

令 $C_1, \ldots, C_{N(G, C)}$ 为 C 的所有等价类，

假设C_i的代表元为c_i，$i = 1, 2, \ldots, N(G, C)$ 。

则有 $\sum_{c\in C}\frac{1}{|\{f*c \mid f\in G\}|} = \sum_{i=1}^{N(G,C)}\sum_{c\in C_i}\frac{1}{|\{f*c_i \mid f\in G\}|}$ 。

$$= \sum_{i=1}^{N(G,C)}\sum_{c\in C_i}\frac{1}{|C_i|}$$

$$= \sum_{i=1}^{N(G,C)} 1 = N(G, C)$$

即 $\sum_{c\in C}|G(c)| = |G|\times N(G, C)$ ，得

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{c\in C}|G(c)| = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|。$$

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中

$$C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}$$

- 计数非等价的着色数$N(G, C)$的步骤：
  1. 确定置换群G;
  2. 确定着色集C;
  3. 计数G中每个置换的不变着色集（或每个着色的稳定核）的大小;
  4. 使用Burnside公式 $N(G, C) = \frac{\sum_{f\in G}|C(f)|}{|G|} = \frac{\sum_{c\in C}|G(c)|}{|G|}$

例：用红、蓝两种颜色给一个正方形的4个顶点着色，试问存在多少种不同的着色方法数。

解：正方形的顶点对称群为D_4={ ρ_4^0= ι, ρ_4^1, ρ_4^2, ρ_4^3, τ_1,τ_2,τ_3, τ_4 }

正方形的角点的着色集为C={(c_1, c_2, c_3, c_4)|c_i∈{**R**, **B**},1≤ i ≤ 4}，

因此，|C|=16。

(1) 单位元ι 使所有着色保持不变，即$C(\iota)$= C，得|$C(\iota)$|=16。

(2) 旋转ρ_4和ρ_4^3各自保持 2 种着色，即所有顶点为红色和所有顶点为蓝色的着色不变，因此$C(\rho_4)$={(R, R, R, R), (B, B, B, B)}，

$C(\rho_4^3)$ ={(R, R, R, R), (B, B, B, B)}，得|$C(\rho_4)$|=|$C(\rho_4^3)$|=2。

(3) 旋转ρ_4^2保持4种着色，即所有顶点为相同颜色以及红和蓝间隔出现的着色不变，因此$C(\rho_4^2)$ ={(R, R, R, R),(B, B, B, B), (R, B, R, B),(B, R, B,R)}，得 |$C(\rho_4^2)$ |=4。

(4) 为了使在反射τ_1作用下着色保持不变，顶点1和3可以选择任何颜色，顶点2和4必须具有相同颜色。

所以，在τ_1的作用下保持着色不变的方法：对顶点1选择一种颜色（2种选择），对顶点3选择一种颜色（2种选择），对顶点2和4选择一种颜色（2种选择）。

所以，在τ_1的作用下保持着色不变的着色数是$|C(\tau_1)|=2\times2\times2=8$。即

$$C(\tau_1)=\{ (R,R,R,R),(R,R,B,R),(B,R,R,R),(B,R,B,R), (R,B,R,B),(R,B,B,B),(B,B,R,B),(B,B,B,B) \}$$

(5) 类似地，在τ_2的作用下保持着色不变的着色数是$|C(\tau_2)|= 2\times2\times2=8$。即

$$C(\tau_2)=\{(R,R,R,B),(R,R,R,B),(R,B,R,R),(R,B,R,B) (B,R,B,B),(B,R,B,B),(B,B,B,R),(B,B,B,B)\}$$

(6) 为了使在反射τ_3作用下着色保持不变，顶点1和2必须具有相同颜色，顶点3和4必须具有相同颜色。

所以，在τ_3的作用下保持着色不变的方法：对顶点1和2选择一种颜色（2种选择），对顶点3和4选择一种颜色（2种选择）。

因此，在τ_3的作用下保持着色不变的着色数是$|C(\tau_3)|= 2\times2=4$。

即$C(\tau_3)=\{(R, R, R, R), (R, R, B, B), (B, B, R, R), (B, B, B, B\}$。

(7) 类似地，在τ_4的作用下保持着色不变的着色数是

$|C(\tau_4)|= 2\times2=4$。即

$C(\tau_4)=\{(R, B, B, R), (R, R, R, R), (B, R, R, B), (B, B, B, B)\}$

根据Burnside定理，总的着色方法数为：

$$N(D_4, C)=\frac{1}{8}(16+2+4+2+8+8+4+4)=6$$

例：(循环排列计数) 把n个不同的对象放在一个圆上，有多少种放法？ $(n-1)!$

解：相当于用n种不同的颜色对正n角形 Ω 的顶点进行着色，此时，放法数为 Ω的循环群的非等价着色数。

令C 是对 Ω 的n个顶点进行着色且每种颜色只出现一次的所有$n!$种方法所组成的集合，则作用在C上的循环群为

$$G=\{\rho_n^0, \rho_n^1, \ldots, \rho_n^{n-1}\}。$$

显然，G 的恒等变换ρ_n^0保持 C中所有$n!$种着色不变，即 $c(\rho_n^0)=n!$。

因为在C的着色中，每个顶点有不同的颜色，因此且C中其他置换都不保持 C中的任意着色不变，即$c(\rho_n^i)=0$，$i=1,\ldots,n-1$。

由定理14.2.3得非等价着色数为：

$$N(G, C) = \frac{1}{n}(n!+0+\ldots+0) = (n-1)!$$

例（项链计数问题）用$n\geq 3$种不同颜色的珠子组成一条项链，问有多少种方法?

解：相当于用n种不同的颜色对正n角形 Ω 的顶点进行着色，此时，放法数为 Ω的正n角形的顶点对称群的非等价着色数。

令C 是对 Ω 的n个顶点进行着色且每种颜色只出现一次的所有$n!$种方法所组成的集合，则作用在C上的顶点对称群为$2n$阶的二面体群$D_n=\{\rho_n^0, \rho_n^1, \ldots, \rho_n^{n-1}, \tau_1, \ldots, \tau_n\}$。

显然，D_n的恒等变换保持 C中所有$n!$种着色不变，即$c(\rho_n^0)=n!$

因为在C的着色中，每个顶点有不同的颜色，因此且D_n中其他置换都不保持 C中的任意着色不变，即$c(\rho_n^i)=0$，$i=1,\ldots, n-1$，$c(\tau_j)=0$，$j=1,\ldots, n$。

由定理14.2.3得非等价着色数为：$N(G,C)=\frac{1}{2n}(n!+0+\ldots+0)$

$$=\frac{1}{2}(n-1)!。$$

- 利用Burnside定理计数不等价的着色数的关键：
  1. 确定置换群G；
  2. 确定着色集C；
  3. 计数G中每个置换f的不变着色集$C(f)$的大小。
  4. 使用Burnside公式
- 缺点：第3步的计数过程比较复杂

为了使该计数过程变得更加容易，仅考虑置换的循环结构，并引入有向圈概念。**Pólya定理**

第十四章Pólya计数

4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

回顾

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中

$$C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}$$

- 计数非等价的着色数$N(G, C)$的步骤：
  1. 确定置换群G;
  2. 确定着色集C;
  3. 计数G中每个置换的不变着色集（或每个着色的稳定核）的大小;
  4. 使用Burnside公式 $N(G, C) = \frac{\sum_{f\in G}|C(f)|}{|G|} = \frac{\sum_{c\in C}|G(c)|}{|G|}$

- 利用**Burnside**定理计数不等价的着色数的关键：
  1. 确定置换群G；
  2. 确定着色集C；
  3. 计数G中每个置换f的不变着色集$C(f)$的大小。
  4. 使用**Burnside**公式
- 缺点：第3步的计数过程比较复杂

为了使该计数过程变得更加容易，仅考虑置换的循环结构，并引入有向圈概念。**Pólya**定理

置换循环结构

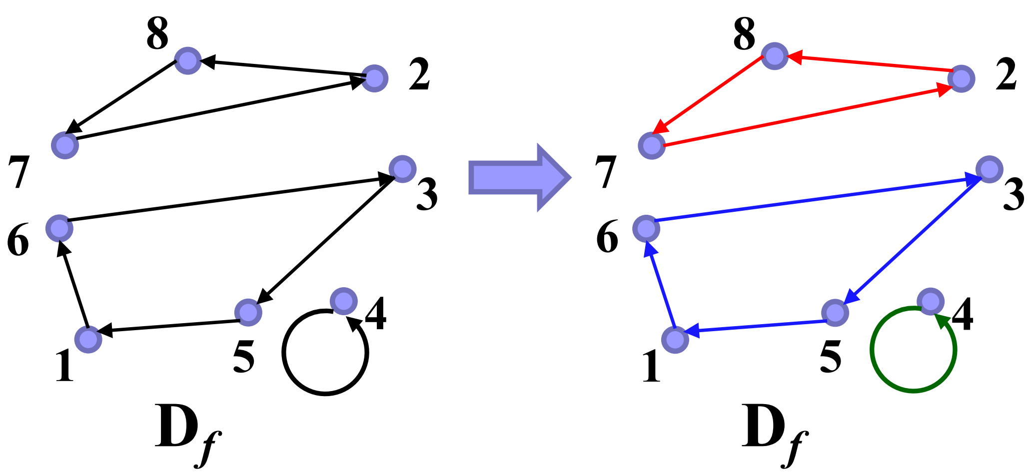
设 f 是 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ 的一个置换，$D_f = (X, A_f)$ 是顶点集为X 且边集为 $A_f = \{ (i, f(i)) \mid i \in X \}$的有向图。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots\cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots\cdots & f(n) \end{pmatrix}$$

- ✓ D_f 有 n 个顶点与 n 条边，
- ✓ 各顶点的入度和出度等于1。

则 弧集 A_f 可以被划分为若干个有向圈，且每个顶点恰好属于一个有向圈。

例：设有$\{1, 2, \ldots, 8\}$的一个置换 $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$



3个有向圈:

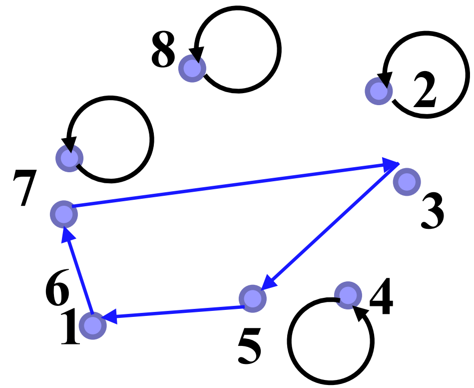
$1 \to 6 \to 3 \to 5 \to 1$

$2 \to 8 \to 7 \to 2$

$4 \to 4$

记对应有向圈 $1 \to 6 \to 3 \to 5 \to 1$的置换记为 **[1 6 3 5]**：

对于{1, 2, …, 8} 上，把1变到6、6变到3、3变到5、5变到1，余下的整数保持不变。



$$[1\quad 6\quad 3\quad 5]=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8\end{pmatrix}$$

对应的有向圈：

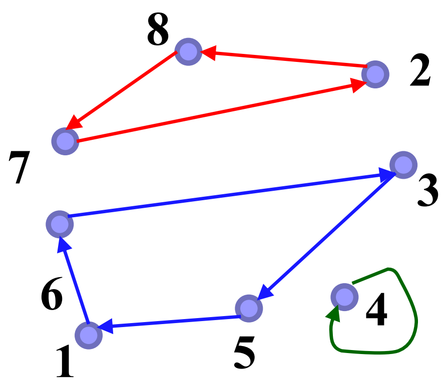
$1 \to 6 \to 3 \to 5 \to 1$，　$2 \to 2$，　$4 \to 4$，　$7 \to 7$，　$8 \to 8$

- **循环置换**：如果在一个置换中，某些元素以循环的方式置换且余下元素（如果有的话）保持不变，那么称这样的置换为循环置换，简称循环。
- 如果循环中的元素个数为 k，则称它为 k 循环。

例如，[1 6 3 5]是一个4 循环，[2 8 7]是一个 3 循环，

[4]是一个 1 循环

例：设有{1, 2, …, 8}的一个置换 $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}$



$\mathbf{D}_f$

$$[1\ 6\ 3\ 5]=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&5&4&1&3&7&8\end{pmatrix}$$

$$[2\ 8\ 7]=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&8&3&4&5&6&2&7\end{pmatrix}$$

$$[4]=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

循环因子分解

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}=[1\ 6\ 3\ 5]\circ[2\ 8\ 7]\circ[4\ ]$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&5&4&1&3&7&8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&8&3&4&5&6&2&7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

循环因子分解

设 f 是集合 X 的任意置换，$D_f=(X, A_f)$ 是顶点集为 X 且边集为 $A_f=\{(i, f(i)) \mid i\in X\}$的有向图，

$$[i_1\ i_2 \dots i_p],\ [j_1\ j_2 \dots j_q],\ \dots,\ [l_1\ l_2 \dots l_r]$$

为 D_f 所对应的有向圈，则 f 可以分解为：

$$f=[i_1\ i_2 \dots i_p]\circ[j_1\ j_2 \dots j_q]\circ \dots \circ[l_1\ l_2 \dots l_r],$$

称为 f 的循环因子分解。

（因为 f 中的每个整数至多属于因子分解中的一个循环）

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}=[1\ 6\ 3\ 5]\circ[2\ 8\ 7]\circ[4]$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&5&4&1&3&7&8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&8&3&4&5&6&2&7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

循环因子分解

设 f 是集合 X 的任意置换，$D_f=(X, A_f)$ 是顶点集为 X 且边集为 $A_f=\{(i, f(i)) \mid i\in X\}$的有向图，

$$[\,i_1\ \ i_2 \ldots i_p\,],\ \ [\,j_1\ j_2 \ldots\ j_q\,],\ \ \ldots,\ \ [\,l_1\ \ l_2 \ldots l_r\,]$$

为 D_f 所对应的有向圈，则 f 可以分解为：

$$f=[i_1\ i_2\ \ldots\ i_p]\circ[j_1\ j_2\ \ldots j_q]\circ\ldots\circ[l_1\ l_2\ \ldots\ l_r],$$

称为 f 的<u>循环因子分解</u>。

（因为 f 中的每个整数至多属于因子分解中的一个循环）

注意：

- ✓ 除了循环出现的次序可以任意变化外，f 的循环因子分解是唯一的。
- ✓ 1 循环就是恒等置换。
- ✓ 在 f 的循环因子分解中，X中的每个元素只出现一次

例：求8阶二面体群D_4(正方形的顶点对称群)中各置换的循环因子分解。

$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$$

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$$

$$\rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=[1\ 2\ 3\ 4]$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$$

$$\rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2\ 4]$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=[1\ 2]\circ[3\ 4]$$

$$\rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=[1\ 4\ 3\ 2]$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=[1\ 4]\circ[2\ 3]$$

例：求8阶二面体群D_4(正方形的角点对称群)中各置换的循环因子分解。

恒等置换：所有的循环是1循环

$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$$

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$$

$$\rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=[1\ 2\ 3\ 4]$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$$

$$\rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2\ 4]$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=[1\ 2]\circ[3\ 4]$$

$$\rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=[1\ 4\ 3\ 2]$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=[1\ 4]\circ[2\ 3]$$

例：求8阶二面体群D_4(正方形的顶点对称群)中各置换的循环因子分解。

$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$$

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$$

正方形对角线的反射：
出现两个 1循环

$$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$$

$$\rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2\ 4]$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=[1\ 2]\circ[3\ 4]$$

$$\rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=[1\ 4\ 3\ 2]$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=[1\ 4]\circ[2\ 3]$$

例：求8阶二面体群D_4(正方形的角点对称群)中各置换的循环因子分解。

$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$$

$$\rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=[1\ 2\ 3\ 4]$$

$$\rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2\ 4]$$

$$\rho_4^3$$

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=[1\ 2]\circ[3\ 4]$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=[1\ 4]\circ[2\ 3]$$

连接对边中点连线的反射：两个 2循环

例：求8阶二面体群D_4(正方形的顶点对称群)中各置换的循环因子分解。

$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$$

$$\rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=[1\ 2\ 3\ 4]$$

$$\rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \end{pmatrix}=[1$$

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}=[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}=[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=[1\ 2]\circ[3\ 4]$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}=[1\ 4]\circ[2\ 3]$$

在一个正n角形（n为偶数）的顶点对称群中，对于反射，

- 有一半有两个1-循环和$\frac{n}{2}-1$个2循环
- 另一半有$\frac{n}{2}$个2循环

例：求10阶二面体群D_5（正5角形的顶点对称群）中各置换的循环因子分解。

D_5	循环因子分解
$\rho_5^0=\iota$	$[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]\circ[5]$
ρ_5^1	$[1\ 2\ 3\ 4\ 5]$
ρ_5^2	$[1\ 3\ 5\ 2\ 4]$
ρ_5^3	$[1\ 4\ 2\ 5\ 3]$
ρ_5^4	$[1\ 5\ 4\ 3\ 2]$
τ_1	$[1]\circ[2\ 5]\circ[3\ 4]$
τ_2	$[1\ 3]\circ[2]\circ[4\ 5]$
τ_3	$[1\ 5]\circ[3]\circ[2\ 4]$
τ_4	$[1\ 2]\circ[3\ 5]\circ[4]$
τ_5	$[1\ 4]\circ[2\ 3]\circ[5]$

例：求10阶二面体群D_5（正5角形的顶点对称群）中各置换的循环因子分解。

D_5	循环因子分解
$\rho_5^0=\iota$	$[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]\circ[5]$
ρ_5^1	$[1\ 2\ 3\ 4\ 5]$
ρ_5^2	$[1\ 3\ 5\ 2\ 4]$
ρ_5^3	$[1\ 4\ 2\ 5\ 3]$
ρ_5^4	$[1\ 5\ 4\ 3\ 2]$
τ_1	$[1]\circ[2\ 5]\circ[3\ 4]$
	$[1\ 3]\circ[2]\circ[4\ 5]$
	$[1\ 5]\circ[3]\circ[2\ 4]$
	$[1\ 2]\circ[3\ 5]\circ[4]$
	$[1\ 4]\circ[2\ 3]\circ[5]$

在一个正n角形（n为奇数）的顶点对称群中，每个反射有一个1-循环和$\frac{n-1}{2}$个2循环

■ 利用循环因子分解计算非等价着色问题

利用**Burnside**定理计数不等价的着色数的关键：

1. 确定置换群G；
2. 确定着色集C；
3. 计数G中每个置换f的不变着色集$C(f)$的大小。
4. 使用**Burnside**公式

■ 缺点：第3步的计数过程比较复杂

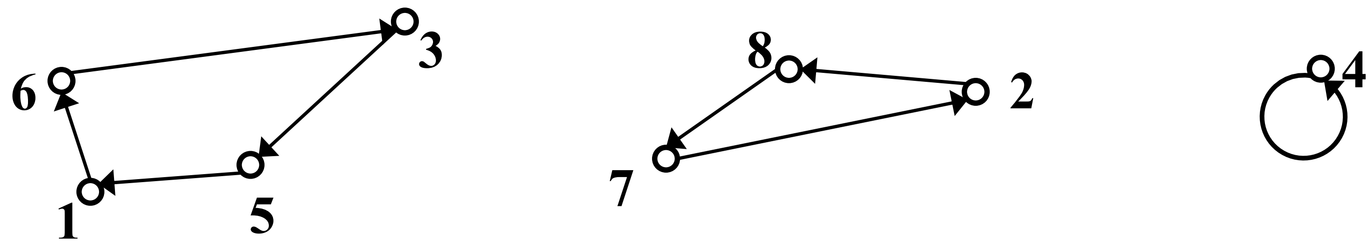
利用f的循环因子分解计算$C(f)$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。

假设 $c(1)$=红色，则

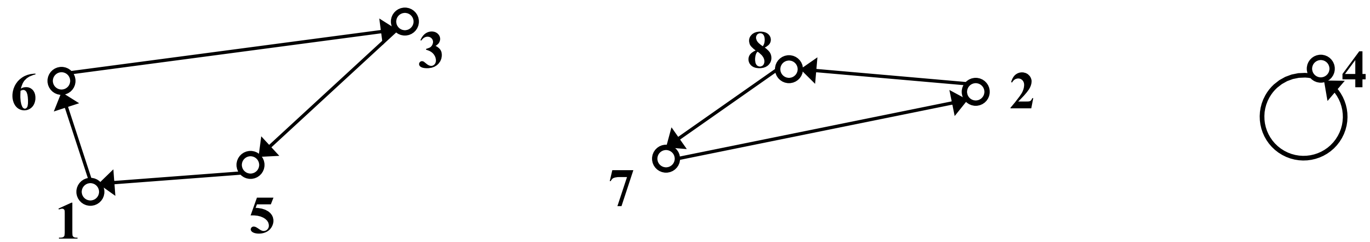
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 6&2&5&4&1&3&7&8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 1&8&3&4&5&6&2&7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8 \\ 1&2&3&4&5&6&7&8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。

假设 $c(1)$=红色，则

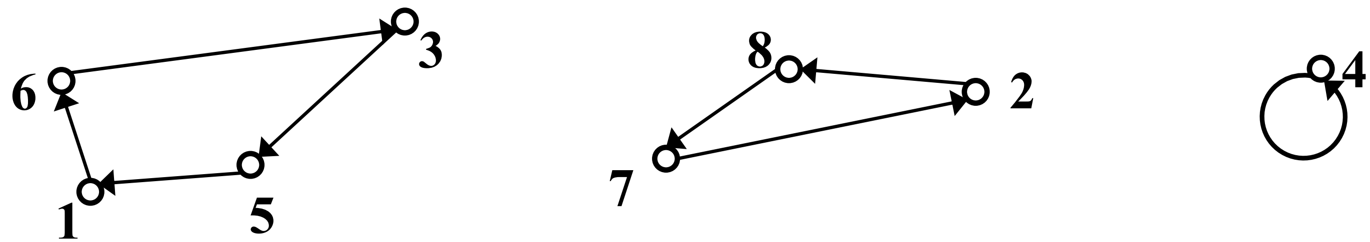
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

例：设 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c=c$ 的一种着色。

假设 $c(1)$=红色，则

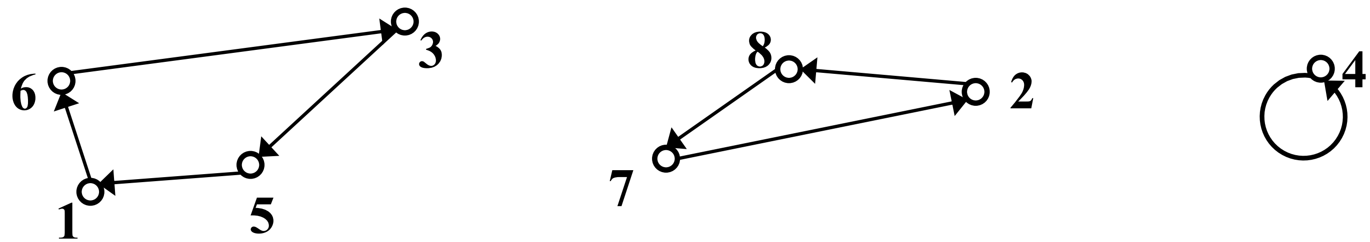
$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

例：设 $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$的置换 f 为：

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5]\circ[2\ 8\ 7]\circ[4]$

D_f



$$f=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&2&\mathbf{3}&4&\mathbf{5}&\mathbf{6}&7&8\\\mathbf{6}&2&\mathbf{5}&4&\mathbf{1}&\mathbf{3}&7&8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&\mathbf{2}&3&4&5&6&\mathbf{7}&\mathbf{8}\\1&\mathbf{8}&3&4&5&6&\mathbf{2}&\mathbf{7}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&\mathbf{4}&5&6&7&8\\1&2&3&\mathbf{4}&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c=c$ 的一种着色。

假设 $c(1)$=红色，则

循环[1 6 3 5]中的所有元素颜色相同

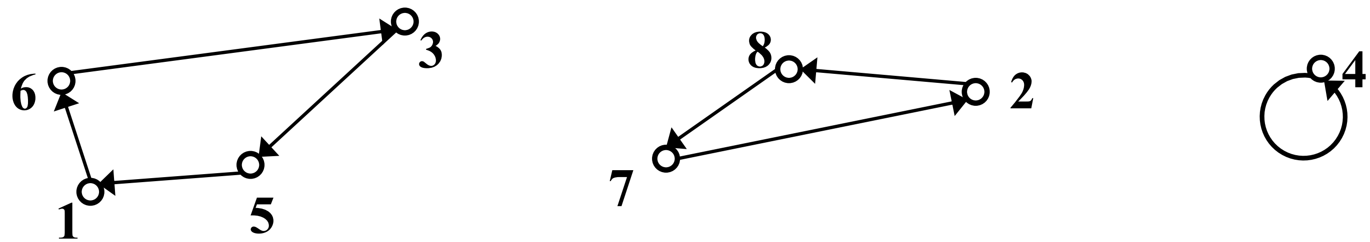
$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f * c = c$ 的一种着色。

假设 $c(2)$=蓝色，则

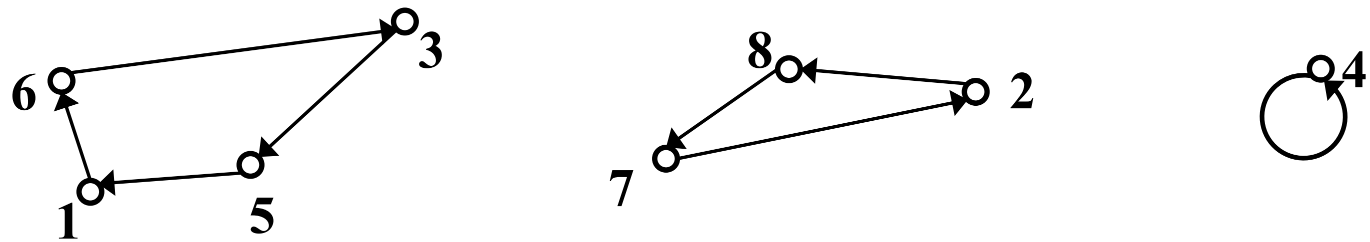
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f * c = c$ 的一种着色。

假设 $c(2)$=蓝色，则

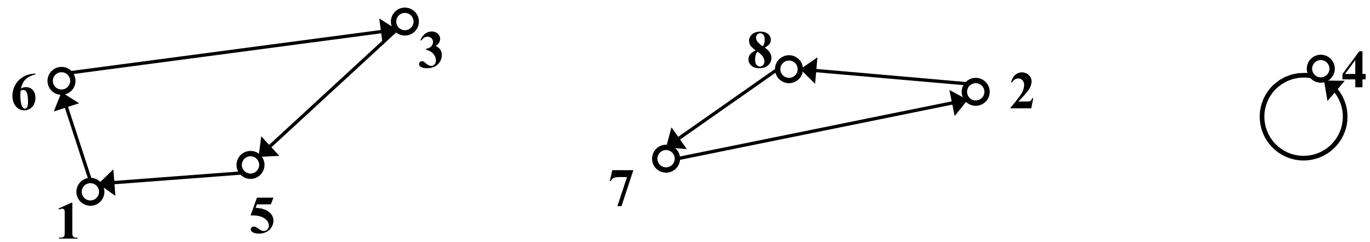
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & \mathbf{3} & 4 & \mathbf{5} & \mathbf{6} & 7 & 8 \\ \mathbf{6} & 2 & \mathbf{5} & 4 & \mathbf{1} & \mathbf{3} & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & 3 & 4 & 5 & 6 & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ 1 & \mathbf{8} & 3 & 4 & 5 & 6 & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f{*}c = c$ 的一种着色。

假设 $c(2)$=蓝色，则

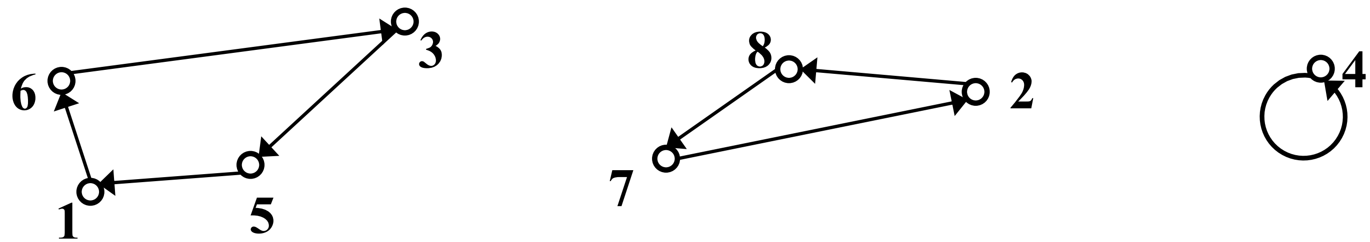
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

例：设 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&2&5&4&1&3&7&8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&8&3&4&5&6&2&7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c=c$ 的一种着色。

假设 $c(2)$=蓝色，则

循环[2 8 7]中的所有元素颜色相同

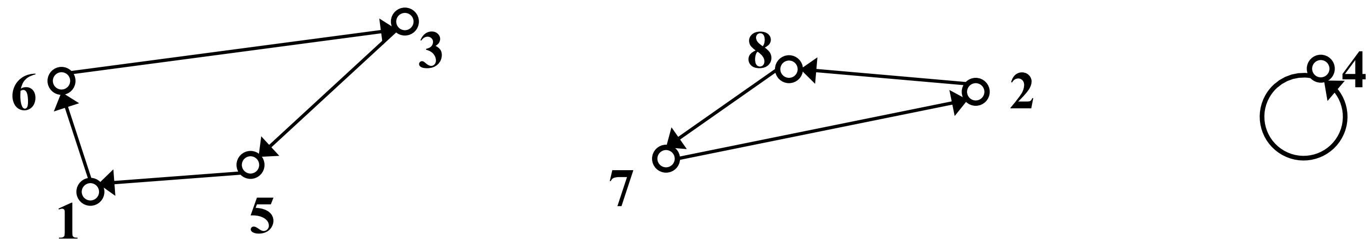
$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\6&8&5&4&1&3&2&7\end{pmatrix}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

D_f



$$f = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & \mathbf{3} & 4 & \mathbf{5} & \mathbf{6} & 7 & 8 \\ \mathbf{6} & 2 & \mathbf{5} & 4 & \mathbf{1} & \mathbf{3} & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{2} & 3 & 4 & 5 & 6 & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ 1 & \mathbf{8} & 3 & 4 & 5 & 6 & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & \mathbf{4} & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。

假设 $c(2)$=绿色，则

一个循环中的所有元素颜色相同

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

假设用红、绿、黄、蓝色对 X 进行着色，C 是所有着色的集合。问在 f 作用下 C 中保持不变的着色数 $|C(f)|$ 是多少？

解：设 c 是使得 $f*c = c$ 的一种着色。

(1) 考虑 4 循环 $[1\ \ 6\ \ 3\ \ 5]$：

该循环用 1的颜色给 6着色，用 6的颜色给 3着色，用 3的颜色给 5着色，用 5的颜色给 1着色。

因为 f 保持着色 c不变，通过这个循环，得到

1的颜色 = 6的颜色 =3的颜色 =5的颜色，

即 1，6，3，5具有相同的颜色 。

例：设 $X = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为：$[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

假设用红、绿、黄、蓝色对 X 进行着色，C 是所有着色的集合。问在 f 作用下 C 中保持不变的着色数 $|C(f)|$ 是多少？

解：设 c 是使得 $f{*}c = c$ 的一种着色。

(2) 同理，通过 3循环[2 8 7]，得到 2, 8, 7 有相同的颜色，1循环 [4]中对4的颜色没有限制。

因此，在 f 作用下 C 中保持不变的着色 c 满足：

对{1, 6, 3, 5}、{2, 8, 7}、{4} 任意指定红、绿、黄、蓝中一种颜色。

得 $|C(f)| = 4^3 = 64$。

- **结论**：一个着色在 f 的作用下保持不变当且仅当 f 的循环因子分解中每个循环的所有元素的颜色相同。

- 记置换 f 的循环分解中的循环个数为 $\#(f)$

定理14.3.1：设 f 是集合 X 的一个置换。
假如用 k 种颜色对 X 的元素进行着色。令 C 是 X 的所有着色的集合，则 f 保持 C 中着色不变的着色数为：

$$|C(f)|=k^{\#(f)}。$$

- 不变着色数 $C(f)$
  - ✓ 与颜色的数量和循环因子分解中循环个数有关，
  - ✓ 而与每个循环的阶数无关。

- 记置换 f 的循环分解中的循环个数为 $\#(f)$

定理14.3.1： 设 f 是集合 X 的一个置换。
假如用 k 种颜色对 X 的元素进行着色。令C是 X 的所有着色的集合，则 f 保持 C 中着色不变的着色数为：

$$|C(f)|=k^{\#(f)}。$$

- 提供了一种计算$|C(f)|$的新方法。

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f * c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即，C中非等价的着色数等于在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数。

- 记置换 f 的循环分解中的循环个数为 $\#(f)$

定理14.3.1：设 f 是集合 X 的一个置换。

假如用 k 种颜色对 X 的元素进行着色。令C是 X 的所有着色的集合，则 f 保持 C 中着色不变的着色数为：

$$|C(f)|=k^{\#(f)}。$$

- 提供了一种计算$|C(f)|$的新方法。

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即，C中非等价的着色数等于在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数。

例：用红、黄、蓝三种颜色对正方形的顶点进行着色，问共有多少种非等价的着色方法？

解：设 C 是用红、黄、蓝对正方形的顶点的所有着色的集合，正方形的顶点对称群是二面体群D_4。

D_4	循环因子分解	#(f)	$\lvert C(f)\rvert$
$\rho_4^0=\iota$	[1]∘[2] ∘[3] ∘[4]	4	$3^4=81$
ρ_4^1	[1 2 3 4]	1	$3^1=3$
ρ_4^2	[1 3] ∘[2 4]	2	$3^2=9$
ρ_4^3	[1 4 3 2]	1	$3^1=3$
τ_1	[1] ∘[2 4] ∘[3]	3	$3^3=27$
τ_2	[1 3] ∘[2] ∘[4]	3	$3^3=27$
τ_3	[1 2] ∘[3 4]	2	$3^2=9$
τ_4	[1 4] ∘[2 3]	2	$3^2=9$

由Burnside定理，得

$$N(D_4, C) = \frac{1}{|D_4|}\sum_{f\in D_4}|C(f)| = \frac{81+3+9+3+27+27+9+9}{8} = 21$$

例：1. 对一个四边形的2个点着红色，其余点着蓝色，问有多少种不等价的着色数?

2. 对一个正五角形的3个顶点着红色，对其余顶点着蓝色，问有多少种不等价的着色?

置换的生成函数

回顾:生成函数

- 多重集$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \dots, \infty\cdot a_k\}$的$n$ 组合数 h_n
  - 等于方程$e_1+e_2+\dots+e_k=n$的非负整数解$e_1, e_2, \dots, e_k$ 的个数
  - 生成函数 $g(x)=\left(\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1}\right)\left(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{e_2}\right)\cdots\left(\sum_{e_k=0}^{\infty} x^{e_k}\right)$
- n的分拆数 p_n
  - 等于方程 $na_n+(n-1)a_{n-1}+\dots+2a_2+a_1=n$的非负整数解 $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$的个数。
  - 生成函数

$$g(x)=\left(\sum_{a_1=0}^{\infty} x^{a_1}\right)\left(\sum_{a_2=0}^{\infty} x^{2a_2}\right)\cdots\left(\sum_{a_k=0}^{\infty} x^{ka_k}\right)\cdots$$

置换的类型

设 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$为一个集合，f 为 X 上的一个置换，f 的循环因子分解中有e_1个 1-循环, e_2 个 2-循环, …，e_n 个 n-循环。

例：设 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$的置换 f 为：

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

f 的循环分解为 $[1\ 6\ 3\ 5] \circ [2\ 8\ 7] \circ [4]$

$$e_1 = 1,\ e_2 = 0,\ e_3 = 1,\ e_4 = 1,\ e_5 = e_6 = e_7 = e_8 = 0$$

$$1e_1 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + 6e_6 + 7e_7 + 8e_8 = 8$$

置换的类型

设 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$为一个集合，f 为 X 上的一个置换，f 的循环因子分解中有e_1个 1-循环, e_2 个 2-循环, …，e_n 个 n-循环。由于 X 的各元素在 f 的循环因子分解中恰好出现在一个循环中，因此 $e_1, e_2, \ldots, e_n$满足：

$$1e_1+2e_2+\ldots+ne_n = n,$$

称 n元组 $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ 是置换 f 的类型，记为

$$\text{type}(f) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)。$$

在 f 的循环因子分解中，循环数为：

$$\#(f) = e_1 + e_2+\ldots+ e_n。$$

type(f) 仅取决于循环因子分解中循环的阶数。

- 不同的置换可以有相同的类型

问题：是否可以仅通过类型来区分置换

D_4	循环因子分解	type(f)	#(f)
$\rho_4^0=\iota$	$[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$	(4, 0, 0, 0)	4
ρ_4^1	$[1\ 2\ 3\ 4]$	(0, 0, 0, 1)	1
ρ_4^2	$[1\ 3]\circ[2\ 4]$	(0, 2, 0, 0)	2
ρ_4^3	$[1\ 4\ 3\ 2]$	(0, 0, 0, 1)	1
τ_1	$[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$	(2, 1, 0, 0)	3
τ_2	$[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$	(2, 1, 0, 0)	3
τ_3	$[1\ 2]\circ[3\ 4]$	(0, 2, 0, 0)	2
τ_4	$[1\ 4]\circ[2\ 3]$	(0, 2, 0, 0)	2

- 问题：是否可以仅通过类型来区分置换？

置换的单项式

设 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$为一个集合，G是 X 的置换群。

引入n个变量 $z_1, z_2, \ldots, z_n$，其中，z_k对应 k循环 $(k=1, 2, \ldots, n)$。

设 f 为 X 上的一个置换，且 $\mathrm{type}(f) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$。

定义 f 的单项式为 $\mathrm{mon}(f) = z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n}$，

则 f 的单项式的总次数 $e_1+e_2+\ldots+e_n$ 等于 f 的循环因子分解中的循环个数 $\#(f)$。

D_4	循环因子分解	$\#(f)$	类型 (e_1, e_2, e_3, e_4)	单项式
$\rho_4^0=\iota$	$[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$	4	(4, 0, 0, 0)	z_1^4
ρ_4^1	[1 2 3 4]	1	(0, 0, 0, 1)	z_4
ρ_4^2	$[1\ 3]\circ[2\ 4]$	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2
ρ_4^3	[1 4 3 2]	1	(0, 0, 0, 1)	z_4
τ_1	$[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^2z_2$
τ_2	$[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^2z_2$
τ_3	$[1\ 2]\circ[3\ 4]$	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2
τ_4	$[1\ 4]\circ[2\ 3]$	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2

置换的单项式

设 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$为一个集合，G是 X 的置换群。

引入n个变量 $z_1, z_2, \ldots, z_n$，其中，z_k对应 k循环 (k=1, 2, …, n)。

设 f 为 X 上的一个置换，且 type(f) = ($e_1, e_2, \ldots, e_n$)。

定义 f 的单项式为 $\mathrm{mon}(f) = z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n}$，

则 f 的单项式的总次数 $e_1+e_2+\ldots+e_n$ 等于 f 的循环因子分解中的循环个数 #(f)。

G 中的置换按照类型的生成函数是 G 中所有置换的单项式的和：$\sum_{f\in G} \mathrm{mon}(f) = \sum_{f\in G} z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n}$.

合并生成函数的同类项，$z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n}$ 的系数等于 G 中类型为 ($e_1, e_2, \ldots, e_n$) 的置换的个数。

置换的循环指数

G的循环指数定义为其生成函数除以 G 中的置换个数 $|G|$，即

$$P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G} mon(f) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G} z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n}$$

例：求二面体群 D_4的循环指数。

D_4	循环因子分解	#(*f*)	类型 (e_1, e_2, e_3, e_4)	单项式
$\rho_4^0=\iota$	$[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$	4	(4, 0, 0, 0)	z_1^4
ρ_4^1	[1 2 3 4]	1	(0, 0, 0, 1)	z_4
ρ_4^2	$[1\ 3]\circ[2\ 4]$	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2
ρ_4^3	[1 4 3 2]	1	(0, 0, 0, 1)	z_4
τ_1	$[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^2z_2$
τ_2	$[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^2z_2$
τ_3	$[1\ 2]\circ[3\ 4]$	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2
τ_4	$[1\ 4]\circ[2\ 3]$	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2

D_4的循环指数为：

$$P_{D_4}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{8}(z_1^4 + 2z_4 + 3z_2^2 + 2z_1^2 z_2)$$

用循环指数计算非等价着色数

已知G的循环指数

$$P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G} z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n}$$

其中，type(f)= (e_1, e_2, …, e_n)。

由定理14.3.1，f 保持 C 中着色不变的着色数是（k种颜色）：

$$|C(f)| = k^{\#(f)}$$

$$= k^{e_1+e_2+\cdots+e_n} = k^{e_1} k^{e_2} \ldots k^{e_n}$$

根据Burnside定理，非等价的着色数是:

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G} |C(f)|$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G} k^{e_1} k^{e_2} \ldots k^{e_n}$$

$$= P_G(k, k, \ldots, k)$$

用循环指数计算非等价着色数

定理 14.3.2 设 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ 为一个集合，假设用 k 种颜色对 X 的元素进行着色。令 C 是 X 的所有 k^n 种着色的集合，G 是 X 的置换群。则非等价的着色数是用 $z_i = k\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ 代入 G 的循环指数 $P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ 中而得到的数，即

$$N(G, C) = P_G(k, k, \ldots, k)$$

例：用 k 种颜色对正方形的顶点进行着色，非等价着色数是多少？

解：首先求二面体群D_4的循环指数。

D_4	循环因子分解	#(f)	类型	单项式
$\rho_4^0=\iota$	$[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$	4	(4, 0, 0, 0)	z_1^4
ρ_4^1	$[1\ 2\ 3\ 4]$	1	(0, 0, 0, 1)	z_4
ρ_4^2	$[1\ 3]\circ[2\ 4]$	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2
ρ_4^3	$[1\ 4\ 3\ 2]$	1	(0, 0, 0, 1)	z_4
τ_1	$[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^2z_2$
τ_2	$[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^2z_2$
τ_3	$[1\ 2]\circ[3\ 4]$	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2
τ_4	$[1\ 4]\circ[2\ 3]$	2	(0, 2, 0, 0)	z_2^2

D_4的循环指数为 $P_{D_4}(z_1, z_2, z_3, z_4)=\frac{1}{8}(z_1^4+2z_4+3z_2^2+2z_1^2z_2)$

非等价的着色数为 $N(D_4, C)= P_{D_4}(k, k, k, k)=\frac{1}{8}(k^4+2k+3k^2+2k^2k)$

$$=\frac{1}{8}(k^4+2k^3+3k^2+2k)$$

例：用 k 种颜色对正方形的顶点进行着色，非等价着色数是多少？

$k=3$

D_4	循环因子分解	#(f)	类型	单项式	|C(f)|
$\rho_4^0=\iota$	$[1]\circ[2]\circ[3]\circ[4]$	4	(4, 0, 0, 0)	$z_1^{\ 4}$	$3^4=81$
ρ_4^1	[1 2 3 4]	1	(0, 0, 0, 1)	z_4	$3^1=3$
ρ_4^2	$[1\ 3]\circ[2\ 4]$	2	(0, 2, 0, 0)	$z_2^{\ 2}$	$3^2=9$
ρ_4^3	[1 4 3 2]	1	(0, 0, 0, 1)	z_4	$3^1=3$
τ_1	$[1]\circ[2\ 4]\circ[3]$	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^{\ 2}z_2$	$3^3=27$
τ_2	$[1\ 3]\circ[2]\circ[4]$	3	(2, 1, 0, 0)	$z_1^{\ 2}z_2$	$3^3=27$
τ_3	$[1\ 2]\circ[3\ 4]$	2	(0, 2, 0, 0)	$z_2^{\ 2}$	$3^2=9$
τ_4	$[1\ 4]\circ[2\ 3]$	2	(0, 2, 0, 0)	$z_2^{\ 2}$	$3^2=9$

$$N(G, C)=\frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|=\frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}3^{\#(f)}$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}3^{e_1}3^{e_2}\ldots3^{e_n}=P_G(3, 3, \ldots, 3)$$

问题：怎样利用G的循环指数，来确定当各颜色使用特定次数时非等价的着色数?

设 f 是集合 X 的置换，type(f)=($e_1, e_2, \ldots, e_n$)，

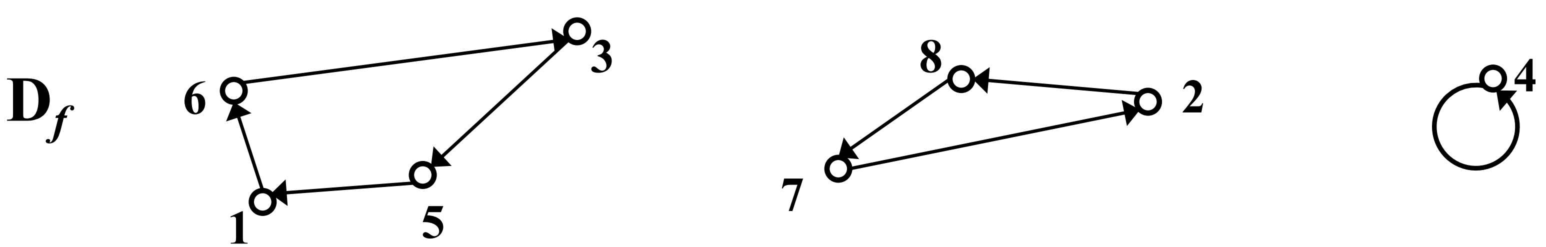
$$\mathrm{mon}(f) = z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n},$$

即 f 的循环因子分解 中有 e_i 个 i 循环，i=1, 2, …, n。

假设仅有红色与蓝色两种颜色。

令 $C_{p,q}$ 表示所有 p 个元素着红色且 $q=n-p$ 个元素着蓝色的 X 的着色集合。

- **结论**：$C_{p,q}$ 中的着色在 f 的作用下保持不变当且仅当 f 的循环因子分解中每个循环的所有元素的颜色相同。



问题：怎样利用G的循环指数，来确定当各颜色使用特定次数时非等价的着色数?

设 f 是集合 X 的置换，type(f)=($e_1, e_2, \ldots, e_n$)，

$$\mathrm{mon}(f) = z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n},$$

即 f 的循环因子分解 中有 e_i 个 i 循环，i=1, 2, …, n。

假设仅有红色与蓝色两种颜色。

令 $C_{p,q}$ 表示所有 p 个元素着红色且 $q=n-p$ 个元素着蓝色的 X 的着色集合。

- 结论： $C_{p,q}$ 中的着色在 f 的作用下保持不变当且仅当 f 的循环因子分解中每个循环的所有元素的颜色相同。

方法：给循环指定颜色，满足指定的红色元素个数为 p。

蓝色元素个数为 $q=n-p$。

■ 方法：给循环指定颜色，使得指定的红色元素个数为 p。

代数方法：令变量 r 表示红色，b 表示蓝色，

则红色元素个数为 p，蓝色元素个数为 q的一个着色可表示为

$$r^p b^q。$$

则红色元素个数为 p，蓝色元素个数为 q 的着色个数是表达式

$$(r+b)^{e_1}(r^2+b^2)^{e_2}\ldots(r^n+b^n)^{e_n} \quad (3)$$

中 $r^p b^q$ 的系数。

$$\begin{aligned}
&(r+b)^{e_1}(r^2+b^2)^{e_2}\ldots(r^n+b^n)^{e_n} \\
=&(r+b)(r+b)\ldots(r+b) && (e_1\text{个}) \\
&(r^2+b^2)(r^2+b^2)\ldots(r^2+b^2) && (e_2\text{个}) \\
&(r^k+b^k)(r^k+b^k)\ldots(r^k+b^k) && (e_k\text{个}) \\
&(r^n+b^n)(r^n+b^n)\ldots(r^n+b^n) && (e_n\text{个})
\end{aligned}$$

■ 方法：给循环指定颜色，使得指定的红色元素个数为 p。

代数方法：令变量 r 表示红色，b 表示蓝色，

则红色元素个数为 p，蓝色元素个数为 q的一个着色可表示为

$$r^p b^q。$$

则红色元素个数为 p，蓝色元素个数为 q 的着色个数是表达式

$$(r+b)^{e_1}(r^2+b^2)^{e_2}\ldots(r^n+b^n)^{e_n} \quad (3)$$

中 $r^p b^q$ 的系数。(已知 f 的单项式 $\mathrm{mon}(f) = z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n}$)

而 (3) 式即为对 f 的单项式做以下代换得到：

$$z_1 = r + b,\ z_2 = r^2 + b^2,\ \ldots,\ z_n = r^n + b^n。$$

由于G的循环指数是G中置换 f 的单项式的平均值，即

$$P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G} \mathrm{mon}(f) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G} z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n}$$

$$= \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}(r+b)^{e_1}(r^2+b^2)^{e_2}\ldots(r^n+b^n)^{e_n} = P_G(r+b,\ r^2+b^2,\ \ldots,\ r^n+b^n)$$

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数。

由定理14.2.3得，$C_{p,q}$ 中非等价的着色数等于下面表达式中$r^p b^q$的系数：

$$P_G(r+b, r^2+b^2, \ldots, r^n+b^n) \qquad (1)$$

注意：r, b均是变量，因此 (1) 称为$C_{p,q}$ 中每种颜色有指定元素个数的非等价着色数的二元变量生成函数。

例：用两种颜色对一个正方形的顶点着色，求它们的非等价着色数的生成函数。

解：正方形的顶点对称群 D_4的循环指数为

$$P_{D_4}(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{1}{8}(z_1^4+2z_4+3z_2^2+2z_1^2z_2)。$$

设两种颜色 为 r与 b，则生成函数为

$$P_{D_4}(r+b,\ r^2+b^2,\ r^3+b^3,\ r^4+b^4)$$

$$=\frac{1}{8}((r+b)^4+2(r^4+b^4)+3(r^2+b^2)^2+2(r+b)^2(r^2+b^2))$$

$$=r^4+r^3b+2r^2b^2+rb^3+b^4。$$

得：4个红色：1

3个红色，1个蓝色：1

2个红色，2个蓝色：2

1个红色，3个蓝色：1

4个蓝色：1

Pólya定理

定理14.3.3 设 X 为一个集合，G为 X上的一个置换群，$\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$是 k 种颜色的一个集合，C是 X 的任意着色集。则针对各颜色数目的 C 的非等价着色数的生成函数是由循环指数 $P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ 通过做变量代换

$$z_j = u_1^j + u_2^j + \ldots + u_k^j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

得到的表达式

$$P_G(u_1+u_2+\ldots+u_k, u_1^2+u_2^2+\ldots+u_k^2, \ldots, u_1^n+u_2^n+\ldots+u_k^n),$$

其中，$u_1^{p_1}u_2^{p_2}\ldots u_k^{p_k}$ 的系数等于 X 中的

p_1 个元素着色成颜色 u_1，p_2 个元素着色成颜色 $u_2, \ldots,$ p_k 个元素着色成颜色 u_k

的非等价的着色数。

例：用3种颜色对一个正方形的顶点着色，求非等价着色数的生成函数。

解：D_4的循环指数为

$$P_{D_4}(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{1}{8}(z_1^4+2z_4+3z_2^2+2z_1^2z_2)。$$

设有3种颜色r, b, g，则非等价着色的生成函数为

$$P_{D_4}\left(r+b+g,r^2+b^2+g^2,r^3+b^3+g^3,r^4+b^4+g^4\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left((r+b+g)^4+2(r^4+b^4+g^4)+3(r^2+b^2+g^2)+2(r+b+g)^2(r^2+b^2+g^2)\right)。$$

利用第5章中的多项式定理计算出生成函数的表达式。

例如：$r^1b^2g^1$的系数为：$\frac{1}{8}(12+0+0+4)=2$。

非等价着色总数为$\frac{1}{8}(3^4+2\cdot 3+3\cdot 3^2+2\cdot 3^2\cdot 3)=21.$

例：求各种可能边数的 4阶非同构图的个数。

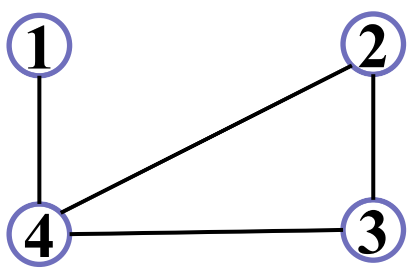
图同构：

设图 $H_1=(V_1, E_1)$， $H_2=(V_2, E_2)$ 是两个图，

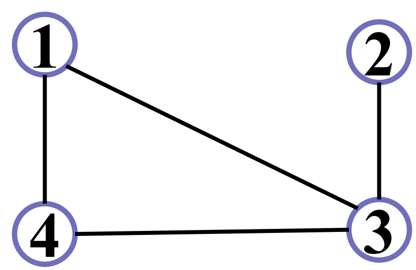
如果存在 V_1 到 V_2 的双射 h, 使得 对任意的顶点 $u, v \in V_1$,

$$(u, v) \in E_1 \text{ 当且仅当 } (h(u), h(v)) \in E_2$$

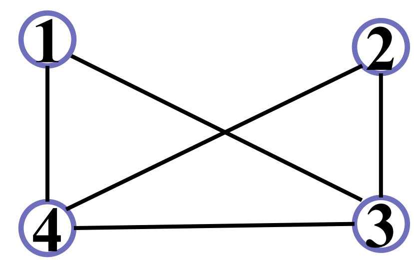
则称 H_1 与 H_2 同构。



H_1



H_2



H_3

$h(1) = 2, h(2) = 1,$
$h(3) = 4, h(4) = 3$

H_1 与 H_2 同构

H_1 与 H_3 不同构
H_2 与 H_3 不同构

例：求各种可能边数的 4阶非同构图的个数。

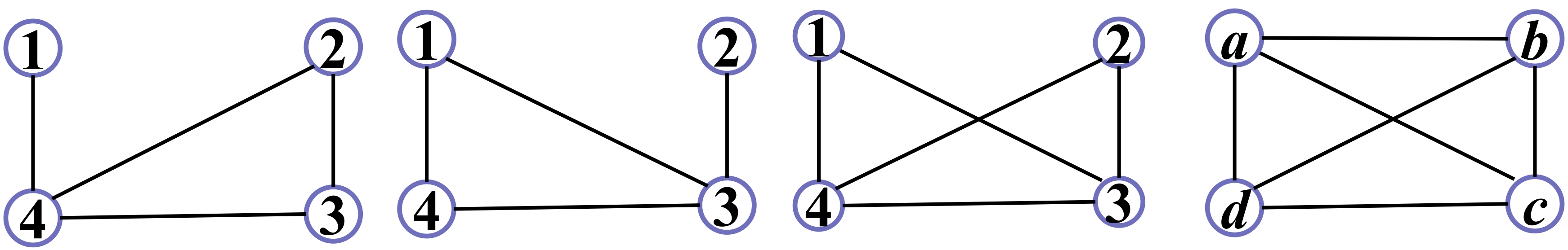
图同构：

设图 $H_1=(V_1, E_1)$， $H_2=(V_2, E_2)$ 是两个图，

如果存在V_1 到 V_2的双射 h, 使得 对任意的顶点 $u, v \in V_1$,

$$(u, v)\in E_1 \text{ 当且仅当 } (h(u), h(v)) \in E_2$$

则称 H_1与H_2 同构。



H_1 H_2 H_3 H_4

4阶完全图

- H_1, H_2, H_3 的边集均为 H_4 的边集的子集
- 问题：如何刻画为非等价着色问题？

例：求各种可能边数的 4阶非同构图的个数。

解：设 $\mathcal{H}$ 是顶点集为 V={1, 2, 3, 4}的所有4 阶图的集合，要求的是 $\mathcal{H}$ 中有指定边数的非同构图个数的生成函数。

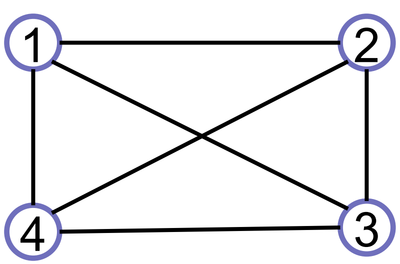
（同构的图一定有相同的边数，反之不一定成立）

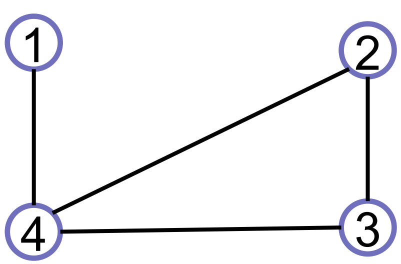
由于 $\mathcal{H}$ 中任意一个图 $H_1=(V, E_1)$的边集合 E 一定是

$$X=\{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$$

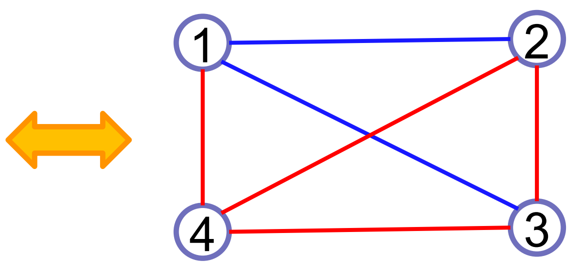
的一个子集。

将 $\mathcal{H}$ 看成是对集合 X 中的边使用两种颜色 "是（y）" 与 "否(n)" 的着色，其中，E_1 中的边有颜色 y，非 E_1 中的边有颜色 n。





H_1



例：求各种可能边数的 4 阶非同构图的个数。

解（续）：设 $\mathcal{H}$ 是顶点集为 $V=\{1, 2, 3, 4\}$ 的所有 4 阶图的集合，要求的是 $\mathcal{H}$ 中有指定边数的非同构图个数的生成函数。

（同构的图一定有相同的边数，反之不一定成立）

由于 $\mathcal{H}$ 中任意一个图 $H_1=(V, E_1)$ 的边集合 E 一定是

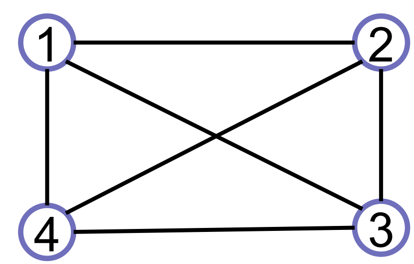
$$X=\{ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$$

的一个子集。

将 $\mathcal{H}$ 看成是对集合 X 中的边使用两种颜色 **"是（y）"** 与 **"否(n)"** 的着色，其中，E 中的边有颜色 **y**，非 E 中的边有颜色 **n**。

设 C 是有 **y** 与 **n** 两种颜色的 X 的所有着色的集合。

因此，$\mathcal{H}$ 中的一个图恰好对应 C 中一种着色。



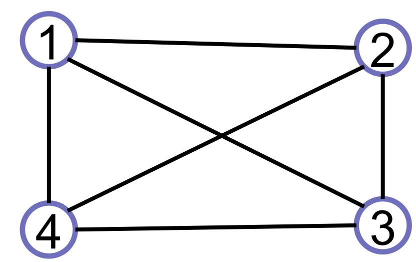
例：求各种可能边数的 4 阶非同构图的个数。

解（续）：设 H_1 与 $H_2=(V, E_2)$ 是$\mathcal{H}$中两一个图，则

H_1与H_2同构当且仅当存在$V=\{1, 2, 3, 4\}$的置换 f，使得

(i, j) 是 E_1中的边当且仅当$(f(i), f(j))$是E_2中的边。

令S_4是 V 的所有置换的集合，则$|S_4|= 4!=24$。



显然 S_4中每个置换 f 对应 X 中边的一个置换：

$$(i, j) \longrightarrow (f(i), f(j)),\ \ i, j \in X$$

例如：$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$，则 f 按以下方式置换边，得到X上的置换

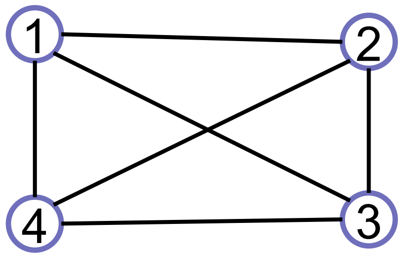
$$\begin{pmatrix} (1,2) & (1,3) & (1,4) & (2,3) & (2,4) & (3,4) \\ (2,3) & (3,4) & (1,3) & (2,4) & (1,2) & (1,4) \end{pmatrix}$$

令$S_4^{(2)}$为由S_4按以上方式生成的置换群。

有 $\mathcal{H}$ 中的任意两个图是同构的当且仅当对应的X的着色是等价的。

例：求各种可能边数的 4 阶非同构图的个数。

解（续）：因此，把求各种可能边数的4阶非同构图的个数的问题转化为求着色集合C关于置换群 $S_4^{(2)}$ 的非等价着色个数的问题。



下面计算$S_4^{(2)}$的循环指数，首先计算$S_4^{(2)}$中24个置换的类型。

例如，对于$S_4^{(2)}$中的如下置换 $f^{(2)}$：

$$f^{(2)} = \begin{pmatrix} (1,2) & (1,3) & (1,4) & (2,3) & (2,4) & (3,4) \\ (2,3) & (3,4) & (1,3) & (2,4) & (1,2) & (1,4) \end{pmatrix}$$

可写作：[(1, 2) (2, 3) (2, 4)]∘[(1, 3) (3, 4) (1, 4)].

则类型 type($f^{(2)}$) = (0 0 2 0 0 0)，单项式为mon(f)= z_3^2。

例：求各种可能边数的4阶非同构图的个数。

解（续）：计算结果如下表：

类型	单项式	$S_4^{(2)}$的置换数
(6, 0, 0, 0, 0, 0)	z_1^6	1
(2, 2, 0, 0, 0, 0)	$z_1^2 z_2^2$	9
(0, 0, 2, 0, 0, 0)	z_3^2	8
(0, 1, 0, 1, 0, 0)	$z_2\ z_4$	6

$S_4^{(2)}$的循环指数为

$$P_{S_4^{(2)}}(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6)=\frac{1}{24}(z_1^6+9z_1^2z_2^2+8z_3^2+6z_2z_4)$$

令 $z_j = y^j + n^j$， j =1, 2, 3, 4, 5, 6.

得 $P_{S_4^{(2)}}(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6)$

$= y^6+y^5n+2y^4n^2+3y^3n^3+2y^2n^4+yn^5+n_6$

例：求各种可能边数的4阶非同构图的个数。

解（续）：得 $P_{S_4^{(2)}}(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6)$

$$= y^6+y^5n+2y^4n^2+3y^3n^3+2y^2n^4+yn^5+n_6$$

由于y的数目等于边的数目，得 4阶非同构图的数目如下表所示：

边数	非同构4阶图数目
6	1
5	1
4	2
3	3
2	2
1	1
0	1
共计	11

4阶非同构图总共有11个。

总结

- 非等价着色数的计算

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即，C中非等价的着色数等于在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数。

计算$|C(f)|$的方法：

- ✓ 直接计算
- ✓ 循环因子分解

- 各颜色使用特定次数时的非等价着色数的计算
  - ✓ 循环因子分解 → 循环指数 → 生成函数