回顾：排列与组合

- 设集合 S 包含n个不同的元素
  - S的排列的个数：$n!$
  - S的r 组合的个数：$\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
- 设集合 S 包含重数分别为$n_1, \ldots, n_t$的 t 类元素
  - S的排列的个数：$\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_t!}$
  - S的r 组合的个数（$n_i \geq r, i=1, 2, \ldots, t$）：$\binom{r+t-1}{r}$

如果存在i, 使得$n_i < r$，怎么计算？

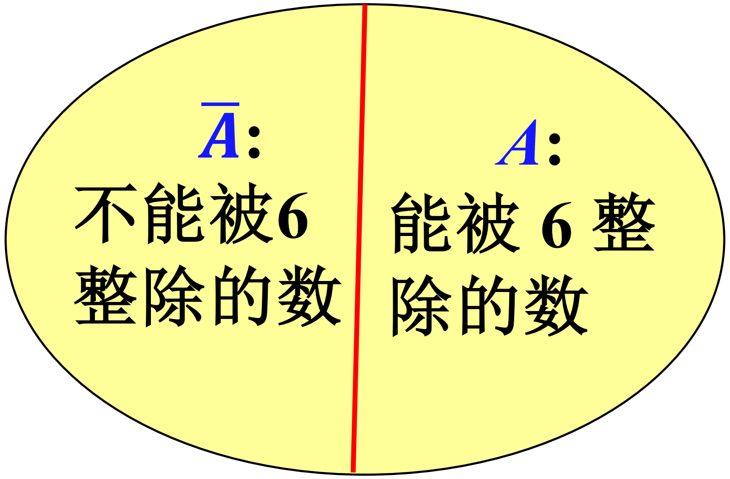
第六章 容斥原理及应用

6.1 容斥原理
6.2 带重复的组合
6.3 错位排列
6.4 带有禁止位置的排列
6.5 另一个禁止位置问题
6.6 莫比乌斯反演

第六章 容斥原理及应用

6.1 容斥原理
6.2 带重复的组合
6.3 错位排列
6.4 带有禁止位置的排列
6.5 另一个禁止位置问题

引入：例1. 计算1到600中不能被6整除的整数个数。



S={1, 2, …, 600}

互斥

$A \cap \bar{A} = \emptyset$

$$|\bar{A}| = |S| - |A|$$

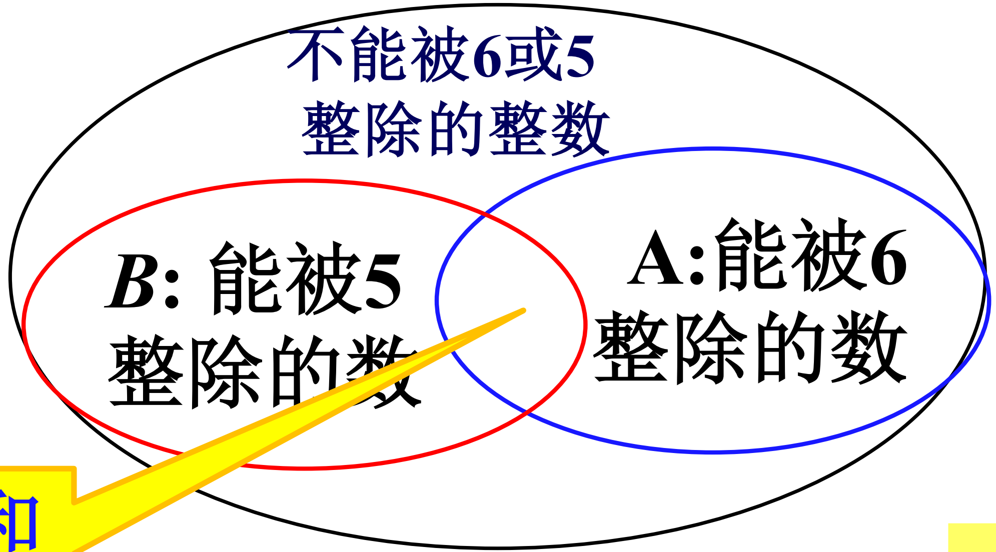
解:（减法原理） 1到600中能被6整除的整数个数是

$$\left\lfloor \frac{600}{6} \right\rfloor = 100\text{个}。$$

因此，1到600中不能被6整除的整数个数是

600–100=500个。

引入：例2. 计算1到600中不能被6或5整除的整数个数？



容斥

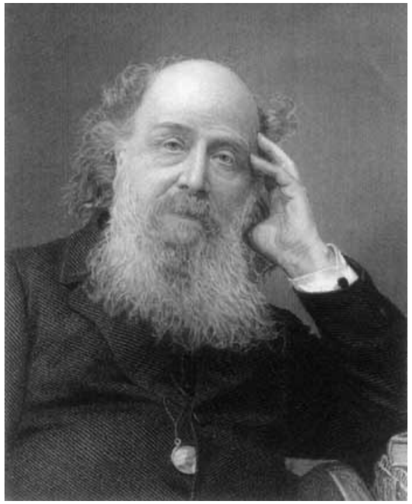
$A\cap B$:能被5和6整除的数

S={1,2,…, 600}

$|A \cup B| \neq |A| + |B|$

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

容斥原理 Inclusive-exclusion principle



- 容斥原理，"筛选法""逐步淘汰原理""交叉分类原理"。
- 最早的数学表述是由法国数学家棣莫弗（1677-1754）在他关于概率论的教材中提出的。这个原理现在的表述方式归功于英国数学家西尔维斯特James Joseph Sylvester（1814-1897）。

- 西尔维斯特Sylvester从1833年开始在剑桥大学圣约翰学院就读，没有毕业，但他参加了剑桥著名的数学考试并获得了第二名。1841年，他短暂在美国逗留并成为弗吉尼亚大学的教授。此后他回到英国。1877年，西尔维斯特获得约翰斯·霍普金斯大学的一个职位再渡大西洋。1878年他创办了《美国数学杂志》，这是美国的第一本数学杂志。1883年，西尔维斯特最终回到英国，他被授命为牛津大学几何教授。1892年，牛津大学又委派了一个他的副教授，但他到死占据着这个职位。1880年，英国皇家学会授予西尔维斯特对科学研究最高的奖章科普勒奖章。1901年，为了纪念西尔维斯特设立了授予数学研究的西尔维斯特奖章。
- 西尔维斯特具有丰富的想象力和创造精神，他自称"数学亚当"，一生创造过许多数学名词，"矩阵""不变式""判别式"等名词都是他率先使用的

知识点　Inclusive-exclusion principle

$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| =$
$\Sigma|A_i| - \Sigma|A_i \cap A_j| + \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k|$
$+\ldots+ (-1)^{m+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$

$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| =$
$|S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k|$
$+\ldots+ (-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$

容斥原理

多重集$\{n_1 \cdot a_1, \ldots, n_t \cdot a_t\}$的组合数, $n_1+\ldots+n_t=r$

$\exists n_i < r$

$\{1,\ldots,n\}$的排列数

错位排列 $i_1 i_2 \ldots i_n$
$i_j \neq j, j = 1, 2, \ldots n$

带有禁止位置的排列
$i_1 i_2 \ldots i_n,\ i_j \notin X_j,\ j=1,\ldots,n$

? 广义容斥原理

生成函数（第7章）
（每种元素出现次数带有约束）

$\binom{r+t-1}{r}$,
$n_i \geq r, i = 1, 2, \ldots, t$

带有相对禁止位置的排列
$i_1 i_2 \ldots i_n$, 无 12, 23, …,$(n\text{-}1)n$

线性排列

循环排列

回顾：加法原理

- 基本计数原理：加法原理

  两两互斥

  $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_m$， $S_i \cap S_j = \varnothing$， $i \neq j$

则： $|S| = |S_1| + |S_2| + \ldots + |S_m|$

问题：如果存在重叠，即 $S_i \cap S_j \neq \varnothing$，如何计数？

- 容斥原理：解决具有重叠集合的并集的计数原理。

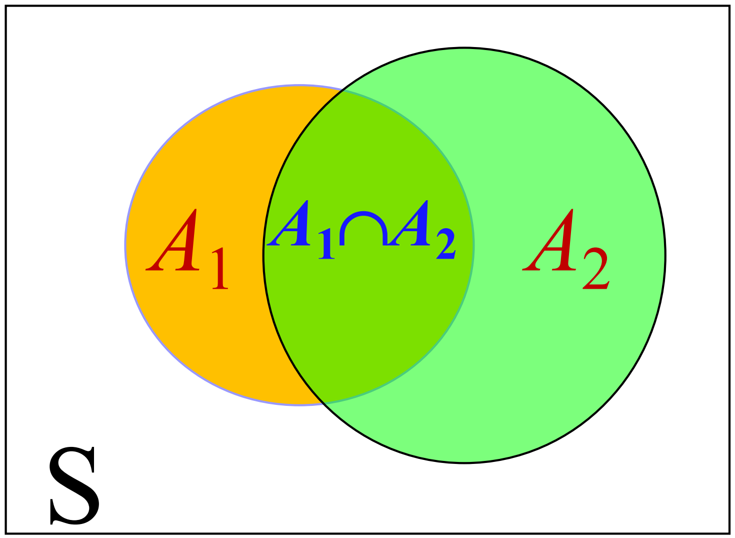
例3：A_1和A_2分别是S中具有性质P_1和P_2的元素的集合，求S中既不具有性质P_1也不具有性质P_2的元素个数。

$\overline{A_1}$: S中不具有性质P_1的元素的集合

$\overline{A_2}$: S中不具有性质P_2的元素的集合

$\overline{A_1} \cap \overline{A_2}$: S中既不具有性质P_1也不具有性质P_2的元素的集合

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S-(A_1 \cup A_2)|$$
$$= |S|-|A_1|-|A_2|+|A_1 \cap A_2|$$



Venn图

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S-(A_1 \cup A_2)| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

特征函数
$\sigma_A(x)$

证明：定义一个计数函数: $\sigma_x(A)=\begin{cases} 1, \text{当 } x \in A \\ 0, \text{当 } x \notin A \end{cases}$

则有，$|A|=\sum_{x \in S}\sigma_x(A)$。

因此，只需证明：

$$\sum_{x \in S} \sigma_x(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \sum_{x \in S} \sigma_x(S) - \sum_{x \in S} \sigma_x(A_1) - \sum_{x \in S} \sigma_x(A_2) + \sum_{x \in S} \sigma_x(A_1 \cap A_2)$$

$$= \sum_{x \in S}(\sigma_x(S) - \sigma_x(A_1) - \sigma_x(A_2) + \sigma_x(A_1 \cap A_2))$$

因此，只需证明：对$\forall x \in S$, 下式成立

$$\sigma_x(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \sigma_x(S) - \sigma_x(A_1) - \sigma_x(A_2) + \sigma_x(A_1 \cap A_2)$$

$$\sigma_x(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \sigma_x(S) - \sigma_x(A_1) - \sigma_x(A_2) + \sigma_x(A_1 \cap A_2)$$

S中的元素可分为 4 种情况：

(1) x不属于 A_1和 A_2：左边=1; 右边=1–0–0+0=1

(2) x属于 A_1且不属于 A_2：左边=0; 右边=1–1–0+0=0

(3) x属于 A_2, 不属于 A_1：左边=0;右边=1–0–1+0=0

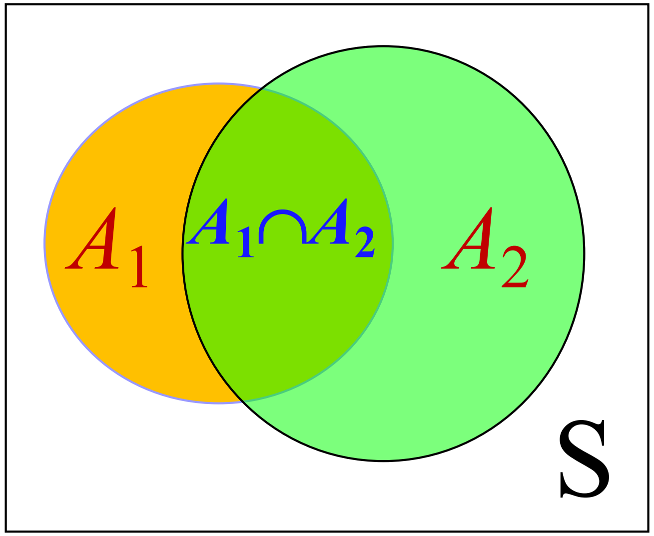
(4) x属于 A_1, 又属于 A_2：左边=0;右边=1–1–1+1=0

因此：对于$\forall x \in S$

$\sigma_x(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) =$

$\sigma_x(S) - \sigma_x(A_1) - \sigma_x(A_2) + \sigma_x(A_1 \cap A_2)$

得 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$



一般情形：容斥原理计数

定理6.1.1 集合 S 不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 的物体的个数：

$$|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_m}| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

其中，第一个和对{1, 2, …, m}的所有的 1 子集 { i } 进行，第二个和对{1, 2,…, m}的所有的 2 集合{ i, j }进行，依此类推.

m =2: $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S|-|A_1|-|A_2|+|A_1 \cap A_2|$

m =3: $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |S|-(|A_1|+|A_2|+|A_3|)$
$+(|A_1 \cap A_2|+|A_1 \cap A_3|+|A_2 \cap A_3|)$
$-|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

$$|\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

证明：验证每个元素在等式两边计数相等。

(1) 设 $x \in S$ 不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$，左边计数为：

$$\sigma_x(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}) = 1$$

右边计数为：$1-0+0-0+\ldots+(-1)^m 0=1$

$$|\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

(2) 设 $y \in S$ 具有其中 n (≥ 1)个性质，

左边计数为：$\sigma_y(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}) = 0$

右边计数： $\sigma_y(S) = 1 = \binom{n}{0}$（因为：$y \in S$）

$\sum_{i=1}^{m} \sigma_y(A_i) = n = \binom{n}{1}$（因为$A_1, \ldots, A_m$中有$n$个包含了$y$。）

$$\sum_{\{i,j\}是\{1,..,m\}的2\text{-}组合} \sigma_y(A_i \cap A_j) = \binom{n}{2}$$

因为$\sigma_y(A_i \cap A_j)=1$ 当且仅当 $y \in A_i$ 且 $y \in A_j$，因此，上式左边等于从n个物体取出 2个的组合个数。

$$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

一直继续下去，式子右边最后一项：

$$\sigma_y(A_1 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_m) = \binom{n}{m}$$

因此，右边等于：

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^m \binom{n}{n} + \ldots + (-1)^m \binom{n}{m} \quad n \leq m$$

$$= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^m \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$

证毕。

$$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

$$\|$$

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m}|$$

因此，$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = |S| - |\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m|$

推论6.1.2 集合S中至少具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$之一的元素的个数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \Sigma|A_i| - \Sigma|A_i \cap A_j| + \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

容斥原理：定理与推论

- 设集合A_i是集合S中满足性质 P_i 的所有物体的子集，$i=1, 2, \ldots, m$, 则

- 集合 S 不具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$的物体的个数为

$$\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_m = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

- 集合 S 中至少有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$之一的物体的个数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \Sigma|A_i| - \Sigma|A_i \cap A_j| + \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

课堂思考

例: 求 1 到1000不能被 5, 6或8整除 的数的个数.

解: 设A_1, A_2和A_3分别是1到1000中能被 5, 6和8整除的数集合，那么1到1000不能被5, 6或8整除的数的个数为$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$。

有 $|A_1| = \lfloor 1000/5 \rfloor = 200$

$|A_2| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$

$|A_3| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$

$|A_1 \cap A_2| = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$

$|A_1 \cap A_3| = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$

$|A_2 \cap A_3| = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$

由容斥原理得 $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|$

$$= 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8 = 600$$

课堂思考

例：字母M, A,T,H, I, S, F, U, N存在多少排列使得单词MATH, IS和FUN都不出现?

解：设 S 为 9个字母组成所有排列的集合,

A_1是MATH出现的排列集合； A_2是IS出现的排列集合；

A_3是FUN出现的排列集合。

则使得单词MATH, IS和FUN都不出现的排列个数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}|。$$

有 $|S|=9!$，$|A_1|= 6!$，$|A_2|=8!$，$|A_3|=7!$

$|A_1 \cap A_2|= 5!$，$|A_1 \cap A_3|= 4!$，$|A_2 \cap A_3|=6!$,

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|= 3!$,

由容斥原理计算可得（略）。

$$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

特别情况:

若 $\alpha_1=|A_1|=|A_2|=\ldots=|A_m|$（所有集合包含的元素个数相等）

$\alpha_2=|A_1\cap A_2|=\ldots=|A_{m-1}\cap A_m|$（任意两个集合的交包含相等个数的元素）

$\alpha_3=|A_1\cap A_2\cap A_3|=\ldots=|A_{m-2}\cap A_{m-1}\cap A_m|$

…（任意三个集合的交包含相等个数的元素个数）

$\alpha_k=|A_1\cap \ldots \cap A_k|=\ldots=|A_{m-k+1}\cap \ldots \cap A_m|$

…

$\alpha_m=|A_1\cap A_2\cap \ldots\cap A_m|$

则，$\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m$

$$=\alpha_0-\binom{m}{1}\alpha_1+\binom{m}{2}\alpha_2-\binom{m}{3}\alpha_3+\ldots+(-1)^k\binom{m}{k}\alpha_k+\ldots+(-1)^m\alpha_m$$

课堂思考

例. 从 0到 99999中有多少同时含有数字2, 5和8的整数。

解：设A_1，A_2和A_3分别是不包含数字2, 5和8的集合，需要计算$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|$。

0 到 99999 的整数个数：$\alpha_0=10^5$

$$\alpha_1=|A_1|=|A_2|=|A_3|=9^5$$

$$\alpha_2=|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=8^5$$

$$\alpha_3=|A_1\cap A_2\cap A_3|=7^5$$

因此，满足题意的整数个数为 $10^5-3\times9^5+3\times8^5-7^5$。

课堂思考

例：确定S={1, 2,…, 8}的排列中没有偶数在它的自然位置上的排列数

自然位置	1	2	3	4	5	6	7	8
自然排列	1	2	3	4	5	6	7	8
排列2 √	2	1	4	3	6	5	8	7
排列3	1	2	4	3	6	5	8	7

每个数都在其自然位置

每个数都不在其自然位置

例：确定$S=\{1, 2, \ldots, 8\}$的排列中没有偶数在它的自然位置上的排列数

自然位置	1	2	3	4	5	6	7	8
自然排列	1	2	3	4	5	6	7	8
排列2 √	2	1	4	3	6	5	8	7
排列3 ×	1	2	4	3	6	5	8	7

每个数都在其自然位置

每个数都不在其自然位置

例：确定S={1, 2,…, 8}的排列中没有偶数在它的自然位置上的排列数

解：设A_1, A_2, A_3, A_4分别为偶数 2，4，6，8在其自然位置上的排列够成的集合，因此 S 的排列中没有偶数在它的自然位置上的排列数为$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$。

$|A_1|=7! =|A_2|=|A_3|=|A_4|$

$|A_1 \cap A_2| =6! \quad = |A_i \cap A_j|, i, j=1, 2, 3, 4, i \neq j$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| =5! \quad = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4|$;

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4!$。

因此$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = 8!-4 \cdot 7!+6 \cdot 6! - 4 \cdot 5!+4!$

例：确定S={1,2,…, 8}的排列中至少有一个奇数在它的自然位置上的排列数。

解：设A_1, A_2, A_3, A_4分别为奇数1，3，5，7在其自然位置上的排列够成的集合，则S中至少有一个奇数在它的自然位置上的排列数为 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$。

有 $|A_1| = 7! = |A_i|, i=2,3,4$

$|A_1 \cap A_2| = 6! = |A_i \cap A_j|, i, j=1,2,3,4, i \neq j$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 5! = |A_i \cap A_j \cap A_k|, i, j, k=1,2,3,4, i \neq j \neq k$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 4!$

因此S中至少有一个奇数在它的自然位置上的排列数为 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$（略）

。

小结

- 容斥原理
  - 用于重叠集合的并集计数
  - 也用于重叠集合的补集的交集计数
- 用容斥原理解决更复杂的计数问题
  - 带重复的组合
  - 错位排列
  - 带有绝对/相对禁止位置的排列
  - 几何问题

第六章 容斥原理及应用

6.1 容斥原理

6.2 带重复的组合

6.3 错位排列

6.4 带有禁止位置的排列

6.5 另一个禁止位置问题

多重集的组合

- n个不同元素的集合的r子集的数目为$\binom{n}{r}$.
- 令S是多重集，包含k个不同的元素，每个元素都有无限重复次数，那么，S的r子集个数为$\binom{r+k-1}{r}$.
- 假设$n_i \geq r$ $(i=1,\ldots,k)$，则$T=\{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$的$r$组合数目等于$T'=\{r \cdot a_1, r \cdot a_2, \ldots, r \cdot a_k\}$的$r$子集数目，等于$\binom{r+k-1}{r}$.

如果存在i, 使得$n_i < r$，怎么计算？

容斥原理在多重集组合的应用

例1: 确定多重集$T=\{3.a, 4.b, 5.c\}$的10子集的个数.

每个10子集中的元素不会多于3个a，且不会多于4个b，且不会多于5个c。

解：令多重集$T^*=\{\infty\cdot a,\ \infty\cdot b,\ \infty\cdot c\}$的所有10子集的集合为$S$,

设：

A_1是S中包含多于3个a的10子集的集合,

A_2是S中包含多于4个b的10子集的集合,

A_3是S中包含多于5个c的10子集的集合,

那么，T的10-组合数等于$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|$

例1: 确定多重集T={3.a, 4.b, 5.c}的10子集的个数.

解(续)：应用容斥原理，计算：

$$|S|=\binom{10+3-1}{10}=66$$

A_1中的每个子集中a至少出现4次，剩下6个元素可以是 T^* 的任何6-组合，

因此，$|A_1|=\binom{6+3-1}{6}=\binom{8}{6}=28$

A_2中的每个子集中b 至少出现5次，剩下5个元素可以是T^*的任何5-组合，

因此，$|A_2|=\binom{5+3-1}{5}=\binom{7}{5}=21$

类似可得 $|A_3|=\binom{4+3-1}{4}=\binom{6}{4}=15$

例1: 确定多重集$T=\{3.a, 4.b, 5.c\}$的10子集的个数.

解(续): 计算$|A_1\cap A_2|$: $A_1\cap A_2$中的每个子集中 a 至少出现4次同时 b 至少出现5次，剩下1个元素可是T^*的任何1子集，因此

$$|A_1\cap A_2|=\binom{1+3-1}{1}=\binom{3}{1}=3$$

类似的，
$$|A_1\cap A_3|=\binom{0+3-1}{0}=\binom{2}{0}=1$$
$$|A_2\cap A_3|=0$$
$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

应用容斥原理:

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|=66-(28+21+15)+(3+1+0)-0=6$$ 。

多重集组合与方程整数解个数

令S＝$\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2,\ldots, \infty\cdot a_k\}$，则 S 的一个r组合具有形式$\{x_1\cdot a_1, x_2\cdot a_2,\ldots, x_k\cdot a_k\}$，满足

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=r\ ,$$

其中，x_i是非负整数，即$x_i \geq 0, i=1, 2, \ldots, k$。
以上方程的任何一个解确定 S 的一个r组合，反之亦然，因此S的 r组合个数等于以上方程解的个数。

多重集$T=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2,\ldots, n_k\cdot a_k\}$的 r组合数等于方程

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=r,\ 0\leq x_1\leq n_1, 0\leq x_2\leq n_2, \ldots, 0\leq x_k\leq n_k$$

的整数解的个数。

例2: 求满足$1\le x_1 \le 5$, $-2\le x_2 \le 4$, $0\le x_3 \le 5$, $3\le x_4 \le 9$的方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ 的整数解个数。

解:作变量替换 $y_1=x_1-1$, $y_2=x_2+2$, $y_3=x_3$, $y_4=x_4-3$得到方程:

$$y_1+y_2+y_3+y_4=16 \qquad (*)$$

且关于x_i 的不等式成立当且仅当

$$0\le y_1 \le 4,\ 0 \le y_2 \le 6,\ 0\le y_3 \le 5,\ 0\le y_4 \le 6。 \qquad (**)$$

因此满足题意的整数解个数等于当条件（**）满足时，方程（*）的整数解的个数。

令A_1, A_2, A_3, A_4分别表示方程（*）在$y_1 \ge 5$， $y_2 \ge 7$，$y_3 \ge 6$， $y_4 \ge 7$时的整数解的个数，则条件（**）满足时，方程（*）的整数解的个数为 $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|$。

例2: 求满足$1\le x_1\le 5, -2\le x_2\le 4, 0\le x_3\le 5, 3\le x_4\le 9$的方程$x_1+x_2+x_3+x_4=18$的整数解个数。

解:（续）设S是方程(*)的非负整数解的集合，则$|S|$等于方程

$y_1+y_2+y_3+y_4=16$的非负整数解的个数，得

$y_1+y_2+y_3+y_4=16$
$0\le y_1\le 4,\ 0\le y_2\le 6,$
$0\le y_3\le 5,\ 0\le y_4\le 6$

$$|S|=\binom{16+4-1}{16}=\binom{19}{16}=969$$

令$z_1=y_1-5, z_2=y_2, z_3=y_3, z_4=y_4$, 那么, $|A_1|$与方程$z_1+z_2+z_3+z_4=11$的非负整数解个数相等，得

$$A_1=\binom{11+4-1}{11}=\binom{14}{11}=364$$

令$z_1=y_1, z_2=y_2-7, z_3=y_3, z_4=y_4$, 那么, $|A_2|$与方程$z_1+z_2+z_3+z_4=9$的非负整数解个数相等，得

$$A_2=\binom{9+4-1}{9}=\binom{12}{9}=220$$

例2: 求满足$1\le x_1 \le 5$, $-2\le x_2 \le 4$, $0\le x_3 \le 5$, $3\le x_4 \le 9$的方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ 的整数解个数。

解:（续）

$y_1 + y_2+y_3+y_4=16$
$0\le y_1 \le 4$, $0 \le y_2 \le 6$,
$0\le y_3 \le 5$, $0\le y_4 \le 6$

令 $z_1=y_1$, $z_2=y_2$, $z_3=y_3-6$, $z_4=y_4$, 那么, $|A_3|$与方程 $z_1+z_2+z_3+z_4=10$ 的非负整数解个数相等，得

$$A_3 = \binom{10+4-1}{10} = \binom{13}{10} = 286$$

令 $z_1=y_1$, $z_2=y_2$, $z_3=y_3$, $z_4=y_4-7$ ， 那么, $|A_4|$与方程 $z_1+z_2+z_3+z_4=9$ 的非负整数解个数相等，得

$$A_4 = \binom{9+4-1}{9} = \binom{12}{9} = 220$$

。

例2: 求满足$1\le x_1 \le 5$, $-2\le x_2 \le 4$, $0\le x_3 \le 5$, $3\le x_4 \le 9$的方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=18$ 的整数解个数。

解：（续）令 $z_1=y_1-5$, $z_2=y_2-7$, $z_3=y_3$, $z_4=y_4$, 得 $|A_1\cap A_2|$与方程 $z_1+z_2+z_3+z_4=4$ 的非负整数解个数相等，得

$$A_1\cap A_2=\binom{4+4-1}{4}=\binom{7}{4}=35,$$

$y_1+y_2+y_3+y_4=16$

$0\le y_1\le 4$, $0\le y_2\le 6$,

$0\le y_3\le 5$, $0\le y_4\le 6$

同理可得，

$$A_1\cap A_3=\binom{5+4-1}{5}=\binom{8}{5}=56,\ A_1\cap A_4=\binom{4+4-1}{4}=\binom{7}{4}=35$$

$$A_2\cap A_3=\binom{3+4-1}{3}=\binom{6}{3}=20,\ A_2\cap A_4=\binom{2+4-1}{2}=\binom{5}{2}=10$$

$$A_3\cap A_4=\binom{3+4-1}{3}=\binom{6}{3}=20。$$

又集合A_1, A_2, A_3, A_4中任意三个的交都是空集。

应用容斥原理可得结论（略）。

第六章 容斥原理及应用

知识点 Inclusive-exclusion principle

$|A_1\cup\cdots\cup A_n|=$
$\Sigma|A_i|-\Sigma|A_i\cap A_j|+\Sigma|A_i\cap A_j\cap A_k|$
$+\ldots+(-1)^{m+1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m|$

$|\bar{A}_1\cap\cdots\cap\bar{A}_m|=$
$|S|-\Sigma|A_i|+\Sigma|A_i\cap A_j|-\Sigma|A_i\cap A_j\cap A_k|$
$+\ldots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m|$

容斥原理

多重集$\{n_1\cdot a_1,\ldots,n_t\cdot a_t\}$的组合数, $n_1+\ldots+n_t=r$

$\exists n_i<r$

生成函数（第7章）（每种元素出现次数带有约束）

$\binom{r+t-1}{r}$, $n_i\geq r, i=1,2,\ldots,t$

广义容斥原理

$\{1,\ldots,n\}$的排列数

错位排列 $i_1i_2\ldots i_n$
$i_j\neq j, j=1,2,\ldots n$

带有禁止位置的排列
$i_1i_2\ldots i_n$, $i_j\notin X_j$, j=1,...,n

带有相对禁止位置的排列
$i_1i_2\ldots i_n$, 无 12, 23, ...,$(n-1)n$

线性排列

循环排列

6.3 错位排列(Derangement)-概念

例：1. 四位厨师聚餐时各做了一道拿手菜。现在要求每人去品尝一道菜，但不能尝自己做的那道菜。问共有几种不同的尝法？

2. 假设同学们做课堂测试，每位同学选择一位同学给其评分（不能给自己评分），问有多少种不同的选择方法？

定义1: 设 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$, 它的排列用$i_1\ i_2\ldots\ i_n$表示。错位排列是使得 $i_1\neq 1, i_2\neq 2,\ldots, i_n\neq n$ 的排列。
用D_n表示错位排列个数。

（1） 错位排列–概念与示例

定义1：设 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$，它的排列用$i_1\, i_2 \ldots\, i_n$表示。错位排列是使得 $i_1 \neq 1,\ i_2 \neq 2, \ldots,\ i_n \neq n$ 的排列。用D_n 表示错位排列个数。

$n=1$时，X有1个排列： 1 $D_1=0$

$n=2$时，X有2个排列：12，$\boxed{21}$ $D_2=1$

$n=3$时，X有6个有排列：123,132, 213, $\boxed{231}$, $\boxed{312}$, 321 $D3=2$

$n=4$时，X共有 24 个排列；错位排列为：

2143， 3142， 4123，2341， 3412，

4312，2413， 3421， 4321

$D_4 = 9$

(2) 用容斥原理求解D_n

设 S是全部排列$i_1\ i_2\ldots\ i_n$的集合，而 A_j是$i_j=j$ 的排列集合，则 $D_n=\overline{A}_1\cap\cdots\cap\overline{A}_m$

j 在第 j 个位置上

- 对于任意 $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$，A_i是第 i个位置为 i 的排列的集合，因此 $|A_i|=(n-1)!$
- 对于任意 $i, j\in\{1, 2, \ldots, n\}$，且 $i\neq j$, $A_i\cap A_j$是第 i个位置为 i, 第 j个位置为 j的排列的集合，因此 $|A_i\cap A_j|=(n-2)!$
- 对于任意两两不同的 $i_1, \ldots, i_k\in\{1, 2, \ldots, n\}$，$A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_1}$ 是第 i_j个位置为 j (j=1,…, k) 的排列的集合，因此，

$$|A_{i1}\cap\ldots\cap A_{ik}|=(n-k)!\ ,\quad 1\leq k\leq n$$

(2) 用容斥原理求解D_n

$$D_n = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} 0!$$

$$= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

$$= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

定理6.3.1 对$n \geq 1$,

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

计算可得: $D_5 = 44$, $D_6 = 265$, $D_7 = 1854$, $D_8 = 14833$

课堂思考

例1：在一次聚会上，有n位男士和n位女士。

(1)这n位女士能够有多少种方法选择男舞伴开始跳第一支舞？ $n!$

(2) 如果每人必须要换舞伴，那么第二支舞又有多少种选择方法？ D_n

例：设上述聚会中,男士和女士在跳舞前存放他/她们的帽子.

(1) 在聚会结束时随机地返回他/她们这些帽子，有多少种方法？ $(2n)!$

(2) 如果每位男士得到一顶男帽，每位女士得到一顶女帽，有多少种方法？ $n!\cdot n!$

(3) 如果每位男士得到一顶男帽，每位女士得到一顶女帽，但又都不是他/她们自已曾经存放的那顶帽子，有多少种方法？ $D_n\cdot D_n$

例2：在一次聚会上，7位绅士存放他们的帽子。有多少种方法使得他们的帽子返还时满足

(1) 没有绅士收到他自己的帽子？

(2) 至少一位绅士收到他自己的帽子？

(3) 至少两位绅士收到他们自己的帽子？

解: (1) D_7

(2) $7! - D_7$

(3) $7! - D_7 - 7D_6$

课堂思考

例3：确定{1, 2,…, 8}的排列中恰有四个整数在它们的自然位置上的排列数。

解：任选四个整数在自然位置上：$\binom{8}{4}$

剩下四个整数不在其自然位置上：D_4

因此，恰有四个整数在它们的自然位置上的排列数为

$$\binom{8}{4}D_4$$

(3) 错位排列D_n的递推关系

定理6.3.1 对$n\geq1$，

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

计算机求解有什么问题？

(3) 错位排列的递推关系

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

D_n 满足如下递推关系:

a) $D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$, $(n=3,4,\ldots)$

初始值 $D_2=1$；$D_1=0$

- 设d_n为第一个位置为 2的错位排列个数

$i_j \neq j,\ j=1,\ldots,n$

$i_1 i_2 \ldots i_n$

错位排列

$D_n=(n-1)d_n$

$i_1 \neq 1$

$2i_2\ldots i_n$ d_n

$3i_2\ldots i_n$ d_n

…

$ni_2\ldots i_n$ d_n

错位排列

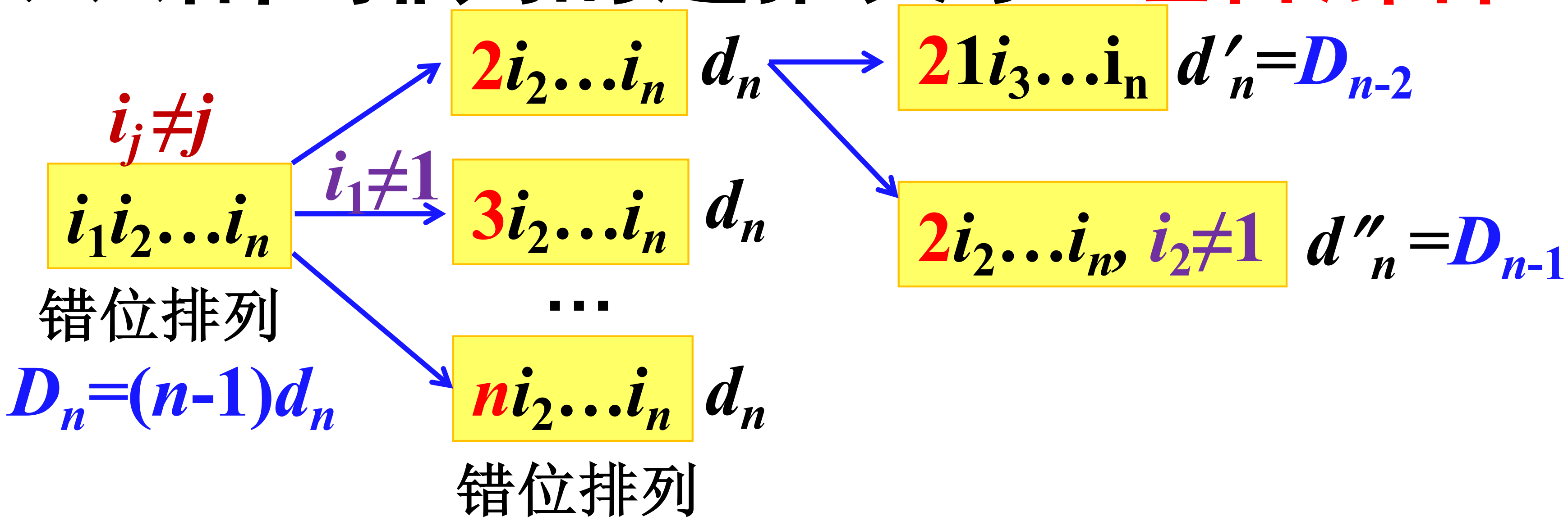
$21i_3\ldots i_n$ $d'_n=D_{n-2}$

$2i_2\ldots i_n,\ i_2 \neq 1$ $d''_n=D_{n-1}$

相当于{1, 3, 4, …, n}的错位排列

$$D_n=(n-1)d_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$$

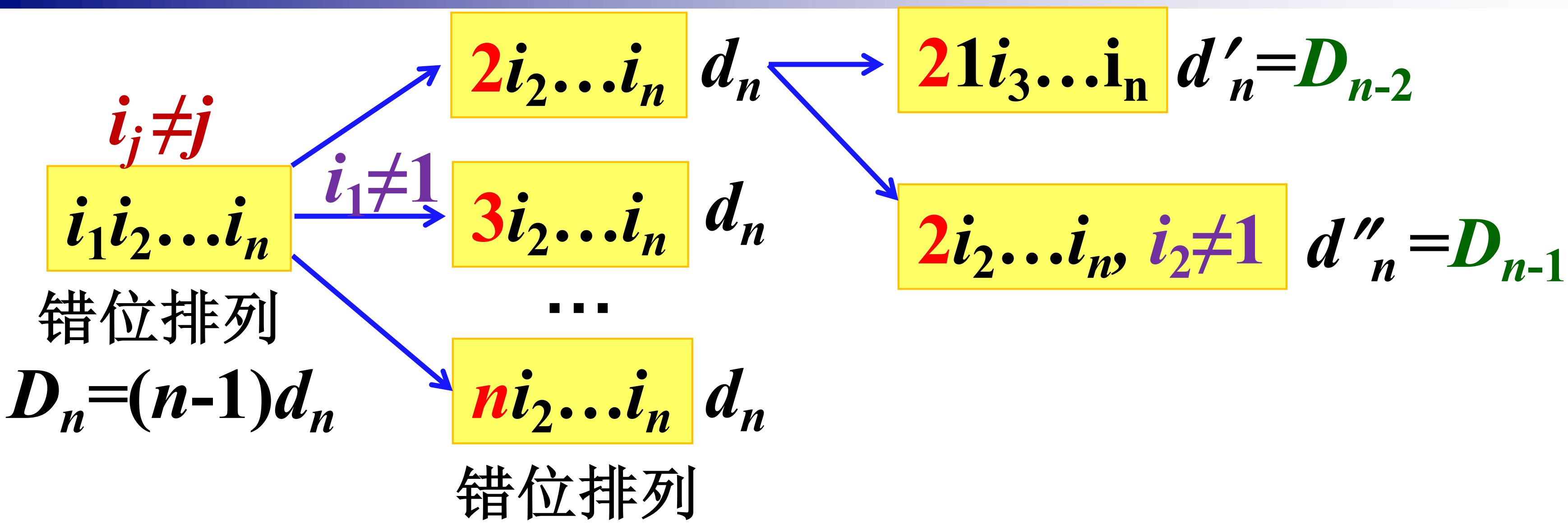
(3) 错位排列的递推关系：组合解释



- D_n是集合$\{1, 2, \ldots, n\}$的错位排列数。
  - 第1位可以是$2,\ldots,n$的任一个，划分为$n-1$个部分：

    $i_1\ i_2 \ldots i_n$， $i_1 \in \{2,\ldots,n\}$ $i_2 \neq 2,\ldots,\ i_n \neq n$
- 设 d_n是2在第1位的错位排列数，

  则$D_n=(n-1)d_n$



- 排列$2i_2,\ldots,i_n$可进一步划分两种情况：

$2\ 1\ i_3 \ldots i_n,\qquad i_3\neq 3,\ldots, i_n\neq n,$

$2\ i_2\ i_3 \ldots i_n,\qquad i_2\neq 1, i_3\neq 3,\ldots, i_n\neq n$

设d'_n是第1种排列数,与集合$\{3, 4, \ldots, n\}$ 错位排列相等，即

$$d'_n=D_{n-2};$$

设d''_n是第2种排列数,与集合$\{1, 3, 4, \ldots, n\}$错位排列相等，即

$$d''_n=D_{n-1};$$

则 $d_n= d'_n+d''_n$, 得 $D_n=(n-1)(d'_n+ d''_n) = (n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$

(3) 错位排列的其他递推关系

D_n 满足如下递推关系:

- $D_n = (n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$, $(n=3,4,\ldots)$
  初始值 $D_2=1$; $D_1=0$
- $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$

利用递推关系推导:

$$
\begin{aligned}
D_n-nD_{n-1} &= -[D_{n-1}-(n-1)D_{n-2}] \\
&= (-1)^2[D_{n-2}-(n-2)D_{n-3}] \\
&\cdots \\
&= (-1)^{n-2}(D_2-2D_1)
\end{aligned}
$$

由 $D_1=0$，$D_2=1$进一步得到：$D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$

(3) 练习：用递推关系计算错位排列

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

- $D_5=44$，那么， $D_6 = 6\times44+(-1)^6=265$

  $D_7 = 7\times265+(-1)^7=1854$

  $D_8 = 8\times1854+(-1)^8=14833$

  …… ……

- 证明：D_n 是偶数当且仅当 n 是奇数?

第六章 容斥原理及应用

6.1 容斥原理

6.2 带重复的组合

6.3 错位排列

6.4 带有禁止位置的排列 Permutations with forbidden positions

6.5 另一个禁止位置问题

6.4（1）带有禁止位置的排列–定义

设$X=\{1, 2,\ldots, n\}$，它的排列用$i_1i_2\ldots i_n$表示，错位排列是使得 $i_1\neq 1, i_2\neq 2,\ldots, i_n\neq n$ 的排列。

$i_1\notin\{1\}, i_2\notin\{2\},\ldots, i_n\notin\{n\}$

- 扩展：有禁止位置的排列

令$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是$\{1, 2, \ldots, n\}$的子集 (可以为空集)，用 $P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 表示$\{1, 2 ,\ldots, n\}$的排列 $i_1i_2\ldots i_n$ 的集合，使得：$i_1\notin X_1$， $i_2\notin X_2$， …， $i_n\notin X_n$

记 $p(X_1, X_2, \ldots, X_n)=|P(X_1, X_2, \ldots, X_n)|$，

表示$P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 中排列的个数。

6.4（1）带有禁止位置的排列-示例

例：$X_1=\{1,2\}, X_2=\{2,3\}, X_3=\{3,4\}, X_4=\{4,1\}$是$\{1,2,3,4\}$的子集，求$p(X_1, X_2, X_3, X_4)$。

解：（方法1：直接计算）

$P(X_1, X_2, X_3, X_4)$ 中的排列 $i_1i_2i_3i_4$ 满足下列条件：

$$i_1\neq 1, 2;\ \ i_2\neq 2, 3;\ \ i_3\neq 3, 4;\ \ i_4\neq 1, 4。$$

等价于 $i_1=3$或4；$i_2=1$或4；$i_3=1$或2；$i_4=2$或3。

因此，$P(X_1, X_2, X_3, X_4)=\{3412, 4123\}$

$$p(X_1, X_2, X_3, X_4)=2$$

（方法2：容斥原理）

6.4（1）带有禁止位置的排列–示例

例：$X_1=\{1,2\}, X_2=\{2,3\}, X_3=\{3,4\}, X_4=\{4,1\}$是 $\{1, 2, 3, 4\}$的子集，求$p(X_1, X_2, X_3, X_4)$。

解：（方法2：容斥原理）

设集合$\{1, 2, 3,4\}$的一个排列为 $i_1 i_2 i_3 i_4$，

A_j表示 $i_j \in X_j$的排列的集合，j=1, 2, 3, 4, 则

$p(X_1, X_2, X_3, X_4)=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|$。

令 S表示$\{1, 2, 3, 4\}$的所有排列的集合，则$|S|=4!$。

$|A_1|=\binom{2}{1}3!=|A_2|=|A_3|=|A_4|$，

$|A_1\cap A_2|=(2+1)2!=|A_1\cap A_4|=|A_2\cap A_3|=|A_3\cap A_4|$

$|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_4|=\binom{2}{1}\binom{2}{1}2!$。

$|A_i\cap A_j\cap A_k|=\ldots$（略）。

6.4 （1）带有禁止位置的排列-思考？

例1：假设同学们做课堂测试，每位同学选择一位同学给其评分，且不能给自己评分，问有多少种不同的选择方法？

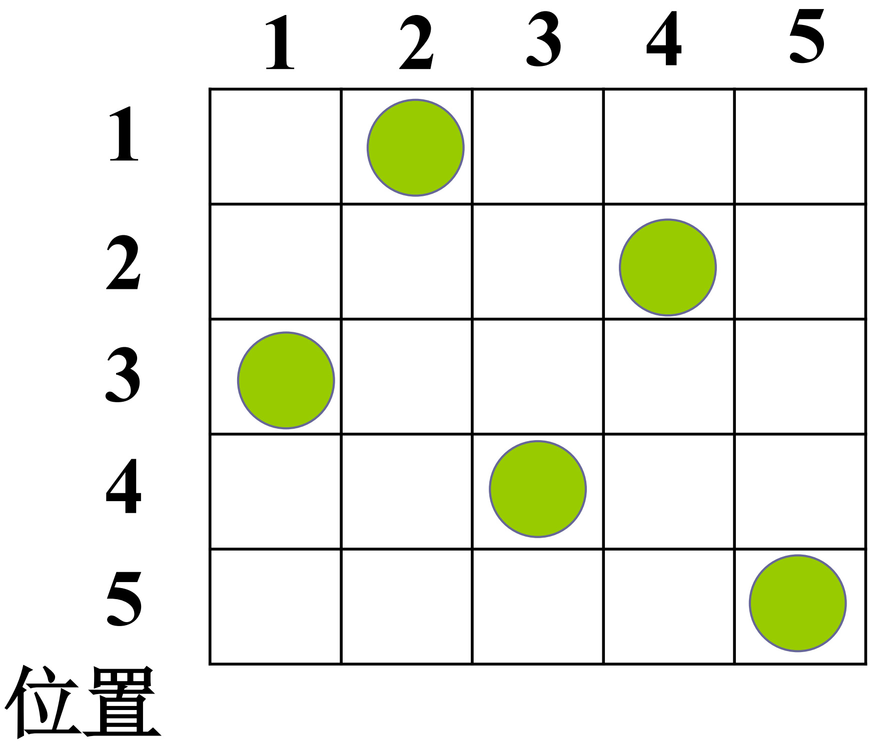
例2：假设同学们做两次课堂测试，每次每位同学选择一位同学给其评分，且不能给自己评分，且在第二次课堂测试中，每位同学不能选择上次测试给自己评分的同学评分。问有多少种不同的选择方法安排两次课堂测的评分？

(2) 带禁止位置的“非攻击型车”

{1, 2, …, *n*}的排列 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 对应于棋盘上以方格

$$(1, i_1), (2, i_2), \ldots, (n, i_n)$$

为坐标的*n*个车的位置



*n*个车位于不同的行与不同的列

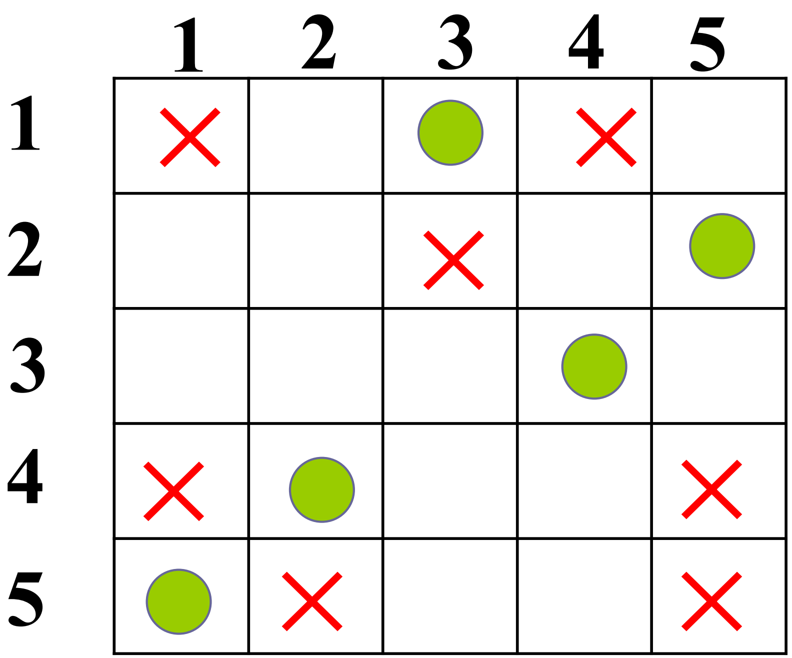
⇒ **2 4 1 3 5**

(2) 带禁止位置的“非攻击型车”

$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列 $i_1 i_2 \ldots i_n$ 对应于棋盘上以方格

$$(1, i_1), (2, i_2), \ldots, (n, i_n)$$

为坐标的n个车的位置



设 $n=5$, $X_1=\{1, 4\}$, $X_2=\{3\}$, $X_3=\emptyset$, $X_4=\{1, 5\}$, $X_5=\{2, 5\}$,

则 $P(X_1, X_2, \ldots, X_5)$中的排列与左图所示的在棋盘上有禁止位置的5个非攻击型车的放置一一对应。

➡ 3 5 4 2 1

问题：满足第 j 行的车不在 X_j 中的列，$j=1, 2, 3, 4, 5$，共有多少种放置非攻击型车的方法？

(2) 带禁止位置的“非攻击型车”

满足第 j 行的车不在 X_j 中的列，$j=1, 2,\dots, n$，
共有多少种放置非攻击型车的方法?

令属性 P_j 表示第 j 行的车放在 X_j 所给出的禁止位置中，且 A_j 为具有属性 P_j 的车的放置方法集合。

由容斥原理得，$p(X_1, X_2, \dots, X_n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}|$

$= n! - \sum |A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$

(1) $|A_j| = |X_j|\,(n-1)!\ (j=1, 2, \dots, n)$

$\Sigma\,|A_j| = (|X_1|+|X_2|+\dots+|X_n|)\,(n-1)!$

令 $r_1 = (|X_1|+|X_2|+\dots+|X_n|)$

则 $\Sigma\,|A_j| = r_1\,(n-1)!$

(2) 带禁止位置的“非攻击型车”

满足第 j 行的车不在 X_j 中的列，j=1, 2,…, n，
共有多少种放置非攻击型车的方法?

令属性 P_j 表示第 j 行的车放在 X_j 所给出的禁止位置中，且 A_j 为具有属性 P_j 的车的放置方法集合。

由容斥原理得，$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$

$= n! - \sum|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$

(2)考虑 $A_i \cap A_j$：在第 i、j 行，车分别放入了 X_i 和 X_j 所给出的禁止位置中。

$|A_i \cap A_j| = |X_i|\cdot|X_j|$?

X_i 和 X_j 可能相交不为空

(2) 带禁止位置的“非攻击型车”

满足第 j 行的车不在 X_j 中的列，j=1, 2,…, n，
共有多少种放置非攻击型车的方法?

令属性 P_j 表示第 j 行的车放在 X_j 所给出的禁止位置中，且 A_j 为具有属性 P_j 的车的放置方法集合。

由容斥原理得，$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$

$= n! - \sum|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$

(2)考虑 $A_i \cap A_j$：在第 i、j 行，车分别放入了 X_i 和 X_j 所给出的禁止位置中。

设 r_2 是把所有任意两个非攻击型车放到棋盘禁止位置上的方法数，

则 $\Sigma|A_i \cap A_j| = r_2(n-2)!$

如何计算 r_2?

满足第 j 行的车不在 X_j 中的列，j=1, 2,…, n，
共有多少种放置非攻击型车的方法？

令属性 P_j 表示第 j 行的车放在 X_j 所给出的禁止位置中，且 A_j 为具有属性 P_j 的车的放置方法集合。

由容斥原理得，$p(X_1, X_2, \ldots, X_n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}|$

$= n! - \sum|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$

(3) 令 r_k 为把所有任意 k 个非攻击型车放到棋盘的禁止放置的位置上（由 X_{i_k} 给出）的方法数（$k \le n$），则

$$\sum|A_{i_1} \cap A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = r_k(n-k)!$$

定理6.4.1 将n个非攻击型不可区分的车放到带有禁止位置的$n\times n$的棋盘中，放法总数等于：

$r_1, r_2, \ldots, r_n$的计算依赖于具体的问题！

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\ldots+(-1)^k r_k(n-k)!+\ldots+(-1)^n r_n$$

(2)通项形式

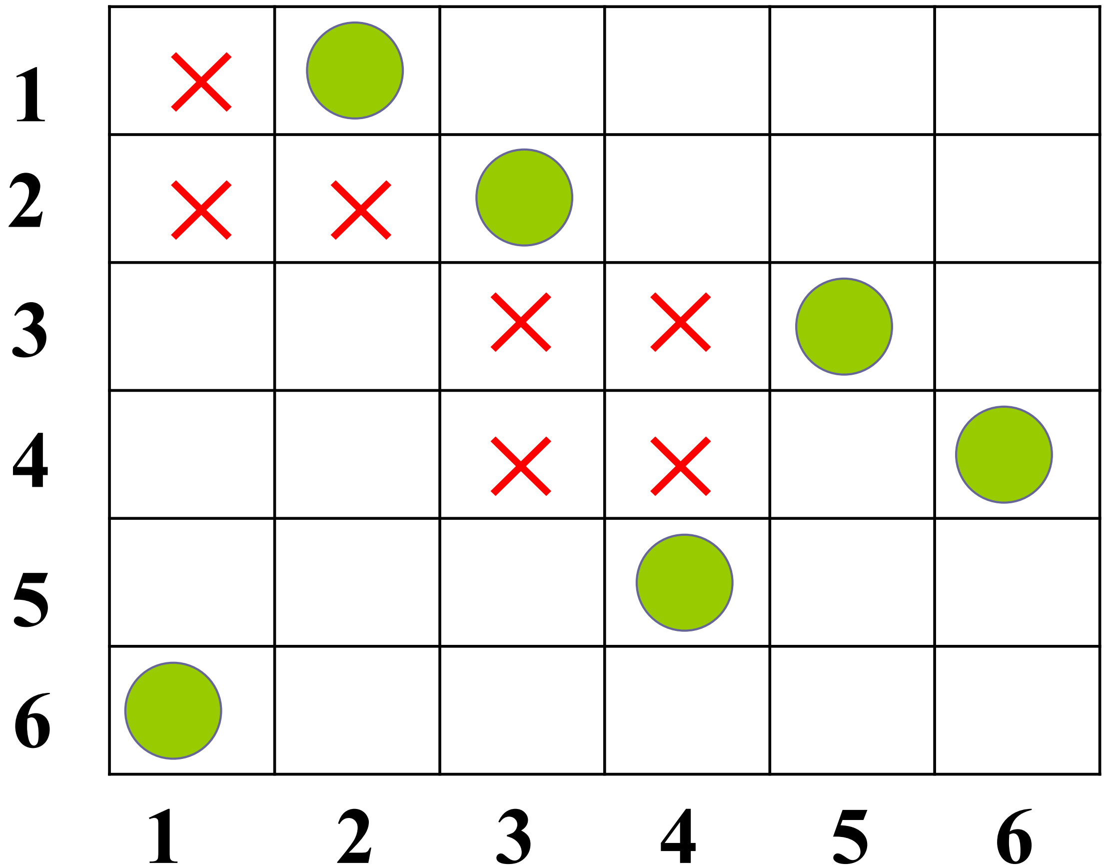
定理6.4.1 将n个非攻击型不可区分的车放到带有禁止位置的$n*n$的棋盘中，放法总数等于：

$$n!-r_1(n-1)!+r_2(n-2)!-\ldots+(-1)^k r_k(n-k)!+\ldots+(-1)^n r_n$$

- 任意两个车不在同一行或同一列
- r_k：所有的k个车放置在其禁止位置上的放置方法数，
  $k=1, 2, \ldots, n$
- r_k的计算不考虑剩下的$n-k$个车的放置

(2) 带禁止位置的“非攻击型车”-例题

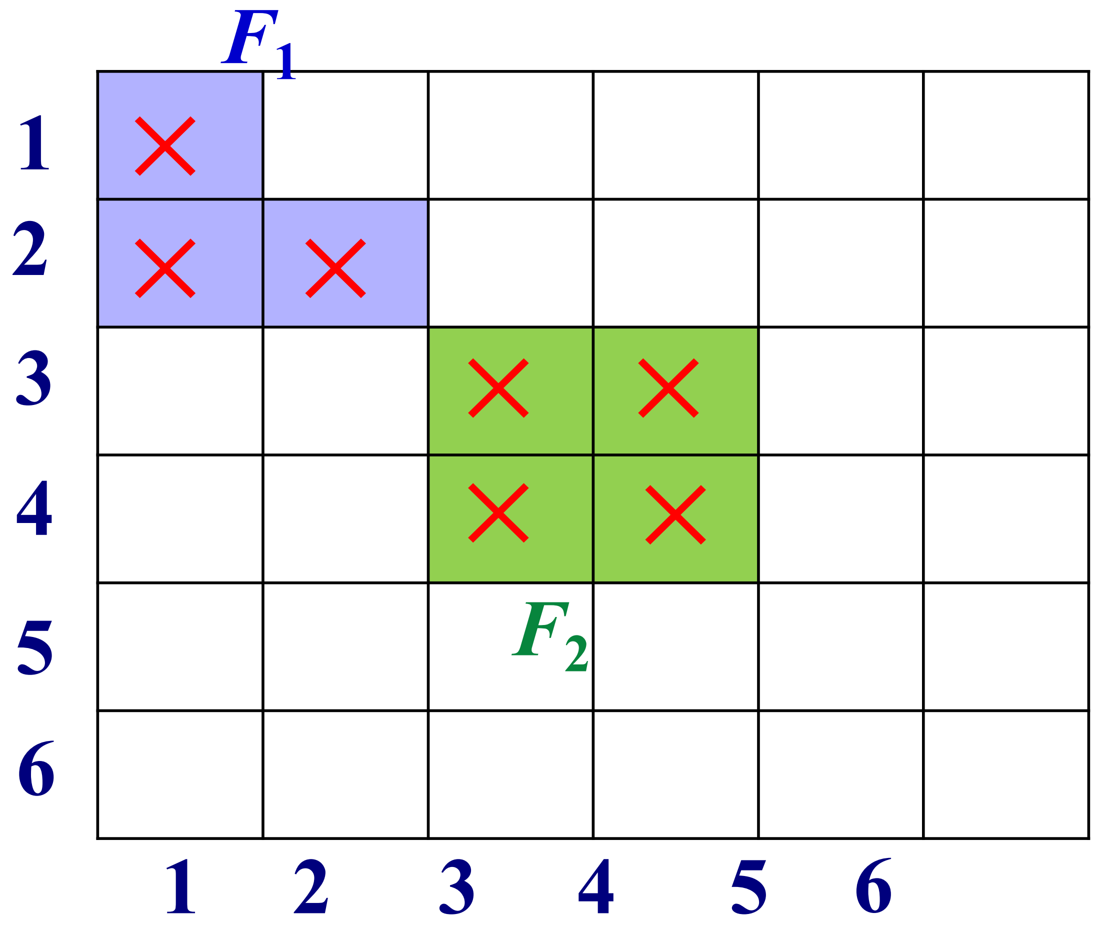
例：带禁止位置的“非攻击型车”



求r_k

- r_1：　所有1个非攻击车放入禁止位置的可能数
  - r_1=1+2+2+2=7
- r_2：所有2个非攻击车放入禁放位置的方法数

(分F_1, $F2$讨论)
  - F_1中放入两个：1
  - F_2中放入两个：2
  - F_1，F_2中分别放入一个：3·4=12



因此，r_2=1+2+12 =15。

r_3：3个非攻击车放入禁放位置的可能数

(分F_1, F_2讨论)

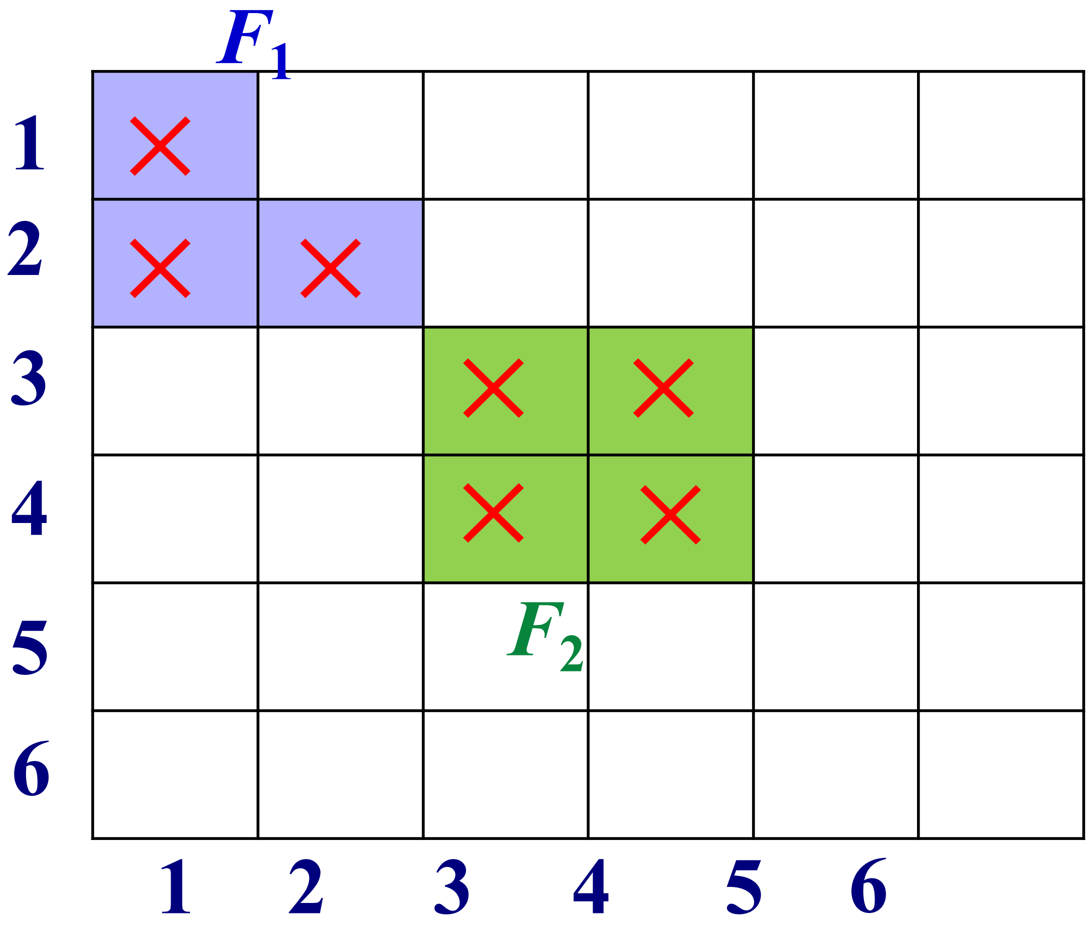
- F_1中放1个，F_2中放2个：
  $3\cdot 2 = 6$
- F_1中放2个，F_2中放1个：
  $1\cdot 4 = 4$

因此，$r_3 = 6 + 4 = 10$。

r_4：只能F_1与F_2中各放2个：

$1\cdot 2 = 2$

$r_5 = r_6 = 0$



由定理6.4.1，在上述棋盘中放入6个不可区分的非攻击型车，且没有车占据禁放位置的方法数等于：

$$6! - 7\cdot 5! + 15\cdot 4! - 10\cdot 3 + 2\cdot 2! = 226$$

第六章 容斥原理及应用

6.1 容斥原理
6.2 带重复的组合
6.3 错位排列
6.4 带有禁止位置的排列
6.5 另一个禁止位置问题

6.5 另一个禁止位置问题：示例

例：设一个班级 8个学生每天练习走步。这些学生站成一列纵队前行，第二天重新排队，使得没有一个学生前面的学生与第一天在他前面的学生是同一个人。他们有多少种方法交换位置？

第一天： 1 2 3 4 5 6 7 8

第二天： 3 1 4 5 8 2 7 6 ✗

确定 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} 的排列中不会出现 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78的那些排列的数量。

存在相对禁止位置的排列的计数问题

3 2 1 4 8 5 7 6 ✓

6.5 (1) 相对禁止位置排列计数 Q_n

Q_n：$\{1, 2, \ldots, n\}$的排列中没有$12, 23, \ldots, (n-1)n$ 这些模式出现的排列的个数

$n=1$: 1 $Q_1=1$

$n=2$: 12, $\boxed{21}$ $Q_2=1$

$n=3$: 123, $\boxed{132}$, $\boxed{213}$, 231, 312, $\boxed{321}$ $Q_3=3$

$n=3$: $Q_4=11$

(2) 用容斥原理计算Q_n

令 S 为$\{1, 2, \ldots, n\}$的全部排列,

Q_n是S中没有12, 23, …, $(n-1)n$ 这些模式的排列的个数。

令 A_i是 $i\ (i+1)$ 出现的排列的集合，$i=1, 2, \ldots, n-1$， 则有

$$Q_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}|$$

$$= |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+ \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}|$$

令 A_i是 $i\ (i+1)$ 出现的排列的集合，$i=1,2,..,n-1$

计算A_i: A_1可看作 12, 3, …, n 的所有排列的集合，因此$|A_1|=(n-1)!$。显然，由对称性，对任意 i，都有$|A_i|=(n-1)!$。

计算$A_i \cap A_j$：讨论两种情况：

(1) $A_i \cap A_{i+1}$ 可看作1, 2, …, $(i, i+1, i+2)$, $i+3$, …, n 的所有排列的集合，因此 $|A_i \cap A_{i+1}|=(n-2)!$。

(2) $A_i \cap A_j\ (j>i+1)$ 可看作 1, 2,…, $(i, i+1)$, $i+2$, …, $(j, j+1)$, …, n 的所有排列的集合，因此 $|A_i \cap A_j|=(n-2)!$。

由对称性，对任意 i, j，都有$|A_i \cap A_j|=(n-2)!$。

同理可证，对于每个k子集$\{i_1,\dots, i_k\}$，有

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

（2）用容斥原理计算Q_n

令 S 为{1, 2, …, n}的全部排列,

Q_n 是 S 中没有12, 23, …, (n-1)n 这些模式的排列的个数。

令A_i是 $i(i+1)$ 出现的排列的集合，i=1, 2,.., n-1， 则有

$$Q_n = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}|$$

$$= |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

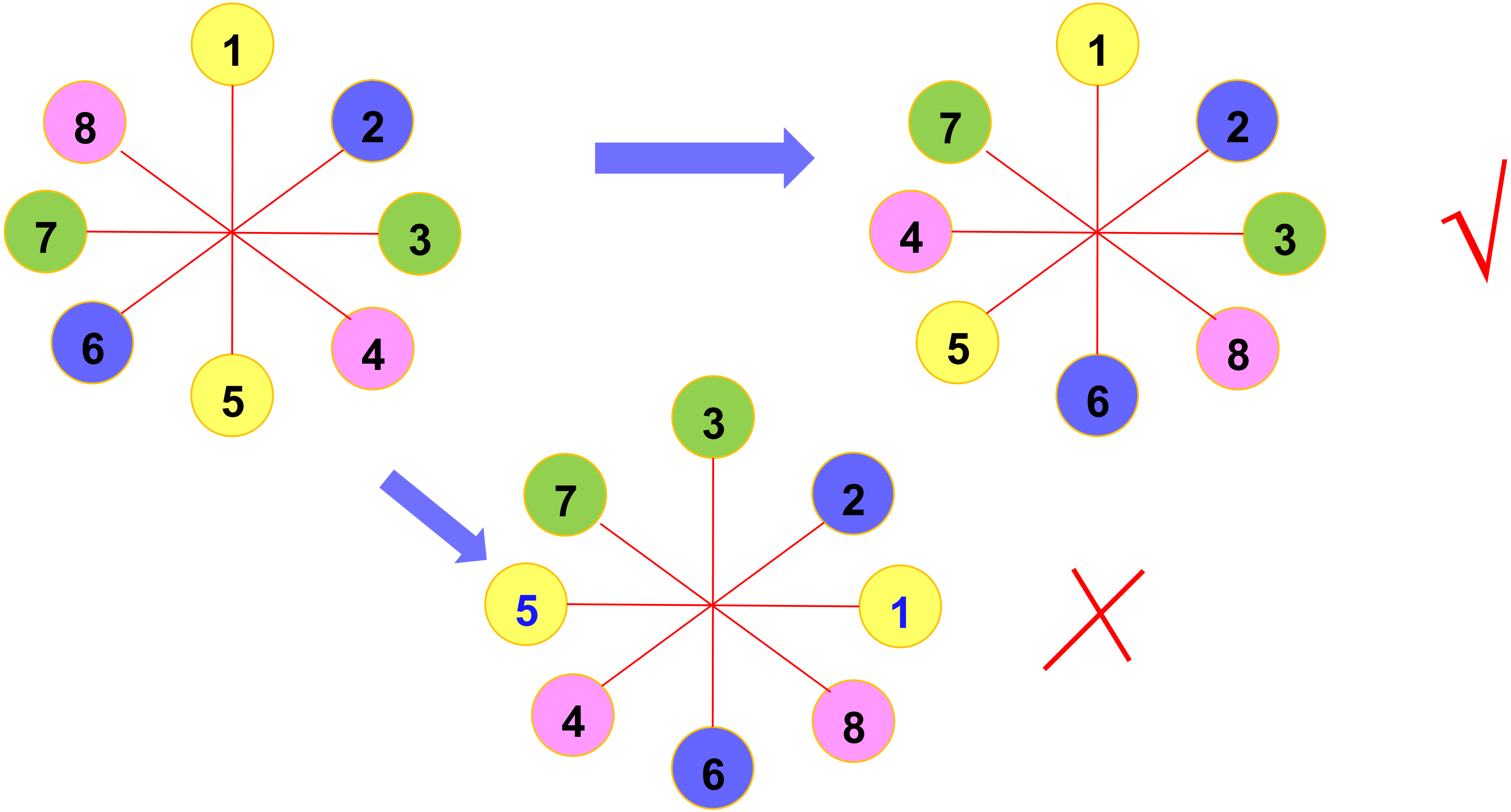
$$+ \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}|$$

定理 6.5.1 对于$n \geq 1$,

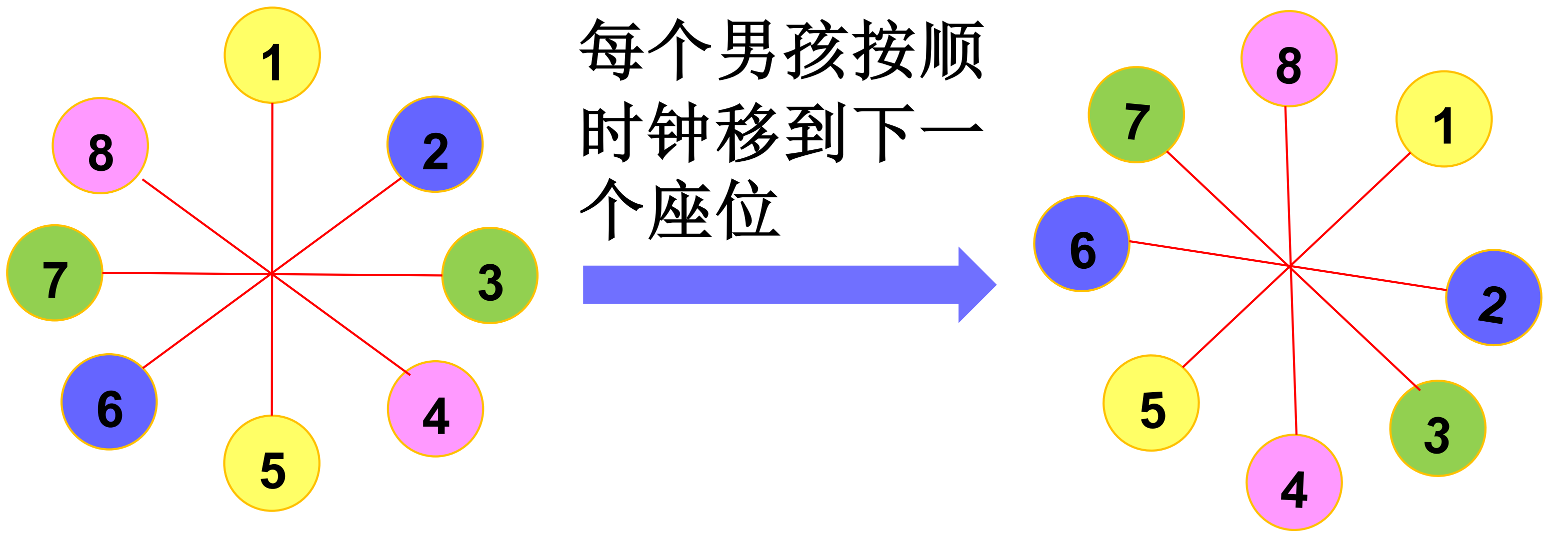
$$Q_n = n! + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \binom{n-1}{k}(n-k)!$$

$$= n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1} 1!$$

例1：旋转木马有8个座，每个座位都代表一种不同的动物。8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。他们能够有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？

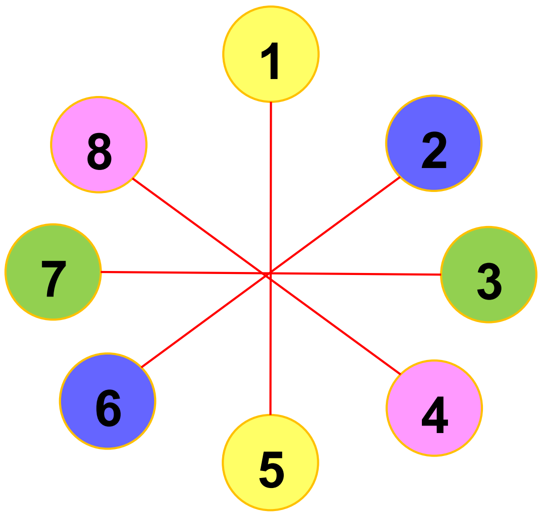


例1：旋转木马有8个座，每个座位都代表一种不同的动物。8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。他们能够有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？



问题：两者是否是同一种坐法？不是

例1：旋转木马有8个座，每个座位都代表一种不同的动物。8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。他们能够有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同?



解：应用容斥原理

假设 **8个男孩分成了四对**：

(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)。

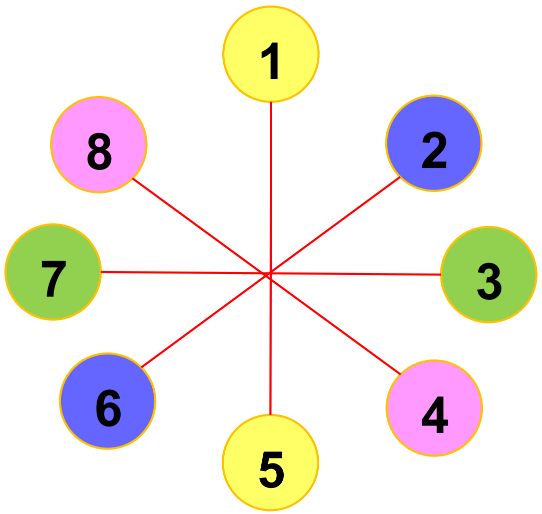
假设A_1, A_2, A_3, A_4分别表示仍然有**(1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8)**出现的坐法的集合。

则使得每人面对的男孩都不同的坐法的数目为：

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$$

由于每个座位代表一种不同的动物， **8**位男孩的排列总数为 **8!**。

例1：旋转木马有8个座，每个座位都代表一种不同的动物。8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。他们能够有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？



计算$|A_1|$：因为每个座位都代表一种不同的动物，因此 $|A_1|= 8*6!$

显然，由于对称性，$|A_i|= 8*6!, i=1,2,3,4.$

$|A_1 \cap A_2|= 8*6*4!=48*4!$，

同样，由于对称性，

$|A_i \cap A_j|=48*4!, i, j =1, 2, 3, 4, i \neq j.$

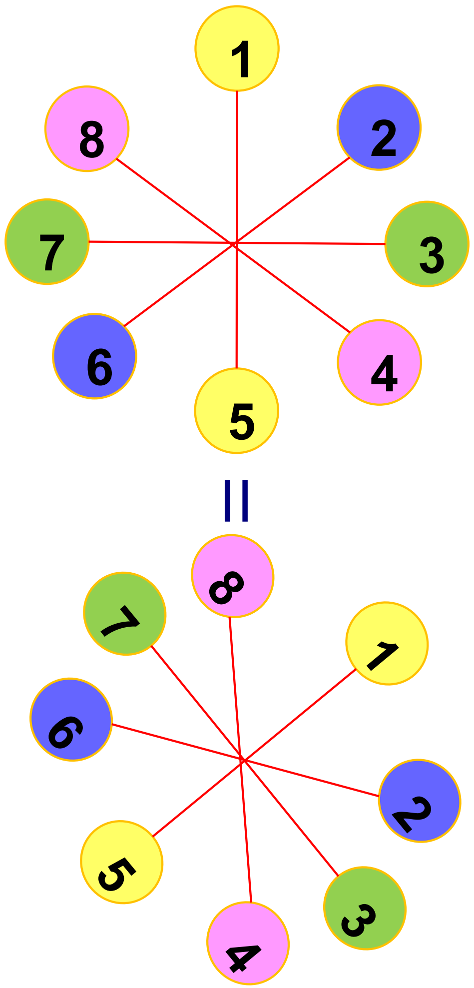
计算$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 8*6*4*2!,$

同样，由于对称性,$|A_i \cap A_j \cap A_k|=192*2!, i, j, k =1, 2, 3, 4, i \neq j \neq k.$

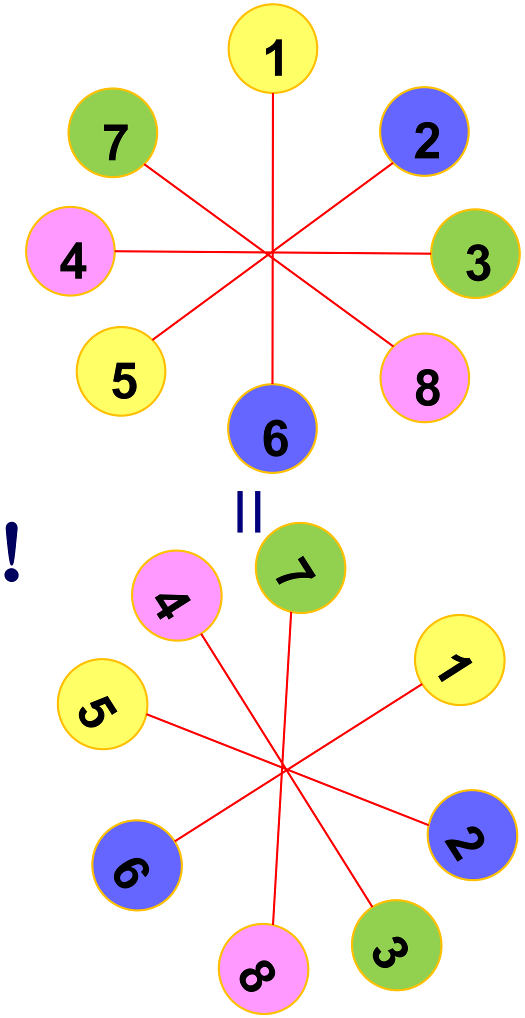
计算$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 | = 8*6*4*2$。

由容斥原理可得（略）。

例2：旋转木马有8个座8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。假设所有的座位都是一样，有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？

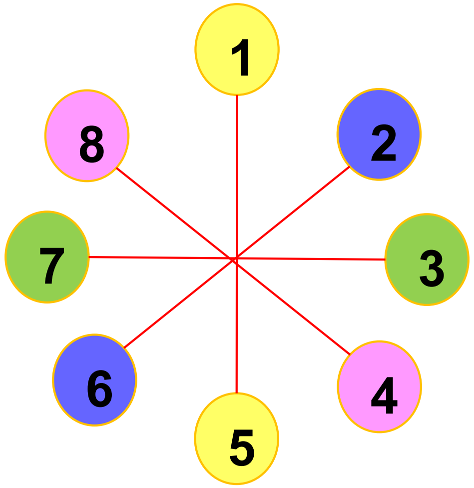


循环排列！



例：旋转木马有8个座8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。假设所有的座位都是一样，有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？

解：应用容斥原理



假设8个男孩分成了四对：(1,5), (2,6), (3,5), (4,8)。

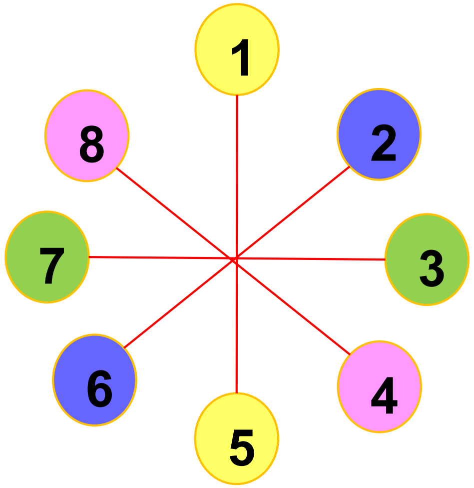
假设A_1, A_2, A_3, A_4分别表示仍然有(1,5), (2,6), (3,7), (4,8)出现的座法的集合。

则使得每人面对的男孩都不同的坐法的数目为：

$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$。

由于所有座位都是一样，因此**8位男孩的排列总数为 7!**

例：旋转木马有8个座8个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩。假设所有的座位都是一样，有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？



计算$|A_1|$：因为每个座位都是一样的，因此$|A_1|=6!$ 。

显然，由于对称性，$|A_i|= 6!$, $i=1,2,3,4$.

计算$|A_1 \cap A_2|=6*4!$,

同样，由于对称性，$|A_i \cap A_j|=6*4!$, $i,j=1,2,3,4$, $i\neq j$.

计算$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|=6*4*2!=24*2!$,

同样，由于对称性,$|A_i \cap A_j \cap A_k|=24*2!$, $i, j, k =1,2,3,4$, $i\neq j\neq k$.

计算$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|=6*4*2=48$。

由容斥原理可得（略）。

(3)相对禁止位Q_n与错位排列D_n的关系

- $D_n = n!(1- \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots +(-1)^n \frac{1}{n!})$
- $Q_n = n! - \binom{n-1}{1}(n-1)!+ \binom{n-1}{2}(n-2)!+\ldots+(-1)^{n-1} \binom{n-1}{n-1} 1!$

结论： $Q_n=D_n+D_{n-1}$

小结

- 容斥原理
- 带重复的组合
- 错位排列
- 带有（绝对）禁止位置的排列
- 带有（相对）禁止位置的排列

$$|\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

知识谱系 Inclusive-exclusion principle

$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| =$
$\Sigma|A_i| - \Sigma|A_i \cap A_j| + \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k|$
$+\ldots+ (-1)^{m+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$

$|\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_m| =$
$|S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k|$
$+\ldots+ (-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$

容斥原理

多重集$\{n_1 \cdot a_1, \ldots, n_t \cdot a_t\}$的组合数, $n_1+\ldots+n_t=r$

$\exists n_i < r$

$\{1, \ldots, n\}$的排列数

错位排列 $i_1 i_2 \ldots i_n$
$i_j \neq j, j = 1, 2, \ldots n$

带有禁止位置的排列
$i_1 i_2 \ldots i_n$, $i_j \notin X_j$, $j=1,\ldots,n$

?广义容斥原理

生成函数（第7章）
（每种元素出现次数带有约束）

$\binom{r+t-1}{r}$,
$n_i \geq r, i = 1, 2, \ldots, t$

带有相对禁止位置的排列
$i_1 i_2 \ldots i_n$, 无 12, 23, …,$(n\text{-}1)n$

线性排列

循环排列