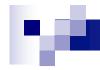
# 第8章特殊计数序列

- 8.1 Catalan数
- 8.2 差分序列和Stirling数
- 8.3 分拆数

# 第8章特殊计数序列

- 8.1 Catalan数
- 8.2 差分序列和Stirling数
- 8.3 分拆数



#### ■相关应用

- □ 矩阵相乘的括号化问题
- □出栈次序问题
- □ 给定顶点的二叉树组成问题
- □ 买票找零问题
- □ 走方格问题

#### ■主要内容

- □ Catalan数的定义和必要条件
- □一般项是Catalan数的计数问题

# M.

### 回顾

**定理7.6.1** 设 $h_n$ 表示用下面方法把凸多边形区域分成三角形区域的方法数:

在有n+1条边的凸多边形区域内通过插入不相交的 对角线,而把它分成三角形区域。

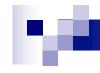
定义 $h_1$ =1。则 $h_n$ 满足如下递推关系:

$$h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \dots + h_{n-1} h_1 = \sum_{k=1}^{n-1} h_k h_{n-k} \quad (n \ge 2)$$

该递推关系的解为: 
$$h_n = \frac{1}{n} {2n-2 \choose n-1}$$
 (n=1, 2, 3,...)

#### Catalan数 $C_{n-1}$

■ 由比利时数学家欧仁·查理·卡塔兰 (1814-1894)提出



### Catalan数列

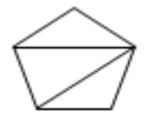
Catalan数列是序列  $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$ , 其中

$$C_n = \frac{1}{n+1} {2n \choose n}, n=0,1,2,...$$

是第n个Catalan数。

 $C_{n-1} = \frac{1}{n} {2n-2 \choose n-1}$ : 凸n+1边形被在其内部不相交的对角线划分成三角形区域的方法数













# Ŋ.

### Catalan数列的递推式

把凸n+1多边形区域分成三角形区域的方法数  $h_n$ 的递推式为

$$h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \dots + h_{n-1} h_1$$

由于
$$C_{n-1} = h_n \quad (n \ge 1)$$
,

$$C_{n-1} = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + \dots + h_{n-1} h_1$$
  
=  $C_0 C_{n-2} + C_1 C_{n-3} + \dots + C_{n-2} C_0$ 

$$C_n = \frac{1}{n+1} {2n \choose n}, n \ge 0$$

$$C_0 = 1$$

得Catalan数列 $C_0, C_1, \ldots, C_n$ , ...的递推式为

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0,$$

$$C_0=1, C_1=1, C_2=2, C_3=5, \dots$$

非线性递推关系

# Ŋė.

### Catalan数列的应用

■ Catalan数列的递推关系

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0,$$
  
 $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, \dots$ 

■ 第n 个 Catalan数:

$$C_n = \frac{1}{n+1} {2n \choose n}, C_0 = 1$$



■ 许多有意义的计数问题都导致这样的递推关系。

例. (括号化问题) 矩阵连乘  $P = M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ ,依据乘法结合律,不改变其顺序,只用括号表示成对的乘积,试问有几种括号化的方案?

思路:通过括号化,将P分成两个部分,然后分别对两个部分再进行括号化:  $1 \le k \le n-1$ 

$$(M_1 \times M_2 \times \dots M_k) \times (M_{k+1} \times \dots \times M_n)$$

$$k=1: (M_1)\times (M_2\times M_3 \dots \times M_n)$$

$$k = n-1$$
:  $(M_1 \times M_2 \times ... \times M_{n-1}) \times (M_n)$ 

设n个矩阵连乘的括号化方案的种数为 $h_n$ ,则

$$h_n = h_1 h_{n-1} + h_2 h_{n-2} + h_3 h_{n-3} + \dots + h_{n-1} h_1$$
°

计算开始几项, $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 2, h_4 = 5$ 。

因此, $h_n$ 为第n-1个Catalan数,即  $h_n=C_{n-1}=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}, n\geq 1$ 。

n	•••	<i>k</i> +1	k	<i>k</i> -1	•••	2	1
$i_1$	•••	$i_{n-k}$	$i_{n-k+1}$	$i_{n-k+2}$		$i_{n-1}$	$i_n$

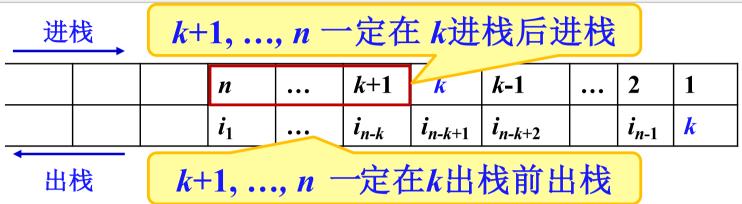
解:记出栈序列数目为 $h_n$ 。

假设一个出栈序列的最后一个出栈元素为 $k(1 \le k \le n)$ ,则有

进栈			-	1, 2,, k-1一定在 k进栈前进							
	n	•••	<i>k</i> +1	k	<i>k</i> -1	•••	2	1			
	$i_1$	•••	$i_{n-k}$	$i_{n-k+1}$	$i_{n-k+2}$		$i_{n-1}$	k			
出栈				1, 2	$, \ldots, k$	-1-	定征	生成	性栈前出机		

解:记出栈序列数目为 $h_n$ 。

假设一个出栈序列的最后一个出栈元素为k ( $1 \le k \le n$ ),则有 (1)元素1, 2, ..., k-1 的进栈与出栈在k进栈前全部完成;且



解:记出栈序列数目为 $h_n$ 。

假设一个出栈序列的最后一个出栈元素为k(1 $\leq k \leq n$ ),则有

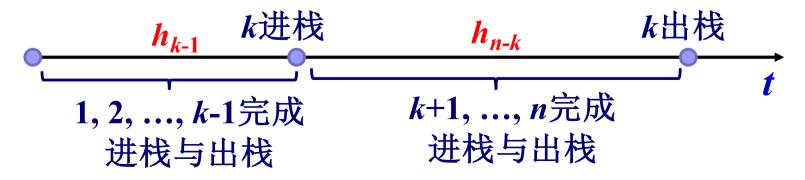
- (1)元素1, 2, ..., k-1 的进栈与出栈在 k进栈前全部完成; 且
- (2) 元素 k+1, ..., n的进栈与出栈在k进栈后直至 k 出栈前全部完成。

n	•••	<i>k</i> +1	<i>k</i>	<i>k</i> -1	•••	2	1
$i_1$	•••	$i_{n-k}$	$i_{n-k+1}$	$i_{n-k+2}$		$i_{n-1}$	k

解:记出栈序列数目为 $h_n$ 。

假设一个出栈序列的最后一个出栈元素为k( $1 \le k \le n$ ),则有

- (1)元素1, 2, ..., k-1 的进栈与出栈在k进栈前全部完成;且
- (2) 元素 k+1, ..., n的进栈与出栈在k进栈后直至 k 出栈前全部完成。



<u>进栈</u>			7 . 1	1 ,	7 1	1	2	1
	n	•••	<i>k</i> +1	k	<i>k</i> -1	•••	2	I
	$i_1$	•••	$i_{n-k}$	$i_{n-k+1}$	$i_{n-k+2}$		$i_{n-1}$	<i>k</i>

解:记出栈序列数目为 $h_n$ 。

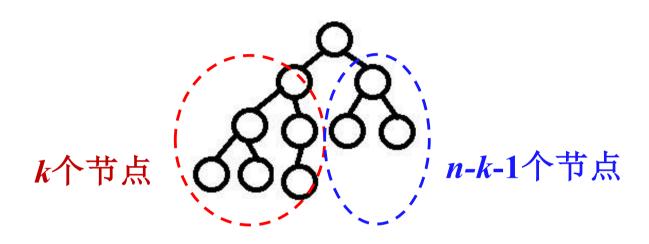
假设一个出栈序列的最后一个出栈元素为k(1 $\leq k \leq n$ ),则有

- (1)元素1, 2, ..., k-1 的进栈与出栈在k进栈前全部完成;且
- (2) 元素 k+1,...,n的进栈与出栈在k进栈后直至 k 出栈前全部完成。由乘法原理,最后一个出栈元素为 k 的出栈序列的个数为  $h_{k-1}h_{n-k}$ 。由加法原理得, $h_n = \sum_{k=1}^n h_{k-1}h_{n-k}$ .

令 $h_0$ =1, 且知  $h_1$ =1,  $h_2$ =2, 由递推关系知  $h_n = C_n = \frac{1}{n+1} {2n \choose n}$ ,  $n \ge 0$ .

例: n个节点构成的二叉树, 共有多少种情形?

思路:考虑左右子树的分布情况



设 n个节点构成二叉树的情形有  $h_n$ 种。 则有  $h_n = h_0 h_{n-1} + h_1 h_{n-2} + ... + h_{n-2} h_1 + h_{n-1} h_0$ 令 $h_0 = 1$ ,有 $h_1 = 1$ , $h_2 = 2$ , $h_3 = 5$ 。 结合递推式,知  $h_n = C_n$ 。

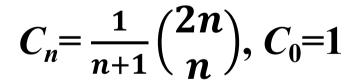
# Ŋė.

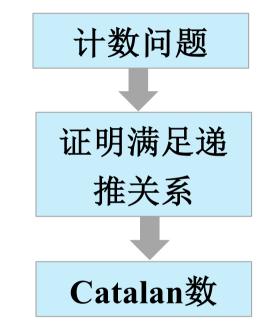
### Catalan数列的应用

■ Catalan数列的递推关系

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \dots + C_{n-1} C_0,$$
  
 $C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5, \dots$ 

■ 第n 个 Catalan数:





■ 问题:是否还有其他判断Catalan数列的方法?

### 定理8.1.1. 考虑由 $n^{+1}$ 和 $n^{-1}$ 构成的2n项序列

$$a_1, a_2, ..., a_{2n},$$

其部分和总满足:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \ge 0 \ (k = 1, 2, ..., 2n)$$

的序列的个数等于第 n 个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \ge 0)$$

- ■可解决的问题
  - □买票找零问题
  - □ 走方格问题

### 定理8.1.1. 考虑由 $n^{+1}$ 和 $n^{-1}$ 构成的2n项序列

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2n},$$

其部分和总满足:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \ge 0 \ (k = 1, 2, ..., 2n)$$

的序列的个数等于第 n 个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \ge 0)$$

证明:设由 $n^+1$ 和 $n^-1$ 构成的2n项序列中

满足条件的序列称为可接受的,其个数记为 $A_n$ ;

否则称为不可接受的,其个数记为 $U_n$ 。

由n个+1和n个-1构成的序列的总数为

$$A_n + U_n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{2n \cdot (2n-1)...(n+1)}{n!} = {2n \cdot (2n-1)...(n+1) \choose n}$$

下面计算 $U_n$ ,从而得到 $A_n$ 。

定理8.1.1. 考虑由n个+1和n个-1构成的2n项  $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ ,其部分和满足:  $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \ge 0$  (k = 1, 2, ..., 2n) 的数列的个数等于第n个Catalan数  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$   $(n \ge 0)$ 

假设序列  $S=a_1,a_2,...,a_{2n}$ 是不可接受的

1与-1的个数相同

 $S_6$ 

 $S_5$ 

 $S_1$ 

 $S_2$ 

 $S_3$ 

 $S_4$ 

 $S_{k-2}$ 

 $S_k$ 

-1

 $S_{k-1}$ 

0

定理8.1.1. 考虑由 $n^{+1}$ 和 $n^{-1}$ 构成的2n项

 $a_1, a_2, ..., a_{2n}$  其部分和满足:  $a_1 + a_2 + ... + a_k \ge 0$ 

(k=1,2,...,2n) 的数列的个数等于第n个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \ge 0)$$

假设序列  $S=a_1,a_2,...,a_{2n}$ 是不可接受的

$$S_k = a_1 + ... + a_k, k = 1, 2, ..., 2n$$

令 $S_k$ 是第一个为负的和式,即k是 ,满足 $S_k$ <0的最小的k,

把S的前k项中的+1和 -1相替换,得到S'

$$S'$$
  $\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_k & a_{k+1} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}$ 

日 S' 月 n+1 个 1 和 n-1 个 -1 ,且  $S'_k$  是 S' 的第一个为正的和式。 因此,由n 个 +1 和n 个 -1 构成的不可接受的序列 S 对应一个由n+1 个 1 和 n-1 个 -1 构成的序列 S' 。

 $\frac{k+1}{2}$  个+1,  $\frac{k-1}{2}$  个-1  $\frac{2n-k+1}{2}$  个+1,  $\frac{2n-k-1}{2}$  个-1 反之是否成立?

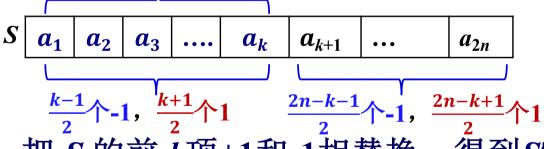
定理8.1.1. 考虑由 $n^{+1}$ 和 $n^{-1}$ 构成的2n项

 $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ , 其部分和满足:  $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \ge 0$  (k = 1, 2, ..., 2n) 的数列的个数等于第 n 个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \ge 0)$$

假设序列  $S=a_1,a_2,...,a_{2n}$  是由n+1个1 和 n-1和 -1 构成的序列,且  $S_k$ 是第一个为正的子序列和,则k为奇数,  $S_{k-1}=0$ ,且  $a_k$ 为+1

$$s_k = a_1 + ... + a_k, k=1, 2, ..., 2n$$



把 S 的前 k项+1和-1相替换,得到S'

$$S' \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_k & a_{k+1} & \dots & a_{2n} \\ \hline \frac{k-1}{2} + 1, & \frac{k+1}{2} + 1 & \frac{2n-k-1}{2} + 1, & \frac{2n-k+1}{2} + 1 \end{bmatrix}$$

得S'中有n个1和n个-1,且 $S'_k$  = -1<0,即S'为不可接受的。

因此,由n+1个1和n-1个-1构成的序列对应一个由n个+1和n个-1构成的不可接受的序列。

定理8.1.1. 考虑由n个+1和n个-1构成的2n项

 $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ ,其部分和满足:  $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \ge 0$  (k = 1, 2, ..., 2n) 的数列的个数等于第 n 个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \ge 0)$$

因此,由 $n^{+1}$ 和 $n^{-1}$ 构成的不可接受序列的个数  $U_n$ 与由 $n^{+1}$ 个+1和 $n^{-1}$ 个-1构成的序列的个数相等,

$$\text{RF } U_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} \circ$$

得
$$A_n = \frac{(2n)!}{n!n!} - U_n = \frac{1}{n+1} {2n \choose n}$$
。

因此,定理得证。

例. (购票找零钱问题) 有2n个人排成一对进电影院,门票 50元, 2n个人中的n个人有50元纸币, n个人有100元纸币。电影院设置售票点,假设未备有零钱, 有多少种排队方法使得只要有100元的人买票, 售票处就有50元的纸币找零?

情况1: 若把2*n*个人看成不可区分的,将50元用 +1表示,100元用-1表示。

则满足条件的排队序列 $a_1,...,a_{2n}$ 一定满足 $a_1+...+a_k \ge 0$ , k=1,...,2n。

否则,假设 $a_1,...,a_k$ 是最短的一个 $a_1+...+a_k<0$ 的序列,则k为奇数,且 $a_k=-1$ ,则第k个人付款100时,无法找零。 因此满足条件的排队方法数为第n个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \ge 0)$$

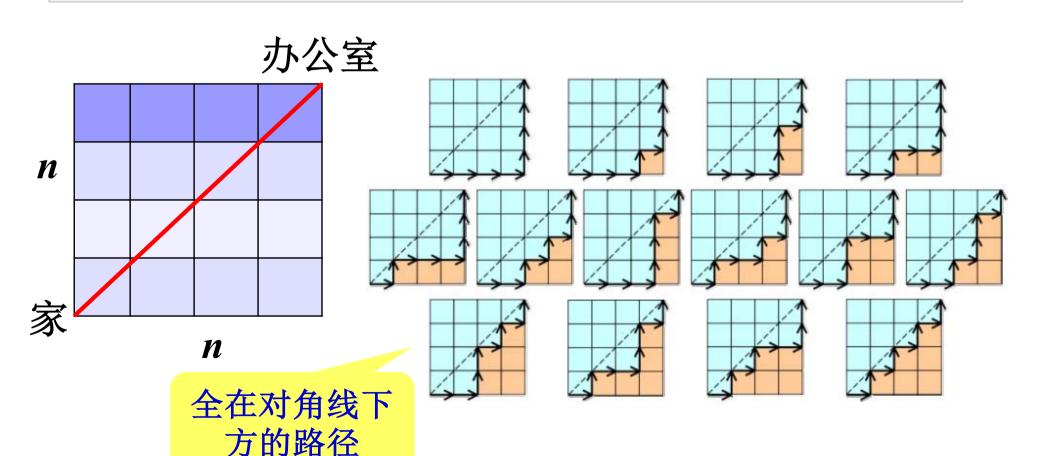
例. (购票找零钱问题) 有2n个人排成一对进电影院,门票50元,2n个人中的n个人有50元纸币,n个人有100元纸币。电影院设置售票点,假设未备有零钱,有多少种排队方法使得只要有100元的人买票,售票处就有50元的纸币找零?

情况2: 若把2n个人看成可区分的,

则需要考虑n个有50元纸币的人的排列,以及n个有100元纸币的人的排列。

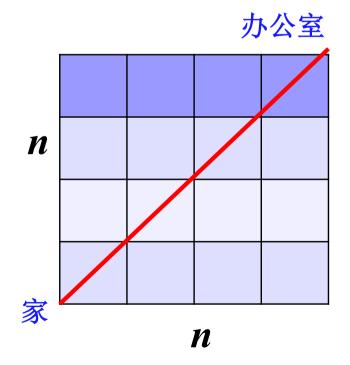
因此排队方法数为  $(n!n!)\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$   $(n\geq 0)$ 

例.(城市穿越问题)一位大城市的律师在她住所以北n个街区和以东n个街区处工作。每天她走2n个街区上班。如果她不穿越从家到办公室的对角线,有多少可能的道路?



例.(城市穿越问题)一位大城市的律师在她住所以北n个街区和以东n个街区处工作。每天她走2n个街区上班。如果她不穿越从家到办公室的对角线,有多少可能的道路?

解:由于不穿越从家到办公室的对角线,因此一条路径要么全在对角线上方,或者全在对角线下方。 记全在对角线下方的路径数为 $B_n$ ,全在对角线上方的路径数为 $C_n$ ,由路径的对称性,得 $B_n = C_n$ 。



例.(城市穿越问题)一位大城市的律师在她住所以北n个街区和以东n个街区处工作。每天她走2n个街区上班。如果她不穿越从家到办公室的对角线,有多少可能的道路?

解(续):用+1表示向东,-1表示向北。

则每条路径对应一个+1,-1的序列 $a_1,a_2,\ldots,a_{2n}$ 。

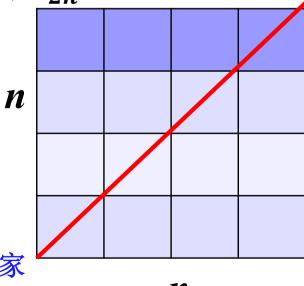
办公室

显然, $B_n$ 为所有满足  $a_1+...+a_k \ge 0$ ,k=1,...,2n,的路径条数,否则将有路径穿越对角线。

因此, 
$$B_n = \frac{1}{n+1} {2n \choose n} \quad (n \ge 0),$$

得满足条件的道路总数为

$$\frac{2}{n+1}\binom{2n}{n}$$
  $(n\geq 0)$ 



# Ŋė.

### Catalan数的另一个递推关系

$$C_n = \frac{1}{n+1} {2n \choose n} = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n! \, n!}$$

$$C_{n-1} = \frac{1}{n} {2n-2 \choose n-1} = \frac{1}{n} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}$$

两式相除得 
$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{4n-2}{n+1}$$

因此, Catalan序列递推关系和初始条件为:

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1} \quad (n \ge 1), \quad C_0 = 1$$

# NA.

### 另一类Cartalan数

例. (括号化问题) 矩阵连乘  $P = a_1 \times a_2 \times ... \times a_n$ ,依据乘法结合律,不改变其顺序,只用括号表示成对的乘积,试问有几种括号化的方案?

例:令 $a_1,a_2,...,a_{n-1}$ 为n个数,这些数的乘法格式是指进行 $a_1,a_2,...,a_{n-1}$ 的乘法的方案,求乘法格式的数目。

区别?

# M

### 拟Catalan数 (一般表达式)

定义一个新的数列:

$$C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*, \dots$$

其中, 
$$C_n^* = n!$$
  $C_{n-1}$ ,  $n=1, 2, ..., n, ...$ 

$$C_n^* = n! C_{n-1}$$

$$= n! \cdot \frac{1}{(n-1)+1} {2(n-1) \choose n-1}$$

$$= (n-1)! {2n-2 \choose n-1}$$

### 拟Catalan数(递推关系和初值)

■ 将Catalan数的递推关系代入得到拟Catalan数的递推 关系:

$$C_n^* = n! C_{n-1} = n! \frac{4(n-1)-2}{(n-1)+1} C_{n-2} = n! \frac{4n-6}{n} C_{n-2}$$

$$= (4n-6)[(n-1)! C_{n-2}] = (4n-6) C_{n-1}^*$$

因此,拟-Catalan数的递推关系和初值如下:

$$C_n^* = (4n-6) C_{n-1}^* (n \ge 1)$$
 $C_1^* = 1$ 

计数问题

证明满足 递推关系



例:令 $a_1,a_2,...,a_{n-1}$ 为n个数,这些数的乘法格式是指进行 $a_1,a_2,...,a_{n-1}$ 的乘法的方案,求乘法格式的数目。

解:显然,一个乘法格式需要两数间的n-1次乘法,其中两个数或者是 $a_1, a_2, ..., a_n$ 中的之一,或者是他们的部分乘积。

 $\Diamond h_n$ 表示n个数的乘法格式的数目。则有 $h_1$ =1。

 $h_2 = 2$ ,两个乘法格式为 $(a_1 \times a_2)$ 和 $(a_2 \times a_1)$ 。

例:令 $a_1,a_2,...,a_{n-1}$ 为n个数,这些数的乘法格式是指进行 $a_1,a_2,...,a_{n-1}$ 的乘法的方案,求乘法格式的数目。

解(续):  $h_3 = 12$  , 其中3个数的乘法格式为:  $(a_1 \times (a_2 \times a_3))$ ,  $(a_1 \times (a_3 \times a_2))$ ,  $((a_1 \times a_3) \times a_2)$ ,  $((a_3 \times a_1) \times a_2)$ ,  $((a_1 \times a_2) \times a_3)$ ,  $(a_3 \times (a_1 \times a_2))$ ,  $(a_2 \times (a_1 \times a_3))$ ,  $(a_2 \times (a_3 \times a_1))$ ,  $((a_2 \times a_3) \times a_1)$ ,  $(a_3 \times (a_2 \times a_1))$ ,  $((a_2 \times a_1) \times a_3)$ ,  $((a_3 \times a_2) \times a_1)$  观察到:

- (1) 3个数的乘法格式都需要两个乘号,每个乘号对应一组括号因子
- (2) 每种乘法方案考虑了数字的顺序: 对 $a_1, a_2, ..., a_n$ 的每个排列插入n-1组括号,使得每一对括号都指定两个因子

例:令 $a_1,a_2,....a_{n-1}$ 为n个数,这些数的乘法格式是指进行 $a_1,a_2,....a_{n-1}$ 的乘法的方案,求乘法格式的数目。解(续)(递归定义):

任取 $a_1,a_2,....a_{n-1}$ 的一种乘法格式,它有n-2次乘 法和n-2组括号。两种方法构造 $a_1,a_2,....a_n$ 的的乘法格式:

- (1)将 $a_n$ 插入到n-2个乘法运算中任一个×号的两个因子中的任一个因子的任一侧,一共是(n-2)·2·2=4(n-2)种方案;
- (2) 把该乘法格式作为一个因子,把 $a_n$ 插入到因子的任一侧,一共2种方案。

$$\begin{array}{c} (a_3 \times a_1) \times a_2 \\ a_1 \times a_2 & \Rightarrow \begin{array}{c} (a_1 \times a_3) \times a_2 \\ a_1 \times (a_3 \times a_2) \\ a_1 \times (a_2 \times a_3) \end{array} & \begin{array}{c} a_3 \times (a_1 \times a_2) \\ (a_1 \times a_2) \times a_3 \end{array} \end{array}$$

例:令 $a_1,a_2,....a_{n-1}$ 为n个数,这些数的乘法格式是指进行 $a_1,a_2,....a_{n-1}$ 的乘法的方案,求乘法格式的数目。解(续)(递归定义):

任取 $a_1,a_2,....a_{n-1}$ 的一种乘法格式,它有n-2次乘 法和n-2组括号。两种方法构造 $a_1,a_2,....a_n$ 的的乘法格式:

- (1)将  $a_n$  插入到n-2个乘法运算中任一个×号的两个因子中的任一个因子的任一侧,一共是(n-2)·2·2=4(n-2)种方案;
- (2) 把该乘法格式作为一个因子,把 $a_n$ 插入到因子的任一侧,一共2种方案。

因此,  $a_1,a_2,....a_{n-1}$ 的每个乘法格式产生 4(n-2)+2=4n-6个 $a_1,a_2,....a_n$ 的乘法格式,得  $h_n=(4n-6)h_{n-1}$ , $n\geq 2$ 。由初始值 $h_n=1$ 得  $h_n=C_n^*=(n-1)!\binom{2n-2}{n-1}$ 

# Ŋė.

### 总结

■ Catalan数列是序列 $C_0, C_1, ..., C_n, ...,$ 其中

$$C_n = \frac{1}{n+1} {2n \choose n}, n=0,1,2,...$$
 是第 $n$ 个Catalan数。
$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + ... + C_{n-1} C_0$$

定理8.1.1. 考虑由n个+1和n个-1构成的2n项  $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ ,其部分和满足:  $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \ge 0$  (k = 1, 2, ..., 2n) 的数列的个数等于第n个Catalan数

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \ge 0)$$

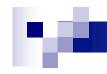
■ 拟Catalan数列是序列  $C_1^*, C_2^*, ..., C_n^*, ...$ 

其中, 
$$C_n^* = n!$$
  $C_{n-1}$ ,  $n=1, 2, ..., n, ...$ 

$$C_n^* = (4n-6)C_{n-1}^*, n \ge 2, C_1^* = 1$$

# 第8章特殊计数序列

- 8.1 Catalan数
- 8.2 差分序列和Stirling数
- 8.3 分拆数



例:对于如下序列,给出第6项合适的值?

□ 1 6 15 28 45 **66** 91

```
      1
      6
      15
      28
      45
      66
      91......

      5
      9
      13
      17
      21
      25 ......

      4
      4
      4
      4
      ......

      0
      0
      0
      0
      ......
```

差分原理



### 差分序列

设  $h_0, h_1, h_2, ..., h_n, ...$ 是一个序列。定义新序列:

$$\Delta h_0, \Delta h_1, \Delta h_2, \ldots, \Delta h_n, \ldots,$$

称为 $h_0, h_1, h_2, ..., h_n, ...$ 的(一阶)差分序列,其中

 $\Delta h_n = h_{n+1} - h_n (n \ge 0)$ ,是序列的相邻项的差。

#### 一阶差分序列

$$\Delta h_0 = h_1 - h_0$$

$$\Delta h_1 = h_2 - h_1$$

$$\Delta h_2 = h_3 - h_2$$

. . .

$$\Delta h_n = h_{n+1} - h_n$$



#### 二阶差分序列

$$\Delta^2 h_0 = \Delta h_1 - \Delta h_0$$

$$\Delta^2 h_1 = \Delta h_2 - \Delta h_1$$

$$\Delta^2 h_2 = \Delta h_3 - \Delta h_2$$

$$\Delta^2 h_n = \Delta h_{n+1} - \Delta h_n$$



三阶 差分序列

• • •

# NA.

### 差分序列的递归定义

0阶差分序列:  $h_0, h_1, h_2, ..., h_n, ...,$ 

1阶差分序列:  $\Delta^1 h_n = h_{n+1} - h_n (n = 0, 1, 2, ...)$ 

2阶差分序列:  $\Delta^2 h_n = \Delta (\Delta^1 h_n)$ 

$$= \Delta^{1}h_{n+1} - \Delta^{1}h_{n} = (h_{n+2} - h_{n+1}) - (h_{n+1} - h_{n})$$

$$=h_{n+2}-2h_{n+1}+h_n (n \ge 0)$$

#### k阶差分序列:

$$\Delta^{k}h_{n} = \Delta(\Delta^{k-1}h_{n}) = \Delta^{k-1}h_{n+1} - \Delta^{k-1}h_{n} \ (n = 0, 1, 2, ...)$$

类比: 微积分中导数

## M

### 差分表

设序列 $h_n(n=0,1,2,...)$ 

第0行 
$$h_0$$
  $h_1$   $h_2$   $h_3$   $h_4$  ... 第1行  $\Delta^1 h_0$   $\Delta^1 h_1$   $\Delta^1 h_2$   $\Delta^1 h_3$  ... 第2行  $\Delta^2 h_0$   $\Delta^2 h_1$   $\Delta^2 h_2$  ... 第3行

- 序列  $h_n(n=0,1,2,...)$ 的差分表由第0行确定

# NA.

## 差分表:示例

例: 求序列 $\{h_n\}$ 的差分表,其中 $h_n=2n^2+3n+1(n\geq 0)$ 

- 3阶差分序列全部由0组成
- 所有更高阶的差分序列也都由0组成

定理8.2.1: 设序列的通项  $h_n$ 是n的p次多项式:

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \dots + a_1 n + a_0,$$

则对于所有的 $n \ge 0$ ,必有:  $\Delta^{p+1}h_n = 0$ 。

证明:对多项式的次数 p 实施数学归纳法。

- (1) 当 p = 0 时, $h_n = a_0$ ,对所有的  $n \ge 0$ 均为一常数,因此, $\Delta^{p+1}h_n = \Delta^1h_n = h_{n+1} h_n = a_0 a_0 = 0$ ,结论成立。
- (2) 假设 $p \ge 1$ 且当  $h_n$ 为n的最多p-1次多项式时,定理成立,

则有 $\Delta^p h_n = 0$ 对所有的 $n \ge 0$ 成立。

#### 定理8.2.1: 设序列的通项 $h_n$ 是n的p次多项式:

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \dots + a_1 n + a_0,$$

则对于所有的 $n \ge 0$ ,必有:  $\Delta^{p+1}h_n = 0$ 。

证明(续): 当 $h_n$ 是 n的p次多项式时,

由于
$$\Delta h_n = h_{n+1} - h_n$$

$$= a_p(n+1)^p + a_{p-1}(n+1)^{p-1} + \dots + a_1(n+1) + a_0$$

$$-(a_{p}n^{p} + a_{p-1}n^{p-1} + ... + a_{1}n + a_{0})$$

$$= a_p((n+1)^p - n^p) + a_{p-1}((n+1)^{p-1} - n^{p-1}) \dots + a_1 + 0 \quad (1)$$

把 $(n+1)^p$ 按二项式定理展开后得,

最大次数为 $n^{p-1}$ 

$$[(n+1)^p - n^p] = \sum_{k=0}^p {p \choose k} n^{p-k} - n^p = \sum_{k=1}^p {p \choose k} n^{p-k}, \, \text{代}\lambda(1)$$
 式得,

 $\Delta h_n$ 最多为n的p-1次多项式,

由归纳假设知, $\Delta^p(\Delta h_n)=0$ , 即 $\Delta^{p+1}h_n=0$ 。因此,定理成立。

可用于求解 n次多 项式的序列通项

## 1/4

### 差分表的性质

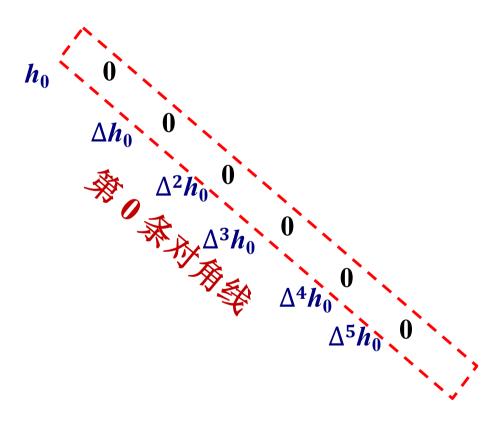
- 差分表由第 0 行上元素的值就能决定
- 差分表也可由第 0 条对角线决定

设序列 $h_n(n=0,1,2,...)$  第1条对角线:  $h_1 = \Delta^0 h_1 = \Delta^1 h_0 + \Delta^0 h_0$   $= \Delta h_0 + h_0$   $\Delta^1 h_0 \cdot \Delta^1 h_1 \quad \Delta^1 h_2 \quad \Delta^1 h_3 \dots$   $\Delta^1 h_1 = \Delta^2 h_0 + \Delta^1 h_0$   $\Delta^2 h_0 \cdot \Delta^2 h_1 \quad \Delta^2 h_2 \dots$   $\Delta^2 h_1 = \Delta^3 h_0 + \Delta^2 h_0$   $\Delta^3 h_0 \cdot \Delta^3 h_1 \dots$   $\Delta^3 h_1 = \Delta^4 h_0 + \Delta^3 h_0$ ...  $\Delta^3 h_1 = \Delta^4 h_0 + \Delta^3 h_0$ ...

问题:如何由第0条对角线上的值推导出hn?

## 例:一种简单的差分表

■ 若第 0条对角线全为0



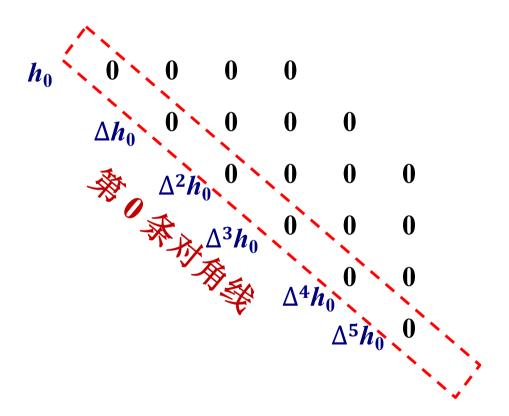
#### 第1条对角线:

$$h_1 = \Delta^0 h_1 = \Delta^1 h_0 + \Delta^0 h_0$$
  
 $= \Delta h_0 + h_0$   
 $\Delta^1 h_1 = \Delta^2 h_0 + \Delta^1 h_0$   
 $\Delta^2 h_1 = \Delta^3 h_0 + \Delta^2 h_0$   
 $\Delta^3 h_1 = \Delta^4 h_0 + \Delta^3 h_0$   
...

问题:如何由第0条对角线上的值推导出 $h_n$ ?

## 例:一种简单的差分表

■ 若第 0条对角线全为0



#### 第1条对角线:

$$h_1 = \Delta^0 h_1 = \Delta^1 h_0 + \Delta^0 h_0$$

$$= \Delta h_0 + h_0$$

$$\Delta^1 h_1 = \Delta^2 h_0 + \Delta^1 h_0$$

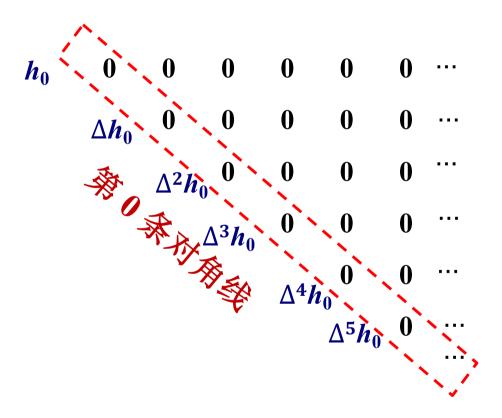
$$\Delta^2 h_1 = \Delta^3 h_0 + \Delta^2 h_0$$

$$\Delta^3 h_1 = \Delta^4 h_0 + \Delta^3 h_0$$
...

问题:如何由第0条对角线上的值推导出 $h_n$ ?

## 例:一种简单的差分表

■ 若第 0条对角线全为0



#### 第1条对角线:

$$h_1 = \Delta^0 h_1 = \Delta^1 h_0 + \Delta^0 h_0$$

$$= \Delta h_0 + h_0$$

$$\Delta^1 h_1 = \Delta^2 h_0 + \Delta^1 h_0$$

$$\Delta^2 h_1 = \Delta^3 h_0 + \Delta^2 h_0$$

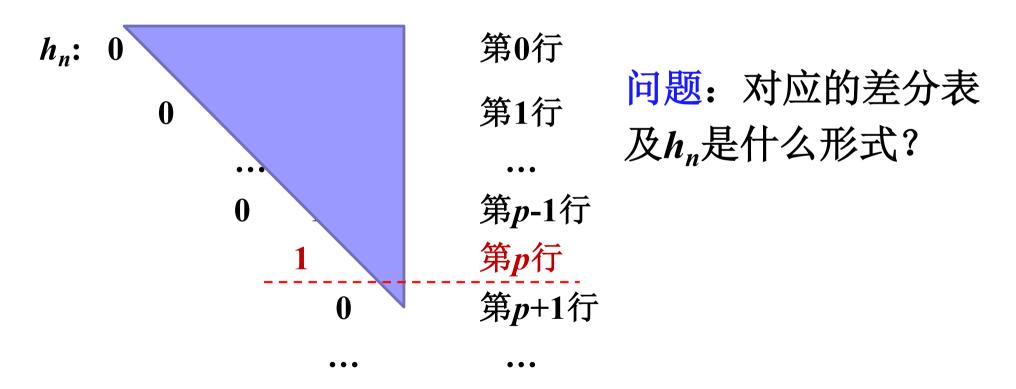
$$\Delta^3 h_1 = \Delta^4 h_0 + \Delta^3 h_0$$
...

问题:如何由第0条对角线上的值推导出 $h_n$ ?

# NA.

### 例:一种简单的差分表

- 第0条对角线除一个1外都是0:
  - □ 1在第 p行,前p个元素就都为0,从p+1行开始的所有行的 元素都是0



100

## 例:一种简单的差分表: p=4 时

■ 第0条对角线上的元素是: 0,0,0,0,1,0,0,...

 $h_n$ : 0

0

0

1

0

0

0

第0行

第1行

第2行

第3行

第4行

第5行

第6行

第7行

NA.

## 例:一种简单的差分表:p=4时

■ 第0条对角线上的元素是: 0,0,0,0,1,0,0,...

 $h_n$ :
 0 0 0 0 1 5 15 35
 第0行

 0 0 0 1 4 10 20
 第1行

 0 0 1 3 6 10
 第2行

 第3行为等差序列
 0 1 2 3 4
 第3行

第4行全为1 1 1 1 第4行 第5行全为0 0 0 第5行 第5行全为0 0 第6行 问题:怎么计算h<sub>n</sub>? 0 第7行

# 例:一种简单的差分表:p=4时

设
$$h_n = a_4 n^4 + a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$$
, 满足  

$$\Delta^{p+1} h_n = \Delta^5 h_n = 0$$

由于 $h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = 0$ ,  $h_4 = 1$ ,

可知, 多项式  $h_n$ 有n = 0, 1, 2, 3四个根;

于是, $h_n$ 的多项式中应该有(n-0),(n-1),(n-2),(n-3)这四个因子。

设待定系数c, 那么:  $h_n = c n(n-1)(n-2)(n-3)$ 

将 $h_4$ =1代入: 1= $c \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = c \cdot 4!$ , 因此 c = 1/4!,

从而, 
$$h_n = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \binom{n}{4}$$

## Ŋė.

#### 例:一种简单的差分表

假设对于任意的 p, 序列{ $h_n$ }差分表中第0条对角线为以下形式:  $p \uparrow 0$ 

则, $h_n$ 是 n的 p 次多项式,表示如下:

$$h_n = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(p-1))}{p!} = {n \choose p}$$

问题:如果第0条对角线为:

$$c_0, c_1, c_2, ..., c_p, 0, 0, 0, ...$$
 (其中 $c_p \neq 0$ )

是否有通项?通项是什么?

差分表的线性性

## Ŋė.

### 差分表的线性性

设 $g_n$ 和 $f_n$ 分别是两个序列的通项,如果 $h_n = g_n + f_n$ ,

$$\iiint \Delta h_n = h_{n+1} - h_n = (g_{n+1} + f_{n+1}) - (g_n + f_n)$$

$$= (g_{n+1} - g_n) + (f_{n+1} - f_n) = \Delta g_n + \Delta f_n$$

对于任何常数 c, d , 如果 $b_h = c g_n + d f_n$ 

$$\Delta b_n = b_{n+1} - b_n = (c g_{n+1} + d f_{n+1}) - (c g_n + d f_n)$$

$$= (c g_{n+1} - c g_n) + (d f_{n+1} - d f_n) = c \Delta g_n + d \Delta f_n$$

- 一般的:  $\Delta^p h_n = \Delta^p g_n + \Delta^p f_n$ ,  $p \ge 0$
- 更一般的,对于任何常数 c,d 来说,

$$\Delta^{p}(\mathbf{c} g_{n} + \mathbf{d} f_{n}) = \mathbf{c} \Delta^{p} g_{n} + \mathbf{d} \Delta^{p} f_{n} \quad (p \geq 0, n \geq 0)$$

#### 定理8.2.2 差分表的第0条对角线等于

 $c_0, c_1, c_2, ..., c_p, 0, 0, 0, ...,$  其中 $c_p \neq 0$ 

的序列的通项满足:

$$h_n = c_0 \binom{n}{0} + c_1 \binom{n}{1} + c_2 \binom{n}{2} + \dots + c_p \binom{n}{p}$$

的关于n的p次多项式。

证明思想:(线性性+简单差分表)

#### p次多项式与差分表

定理8.2.1: 设序列的通项  $h_n$ 是n的p次多项式:

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \dots + a_1 n + a_0,$$

则对于所有的 $n \ge 0$ ,必有:  $\Delta^{p+1}h_n = 0$ 。

定理8.2.2 差分表的第0条对角线等于

$$c_0, c_1, c_2, ..., c_p, 0, 0, 0, ...,$$
 其中 $c_p \neq 0$ 

的序列的通项满足:

$$h_n = c_0 \binom{n}{0} + c_1 \binom{n}{1} + c_2 \binom{n}{2} + \dots + c_p \binom{n}{p}$$
.

可用于求序列 $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$ ,的部分和

例:考虑通项为 $h_n=n^3+3n^2-2n+1(n\geq 0)$ 的序列。

解: 计算差分, 我们得到

$$n=0$$
 1 3 17 49

$$n=1$$
 2 14 32  $h_n = c_0 \binom{n}{0} + c_1 \binom{n}{1} + c_2 \binom{n}{2} + \dots + c_p \binom{n}{p}$ 

$$n=2$$
 12 18

$$n=3$$

$$(0) \quad (1) \quad (2) \quad r(p)$$

因为 $h_n$ 是n的3次多项式,因此差分表的第0条对角线是: 1, 2, 12, 6, 0, 0,....

由定理8.2.2知,
$$h_n = 1 \binom{n}{0} + 2 \binom{n}{1} + 12 \binom{n}{2} + 6 \binom{n}{3}$$

应用: 求序列的部分和

#### 例:考虑通项为 $h_n=n^3+3n^2-2n+1(n\geq 0)$ 的序列。

解: 由上例知,
$$h_n = 1 \binom{n}{0} + 2 \binom{n}{1} + 12 \binom{n}{2} + 6 \binom{n}{3}$$
,因此,

$$\sum_{k=0}^{n} h_k = h_0 + h_1 + \dots + h_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (1 {k \choose 0} + 2 {k \choose 1} + 12 {k \choose 2} + 6 {k \choose 3})$$

$$=1\sum_{k=0}^{n} {k \choose 0} + 2\sum_{k=0}^{n} {k \choose 1} + 12\sum_{k=0}^{n} {k \choose 2} + 6\sum_{k=0}^{n} {k \choose 3}$$

$$= \frac{1\binom{n+1}{1} + 2\binom{n+1}{2} + 12\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4}}{\binom{n+1}{4}}.$$

(由于
$$\sum_{k=0}^{n} {k \choose p} = {n+1 \choose p+1}$$
)

3 17

定理 8.2.3 假设序列 $h_0, h_1, ..., h_n$ ...的差分表的第0条对角线等于

$$c_0, c_1, ..., c_p, 0, 0, ...$$

那么

$$\sum_{k=0}^{n} h_{k} = c_{0} {n+1 \choose 1} + c_{1} {n+1 \choose 2} + ... + c_{p} {n+1 \choose p+1}$$

- 差分序列的应用
  - □ 一般项为多项式的序列的部分和

## NA.

例: 求前n个正整数的4次方的和。

解: 设 $h_n=n^4$ ,  $n\geq 0$ , 计算差分得

1 15 65 175

**36 60** 

24

因为h,是4次多项式,其差分表第0条对角线是:

0, 1, 14, 36, 24, 0, 0,....

得 
$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = 1 \binom{n+1}{2} + 14 \binom{n+1}{3} + 36 \binom{n+1}{4} + 24 \binom{n+1}{5}$$
。

可推广到前n个正整数的p次方的和

体现了一定的组合意义

#### 差分表的第0条对角线的组合意义: np的表示

对于序列  $h_n = n^p$ ,设其差分表中第0条对角线上的元素为  $c_0, c_1, ..., c_p, 0, 0, ...$ ,引入标记:

$$c(p, 0) = c_0, c(p, 1) = c_1, ..., c(p, p) = c_p, 0, 0, ...;$$

其中c(p,k)是差分表中第0条对角线上的第k个元素;

则有:

$$h_n = n^p = c_0 \binom{n}{0} + c_1 \binom{n}{1} + \dots + c_p \binom{n}{p}$$

$$= c(p, 0) \binom{n}{0} + c(p, 1) \binom{n}{1} + \dots + c(p, p) \binom{n}{p}$$

## P/P

### c(p, k)的特殊值: k = 0

$$h_n = n^p = c(p,0) {n \choose 0} + c(p,1) {n \choose 1} + \cdots + c(p,p) {n \choose p}$$

(1) 当 
$$p=0$$
 时,则  $h_n=n^p=n^0=1$  是一个常数,  $n \ge 0$ 

此时,差分表的第一行全为1,从第二行开始全为0

因此, 
$$h_n = 1 = 1 \binom{n}{0} = c(0,0) \binom{n}{0}$$
,

得 c(0,0)=1。

(2) 当  $p \ge 1$  时,由于 $h_0 = 0$ ,所以 c(p,0) = 0。

因此,
$$c(p,0) = \begin{cases} 1, \exists p = 0 \text{时} \\ 0, \exists p \geq 1 \text{时} \end{cases}$$

# c(p, k)的特殊值: $p = k \neq 0$

$$h_n = n^p = c(p, 0) {n \choose 0} + c(p, 1) {n \choose 1} + \dots + c(p, p) {n \choose p}$$

上式右侧中 $n^p$ 项只出现在 $c(p,p)\binom{n}{p}=c(p,p)\frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!}$ 中,

由上式两边 $n^p$ 项前系数相等得, $1=\frac{c(p,p)}{p!}$ ,

因此, c(p,p)=p!。

例如:  $h_n = n^4$  的差分表:

0 1 16 81 256  
1 15 65 175  
14 50 110  
36 60  
24 
$$c(4,4) = 24 = 4!$$

$$h_n = n^p = c(p,0) {n \choose 0} + c(p,1) {n \choose 1} + \cdots + c(p,p) {n \choose p}$$

令 
$$[n]_k = \begin{cases} n(n-1) \dots (n-k+1), \text{ } £k \ge 1 \\ 1, \text{ } £k = 0 \end{cases}$$

则, $[n]_k = n$ 个不同元素中取k个元素的排列数P(n, k)

 $[n]_k$ 的递推关系:

$$[n]_{k+1} = n(n-1)(n-2)....(n-k+1)(n-(k+1)+1)$$

$$= n(n-1)(n-2)....(n-k+1)(n-k)$$

$$= (n-k)[n]_k$$

$$h_n = n^p = c(p, 0) {n \choose 0} + c(p, 1) {n \choose 1} + \dots + c(p, p) {n \choose p}$$

由于, 
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{[n]_k}{k!}$$
,

所以,
$$[n]_k = k! \binom{n}{k}$$
。则有

$$h_n = n^p = c(p,0) \frac{[n]_0}{0!} + c(p,1) \frac{[n]_1}{1!} + c(p,2) \frac{[n]_2}{2!} + \dots + c(p,p) \frac{[n]_p}{p!}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} c(p,k) \frac{[n]_k}{k!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{c(p,k)}{k!} [n]_k$$

令 
$$S(p,k) = \frac{c(p,k)}{k!}$$
  $(0 \le k \le p)$ ,称为第二类Stirling数。

$$h_n = n^p$$
的展开式就变为:  $h_n = n^p = \sum_{k=0}^p S(p, k)[n]_k$ 

## 第二类Stirling数

$$h_n = n^p = \sum_{k=0}^p \frac{c(p,k)}{k!} [n]_k = \sum_{k=0}^p S(p,k) [n]_k$$

$$S(p,0) = \frac{c(p,0)}{0!}$$
  
=  $c(p,0) = \begin{cases} 1, \implies p = 0$ 时  
 $0, \implies p \ge 1$ 时

由于  $[n]_k = k! \binom{n}{k}$  是关于n的k次多项式,因此 $[n]_p$ 是关于n的p次多项式,得 S(p,p)=1  $(p\geq 1)$ 

# 第二类Stirling的递推公式

定理8.2.4:如果 $1 \le k \le p-1$ 则

$$S(p, k) = kS(p-1, k) + S(p-1, k-1)$$

类比二项式公式中:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

#### 定理8.2.4:如果1≤k≤p-1则

$$S(p, k) = k S(p-1,k) + S(p-1, k-1)$$

证明:已知

$$n^{p} = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_{k}, \quad n^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_{k}$$

$$n^{p} = n \times n^{p-1} = n \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)n[n]_{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)(n-k+k)[n]_{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)(n-k)[n]_{k} + \sum_{k=0}^{p-1} kS(p-1,k)[n]_{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_{k+1} + \sum_{k=0}^{p-1} kS(p-1,k)[n]_{k}$$



$$n^{p} = \sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k) [n]_{k+1} + \sum_{k=0}^{p-1} k S(p-1,k) [n]_{k}$$

对上式等号右边的求和项  $\sum_{k=0}^{p-1} S(p-1,k)[n]_{k+1}$  ,用k-1替换k后得到:

$$n^{p} = \sum_{k=1}^{p} \underline{S(p-1,k-1)[n]_{k}} + \sum_{k=0}^{p-1} \underline{k}S(p-1,k)[n]_{k}$$

$$= \underline{S(p-1,p-1)[n]_{p}} + \sum_{k=1}^{p-1} \underline{S(p-1,k-1)[n]_{k}} + \sum_{k=0}^{p-1} \underline{k}S(p-1,k)[n]_{k}$$

$$= \underline{S(p-1,p-1)[n]_{p}}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p-1} (\underline{S(p-1,k-1)} + \underline{k}S(p-1,k))[n]_{k}$$
(\*)

已知  $n^p = \sum_{k=0}^p S(p,k)[n]_k = S(p,p)[n]_p + \sum_{k=0}^{p-1} S(p,k)[n]_k$  (\*\*) 对于1 $\leq k \leq p-1$  的每一个k,比较(\*)式与(\*\*)式中 $[n]_k$ 的系数,得 S(p,k) = k S(p-1,k) + S(p-1,k-1)

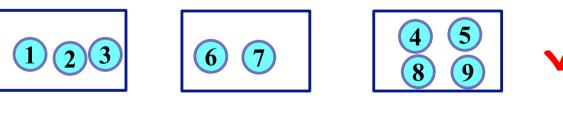
### 第二类Stirling数的类Pascal三角形

$$S(p, k) = k S(p-1,k) + S(p-1, k-1), 1 \le k \le p-1$$

pk	0	1	2	3	4	5	6	7	•••
0	1	首	接上	方的を	产麦乖	以上面,	mト其	左トブ	方的元素
1	0	1	134 —	VA HAY			/H - 1 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7 - 7		
2	.0	1	1	25=6:	3+7	5	S(p,1)	= 1	$(p \geqslant 1)$
3	0	1	3	1		S(p	(2) = 2	<sup>p−1</sup> − 1	$(p \geqslant 2)$
4	0	1	7	6	1	S(p,p)	- 1) =	$\binom{p}{2}$	(p≥1)
5	0	1	15	25	10	1		3 42	
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
•	:	:	:	:	:	:	:	:	٠.

## 第二类Stirling数的组合解释: 投球入盒

定理8.2.5: 第二类Stirling数 S(p,k) 计数的是把 p元素集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。





定理8.2.5: 第二类Stirling数 S(p,k) 计数的是把 p元素集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

证明: 令  $S^*(p,k)$  是将p元素的集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

下面证明:  $S^*(p, k) = S(p, k)$ 。

显然 $S^*(p,p) = 1 \ (p \ge 0) \ 而且 \ S^*(p,0) = 0 \ (p \ge 1)$ 。

下面只需证明 $S^*(p,k)$ 满足递推式

$$S^*(p, k) = kS^*(p-1, k) + S^*(p-1, k-1), 1 \le k \le p-1.$$

把 $\{1, 2, ... p\}$ 分到时k个非空且不可区分的盒子有两种类型:

- (1) p独占一个盒子的划分;或者
- (2) p不独占一个盒子的划分。此时该盒子元素多于1个;

定理8.2.5: 第二类Stirling数 S(p,k) 计数的是把 p元素集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

证明(续): (1) 当 p独占一个盒子时,

当把p从盒子中拿走时,得到剩下的 $\{1, 2, ..., p-1\}$ 划分到k-1个非空且不可区分的盒子的划分。

因此,存在 $S^*(p-1, k-1)$  种对 $\{1, 2, ..., p\}$ 的满足条件的划分。

(2) 当 p 不独占一个盒子时,

相当于先将 $\{1, 2, ..., p-1\}$  放到 k 个盒子,不允许空盒,共有 $S^*(p-1, k)$  种方案,然后将 p 放进其中一盒,由乘法原理得方案数为  $kS^*(p-1, k)$ 。

因此, $S^*(p,k) = kS^*(p-1,k) + S^*(p-1,k-1)$ , $1 \le k \le p-1$ 。证毕。

例:将红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的两个盒子里,且无空盒,共有多少种不同方案?

解:满足题意的方案数为第二类Stirling数S(5, 2)。由递推关系 S(p, k) = kS(p-1, k) + S(p-1, k-1)得:

$$S(5, 2) = 2S(4, 2) + S(4,1)$$
  
=  $2(2S(3, 2) + S(3, 1)) + 1$   
=  $2(2 \times 3 + 1) + 1 = 15$ 

因此,共有15种不同方案。

问题: 1. 如果2个盒子颜色有区别,方案数是多少? 2! *S*(5, 2)

> 2. 如果盒子无区别,允许空盒方案数是多少? Bell 数

# Ŋ.

#### 盒子无区别

定理8.2.5: 第二类Stirling数 S(p,k) 计数的是把 p元素 集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数。

定理8.2.4:如果 $1 \le k \le p-1$ 则

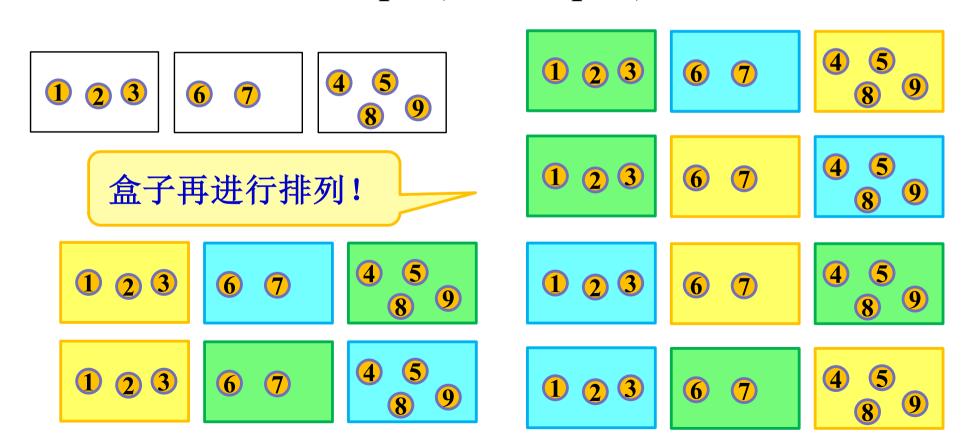
$$S(p, k) = kS(p-1, k) + S(p-1, k-1)$$

# 7

#### 盒子有区别

令 $S^{\#}(p,k)$ 表示把 $\{1,2,...,p\}$ 分到k个非空且可区分的 盒子的划分个数,则

$$S^{\#}(p, k) = k! S(p, k)$$
.



定理8.2.6 对每一个满足  $0 \le k \le p$ 的整数 k,都有

$$S^{\#}(p,k) = \sum_{t=0}^{k} (-1)^{t} {k \choose t} (k-t)^{p},$$

从丽 
$$S(p,k) = \frac{1}{k!} \sum_{t=0}^{k} (-1)^t {k \choose t} (k-t)^p$$
。

 $S^{\#}(p,k)$ : 把 $\{1,2,...,p\}$ 分到 k 个非空且可区分的盒子的划分个数

证明: (容斥原理) 设 U 是把  $\{1, 2, ..., p\}$  分到 k 个可区分盒子 $B_1$ ,  $B_2$ , ...,  $B_k$ 的所有划分的集合。

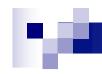
设 $A_i$ 表示盒子 $B_i$ 是空盒的划分组成的子集。则

$$S^{\sharp}(p,k) = |\overline{A}_1 \cap \cdots \cap \overline{A}_k|$$

对任意  $0 \le t \le p$ , $|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_t}|$  是把  $\{1, 2, ..., p\}$  划分到 k-t 个可区分盒子的划分个数(盒子可为空),得

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_t}| = (k-t)^p \circ$$

由容斥原理公式得  $S^{\dagger}(p,k) = \sum_{t=0}^{k} (-1)^{t} {k \choose t} (k-t)^{p}$ 。



- p 个有区别的物品放入k个无区别的盒子且没有空 盒的放法: S(n,k)
- p 个有区别的物品放入k个有区别的盒子且没有空 盒的放法:  $S^{\#}(p,k)=k!$  S(n,k)

p个物品	k 个盒子	空盒	
有区别	无区别	没有	S(p, k)
有区别	有区别	没有	$S^{\#}(p,k)$

■ Bell数是将 p个元素的集合划分到非空、不可区分的盒子的划分数,记为 $B_p$ 

#### Bell数(以Eric Temple Bell命名)

■ Bell数是将 p个元素的集合划分到非空、不可区分的盒子的划分数,记为 $B_p$ ,则  $B_p = S(p,0) + S(p,1) + \ldots + S(p,p)$ ,

是第二类Stirling数三角形的一行的元素和

p k	0	1	2	3	4	5	6	7	•••
0	1								
1	0	1				S(p,	k)		
2	0	1	1			<b>V</b> )			
3	0	1	3	1					
4	0	1	7	6	1				
5	0	1	15	25	10	1			
6	0	1	31	90	65	15	1		
7	0	1	63	301	350	140	21	1	
1	1	:	:	:	:	:	:	:	٠.

定理 8.2.7 (Bell数的递推式) 如果 $p \ge 1$ ,则

$$B_{p} = {\binom{p-1}{0}}B_{0} + {\binom{p-1}{1}}B_{1} + {\binom{p-2}{2}}B_{2} \dots + {\binom{p-1}{p-1}}B_{p-1}$$

证明: 假设把  $\{1, 2, ..., p\}$ 划分到非空且不可区分的盒子 且包含 p的盒子还包含  $\{1, 2, ..., p-1\}$ 的子集 X(可能为空)。 假设 |X|=t, 则  $0 \le t \le p-1$ 。

由于选择子集Xf(p-1)种方式,

把 $\{1, 2, ..., p-1\}$ 中不属于X的 p-1-t 个元素划分到非空且不可区分的盒子中有 $B_{p-1-t}$ 种方式,

因此有 
$$B_p = \sum_{t=0}^{p-1} {p-1 \choose t} B_{p-1-t}$$

$$= \sum_{t=0}^{p-1} {p-1 \choose p-1-t} B_{p-1-t} = \sum_{t=0}^{p-1} {p-1 \choose t} B_t .$$

# 70

#### 小结

- p 个有区别的物品放入k个无区别的盒子且没有空 盒的放法: S(n,k)
- p 个有区别的物品放入k个有区别的盒子且没有空 盒的放法:  $S^{\#}(p,k)=k!$  S(n,k)
- p 个有区别的物品放入非空无区别的盒子且没有空盒的放法:  $B_p = S(p, 0) + S(p, 1) + ... + S(p, p)$

# 第一类Stirling数

$$h_n = n^p = \sum_{k=0}^p \frac{c(p,k)}{k!} [n]_k$$

$$[n]_k = \begin{cases} n(n-1) \dots (n-k+1), \text{ if } k \ge 1 \\ 1, \text{ if } k = 0 \end{cases}$$

- 第二类Stirling数 *S*(*n*, *p*)
  - □ 如何用 $[n]_0$ ,  $[n]_1$ ,  $[n]_2$ , ... $[n]_p$ 写出 $n^p$ 。
  - □ 把 *p*个元素的集合划分到 *k*个不可区分的盒子且 没有空盒的划分的个数
- 第一类Stirling数 s(n, p)
  - $\square$  如何用 $n^0, n^1, n^2, ..., n^p$ 写出 $[n]_p$ 。
  - □ 将p个物品排成 k个非空的循环排列方法数

# Ŋė.

#### 第一类Stirling数

由于, 
$$[n]_p = n(n-1)(n-2)(n-3)....(n-(p-1))$$
  
 $= (n-0)(n-1)(n-2)(n-3)....(n-(p-1))$   
因此,  $[n]_0 = 1$   
 $[n]_1 = n$   
 $[n]_2 = n(n-1) = n^2 - n$   
 $[n]_3 = n(n-1)(n-2) = n^3 - 3n^2 + 2n$   
 $[n]_4 = n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n$ 

一般地,  $[n]_p$ 展开式有p个因子。

乘开后得到n的幂多项式, $n^p, n^{p-1}, \dots, n^1, n^0$ ,其系数的符号正负相间;故:

$$[n]_p = a_n^p n^p - a_n^{p-1} n^{p-1} + \dots + (-1)^{p-1} a_n^1 n^1 + (-1)^p a_n^0 n^0$$

# NA.

#### 第一类Stirling数

$$[n]_p = a_n^p n^p - a_n^{p-1} n^{p-1} + \dots + (-1)^{p-1} a_n^1 n^1 + (-1)^p a_n^0 n^0$$

 $n^k$  前的系数  $a_n^k$  称为第一类Stirling数,记为 s(p,k),

即

$$[n]_p = s(p, p)n^p - s(p, p-1)n^{p-1} + \dots + (-1)^{p-1}s(p, 1)n^1 + (-1)^p s(p, 0) n^0$$
  
=  $\sum_{k=0}^p s(p, k)n^k$ 

由于 
$$[n]_p = n(n-1)(n-2)(n-3)....(n-(p-1))$$

得到以下第一类Stirling数:

$$s(p, 0) = 0; (p \ge 1)$$
  $s(p, p) = 1; (p \ge 0)$ 

# 第一类Stirling数的递推式

定理8.2.8如果  $1 \le k \le p-1$ 则:

$$s(p, k) = (p-1)s(p-1, k) + s(p-1, k-1)$$

■ 第二类Stirling数递推关系式的区别:

$$S(p, k) = kS(p-1, k) + S(p-1, k-1)$$

□ 初值一样,但递推关系不同。

定理8.2.8如果  $1 \le k \le p-1$ 则:

$$s(p, k) = (p-1)s(p-1, k) + s(p-1, k-1)$$

证明:由 
$$[n]_p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} s(p,k) n^k$$

得到:
$$[n]_{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \mathbf{s} (p-1,k) n^k$$

由
$$[n]_p$$
的展开形式可得出:  $[n]_p = [n]_{p-1}(n-(p-1))$ 

$$[n]_p = (n - (p-1))[n]_{p-1}$$

$$= (n - (p-1)) \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} s (p-1,k) n^{k}$$

$$[n]_{p} = n \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} S_{1}(p-1,k) n^{k} - (p-1) \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} S_{1}(p-1,k) n^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} S_{1}(p-1,k) n^{k+1} - \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} (p-1) S_{1}(p-1,k) n^{k}$$

#### 对上式中的第一项用k-1代替k后得到

$$[n]_p = \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} S_1(p-1, k-1) n^k + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k} (p-1) S_1(p-1, k) n^k$$

比较它们的系数可以看出:

$$[n]_p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} S_1(p,k) n^k$$

$$[n]_p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} S_1(p-1,k-1) n^k + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k} (p-1) S_1(p-1,k) n^k$$

得:  $S_1(p,k) = (p-1)S_1(p-1,k) + S_1(p-1,k-1)$  对每个满足 $1 \le k \le p-1$ 

1的整数k都成立。

定理8.2.9 第一类Stirling数 $S_1(p,k)$ 是将p个物品排成 k个非空的循环排列的方法数。

证明:  $\Diamond s^{\#}(p,k)$ 是将p个物品排成k个非空循环排列的方法数。

(1) 当k = p时,p个物品排成p个非空的循环排列,

每个循环排列只有一个物品,因此  $s^{\#}(p,p) = 1$   $(p \ge 0)$ 。

(2) 当k = 0时,显然  $s^{\#}(p, 0) = 0$   $(p \ge 1)$ 。

下面只需证明 $s^{\#}(p,k)$ 满足递推关系

$$s(p, k) = (p-1)s(p-1, k) + s(p-1, k-1)$$

设p个物品记为 1, 2, 3, ..., p。

将1, 2, 3, ..., p 排成 k 个圆圈有两种类型:

- (1) 存在一个循环排列只有p 自己,共有 $s^{\#}(p-1, k-1)$ 种;
- (2) p至少和另一个物品在一个循环排列,

定理8.2.9 第一类Stirling数 $S_1(p,k)$ 是将p个物品排成 k个非空的循环排列的方法数。

证明: (续)

(2) p 至少和另一个物品在一个循环排列中,则可以通过把 1, 2, ..., p-1 排成 k 个循环排列,并把 p 放在1, 2, ..., p-1任何一个物品的左边得到,因此共有 (p-1) s<sup>#</sup>(p-1, k)种。

综上,把p个物品排成k个非空的循环排列的方法数为 $s^{\#}(p,k) = (p-1)s^{\#}(p-1,k) + s^{\#}(p-1,k-1)$ 。

满足s(p, k)的递推式。

综上所述,定理成立。

# 小结

p个球	k 个盒	是否为空	方案个数				
	有区别	有空盒	$k^p$				
	无区别 无空盒		S(p,k)				
	有区别	无空盒	k! S(p, k)				
有区别	구 I I	七点人	$S(p, 1)+S(p, 2)++S(p, k), p \ge k$				
	无区别	有空盒	$S(p, 1)+S(p, 2)++S(p, p), p \le k$				
	k个循 环排列	非空	s(p, k)				

# 第8章特殊计数序列

8.3 分拆数



#### 举例

例: 有1、2、3、4克的砝码各一枚,问能称出哪几种重量?对能称出的重量有几种可称量方案?

- □ 若有1克的砝码3枚,2克的砝码4枚,4克的砝码2枚。 问能称出哪些重量?有几种方案?
- □设有1、2、4、8、16、32克砝码各一枚,问能称出 哪些重量? 分别有几种方案?



# Ŋė.

#### 整数拆分

例:把整数 6 拆分成若干非零整数和的形式,可得以下拆分方式:

6, 5+1,4+2, 3+3, 4+1+1, 3+2+1, 2+2+2, 3+1+1+1, 2+2+1+1 2+1+1+1+1, 1+1+1+1+1

- 讨论对整数n的进行两种拆分的组合计数问题
  - (1) 无限制地拆分,
  - (2) 限制拆分块数量的拆分。

不同拆分法的计数叫做拆分数(或者分拆数)。



#### 整数拆分

#### 与Bell数的区别

例:把6个无区别的球放入无区别盒子,且无空盒

- 1个盒子
   6
   2个盒子
   5+1
   4+2
   3+3

   1种方法
   3种方法
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0
   0</td
- 3个盒子,3种方法 3+2+1 2+2+1
- 4个盒子 2种方法 2+2+1+1

# NA.

#### 分拆数

设一个正整数 n,若存在正整数集  $\{n_1, n_2, ..., n_k\}$   $(1 \le k \le n, 1 \le n_i \le n)$ ,使得

$$n_1 + n_2 + ... + n_k = n$$

则称  $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$  是n的一个分拆。

$$p_n^1 + p_n^2 + \cdots + p_n^n = p_n$$

称每个 $n_i$ 为n的一个部分(或类)。

记n的所有包含k个部分的不同分拆的个数为 $p_n^k$ ,n的所有不同分拆的个数记为 $p_n$ ,称为n的分拆数。

例: {2, 2, 1, 1}为整数 6的一个分拆。

$$p_6^1 = 1, p_6^2 = 3, p_6^3 = 3$$

$$p_6^4 = 2$$
,  $p_6^5 = p_6^6 = 1$ 

$$p_6 = 11$$

问题: 分拆数的通项公式和递推公式

#### 分拆数

设一个正整数 n,若存在正整数集  $\{n_1, n_2, ..., n_k\}$   $(1 \le k \le n, 1 \le n_i \le n)$ ,使得

$$n_1 + n_2 + ... + n_k = n$$

则称  $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$  是n的一个分拆。

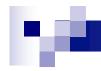
$$p_n^1 + p_n^2 + \cdots + p_n^n = p_n$$

称每个 $n_i$ 为n的一个部分(或类)。

记 n的所有包含k个部分的不同分拆的个数为  $p_n^k$ ,n的所有不同分拆的个数记为  $p_n$ ,称为n的分拆数。

对于 n 的分拆  $\{n_1, n_2, ..., n_k\}$ ,

- $\checkmark 1 \le n_i \le n, 1 \le k \le n$
- $\sqrt{n_1, n_2, ..., n_k}$  中可能有重复的数 {2, 2, 1, 1}为整数 6的一个分拆。



### 分拆的表示举例

整数 6的所有分拆

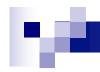
	6	5	4	3	2	1
6						
5+1						
4+2						
3+3						
4+1+1						
3+2+1						
2+2+2						
3+1+1+1						
2+2+1+1						
2+1+1+1+1						
1+1+1+1+1+1						



# 分拆的表示举例

整数 6的所有分拆

	6	5	4	3	2	1
6	1					
5+1		1				1
4+2			1		1	
3+3				2		
4+1+1			1		2	
3+2+1						
2+2+2						
3+1+1+1						
2+2+1+1						
2+1+1+1+1						
1+1+1+1+1						



### 分拆的表示举例

整数 6的所有分拆

	6	5	4	3	2	1	
6	1						61
5+1		1				1	<b>5</b> <sup>1</sup> <b>1</b> <sup>1</sup>
4+2			1		1		4 <sup>1</sup> 2 <sup>1</sup>
3+3				2			<b>3</b> <sup>2</sup>
4+1+1			1		2		4 <sup>1</sup> 1 <sup>2</sup>
3+2+1				1	1	1	312111
2+2+2					3		<b>2</b> <sup>3</sup>
3+1+1+1				1		3	3113
2+2+1+1					2	2	<b>2</b> <sup>2</sup> <b>1</b> <sup>2</sup>
2+1+1+1+1					1	4	<b>2</b> <sup>1</sup> <b>1</b> <sup>5</sup>
1+1+1+1+1+1						6	16

# Ŋė.

#### 分拆的表示

假设 $a_1, a_2, ..., a_n$ 是 n个非负整数,且

$$n = na_n + (n-1)a_{n-1} + ... + 2a_2 + 1a_1$$

则上式对应 n的一个分拆记作:

$$\lambda = n^{a_n} \dots 2^{a_2} 1^{a_1}$$

注意: 拆分中的部分的顺序不重要,因此总可以排列这些部分使得它们被排列成从大到小的顺序。

# 分拆数 $p_n$ 的等价表示

假设 $a_1, a_2, ..., a_n$ 是n个非负整数,且

$$n = na_n + (n-1)a_{n-1} + \dots + 2a_2 + 1a_1$$

则上式对应 n的一个分拆记作:

$$\lambda = n^{a_n} \dots 2^{a_2} 1^{a_1}$$
.

n的分拆数 $p_n$ 等价于方程

$$na_n + (n-1)a_{n-1} + \dots + 2a_2 + a_1 = n$$

的非负整数解  $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$ 的个数。

与多重集的组合数的区别是什么?

#### 分拆数与多重集组合数的区别

多重集  $S=\{\infty \cdot b_1, \infty \cdot b_2, ..., \infty \cdot b_k\}$ 的 n组合数 等于方程

$$e_1 + e_2 + ... + e_k = n$$

的非负整数解个数.

$$S=\{\infty\cdot 1, \infty\cdot 2, ..., \infty\cdot n\}$$

n的分拆数  $p_n$ 等价于方程

$$na_n + (n-1)a_{n-1} + \dots + 2a_2 + a_1 = n$$

的非负整数解  $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$ 的个数。

定理: n 的分拆数  $p_n^k$  满足下列递推关系:

 $\diamondsuit E' = \{ \varphi(\alpha) \mid \alpha \in E \}.$ 

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k$$
,  $p_n^1 = p_n^n = 1$ .

 $(p_n^j: n$ 的所有包含j个部分的分拆的个数)

证明: 把n分拆成1个部分和n个部分,显然均只有一种可能,即 $p_n^1 = p_n^n = 1$ 。

设 E 是将 n分成不多于k个部分的分拆的集合,有 $|E| = \sum_{j=1}^{k} p_n^j$ 。属于 E 的每个分拆可看成是一个 k元组(其分量用 0 补足k位):

 $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_m, 0, 0, ..., 0)$   $(n = a_1 + a_2 + ... + a_m, 1 \le m \le k)$ . 定义映射  $\varphi$ ,使得 对 E中的每个分成 m个部分的拆分  $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_m, 0, 0, ..., 0)$  (即  $n = a_1 + a_2 + ... + a_m$ ),有  $\varphi(\alpha) = \alpha' = (a_1 + 1, a_2 + 1, ..., a_m + 1, 1, 1, ..., 1)$  。 则  $\alpha'$  是 n+k 的一个包含 k个部分的分拆。

定理: n 的分拆数  $p_n^k$  满足下列递推关系:

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k$$
,  $p_n^1 = p_n^n = 1$ .

 $(p_n^j: n$ 的所有包含j个部分的分拆的个数)

$$E = \{\alpha = (a_1, a_2, ..., a_m, 0, 0, ..., 0) | 1 \le m \le k\}$$

$$E' = \{\varphi(\alpha) = \alpha' = (a_1 + 1, a_2 + 1, ..., a_m + 1, 1, 1, ..., 1) | \alpha \in E \}$$

证明(续): 显然有:

- (2) 对任意  $\alpha' \in E'$ , 有  $\alpha \in E$  使  $\varphi(\alpha) = \alpha'$ 。

因此 $\varphi$ 为双射,得|E| = |E'|。

定理: n 的分拆数  $p_n^k$  满足下列递推关系:

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k$$
,  $p_n^1 = p_n^n = 1$ .

 $(p_n^j: n$ 的所有包含j个部分的分拆的个数)

$$E = \{\alpha = (a_1, a_2, ..., a_m, 0, 0, ..., 0) | 1 \le m \le k\}$$

$$E' = \{\varphi(\alpha) = \alpha' = (a_1 + 1, a_2 + 1, ..., a_m + 1, 1, 1, ..., 1) | \alpha \in E \}$$

证明: (续)下面证明 $|E'| = p_{n+k}^k$ 。

只需证明:对任意一个n+k的包含k个部分的划分 $\alpha'$ ,

都能找到一个 $\alpha \in E$ ,使得 $\varphi(\alpha) = \alpha'$ 。

设 $\alpha' = (b_1, b_2, ..., b_m, b_{m+1}, ..., b_k)$ ,

- (1) 若 $b_i$ 全大于1,i=1, ..., k,则 $\alpha = (b_1-1, b_2-1, ..., b_k-1)$  为n的k个部分的划分;
- (2) 否则,设 $\alpha'=(b_1,b_2,...,b_m,1,...,1)$ ,则 $\alpha=(b_1-1,...,b_m-1,0,...,0)$ 为n的m个部分的划分。

因此,  $|E'|=p_{n+k}^k$ 。

综上,定理得证。

#### 利用定理给出的公式,可递归地推算 $p_n^k$ 如下表:

 $p_n^k$  k=1 2 3 4 5 6 7 8

 $p_{n+k}^k = \sum_{j=1}^k p_n^j$ ,  $p_n^1 = p_n^n = 1$ 

5 1 2 2 1 1

6 1 3 3 2 1 1

7 1

8 1 1

#### 利用定理给出的公式,可递归地推算 $p_n^k$ 如下表:

$p_n^k$	<i>k</i> =1	2	3	4	5	6	7	8	$p_n = \sum_{k=1}^n p_n^k$
n=1	1								1
2	1	1							2
3	1	1	1						3
4	1	2	1	1					5
5	1	2	2	1	1				7
6	1	3	3	2	1	1			11
7	1	3	4	3	2	1	1		15
8	1	4	5	5	3	2	1	1	22

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且  $r \le n$ 。

设  $p_n(r)$  是最大部分为r 的n 的分拆的个数,且  $q_n(r)$  是满足分拆各部分不大于r 的n-r 的分拆数量,

则  $p_n(r) = q_n(r)$ 。

6
5+1,4+2, 3+3
4+1+1, 3+2+1, 2+2+2
3+1+1+1, 2+2+1+1
2+1+1+1
1+1+1+1

 $p_6(4)$ 

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且  $r \le n$ 。

设  $p_n(r)$  是最大部分为r 的n 的分拆的个数,且  $q_n(r)$  是满足分拆各部分不大于r 的n-r 的分拆数量,

则  $p_n(r) = q_n(r)$ 。

6
5+1,4+2, 3+3
4+1+1, 3+2+1, 2+2+2
3+1+1+1, 2+2+1+1
2+1+1+1
1+1+1+1

 $p_6(4)$ 

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且  $r \le n$ 。

设  $p_n(r)$  是最大部分为r 的n 的分拆的个数,且  $q_n(r)$  是满足分拆各部分不大于r 的n-r 的分拆数量,

则  $p_n(r) = q_n(r)$ 。

$$p_6(4) = 2$$
: 4+2, 4+1+1

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且  $r \le n$ 。

设  $p_n(r)$  是最大部分为r 的n 的分拆的个数,且  $q_n(r)$  是满足分拆各部分不大于r 的n-r 的分拆数量,

则  $p_n(r) = q_n(r)$ 。

$$p_6(4) = 2$$
: 4+2, 4+1+1
 $q_6(4)$ 

分拆各部分不大于 4 的 2 的分拆数量

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且  $r \le n$ 。 设  $p_n(r)$  是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数,且

 $q_n(r)$  是满足分拆各部分不大于r的n-r的分拆数量,

则 
$$p_n(r) = q_n(r)$$
。

$$p_6(4) = 2$$
: 4+2, 4+1+1

$$q_6(4) = 2: 2, 1+1$$

分拆各部分不大于 4 的 2 的分拆数量

构建两种情况的分拆的一一对应

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且  $r \le n$ 。

设  $p_n(r)$  是最大部分为r 的n 的分拆的个数,且  $q_n(r)$  是满足分拆各部分不大于r 的n-r 的分拆数量,

则  $p_n(r) = q_n(r)$ 。

证明:如下建立两种分拆的一一对应:

(1) 任取 n的一个最大部分为 r 的分拆  $\lambda_1$ ,

去掉  $\lambda_1$ 的一个等于 r 的部分,得到 n-r 的一个分拆  $\lambda_1$ ',且  $\lambda_1$ '的任何部分都不大于r;

(2) 反过来,任取 n-r 的分拆  $\lambda_2$ ,其任何部分都不大于 r,

插入一个等于r的部分,从而得到一个n的分拆 $\lambda_2$ '。

因此,得  $p_n(r) = q_n(r)$ 。

# 100

## 分拆的几何图示: Ferrers图

设  $\lambda$  是 n 的分拆  $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ ,其中 $n_1 \ge n_2 ... \ge n_k > 0$ 。  $\lambda$  的Ferrers ②(Ferrers diagram),是一个左对齐的点组,该组有 k 行,第 i 行有  $n_i$  的点( $1 \le i \le k$ )。

例: 10的分拆  $\lambda$  为 10=4+2+2+1+1,可记作  $4^12^21^2$ ,  $\lambda$  的Ferrers图为:

- • •
- •
- •
- •
- 对于任何正整数n, 其每个分拆可由Ferrers图唯一确定。

# NA.

# 分拆的几何图示: Ferrers图

将分拆  $\lambda$  的Ferrers图 看成一个矩阵,其 转置矩阵称为  $\lambda$  的共轭分拆,记为  $\lambda^*$ 。

例: 10的分拆  $\lambda$  为 10=4+2+2+1+1,可记作  $4^12^21^2$ ,

λ的Ferrers图为: λ\*的Ferrers图为:

- λ\*的行数等于λ的最大部分。
- λ的行数等于 λ\* 的最大部分。
- 分拆 λ的共轭的共轭就是它本身,即(λ\*)\*= λ。

- λ\*的行数等于λ的最大部分。
- λ的行数等于 λ\* 的最大部分。

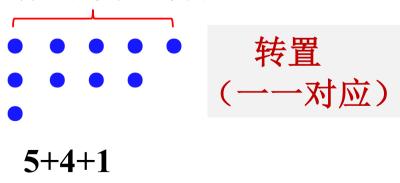
问题: 当 n=10, 以 5 作为最大部分的拆分有多少个?

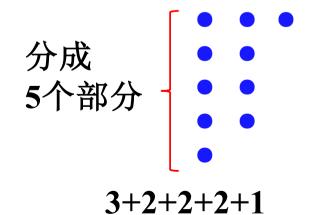
$$10 = 5+5 = 5+4+1 = 5+3+2 = 5+3+1+1 = 5+2+2+1$$
  
=  $5+2+1+1+1 = 5+1+1+1+1$   
 $\cancel{\text{FF}}$ ?

分成5个部分的拆分有多少个?

$$10 = 6+1+1+1+1 = 5+2+1+1+1 = 4+3+1+1+1 = 4+2+2+1+1+1$$
  
=  $3+3+2+1+1 = 3+2+2+2+1 = 2+2+2+2+2$ 

以5作为最大部分





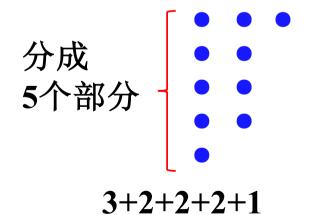
- λ\*的行数等于λ的最大部分。
- λ的行数等于 λ\* 的最大部分。

问题: 当 n=10, 以 5 作为最大部分的拆分有多少个?

分成5个部分的拆分有多少个?

$$10 = 6+1+1+1+1 = 5+2+1+1+1 = 4+3+1+1+1 = 4+2+2+1+1+1$$
  
=  $3+3+2+1+1 = 3+2+2+2+1 = 2+2+2+2+2$  7  $\uparrow$ 

以5作为最大部分



- λ\*的行数等于λ的最大部分。
- λ的行数等于 λ\* 的最大部分。

问题: 当 n=10, 以 5 作为最大部分的拆分有多少个?

$$10 = 5+5 = 5+4+1 = 5+3+2 = 5+3+1+1 = 5+2+2+1$$

$$= 5+2+1+1+1 = 5+1+1+1+1$$

$$# \$ ?$$

分成5个部分的拆分有多少个?

$$10 = 6+1+1+1+1 = 5+2+1+1+1 = 4+3+1+1+1 = 4+2+2+1+1+1$$
  
=  $3+3+2+1+1 = 3+2+2+2+1 = 2+2+2+2+2$ 

定理(拆分数定理): 正整数n分成k个部分的拆分个数,等于n分成以k为最大部分的拆分个数。

# 自共轭分拆

- 当某个分拆  $\lambda$  与它的共轭分拆  $\lambda$ \* 完全相同时,即  $\lambda = \lambda$ \* 时, $\lambda$  称为自共轭分拆。
  - □ 此时, λ的Ferrers图是一个对称方阵。

例如:将10拆分成: 12=5+2+1+1+1;  $\lambda=5^12^11^3$ ; 其Ferrers图如下:

- $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$   $\bullet$
- •

- ✓ 它的转置与自身一样。
- ✓ 关于主对角线对称

定理8.3.2 设n是正整数,

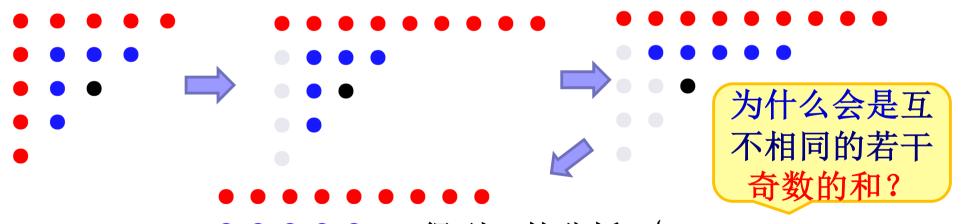
设  $p_n^s$ 为 n 的自共轭分拆个数,

 $p_n^t$  为分拆成互不相同的若干奇数的和的分拆个数,

则有  $p_n^s = p_n^t$ 。

分析: 利用Ferrers图建立两种分拆的一一对应。

例:考虑15的自共轭分拆  $\lambda$ : 15 = 5+4+3+2+1,其图为



得到15的分拆  $\lambda'$ : 15 = 9 + 5 + 1。

把以上过程反过来,可得从 $\lambda'$ 得到 $\lambda$ 。

定理8.3.3(欧拉恒等式)设 n 是正整数,设 $p_n^o$ 是把 n 分成奇数部分的分拆个数, $p_n^d$  是把n 分成不同部分的分拆个数,则有 $p_n^o = p_n^d$ 。

例: 考虑32的奇数和分拆 32 = 7+5+5+5+3+3+1+1+1+1。

$$32 = 7 + 5 + 5 + 5 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$= 7 + 10 + 5 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$= 7 + 10 + 5 + 6 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$= 7 + 10 + 5 + 6 + 2 + 1 + 1$$

$$= 7+10+5+6+2+2$$

$$= 7 + 10 + 5 + 6 + 4$$

迭代地把两个相同部分 合并成一个部分,最终 产生不同部分的分拆 定理8.3.3(欧拉恒等式)设 n 是正整数,

设 $p_n^{\alpha}$ 是把n分成奇数部分的分拆个数,

 $p_n^d$  是把n 分成不同部分的分拆个数,则有

$$p_n^o = p_n^d$$
.

#### 考虑 32 的分成不同部分的分拆

$$32 = 11 + 9 + 6 + 4 + 2$$
.

$$32 = 11+9+6+4+2$$

$$= 11+9+3+3+2+2+1+1$$

迭代地把偶数部分平分 成两个相等部分,直至 产生奇数部分的分拆。 定理8.3.3(欧拉恒等式)设n 是正整数,设 $p_n^q$ 是把n 分成奇数部分的分拆个数, $p_n^d$  是把n 分成不同部分的分拆个数,则有 $p_n^q = p_n^d$ 。

证明:如下建立两种分拆的一一对应:

- (1) 考虑把n分成奇数和的一个分拆 $\lambda$ 。
- 如果存在两个相同的部分,则把这两部分合并成一个部分。

持续以上过程,直到所有部分都互不相同。

由于每次合并两个部分时,都相应减少了部分的数量,

因此以上过程最终会终止,得到一个把n分成不同部分的分拆。

定理8.3.3(欧拉恒等式)设 n 是正整数,设 $p_n^q$ 是把 n 分成奇数部分的分拆个数, $p_n^d$  是把n 分成不同部分的分拆个数,则有 $p_n^q = p_n^d$ 。

证明:如下建立两种分拆的一一对应:

- (2) 考虑把n分成不同部分的一个分拆λ。
- 如果 $\lambda$ 的所有部分都是奇数,则 $\lambda$ 是一个把n分成奇数和的分拆;
- 否则至少存在一个偶数部分,则把每一个偶数部分分成两个相同的部分。

重复以上过程,直到所有部分都是奇数。

# 100

#### 小结

定理(拆分数定理): 正整数n分成k个部分的拆分个数,等于n分成以k为最大部分的拆分个数。

定理8.3.1 设 n 和 r 是正整数且  $r \le n$ 。 设  $p_n(r)$  是最大部分为 r 的 n 的分拆的个数,且  $q_n(r)$  是满足分拆各部分不大于 r 的 n-r 的分拆数量,则  $p_n(r) = q_n(r)$ 。

定理8.3.2 设 n 是正整数,设  $p_n^s$ 为 n 的自共轭分拆个数,  $p_n^t$  为分拆成互不相同的若干奇数的和的分拆个数,

则有  $p_n^s = p_n^t$ 。

定理8.3.3(欧拉恒等式)设 n 是正整数,设 $p_n^0$ 是把 n 分成奇数部分的分拆个数, $p_n^d$  是把n 分成不同部分的分拆个数,则有 $p_n^0 = p_n^d$ 。



#### ■ 如何计算分拆数?

#### ■ 方法一:

定理: n分拆数  $p_n^k$  满足下列递推关系:

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k$$
,  $p_n^1 = p_n^n = 1$ .

$$n$$
 分拆数  $p_n = \sum_{i=1}^n p_n^i$ 

■ 方法二: 生成函数

定理8.3.4 分拆数数列  $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ 的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{-1}$$
.

证明: 由  $(1-x^k)^{-1} = 1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots+x^{a_kk}+\ldots$ , 得

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k)^{-1}$$

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots + y^n + \dots$$

$$= \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \dots \times \frac{1}{1-x^k} \times \dots$$

$$= (1 + x + x^{2} + \dots + x^{1a_{1}} + \dots) \times (1 + x^{2} + x^{4} + \dots + x^{2a_{2}} + \dots) \times \dots$$

 $(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\ldots+x^{ka_k}+\ldots)\times\ldots$ 

每一个项x'' 由通过从第一个因子选择 $x^{1a_1}$ ,从第二个因子选择项 $x^{2a_2}$ ,从第三个因子选择项 $x^{3a_3}$ ,以此类推,得到,其中,

$$1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots ka_k + \dots = n \quad (0 \le a_i \le n)$$
 (1)

显然,方程(1)的每个正整数解均对应n的一个拆分,因此, $x^n$ 的 系数,即方程(1)的非负整数解的个数,就是n的分拆数。

# MA.

#### 分拆数与生成函数

■ 分拆数数列  $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ 的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{-1} \circ$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \dots$$

$$= (1+x+x^2+\dots+x^{1a_1}+\dots) \times (1+x^2+x^4+\dots+x^{2a_2}+\dots)$$

$$\times \dots \times (1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\dots+x^{ka_k}+\dots) \times \dots$$

■ 多重集合S={ $\infty$ · $a_1$ ,  $\infty$ · $a_2$ , ...,  $\infty$ · $a_k$ }的n组合数数列 $h_0$ ,  $h_1$ , ...,  $h_n$ , .... 的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {n+k-1 \choose n} x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$$

$$= (1+x+x^2+...+x^{e_1}+....) \times (1+x+x^2+...+x^{e_2}+....) \times .... \times (1+x+x^2+...+x^{e_k}+....)$$

■ 分拆数数列  $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ 的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{-1} \circ$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \dots$$

$$= (1+x+x^2+\dots+x^{1a_1}+\dots) \times (1+x^2+x^4+\dots+x^{2a_2}+\dots)$$
×...×  $(1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\dots+x^{ka_k}+\dots)$  ×...

- n 分成 k个部分的分拆数  $p_n^k$  的生成函数?
- n 分成奇数和的分拆数  $p_n$  的生成函数?
- n 分成互不相等的部分的拆分数  $p_n$  的生成函数?
- n 分成互不相等的奇数部分的拆分数  $p_n$  的生成函数?

■ 分拆数数列  $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ 的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{-1} \circ$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \dots$$

$$= (1+x+x^2+\dots+x^{1a_1}+\dots) \times (1+x^2+x^4+\dots+x^{2a_2}+\dots)$$

$$\times \dots \times (1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\dots+x^{ka_k}+\dots) \times \dots$$

• n 分成 k个部分的分拆数 $p_n^k$ 的生成函数

$$g(x) = x^{k}(1-x)^{-1}(1-x^{2})^{-1}...(1-x^{k})^{-1}$$

保证至少存在一个部分k

保证最大部分为k

定理(拆分数定理): 正整数n分成k个部分的拆分个数,等于n分成以k为最大部分的拆分个数。

■ 分拆数数列  $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ 的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{-1} \circ$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \dots$$

$$= (1+x+x^2+\dots+x^{1a_1}+\dots) \times (1+x^2+x^4+\dots+x^{2a_2}+\dots)$$

$$\times \dots \times (1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\dots+x^{ka_k}+\dots) \times \dots$$

• n 分成奇数和的分拆数  $p_n$  的生成函数?

$$g(x) = (1-x)^{-1}(1-x^{3})^{-1}(1-x^{5})^{-1}(1-x^{7})^{-1}...$$

$$= (1+x+x^{2}+...+x^{1a_{1}}+....) \times (1+x^{3}+x^{6}+...+x^{3a_{2}}+....) \times (1+x^{5}+x^{10}+...+x^{5a_{k}}+....) ...$$

保证每个部分都 为奇数

■ 分拆数数列  $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ 的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{-1} \circ$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \dots$$

$$= (1+x+x^2+\dots+x^{1a_1}+\dots) \times (1+x^2+x^4+\dots+x^{2a_2}+\dots)$$

$$\times \dots \times (1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\dots+x^{ka_k}+\dots) \times \dots$$

• n 分成互不相等的部分的拆分数  $p_n$  的生成函数?

分拆中1,2,...,n只能出现一次

$$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)...(1+x^n)...$$

# Ma.

#### 分拆数与生成函数

■ 分拆数数列  $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ 的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{-1} \circ$$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1-x^k} \cdot \dots$$

$$= (1+x+x^2+\dots+x^{1a_1}+\dots) \times (1+x^2+x^4+\dots+x^{2a_2}+\dots)$$

$$\times \dots \times (1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\dots+x^{ka_k}+\dots) \times \dots$$

• n 分成互不相等的奇数部分的拆分数  $p_n$  的生成函数?

分拆中不超过n 的奇数只能出现 1次

$$g(x) = (1+x)(1+x^3)(1+x^5)...(1+x^{2k-1})...$$

分析: 与{1, 2, 3, 4}的组合数有区别: {1, 2, 4}, {3, 4}是两个不同的组合, 但称出同样的重量。

(1) {1, 2, 3, 4}的组合数的生成函数为:

$$G_1(x)=(1+x)(1+x)(1+x)(1+x)$$

(2) {1, 2, 3, 4}的能称出的重量数的生成函数为

$$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$$

分析: {1,2,3,4}的能称出的重量数的生成函数为

$$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$$

分析: {1,2,3,4}的能称出的重量数的生成函数为

$$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$$
.

把四个因子中的x用 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 替换,得

$$(x_1^0 + x_1^1)(x_2^0 + x_2^2)(x_3^0 + x_3^3)(x_4^0 + x_4^4) =$$

$$x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^0 \ x_4^0 + x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^0 \ x_4^4 + x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^3 \ x_4^0 + x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^3 x_4^4 +$$

$$x_1^0 x_2^2 x_3^0 x_4^0 + x_1^0 x_2^2 x_3^0 x_4^4 + x_1^0 x_2^2 x_3^3 x_4^0 + x_1^0 x_2^2 x_3^3 x_4^4 +$$

$$x_1^1 x_2^0 \ x_3^0 \ x_4^0 + x_1^1 x_2^0 \ x_3^0 \ x_4^4 + \ x_1^1 \ x_2^0 \ x_3^3 \ x_4^0 + x_1^1 x_2^0 \ x_3^3 x_4^4 +$$

$$x_1^1 x_2^2 x_3^0 \ x_4^0 + x_1^1 x_2^2 x_3^0 \ x_4^4 + x_1^1 x_2^2 x_3^3 \ x_4^0 + x_1^1 x_2^2 x_3^3 x_4^4$$

分析: {1,2,3,4}的能称出的重量数的生成函数为

$$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$$

把四个因子中的x用 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 替换,得

$$(x_1^0 + x_1^1)(x_2^0 + x_2^2)(x_3^0 + x_3^3)(x_4^0 + x_4^4) =$$

$$x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^0 \ x_4^0 + x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^0 \ x_4^4 + x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^3 \ x_4^0 + x_1^0 \ x_2^0 \ x_3^3 x_4^4 +$$

$$x_1^0 x_2^2 x_3^0 x_4^0 + x_1^0 x_2^2 x_3^0 x_4^4 + x_1^0 x_2^2 x_3^3 x_4^0 + x_1^0 x_2^2 x_3^3 x_4^4 +$$

$$x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^0 + x_1^1 x_2^0 x_3^0 x_4^4 + x_1^1 x_2^0 x_3^3 x_4^0 + x_1^1 x_2^0 x_3^3 x_4^4 +$$

$$x_1^1 x_2^2 x_3^0 x_4^0 + x_1^1 x_2^2 x_3^0 x_4^4 + x_1^1 x_2^2 x_3^3 x_4^0 + x_1^1 x_2^2 x_3^3 x_4^4$$

把 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 替换成x,得

$$g(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}$$

从G(x)展开式中x的幂次项知,可称出1~10克的重量,系数即为对应的称量方案数。



例: 若有1克的砝码3枚,2克的砝码4枚,4克的砝码2枚。问能称出哪些重量?各有几种方案?



#### 有序拆分

- 以上讨论的整数n的拆分都是无序拆分
  - □ 即在定义中强加了一种次序,即

$$n = \sum_{i=1}^{k} a_i, a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_k \ge 1$$

例: 5=3+1+1,5=1+3+1,5=1+1+3 是5的同一无序拆分。

■ 当考虑有序拆分时,定义可改写如下:

$$n = \sum_{i=1}^{k} a_i, a_i \ge 1, i = 1, 2, ..., k$$

# re.

#### 小结

- 分拆数相关定理
- 分拆数数列  $p_0, p_1, ..., p_n, ...$ 的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k)^{-1}$$
.

$$=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1-x^k}\cdot\ldots$$

= 
$$(1+x+x^2+...+x^{1a_1}+....) \times (1+x^2+x^4+...+x^{2a_2}+....)$$

$$\times ... \times (1 + x^{k} + x^{2k} + x^{3k} + ... + x^{ka_{k}} + ...) \times ...$$

# 总结

n个球	k 个盒	是否为空	方案个数
有区别	有区别	有空盒	k <sup>n</sup>
	无区别	无空盒	S(n,k)
	有区别	无空盒	k! S(n, k)
	无区别	有空盒	$S(p, 1)+S(p, 2)++S(n, k), n \ge k$
			$S(n, 1)+S(n, 2)++S(n, n), n \le k$
	k个循 环排列	非空	s(n, k)



n个球	k 个盒	是否为空	方案个数
无区别	有区别	有空盒	
	有区别	无空盒	
	无区别	有空盒	
	无区别	无空盒	

解: {1,2,3,4}的能称出的重量数的生成函数为

$$G(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$$

 $= 1+x+x^2+2x^3+2x^4$   $♀ 2x^5+2x^6+2x^7+x^8+x^9+x^{10}$  从G(x)展开式中x的幂次项知,可称出1~10克的重量,其中 $x^n$ 前的系数表示称出n克的可称量方案数,n=1,2,3,4。即 称出3、4、5、6、7克均有2种方案,称出其他重量的均只有1种方案。

故称出6克的方案数有两种, 称出10克的方案数是唯一的。

70

例: 求用1角,2角,3角的邮票贴出不同数值的方案数。

解: 方案数的生成函数为

$$G(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^{j} \sum_{j=0}^{\infty} x^{2j} \sum_{j=0}^{\infty} x^{3j} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^{2}} \cdot \frac{1}{1-x^{3}}$$

$$= (1+x+x^{2}+.....) \cdot (1+x^{2}+x^{4}+.....) \cdot (1+x^{3}+x^{6}+.....)$$

$$= (1+x+2x^{2}+2x^{3}+3x^{4}+.....) \cdot (1+x^{3}+x^{6}+.....)$$

$$= 1+x+2x^{2}+3x^{3}+4x^{4}+....+...$$

以*x*<sup>4</sup>为例,其系数为4,即4拆分成1、2、3之和的拆分数为4, 拆分方案(贴邮票方案)为: