

北京航空航天大学

2021 - 2022 学年 第二学期期末

离散数学3

《组合数学》

班 级_____学 号_____

姓 名_____成 绩_____

2022 年 6 月 23 日

班号_____ 学号_____ 姓名_____ 成绩_____

离散数学 3 《组合数学》期末考试卷

注意事项：1、考试时间 120 分钟、开卷。

2、所有答题写在试卷后面的空白页上，请标明**题号**。

一、填空题（每空 5 分，共 50 分）

- (1) 用 m ($m \geq 2$) 种颜色给 1 行 n ($n \geq 2$) 列的棋盘的方格染色，使得相邻方格颜色不同的染色方案有_____种。
- (2) 两个 6 位十进制数，如果把其中一个的各位数进行重排，得到另一个，则称这两个 6 位十进制数是等价的，那么互不等价的 6 位十进制数一共有_____个。
(例如：132685 与 236851 等价，也与 586231 等价)
- (3) 设多重集 $S = \{ 1 \cdot a_1, 1 \cdot a_2, \dots, 1 \cdot a_k, \infty \cdot a_{k+1}, \infty \cdot a_{k+2}, \dots, \infty \cdot a_n \}$ ，则 S 的 r 组合数 ($1 \leq k < r \leq n$) 为_____。
- (4) 一个口袋装有 4 个红球、7 个黑球和 9 个白球，从中至少取出_____个球才能保证必取出 6 个同色球。
- (5) $\{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ 的全排列中，至少有 3 个数字在其自然位置上的排列的有_____个。
- (6) 设 h_n 是把 1 行 n 列的棋盘的方格用红、黄、蓝、绿四种颜色着色，使得没有 3 个着成红色的方格相邻的着色方法数，则 h_n 满足的递推关系为_____。

- (7) 多项式 $(2+3x-y+2z)^{10}$ 的展开式中 $x^2y^3z^2$ 的系数为_____。
- (8) 序列 h_n 的一般项是 n 的一个 3 次多项式。如果其差分表的第 0 行的前 4 个数是 3, 0, 1, 18, 则 $\sum_{k=0}^8 h_k$ 等于_____。
- (9) 假设有无限多的 1 分、2 分、5 分、1 角的硬币, 令 h_n 为用这些硬币凑成 n 分钱的方法数, 则数列 $h_0, h_1, \dots, h_n, \dots$ 的生成函数为_____。
- (10) 设集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 1 & 7 & 5 & 8 & 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ 是 X 上的一个置换。假设用 4 种颜色对 X 中的元素进行着色, 令 C 是 X 的所有着色的集合, 则 f 保持 C 中着色不变的着色数为_____。

二、已知 $n+1$ 个正整数 a_0, a_1, \dots, a_n , 满足 $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 2n$, 证明: 一定可以从这 $n+1$ 个正整数中选出 3 个数 (3 个数不一定互不相同), 使得其中两个数之和等于第三个数。 (10 分)

三、多重集 $\{2 \cdot a_1, 2 \cdot a_2, \dots, 2 \cdot a_n\}$ 的全排列中, 满足任意两个 a_i 均不相邻的全排列有多少个? (10 分)

(即满足 a_1 与 a_1 不相邻, a_2 与 a_2 不相邻, \dots , 且 a_n 与 a_n 不相邻的全排列数目。)

四、从排列 $a_1 a_2 \dots a_n$ ($n \geq 13$) 中选取 4 个元素 a_i, a_j, a_k 和 a_l ($1 \leq i < j < k < l \leq n$), 使得在该排列中 a_i 与 a_j 之间至少有 2 个元素, a_j 与 a_k 之间至少有 3 个元素, a_k 与 a_l 之间最多有 4 个元素, 有多少种不同的选取方法? (10 分)

五、用数字 1, 2, 3, 4, (数字可重复使用) 可组成多少个含奇数个 1, 偶数个 2 且至少含 1 个 3 的 n 位数 ? (10 分)

六、假设有 A, B, C, D, E 五种商品, 其中 A 和 B 的价格均为 1 元一个, C, D 和 E 的价格均为 2 元一个。某人有 n 元钱, 他每天买一种商品, 且只买一个该商品。设 h_n 为他花完这 n 元钱的方式的数量(假设 $h_0=1$), 求出数列 $h_0, h_1, \dots, h_n, \dots$ 满足的递推关系, 并求出该递推关系的解 h_n 。

(10 分)