第十四章Pólya计数

4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

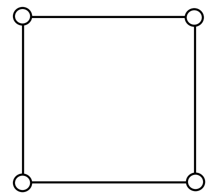
- 组合计数问题中的两类困难
  - 问题通解的表达式：生成函数
  - 区分所讨论的问题中哪些应该看成相同的，哪些是不同的
    - ✓ 在计算过程中避免重复或遗漏

George Poly
(1887-1985)
匈牙利裔美国数学家

在前人研究同分异构体计数问题的基础上，波利亚在1937年以《关于群、图与化学化合物的组合计算方法》（KombinatorischeAnzahlbestimmungen fr Gruppen，Graphen und ChemischeVerbindungen）为题，发表了长达110页、在组合数学中具有深远意义的著名论文。

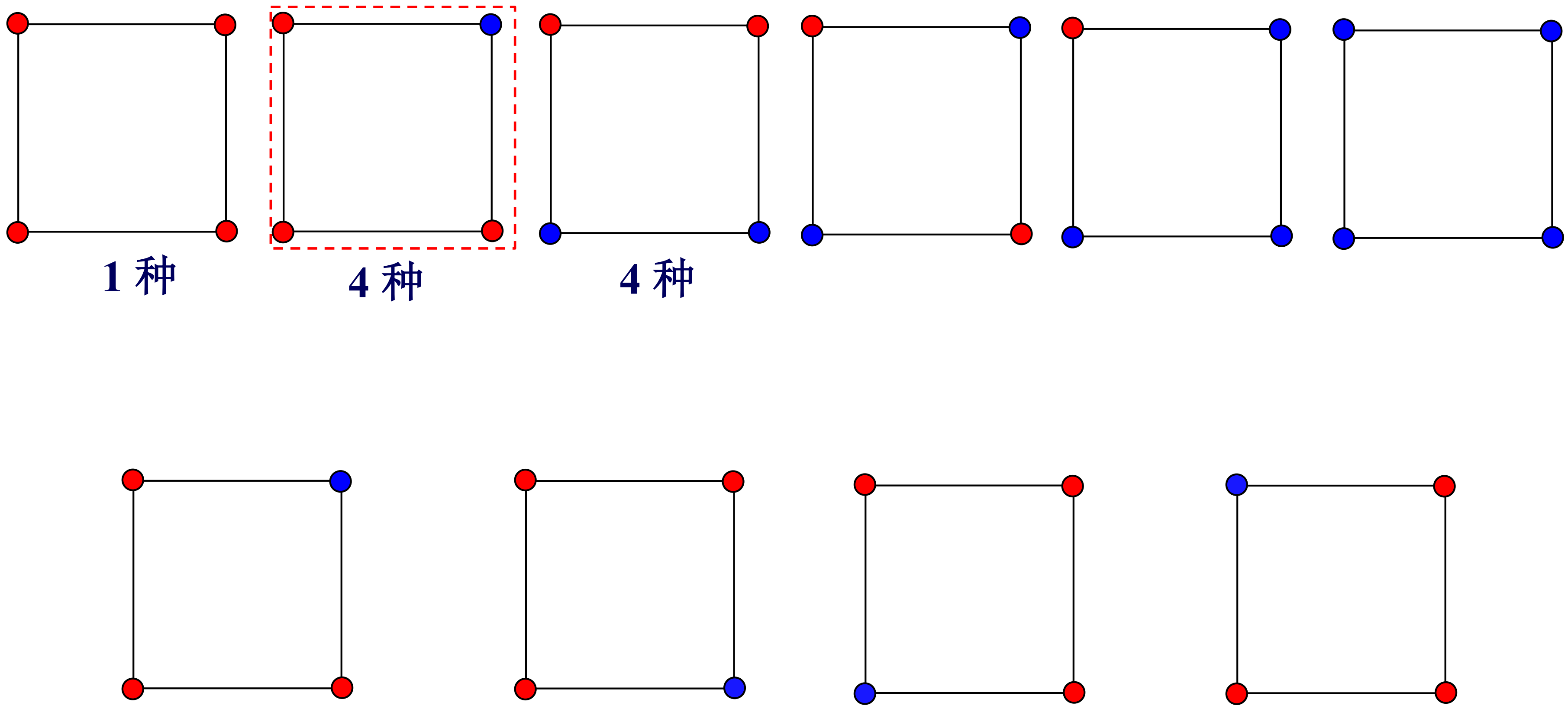
“波利亚计数定理”
（Polya's enumeration theorem）

例（正方形着色问题）：用红、蓝两种颜色给一个正方形的4个顶点着色，试问存在多少种不同的着色方法数。

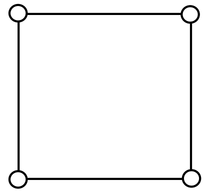


(1) 正方形位置固定：16种

(2) 允许正方形转动：6种



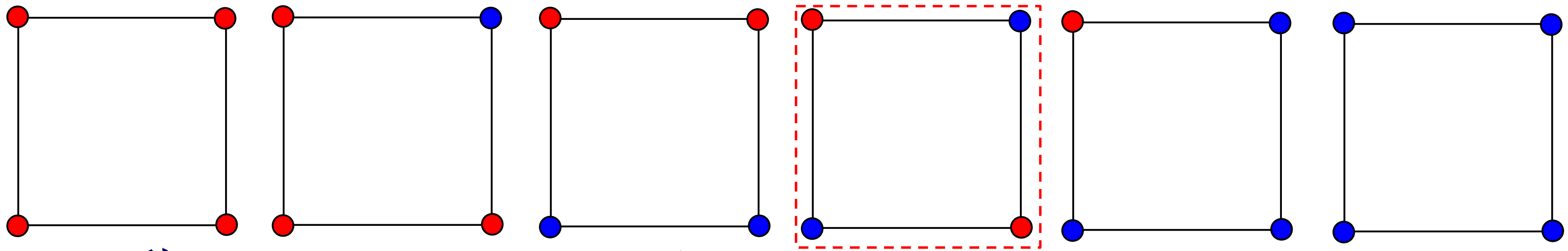
例（正方形着色问题）：用红、蓝两种颜色给一个正方形的4个顶点着色，试问存在多少种不同的着色方法数。



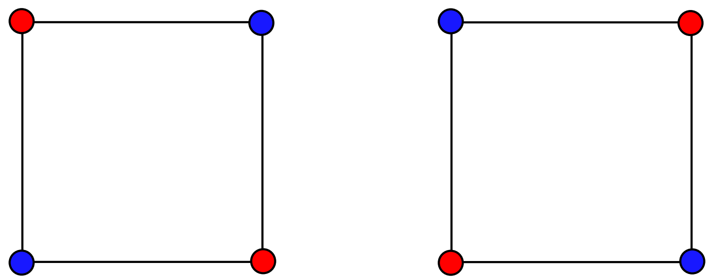
(1) 正方形位置固定：16种

(2) 允许正方形转动：6种

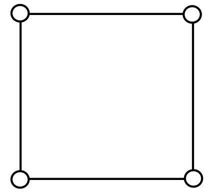
- 把16种方法分成 6部分，同一部分中的两种着色被视为等价



1 种　4 种　4 种　2 种　4 种　1 种



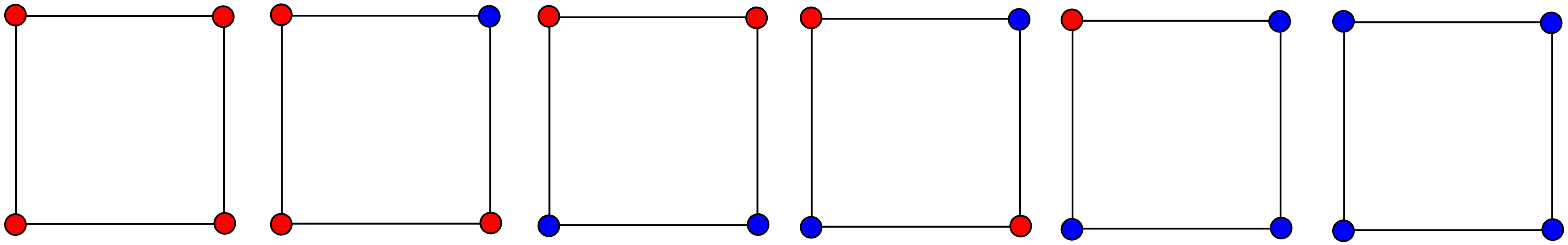
例（正方形着色问题）：用红、蓝两种颜色给一个正方形的4个顶点着色，试问存在多少种不同的着色方法数。



(1) 正方形位置固定：16种

(2) 允许正方形转动：6种

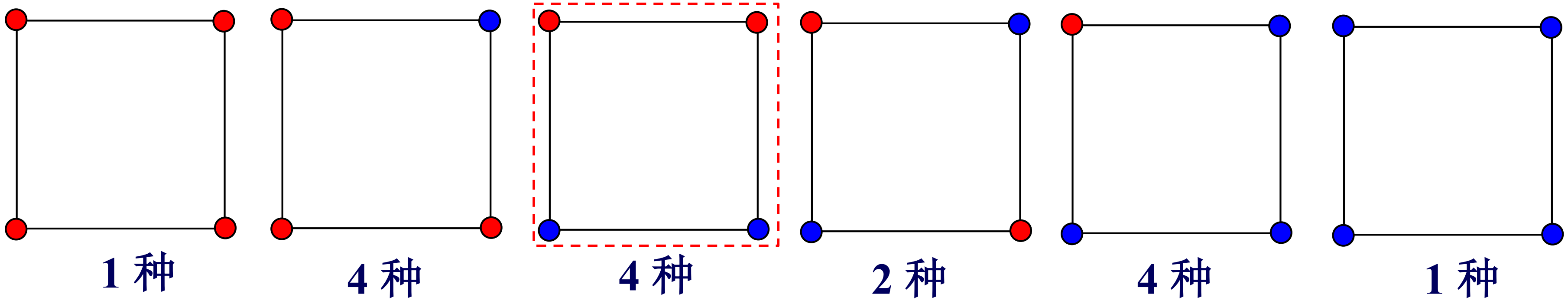
- 把16种方法分成 6部分，同一部分中的两种着色被视为等价

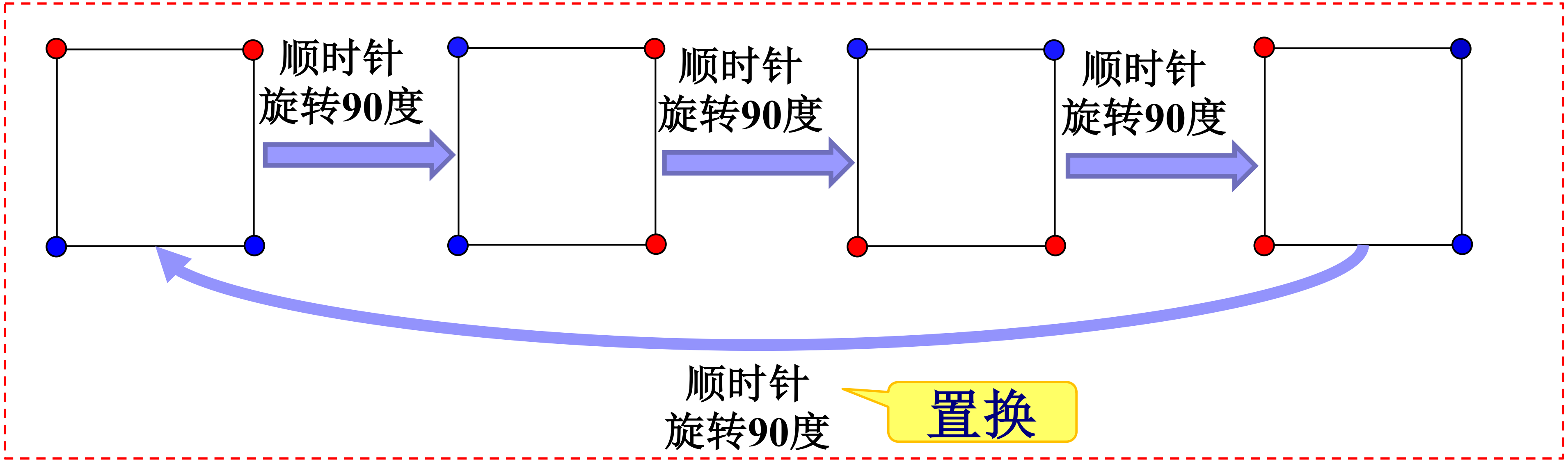


1 种　　4 种　　4 种　　2 种　　4 种　　1 种

$$1 + 4 + 4 + 2 + 4 + 1 = 16 \text{ 种}$$

- 本章目的：建立和阐明在对称情形下计算非等价着色的技术
  - 明确给出两种着色方案异同的数学定义
  - 如果规定了每种颜色出现的次数，对着色方案数给出统一的表达式





- 着色c_1与c_2等价：c_1可通过一个置换转化为c_2

考虑两个着色在一个置换群下的等价性

主要内容

4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

主要内容

4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

群的基本知识

给定集合 G 和 G 上的二元运算“•”，如果以下四个条件满足，则称代数结构$(G, \bullet)$为群：

(1) 封闭性：“•”运算在 G 上是封闭的，即

对于任意 $a, b \in G$，都有 $a \bullet b \in G$;

(2) 结合律成立：“•”运算满足结合律，即

对于任意$a, b, c \in G$，都有 $a \bullet (b \bullet c)=(a \bullet b) \bullet c$。

(3) 存在单位元：存在 $e \in G$，对于任意 $a \in G$，满足$e \bullet a = a \bullet e = a$，$e$ 称为G的单位元；

(4) 存在逆元：对于任意 $a \in G$, 存在 $a^{-1} \in G$, 满足 $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$, a^{-1}称为a的逆元。

群的基本知识

- $a \bullet b$ 可简记为 ab。
- 由于结合律成立，$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$，记为$abc$；

  推广到n个元素乘积$a_1 a_2 \ldots a_n$，等于任意一种结合。
- 当$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$ 时，$a_1 a_2 \ldots a_n$可简记为 a^n。

例：**1.** $G=\{1,-1\}$ 在乘法运算下是一个群。

2. 整数集 Z 在加法运算下是一个群。

3. 二维欧几里得空间的刚体旋转变换集合 $T=\{T_\alpha\}$ 构成群，其中

$$T_\alpha:\ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

群的基本知识

- 有限群：如果 G 是有限集合，则称 G 为有限群。
- 群的阶：有限群 G 的元素个数称为群的阶，记为 $|G|$。
- 循环群的与生成元：在群$(G,\bullet)$中，若存在 $a \in G$，G中任任意元素 b 均可以表示成 a 的方幂，则
  - 称G为循环群，
  - a 称为该群的生成元。

置 换

- 设 X 是一个有限集。不失一般性，取 X 为包含前n个正整数的集合$X=\{1, 2, \ldots, n\}$。
- X 的每个置换 $i_1, i_2, \ldots, i_n$ 可视为 X 到其自身的一个一对一（one-to-one）的函数 $f: X \to X$（即单射）， 其中，

$$f(1) = i_1, f(2) = i_2, \ldots, f(n) = i_n。$$

根据鸽巢原理，$f: X \to X$ 为满射，因此 f 为双射。

可以用如下 $2\times n$ 阵列来表示置换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

1, 2, …, n 一个排列

- 集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$ 的置换个数为 $n!$。
- 将 X 的所有$n!$个置换构成的集合记为 S_n。

例：{1, 2, 3}的 3!=6个置换为:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

- S_3是由上述6个置换构成的集合
- 置换是函数，因此可以合成。

置换的合成（composition）

合成运算：设 f 和 g 为{ 1, 2, …, n }上的两个置换:

$$f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

f与g的合成按照先 f 后 g 的顺序放置得到一个新的置换:

$$g\circ f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

其中$(g\circ f)(k) = g(f(k)) = j_{i_k}$.

$(j_{i_1}, j_{i_2}, \ldots, j_{i_n})$是{ 1, 2, …, n }的一个排列

- 函数的合成定义了 S_n 上的一个二元运算:

  如果 f 和 g属于S_n，则 $g\circ f$ 也属于 S_n。

- 二元运算 ∘ 的性质：
  - ✓ 满足结合律：$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$
  - ✓ 通常不满足交换律

例：$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 1\end{pmatrix}$

$g\circ f=$ $f\circ g=$

- 二元运算∘的性质：
  - ✓ 满足结合律：$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$
  - ✓ 通常不满足交换律

例：

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\quad g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

$$g\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\quad f\circ g=$$

- 二元运算 ∘ 的性质：
  - ✓ 满足结合律：$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$
  - ✓ 通常不满足交换律

例：
$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}\quad g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

$$g\circ f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\quad f\circ g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

几种特殊置换

- **自身合成运算：**

$f^1=f$，$f^2=f\circ f$，$f^3=f\circ f\circ f$，$\ldots$，$f^k=f\circ f\circ\ldots\circ f$ (k个f)

- **恒等置换：** 各整数对应到它自身的置换

$$\iota(k) = k，对所有 k = 1, 2, \ldots, n$$

等价于

$$\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

单位元

✓ **恒等置换性质：**

$\iota\circ f = f\circ\iota = f$，对 S_n 中的所有置换 f 均成立。

几种特殊置换

- **逆置换：** S_n中的每个置换 f 是一对一的函数，所以存在逆函数 $f^{-1} \in S_n$，满足：

  如果 $f(s) = k$，那么 $f^{-1}(k) = s$。

逆元

例：$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

交换 $2\times n$ 矩阵的第一行与第二行

重新排列列使得第一行的整数以自然顺序 1, 2, …, n 出现

- **性质1：** 恒等置换的逆是它自身：$\iota^{-1} = \iota$。
- **性质2：** 任意置换与它的逆满足：$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \iota$。

置换群

令 S_n 为$X=\{1, 2, \ldots, n\}$的所有$n!$个置换构成的集合。

设G是S_n的非空子集，$(G, \circ)$是否是群？

如果 S_n 的非空子集 G 满足如下四个性质，则定义 G 为 X 的一个置换的群，简称置换群：

(1) 封闭性：对G中任意置换 f 与 g，$f\circ g$ 也属于G。

(2) 满足结合律：对G中任意置换 f, g, h， $(f\circ g)\circ h=f\circ (g\circ h)$

(3) 存在单位元：S_n中的恒等置换 ι 属于G。

(4) 存在逆元：对G中的每一个置换 f，它的逆 f^{-1} 也属于G。

置换群

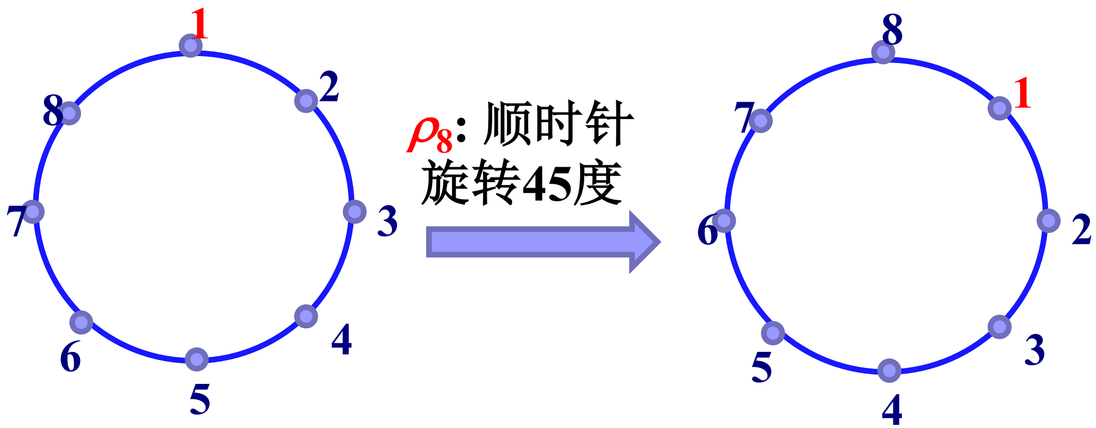
- $X=\{1, 2, \ldots, n\}$的所有置换的集合S_n是一个置换群，称为 n 阶对称群。
- 仅含恒等置换的集合$G=\{\iota\}$是一个置换群。
- 每个置换群满足消去律：$f\circ g = f\circ h$，则 $g = h$

例： 设 n 是一个正整数，ρ_n 表示 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的置换：

$$\rho_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$$

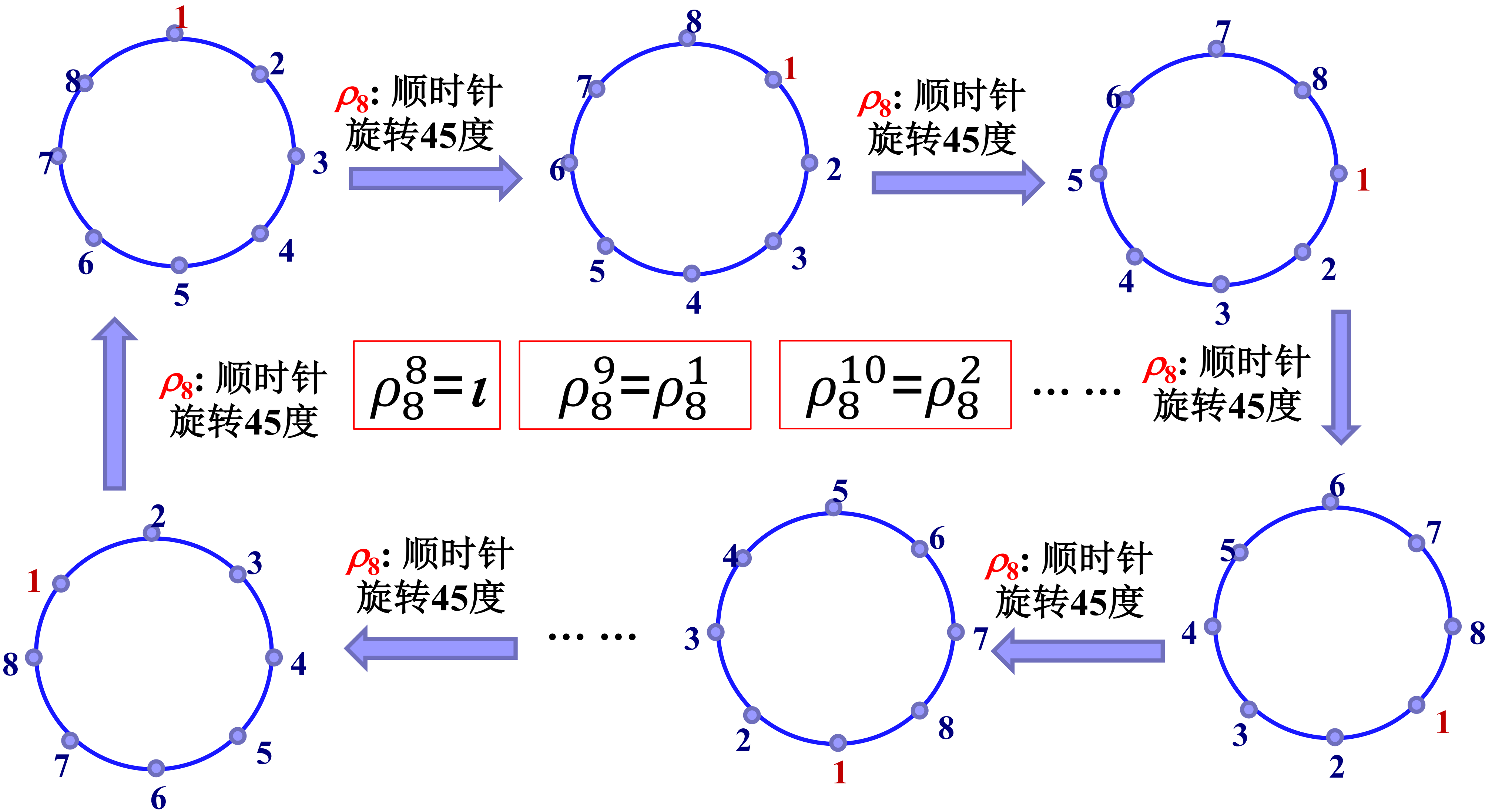
即 当 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ 时，有 $\rho_n(i) = i+1$ 且 $\rho_n(n) = 1$。

把1, 2, …, n 均等地放到圆周上或正n角形上(n=8):



- ρ_n 按照顺时针方向将各整数传到随后的整数。

$$\rho_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$



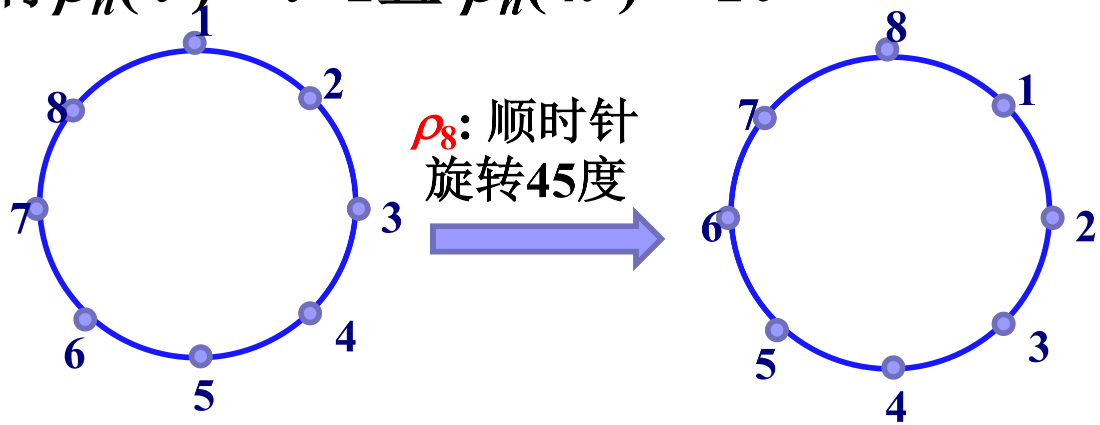
$\boxed{\rho_8^8 = \iota}$ $\boxed{\rho_8^9 = \rho_8^1}$ $\boxed{\rho_8^{10} = \rho_8^2}$

例： 设 n 是一个正整数，ρ_n 表示 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的置换：

$$\rho_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$$

即 当 $i = 1, 2, \ldots, n-1$时，有$\rho_n(i) = i+1$且 $\rho_n(n) = 1$。

把1, 2, …, n 均等地放到圆周上或正n角形上：



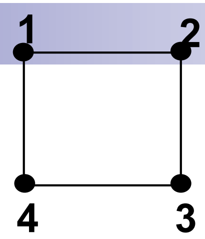
- ρ_n 按照顺时针方向将各整数传到随后的整数。
- 可将置换 ρ_n 视为圆的 360/n度 的旋转，

  ρ_n^2 视为圆的 2×(360/n) 度的旋转，…，

  ρ_n^k 视为圆的 k×(360/n)度 的旋转：

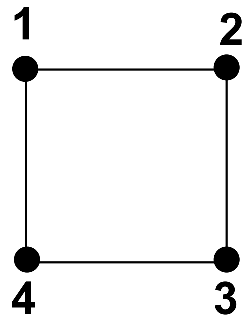
$$\rho_n^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-k & n-k+1 & \ldots & n \\ k+1 & k+2 & \ldots & n & 1 & & k \end{pmatrix} \qquad \rho_n^k(i) = (i+k) \bmod n$$

例如：当n=4时，有

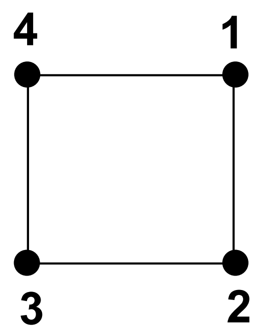


$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$

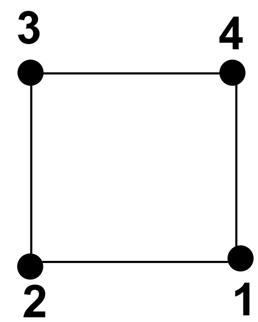
恒等置换



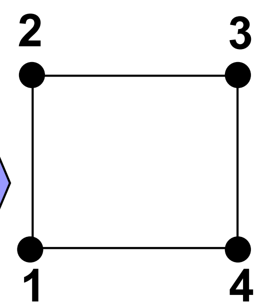
$$\rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$$



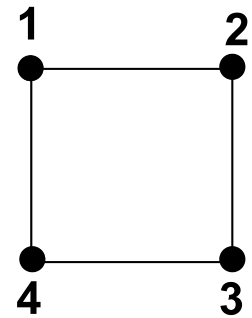
$$\rho_4^2=\rho_4^1\circ\rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$$



$$\rho_4^3=\rho_4^1\circ\rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$



$$\rho_4^4=\rho_4^1\circ\rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\rho_4^0$$



$$\rho_4^4=\rho_4^1\circ\rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\rho_4^0$$

$$\rho_4^5=\rho_4^1\circ\rho_4^4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\rho_4^1$$

$$\rho_4^6=\rho_4^1\circ\rho_4^5=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\rho_4^2$$

$$\rho_4^7=\rho_4^1\circ\rho_4^6=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\rho_4^3$$

$$\rho_4^8=\rho_4^1\circ\rho_4^7=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}=\rho_4^0$$

$\boldsymbol{\rho_4^k=\rho_4^r}$**，其中** $\boldsymbol{k=r \bmod 4}$

$$\rho_n^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-k & n-k+1 & \dots & n \\ k+1 & k+2 & \dots & n & 1 & & k \end{pmatrix}$$

性质：设 0≤ k ≤ n-1, r≥ n, 如果 k= r mod n，则 $\rho_n^k = \rho_n^r$。

- 仅有 ρ_n 的 n个不同的幂，即

$$\rho_n^0 = \iota, \rho_n, \rho_n^2, \dots, \rho_n^{n-1}$$

- $\rho_n^k \circ \rho_n^{n-k} = \rho_n^n = \iota$，$k$=0, 1, .., n-1，得

$$(\rho_n^k)^{-1} = \rho_n^{n-k}, k = 0, 1, .., n\text{-}1$$

结论：C_n ={ $\rho_n^0 = \iota$, $\rho_n^1, \rho_n^2, \dots, \rho_n^{n-1}$ } 是一个置换群。

✓ C_n是一个循环群。

$$\rho_n^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-k & n-k+1 & \ldots & n \\ k+1 & k+2 & \ldots & n & 1 & & k \end{pmatrix}$$

性质: $(C_n, \circ)$ 是一个置换群，其中$C_n=\{\rho_n^0=\iota, \rho_n^1, \rho_n^2, \ldots, \rho_n^{n-1}\}$。

证明： 置换群的四个条件：合成运算的封闭性，满足结合律，存在单位元和逆元。

(1) 设ρ_n^i和$\rho_n^j(0 \le i, j \le n\text{-}1)$是$C_n$中的任意两个置换，则有

$$\rho_n^i \circ \rho_n^j = \rho_n^{i+j},$$

✓如果$0 \le i+j \le n\text{-}1$，则$\rho_n^{i+j} \in C_n$;

✓如果$n \le i+j$，则一定存在k $(0 \le k \le n\text{-}1)$，满足

$k = (i+j) \bmod n$，所以，$\rho_n^{i+j} = \rho_n^k \in C_n$。

(2) 置换的合成满足结合律。

(3) $\rho_n^0 = \iota \in C_n$。

(4) 对于任意$\rho_n^k \in C_n$，$(\rho_n^k)^{-1} = \rho_n^{n-k}$ 。

因此，$(C_n, \circ)$ 是置换群。

小结

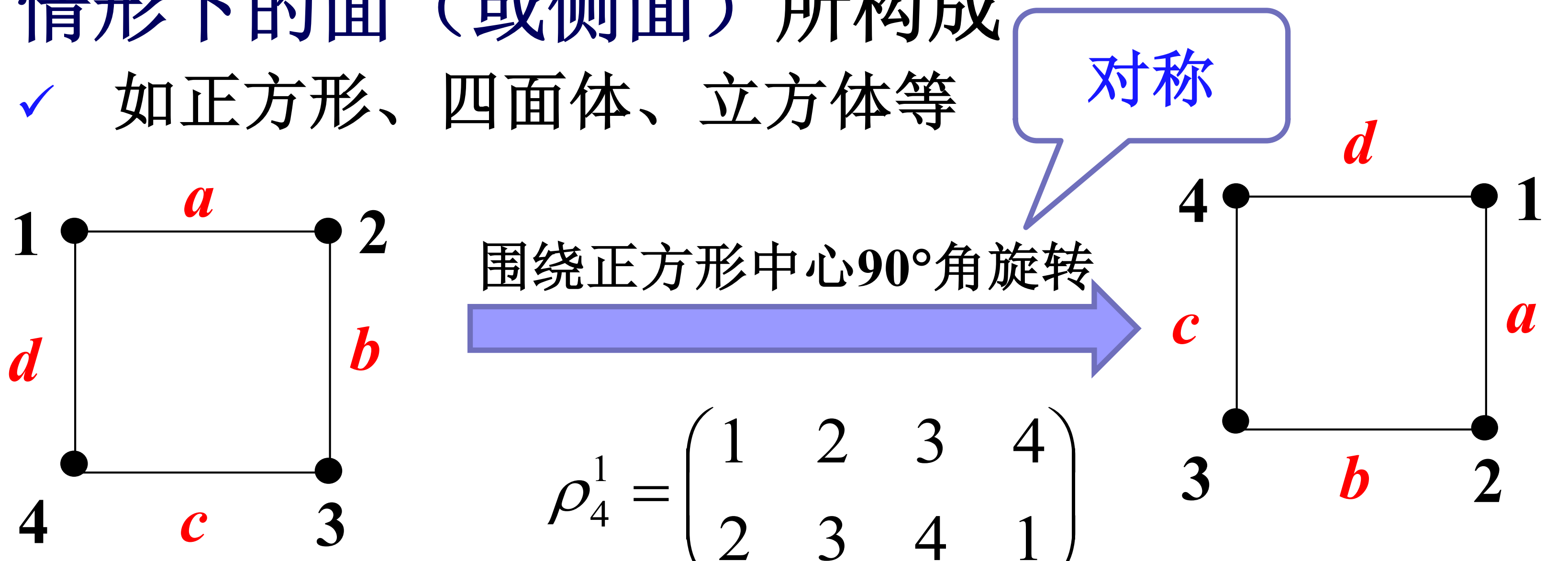
- 群 $(G, \bullet)$
  - 封闭性、存在单位元与逆元
- 置换 $i_1, i_2, \ldots, i_n$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$
- 置换群
  - $(C_n, \circ)$ 是一个置换群，其中$C_n=\{\rho_n^0= \iota, \rho_n^1, \rho_n^2, \ldots, \rho_n^{n-1}\}$ ，其中

$$\rho_n^k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-k & n-k+1 & \ldots & n \\ k+1 & k+2 & \ldots & n & 1 & & k \end{pmatrix}$$

  - 可将置换 ρ_n^k 视为圆的 $k\times(360/n)$度 的旋转
- 隐含了用于计算把 n个不同的对象安置到一个圆周上的方法数

几何图形的对称

- 对称：设Ω是一个几何图形，Ω到它自身的一个(几何)运动（motion）或全等（congruence）称为Ω的一个对称。
- 考虑的几何图形是由角点（顶点）、边、及三维情形下的面（或侧面）所构成
  - ✓ 如正方形、四面体、立方体等



$$\rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$$

几何图形的对称

- 对称：设Ω是一个几何图形，Ω 到它自身的一个(几何)运动（**motion**）或全等（**congruence**） 称为Ω的一个对称。
- 考虑的几何图形是由角点（顶点）、边、及三维情形下的面（或侧面）所构成
  - ✓ 如正方形、四面体、立方体等
- 每个对称可以看作是顶点、边以及三维情形下的面上的一个置换。
  - ✓ 两个对称的合成仍得一个对称
  - ✓ 一个对称的逆也是一个对称
  - ✓ 使所有对象固定不动的运动也是一个对称，即恒等对称

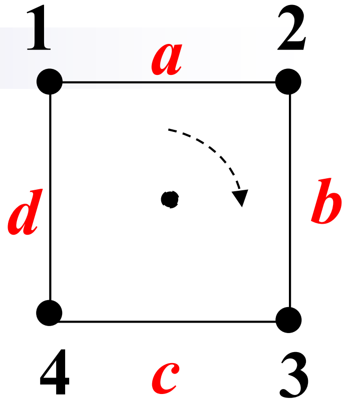
几何图形的对称

- 对称：设Ω是一个几何图形，Ω 到它自身的一个(几何)运动或全等 称为Ω的一个对称。
- 考虑的几何图形是由角点（顶点）、边、及三维情形下的面（或侧面）所构成
  - ✓ 如正方形、四面体、立方体等
- 对称构成置换群，称为Ω的对称群
  - ✓ 顶点对称群：Ω的角点上的置换群G_C
  - ✓ 边对称群：Ω的边上的置换群G_E
  - ✓ 面对称群：Ω是三维情形下的面上的置换群G_F

例：考虑如右图所示正方形 Ω：

角点：**1, 2, 3, 4**

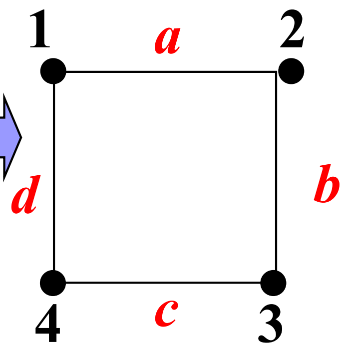
边：***a, b, c, d***



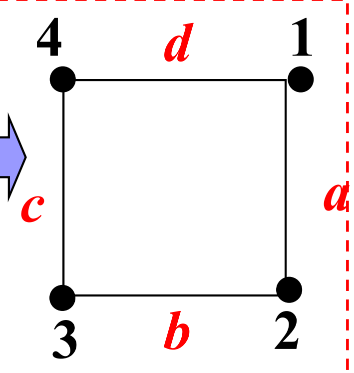
Ω的对称： 两种类型

(1) 4个平面对称: 围绕正方形中心 **0°, 90°, 180 °, 270 °**角的**4**个**旋转**

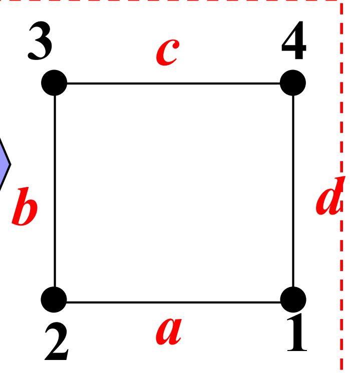
$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$$



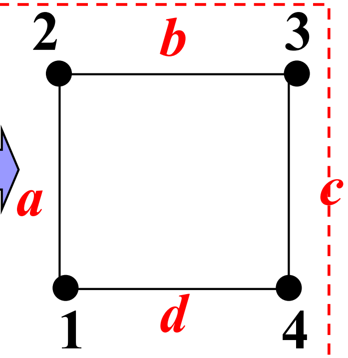
$$\rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$$



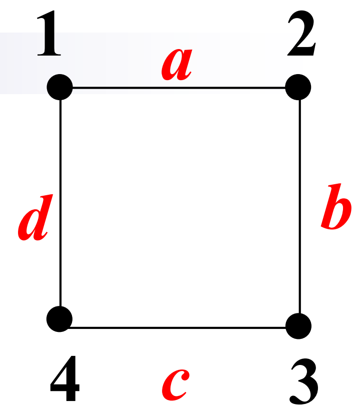
$$\rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}$$



$$\rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$



例：考虑如右图所示正方形 Ω：

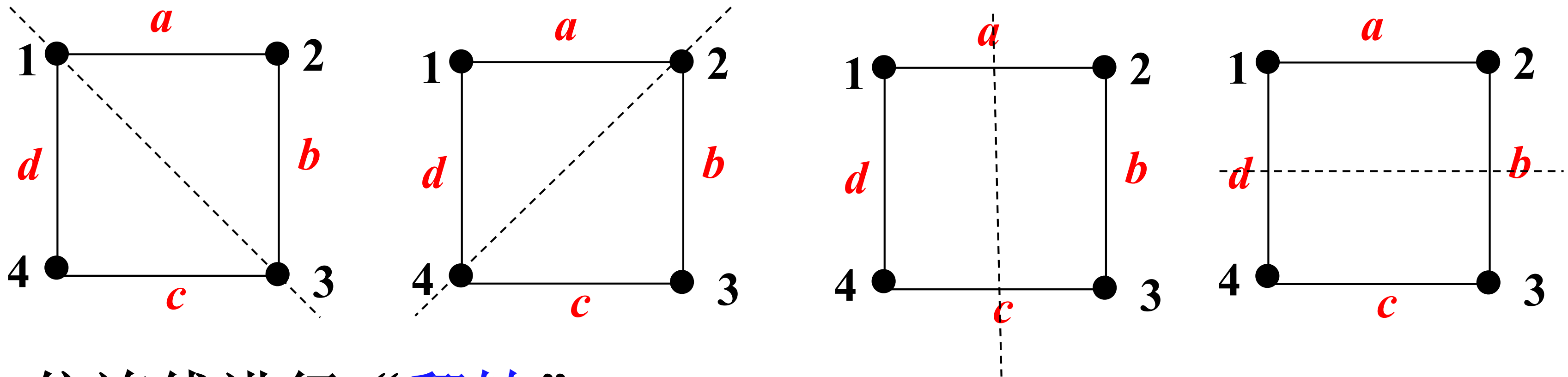


角点：1, 2, 3, 4

边：*a*, *b*, *c*, *d*

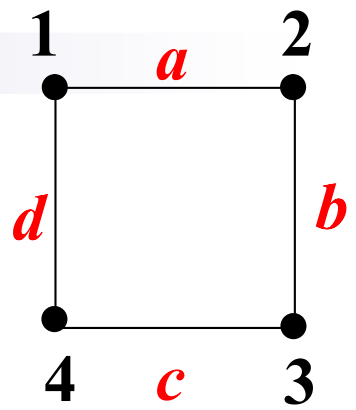
Ω的对称： 两种类型

(2) 4个反射：对角点连线 (2个)、对边中点连线 (2个)



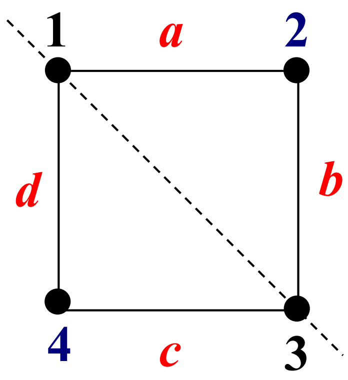
- 依连线进行“翻转”；
- 运动是在空间进行，“翻转”正方形需要离开它所在的平面。

例：考虑如右图所示正方形 Ω：
角点：1, 2, 3, 4
边：*a*, *b*, *c*, *d*

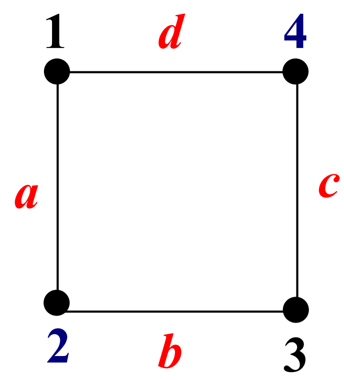


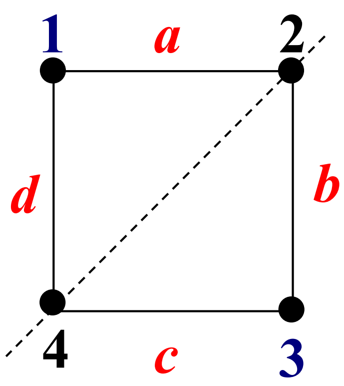
Ω的对称： 两种类型

(2) 4个反射：对角点连线 (2个)、对边中点连线 (2个)

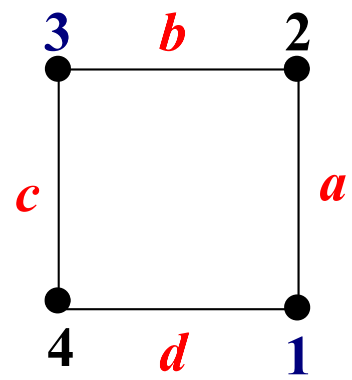


$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

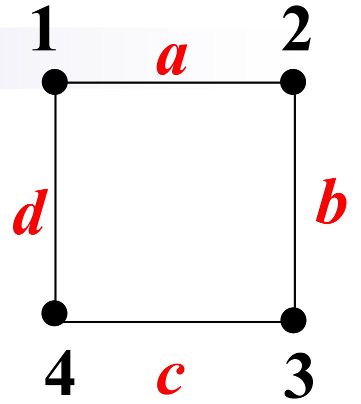




$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$



例：考虑如右图所示正方形Ω：

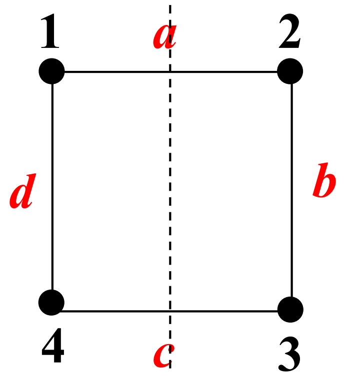


角点：**1, 2, 3, 4**

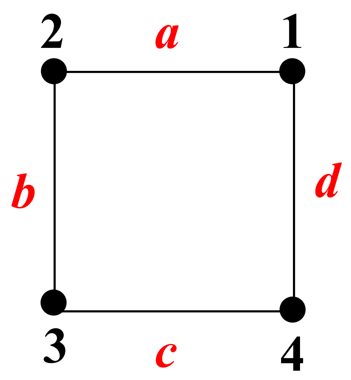
边：***a*, *b*, *c*, *d***

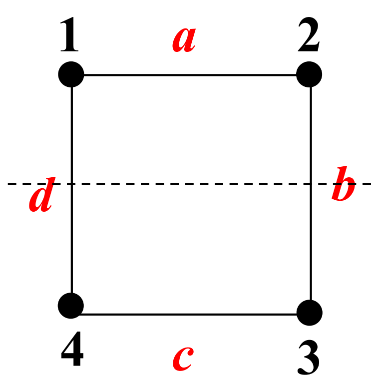
Ω的对称： 两种类型

(2) 4个反射：对角点连线 (2个)、对边中点连线 (2个)

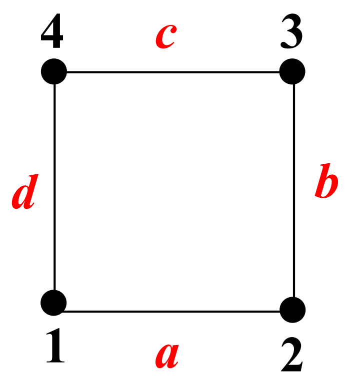


$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$



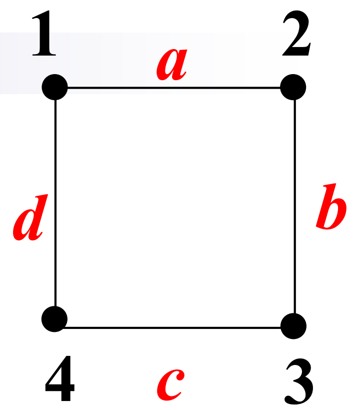


$$\tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



例：考虑如右图所示正方形Ω：

顶点1, 2, 3, 4，边 *a*, *b*, *c*, *d*。



作用在角点上的两类对称：

(1) 4个平面对称：

$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\quad \rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\quad \rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\quad \rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$$

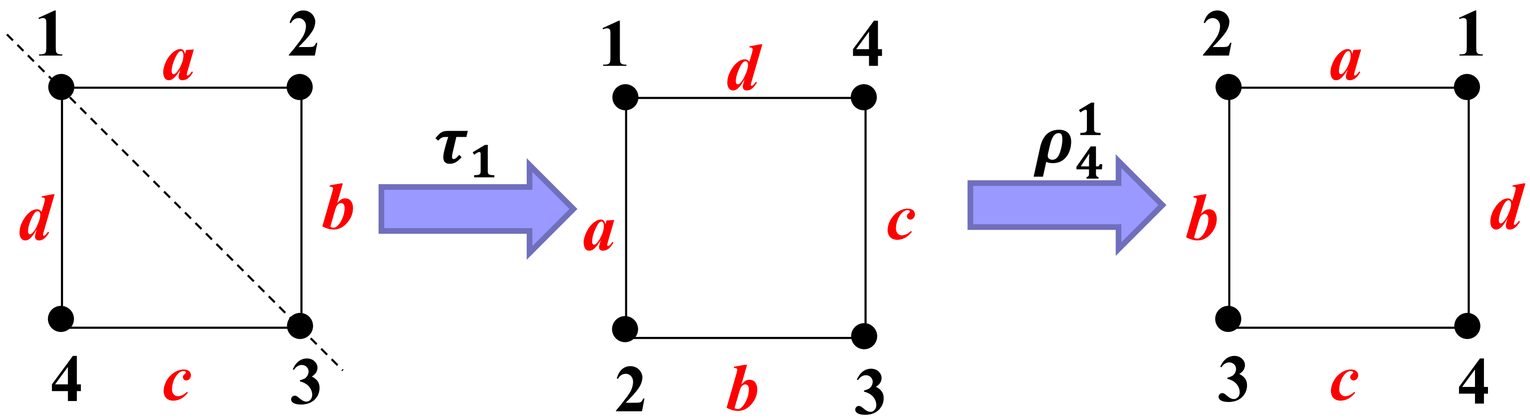
(2) 4个反射：

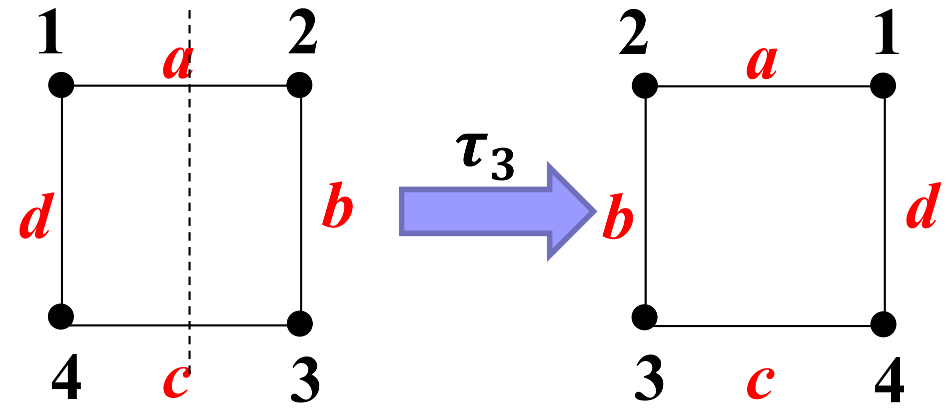
$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}\quad \tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}\quad \tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}\quad \tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

- 以上8个对称定义了顶点对称群 G_c
  - 封闭性、结合律、存在单位元和逆元
- $G_c=\{\rho_4^0=\iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$称为Ω的顶点对称群。

Ω的顶点对称群：$G_c = \{\rho_4^0 = \iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$

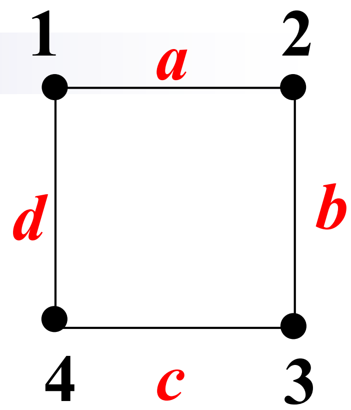
- 可验证：$\tau_3 = \rho_4^1 \circ \tau_1$，$\tau_2 = \rho_4^2 \circ \tau_1$，$\tau_4 = \rho_4^3 \circ \tau_1$





因此，$G_c = \{\rho_4^0 = \iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \rho_4^2 \circ \tau_1, \rho_4 \circ \tau_1, \rho_4^3 \circ \tau_1\}$

正方形的顶点对称群：

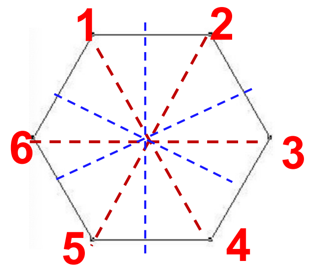


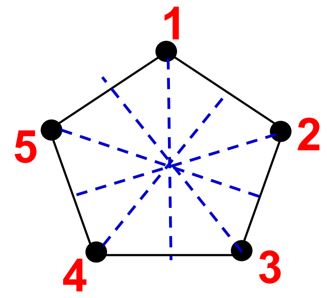
$$G_c = \{ \rho_4^0 = \iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \}$$

例：推广至任意正 n 角形对称群 ($n \geq 3$)

(1) n个旋转：　$\rho_n^0 = \iota$, ρ_n, ρ_n^2, …, ρ_n^{n-1}

(2) n个反射：　τ_1, τ_2, …, τ_n





• n为偶数：$\frac{n}{2}$个关于对角点的反射

$\frac{n}{2}$个关于对边中点连线的反射

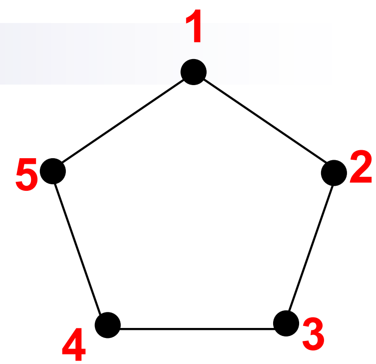
• n为奇数：n个关于角点与其对边中点的连线的反射

所以，关于{1, 2, …, n}的2n个置换形成的群：

$$D_n = \{\rho_4^0 = \iota , \rho_n^1, \rho_n^2, \ldots, \rho_n^{n-1}, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\}$$

是一个阶为 2n 的二面体群的一个实例。

例（10阶二面体群）：考虑顶点标以1，2，3，4，5的正五角形。



它的（角点）对称群 D_5 包含5个旋转和5个反射。

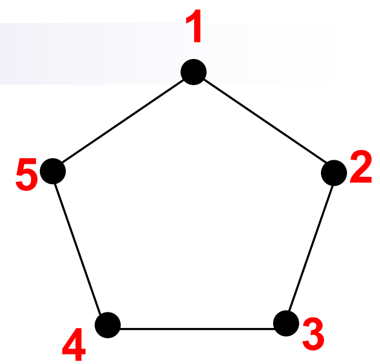
- **5个旋转:**

$$\rho_5^0 = \iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \rho_5^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\rho_5^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho_5^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

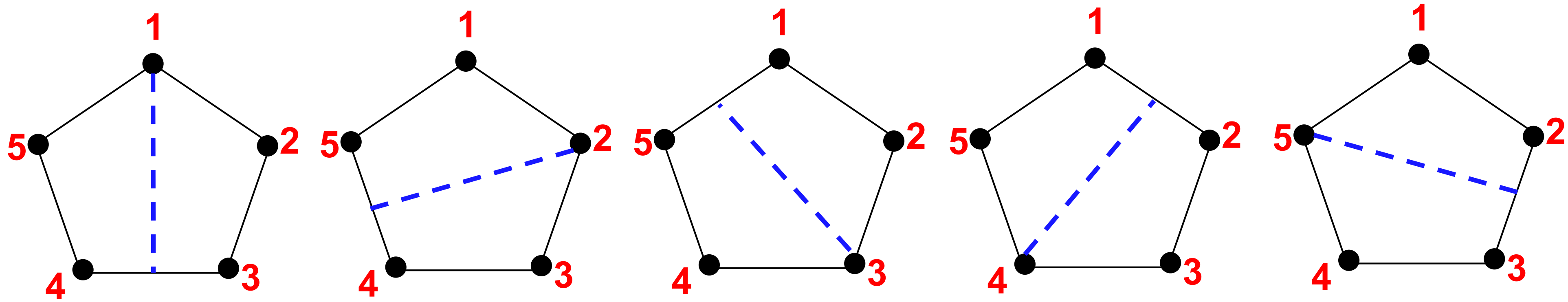
$$\rho_5^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

例（10阶二面体群）：考虑顶点标以1，2，3，4，5的正五角形。



它的（角点）对称群 D_5 包含5个旋转和5个反射。

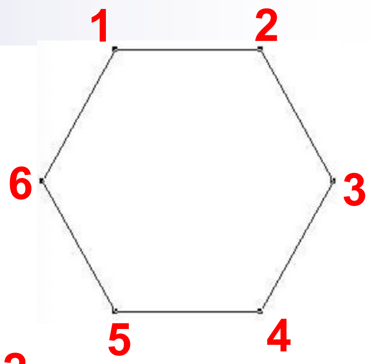
- **5个反射** (5为奇数：5个关于角点与其对边中点的连线的反射)



$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

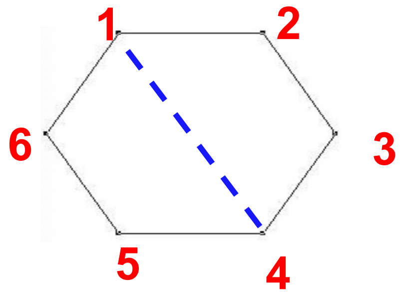
$$\tau_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \tau_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

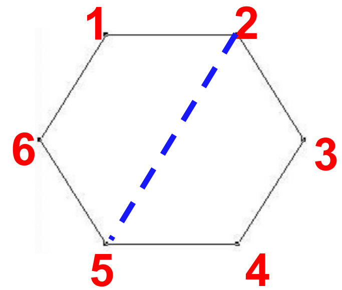
例：12阶二面体群：考虑顶点标以1，2，3，4，5，6的正六角形。

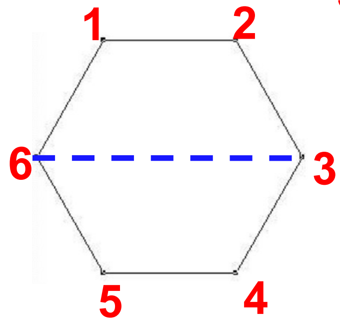


它的（角点）对称群 D_5 包含6个旋转和6个反射。

- 6个反射：3个关于对角点的反射

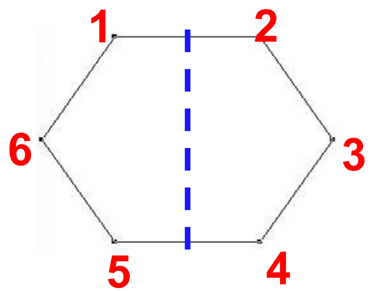


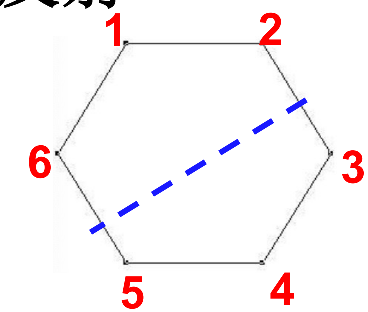


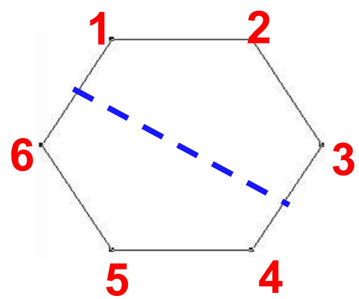


$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&5&4&3&2\end{pmatrix}\quad \tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&2&1&6&5&4\end{pmatrix}\quad \tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&4&3&2&1&6\end{pmatrix}$$

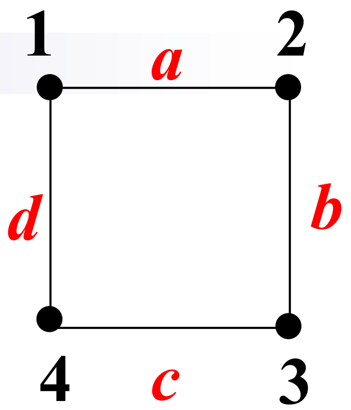
3个关于对边中点连线的反射







$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&6&5&4&3\end{pmatrix}\quad \tau_5=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&2&1&6&5\end{pmatrix}\quad \tau_6=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$



例：考虑如右图所示正方形Ω：

顶点1, 2, 3, 4，边 *a*, *b*, *c*, *d*。

作用在边上的两类对称：

(1) 4个平面对称：

$$\rho_4^0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&b&c&d\end{pmatrix}$$

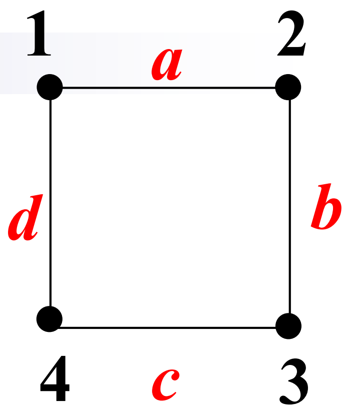
$$\rho_4^1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&c&d&a\end{pmatrix}$$

$$\rho_4^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&d&a&b\end{pmatrix}$$

$$\rho_4^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&a&b&c\end{pmatrix}$$

例：考虑如右图所示正方形Ω：

顶点1, 2, 3, 4，边 *a*, *b*, *c*, *d*。



作用在边上的两类对称：

(2) 4个反射：

$$\tau_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$$

$$\tau_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\d&c&b&a\end{pmatrix}$$

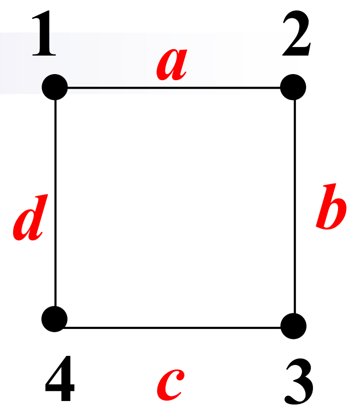
$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&a&d&c\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\a&d&c&b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&b&a&d\end{pmatrix}$$

例：考虑如右图所示正方形Ω：

顶点1, 2, 3, 4，边 *a*, *b*, *c*, *d*。



作用在边上的两类对称：

(1) 4个平面对称：

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$$

(2) 4个反射：

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & b & a & d \end{pmatrix}$$

- 以上8个置换关于合成构成了一个转换群，称为Ω的边对称群，记为 G_E 。

小结

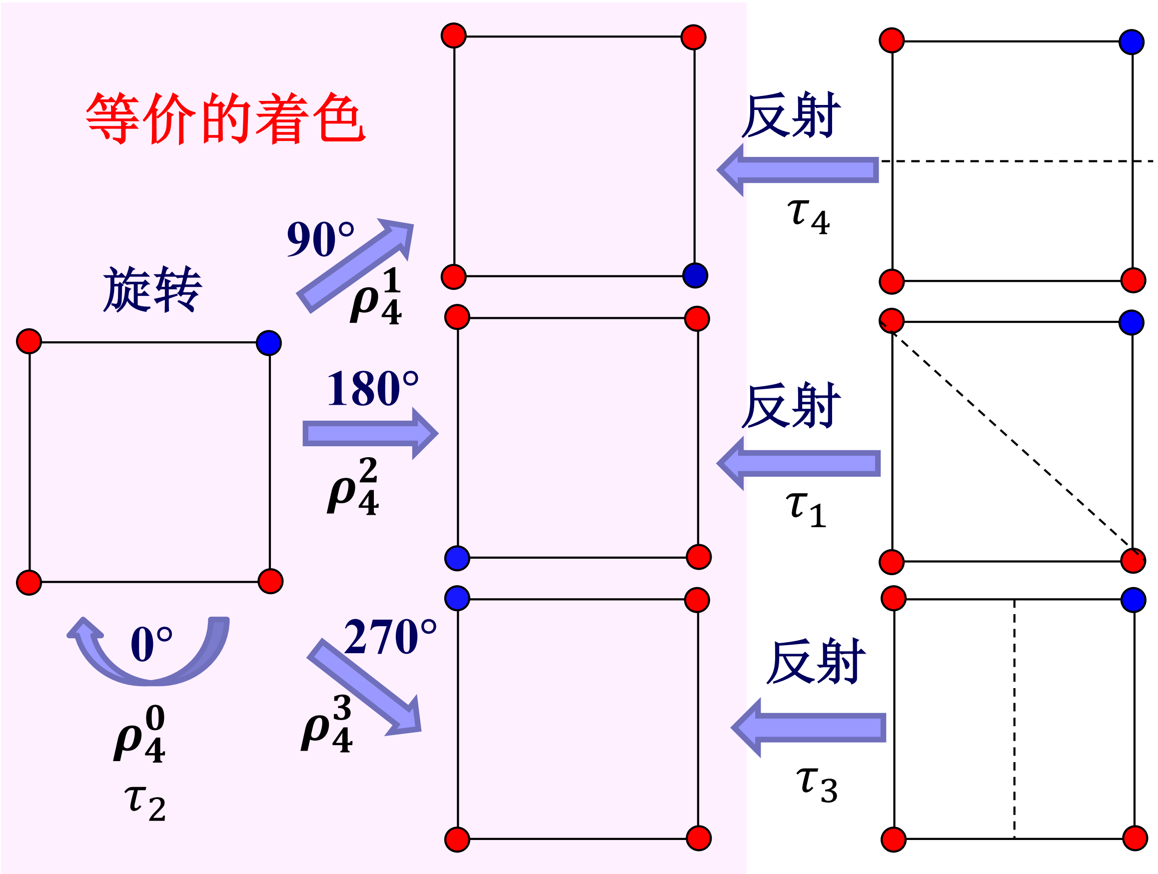
- 几何图形的对称构成的置换群
- 正 n 角形角点对称群
  - n个旋转、n个反射
  - n 分奇偶

置换群与着色

例：用红、蓝两种颜色给正方形的顶点着色，有多少种着色方法?

(1) 位置固定：$2^4=16$种

(2) 位置不固定：6种（依据每种颜色的顶点个数判断）



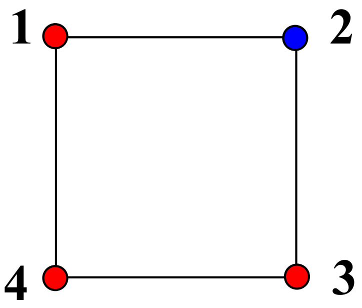
- “不同”着色实际是等价的
- 一个着色可由一个对称（即置换）得到与其等价的另一个着色

Ω的顶点对称群：

$$G_c = \{\ \rho_4^0 = \iota,\ \rho_4^1,\ \rho_4^2,\ \rho_4^3,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4\ \}$$

假设集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$， 及 X 的置换群 G，

- X的一种着色 c 是对 X 的每一个元素指定一种颜色的方案
- 令 c 表示 X 的一种着色，$c(i)$ 表示 i 的颜色 $(i=1, 2, \ldots, n)$



$c(1)=$ “红色”
$c(2)=$ “蓝色”
$c(3)=$ “红色”
$c(4)=$ “红色”

假设集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$， 及 X 的置换群 G，

- X的一种着色 c 是对 X 的每一个元素指定一种颜色的方案
- 令 c 表示 X 的一种着色，$c(i)$ 表示 i 的颜色 $(i=1, 2, \ldots, n)$

令 C 表示 X 的所有着色的集合。

要求 G 按以下方法把 C 中一种着色对应到 C 中另一种着色：

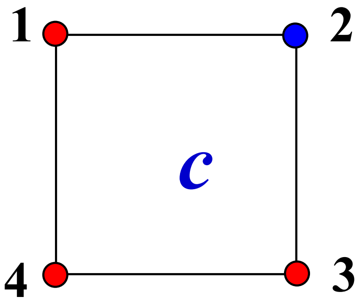
令 $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & k & & n \\ i_1 & i_2 \ldots & i_k & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 是 G 中的一个置换，

定义 $f*c$ 是使 i_k 具有颜色 $c(k)$ 的着色， $\boxed{k \xrightarrow{f} i_k \xrightarrow{c} c(i_k) = c(k),\ k \in X}$

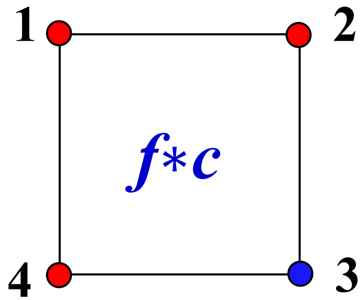
即 $(f*c)(i_k) = c(k)$，$(k=1, 2, \ldots, n)$ (1)

即：f 将 k 变 到 i_k, 则 k的颜色$c(k)$ 移到 $f(k)=i_k$ 并且成为 i_k 的颜色。

$c(1)$= R
$c(2)$= B
$c(3)$= R
$c(4)$= R



$$\rho_4^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} * c$$



$f*c(1)$= R
$f*c(2)$= R
$f*c(3)$= B
$f*c(4)$= R

假设集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$， 及 X 的置换群 G，

- X的一种着色 c 是对 X 的每一个元素指定一种颜色的方案
- 令 c 表示 X 的一种着色，$c(i)$ 表示 i 的颜色 $(i=1, 2, \ldots, n)$

令 C 表示 X 的所有着色的集合。

要求 G 按以下方法把 C 中一种着色对应到 C 中另一种着色：

令 $f=\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & k & & n \\ i_1 & i_2 \ldots & i_k & \cdots & i_n \end{pmatrix}$ 是 G 中的一个置换，

定义 $f{*}c$ 是使 i_k 具有颜色 $c(k)$ 的着色，$\boxed{k \xrightarrow{f} i_k \xrightarrow{c} c(i_k) = c(k),\ k\in X}$

即 $(f{*}c)(i_k) = c(k)$，$(k=1, 2, \ldots, n)$ (1)

即：f 将 k 变 到 i_k, 则 k的颜色$c(k)$ 移到 $f(k)=i_k$ 并且成为 i_k 的颜色。

- 若 $i_k = l$， 式 (1)可写作：

$$(f{*}c)(l) = c(f^{-1}(l))$$

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix}\in G,\quad c\in C,\quad (f*c)(i_k)=c(k),\quad (k=1,2,\dots,n)$$

- 着色集 C 需要具备如下<u>性质</u>：

对于 G 中任意置换 f 和 C 中任意着色 c，$f*c$ 仍属于 C。

即：f 把 C 中的每一个着色移动到 C 中的另一种着色（可以是相同的着色）

例如：令 C 是相对于给定的颜色集，对集合 X 的所有着色的集合。

如用红色和蓝色对集合 $X=\{1, 2, \dots, n\}$ 进行着色，则共有 2^n 种着色。

$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ i_1 & i_2 & \dots & i_n\end{pmatrix}\in G$， $c\in C$，$(f*c)(i_k)=c(k)$，$(k=1, 2, \dots, n)$

- 结论： $(g\circ f)*c = g*(f*c)$

证明：对任意的 $k\in\{1, 2, \dots, n\}$，

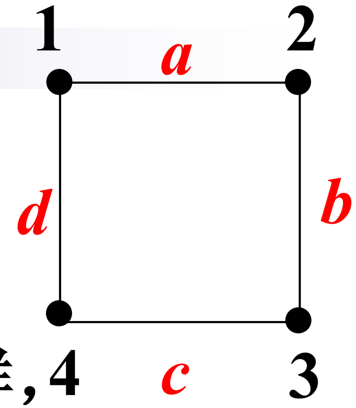
$(g\circ f)*c(k)$ 是用 k 的颜色对 $(g\circ f)(k)$进行着色，

而 $g*(f*c)(k)$ 是用 k 的颜色给$f(k)$进行着色，然后再用 $f(k)$ 的颜色给 $g(f(k))$ 进行着色，即用 k 的颜色给$g(f(k))$ 进行着色。

由合成运算的定义，有 $(g\circ f)(k) = g(f(k))$，

所以， $(g\circ f) * c = g *(f * c)$。

例：用红、蓝两种颜色给右图所示的正方形 Ω 的4个顶点着色。考虑置换群：



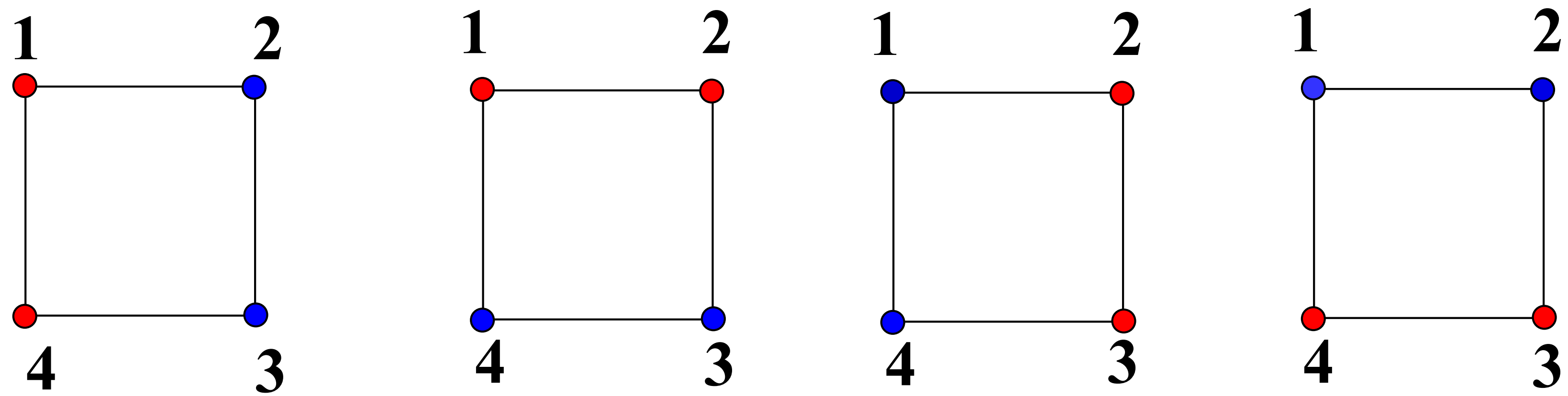
$G_c = \{ \rho_4^0 = \iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \}$是Ω的顶点对称群，

C是 Ω的角点1, 2, 3, 4 颜色为红色或蓝色的所有着色的集合，

此时， $|G_C| = 8$， $|C| = 16$

问题：有多少种“非等价”的着色方法数？

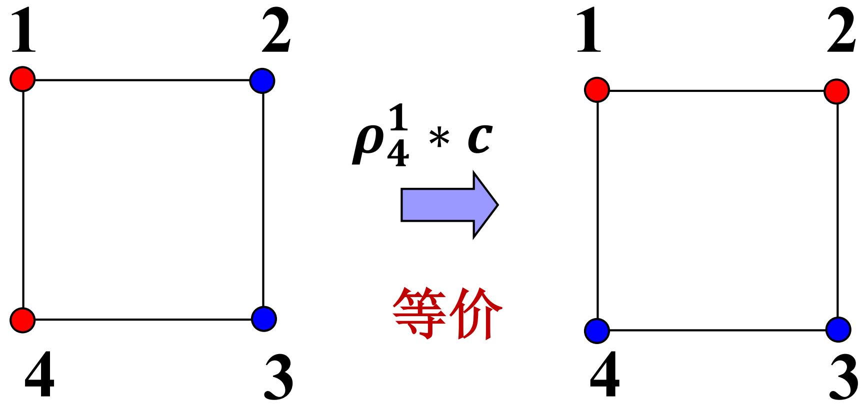
例如：4个“等价”的着色：



$$G_C=\{\rho_4^0=\iota,\rho_4,\rho_4^2,\rho_4^3,\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\}$$

问题：有多少种“不等价”的着色方法数？

例如：



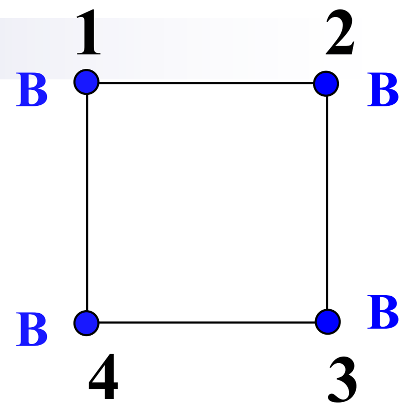
使 i_k 具有颜色 $c(k)$

$$\rho_4^1=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}k\\i_k\end{array}$$

c=(**R**, **B**, **B**, **R**)　　　$\rho_4^1 * \mathbf{c}=$ (**R**, **R**, **B**, **B**)

- 置换不会改变一个着色中各颜色的角点个数。
  - ✓ 正方形中红色的角点个数可以为：**0**，**1**，**2**，**3**，**4**
- 两种着色等价的一个必要条件是它们包含相同数目的红色角点和相同数目的蓝色角点。
  - ✓ 但一般情况下不是充分条件

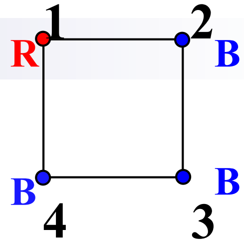
$$G_C=\{\rho_4^0=\iota,\rho_4,\rho_4^2,\rho_4^3,\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\}$$



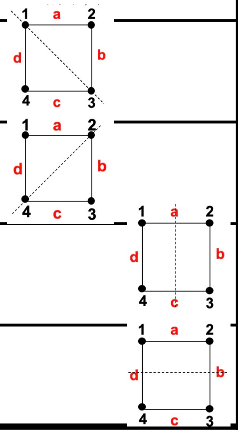
G_C中的置换	作用在着色(B, B, B, B)上的结果
$\rho_4^0=\iota$	(B, B, B, B)
ρ_4^1	(B, B, B, B)
ρ_4^2	(B, B, B, B)
ρ_4^3	(B, B, B, B)
τ_1	(B, B, B, B)
τ_2	(B, B, B, B)
τ_3	(B, B, B, B)
τ_4	(B, B, B, B)

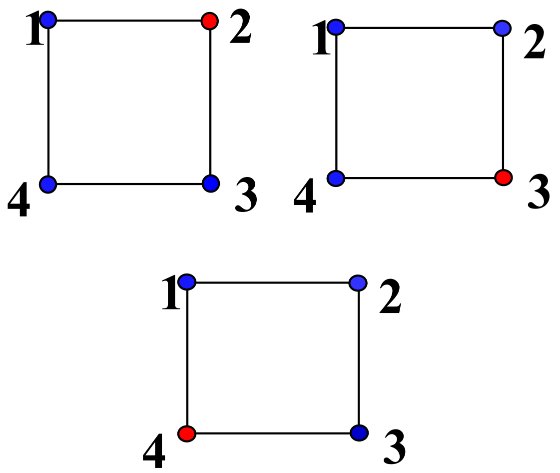
1种着色，出现8次

$$G_C = \{\rho_4^0 = \iota, \rho_4, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$$



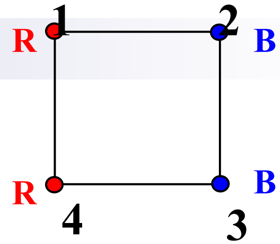
G_C中的置换	作用在着色(R, B, B, B)上的结果
$\rho_4^0 = \iota$	(R, B, B, B)
ρ_4^1	(B, R, B, B)
ρ_4^2	(B, B, R, B)
ρ_4^3	(B, B, B, R)
τ_1	(R, B, B, B)
τ_2	(B, B, R, B)
τ_3	(B, R, B, B)
τ_4	(B, B, B, R)

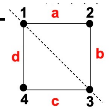
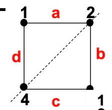
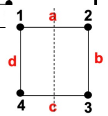
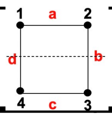


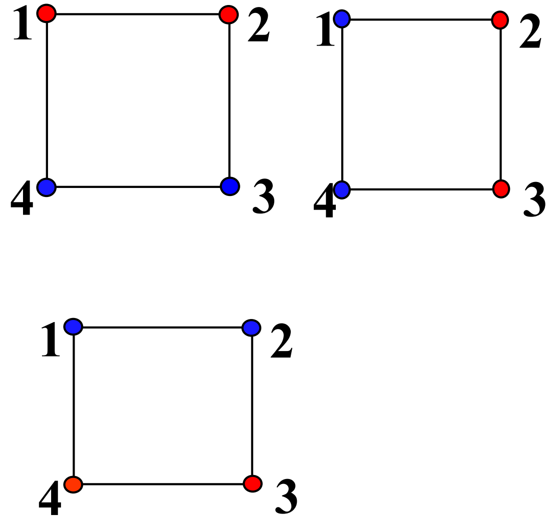


- 4种着色，每种出现2次
- 这4种着色是等价的

$$G_C = \{\rho_4^0 = \iota, \rho_4, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$$

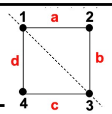
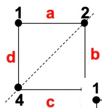
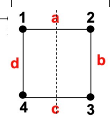
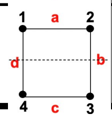


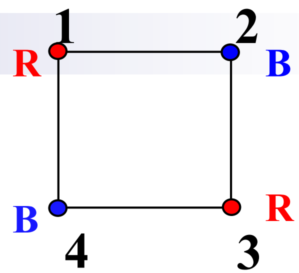
G_C中的置换	作用在着色 （R, B, B, R ）上的结果
$\rho_4^0 = \iota$	(R, B, B, R)
ρ_4^1	(R, R, B, B)
ρ_4^2	(B, R, R, B)
ρ_4^3	(B, B, R, R)
τ_1 	(R, R, B, B)
τ_2 	(B, B, R, R)
τ_3 	(B, R, R, B)
τ_4 	(R, B, B, R)

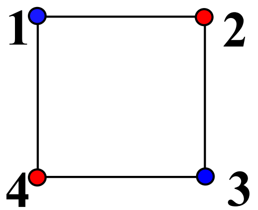


- ✓ 4种着色，每种出现两次
- ✓ 这4种着色是等价的

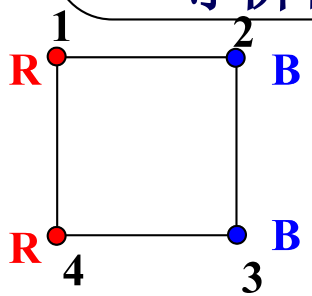
$$G_C = \{\rho_4^0 = \iota, \rho_4, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$$

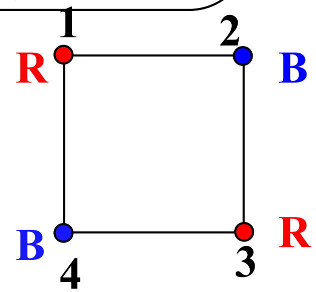
G_C中的置换	作用在着色(R, B, R, B)上的结果
$\rho_4^0 = \iota$	(R, B, R, B)
ρ_4^1	(B, R, B, R)
ρ_4^2	(R, B, R, B)
ρ_4^3	(B, R, B, R)
τ_1 	(R, B, R, B)
τ_2 	(R, B, R, B)
τ_3 	(B, R, B, R)
τ_4 	(B, R, B, R)





- ✓ 2种着色，每种出现四次
- ✓ 这2种着色是等价的

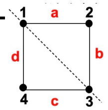
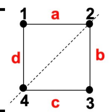
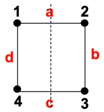
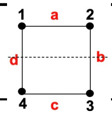


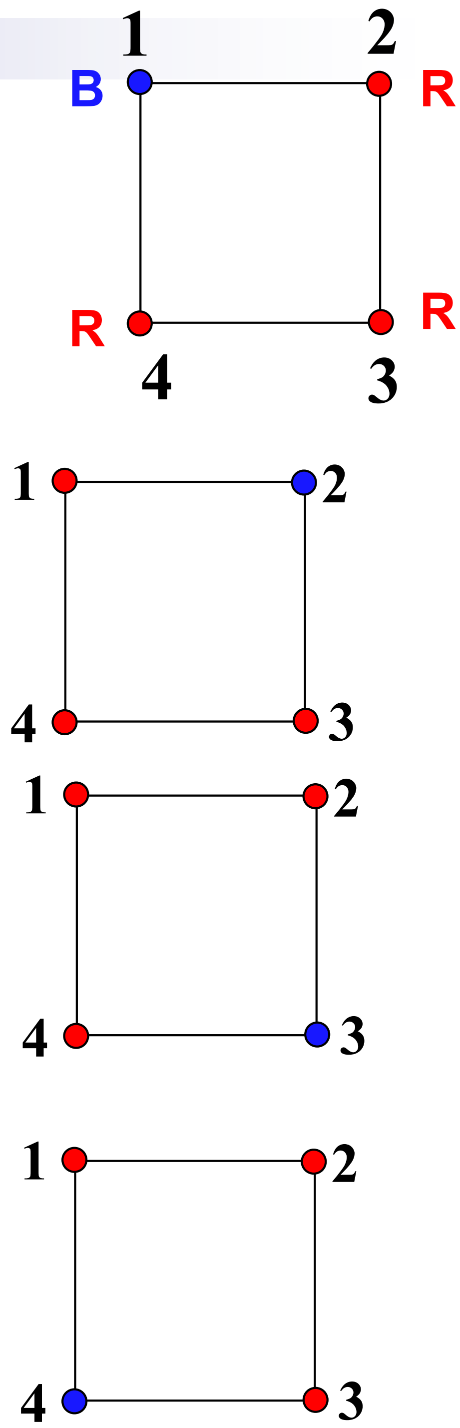


是否等价？

不等价：不存在G_C中的置换使得其中一个变为另一个

$$G_C = \{\rho_4^0 = \iota, \rho_4, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$$

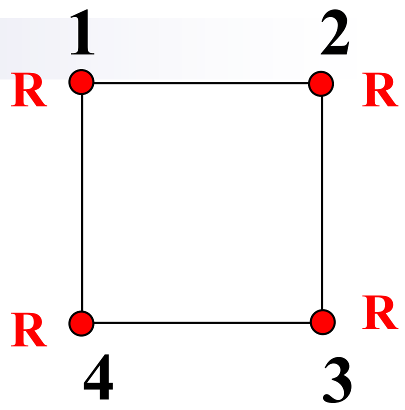
G_C中的置换	作用在着色(B, R, R, R)上的结果
$\rho_4^0 = \iota$	(B, R, R, R)
ρ_4^1	(R, B, R, R)
ρ_4^2	(R, R, B, R)
ρ_4^3	(R, R, R, B)
τ_1 	(B, R, R, R)
τ_2 	(R, R, R, B)
τ_3 	(R, B, R, R)
τ_4 	(R, R, R, B)



✓ 4种着色，每种出现2次

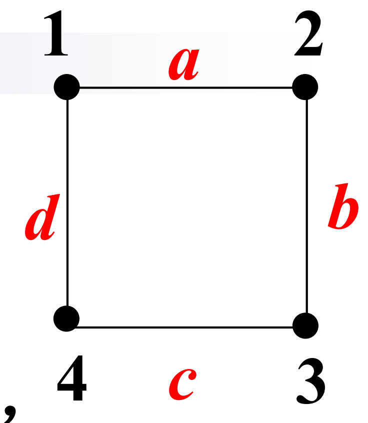
✓ 这4种着色是等价的

$$G_C=\{\rho_4^0=\iota,\rho_4,\rho_4^2,\rho_4^3,\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\}$$



G_C中的置换	作用在着色(R, R, R, R)上的结果
$\rho_4^0=\iota$	(R, R, R, R)
ρ_4^1	(R, R, R, R)
ρ_4^2	(R, R, R, R)
ρ_4^3	(R, R, R, R)
τ_1	(R, R, R, R)
τ_2	(R, R, R, R)
τ_3	(R, R, R, R)
τ_4	(R, R, R, R)

✓ 1种着色，出现8次



例：用红、蓝两种颜色给右图所示的正方形 Ω 的4个顶点着色。已知：

$G_c=\{\rho_4^0=\iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4\}$是$\Omega$的顶点对称群，

C是 Ω的角点1, 2, 3, 4 颜色为红色或蓝色的所有着色的集合，

此时， $|G_C|=8$, $|C|=16$

在G_c作用下，用两种颜色对Ω进行着色，非等价的着色方法共有 6 种：

红色顶点数	0	1	2		3	4	总数
非等价着色方法数	1	1	2		1	1	6
代表的着色方法数	1	4	4	2	4	1	16

等价类

着色等价关系

令 G 是作用在集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$上的一个置换群，

C 为 X 的一个着色集合，使得对于 G 中的任意置换 f

和 C 中任意着色 c，X 的着色 $f*c$ 仍属于C。

- 定义 C 中的关系 ～：设 c_1 与 c_2 是 C 中的任意两种着色，
  - ✓如果存在G中的一个置换 f，使得 $f*c_1 = c_2$，则称 c_1 等价于 c_2，记为$c_1 \sim c_2$，反之
  - ✓如果在 G中不存在置换使得它们相等，则称 c_1与c_2不等价
- 关系～ 满足：
  - ✓ 自反性：对于任意c，$c \sim c$。
  - ✓ 对称性：如果$c_1 \sim c_2$，则$c_2 \sim c_1$。
  - ✓ 传递性：如果$c_1 \sim c_2$， $c_2 \sim c_3$，则$c_1 \sim c_3$。

～是C上的等价关系

着色等价关系

令 G 是作用在集合 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$上的一个置换群，

C 为 X 的一个着色集合，使得对于 G 中的任意置换 f 和 C 中任意着色 c，X 的着色 $f*c$ 仍属于C。

- 定义 C 中的关系 ～：设 c_1 与 c_2 是 C 中的任意两种着色，
  - ✓如果存在G中的一个置换 f，使得 $f*c_1 = c_2$，则称 c_1 等价于 c_2，记为$c_1 \sim c_2$，反之
  - ✓如果在 G中不存在置换使得它们相等，则称 c_1与c_2不等价
- ～是 C 上的等价关系
  - ✓ C 关于～的每个等价类是 C 的一个由等价着色构成的子集。

等价类：与 c 等价的着色集合

$\{f*c \mid f \in G\}$

问题：如何计算非等价的着色数？

Burnside定理、Polya计算公式

回顾：置换

- 设 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$，X 的每个置换 $i_1, i_2, \ldots, i_n$ 可视为 X 到其自身的双射，其中，

$$f(1) = i_1, f(2) = i_2, \ldots , f(n) = i_n。$$

可以用如下 $2\times n$ 阵列来表示置换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

- $X=\{1, 2, \ldots, n\}$的 $n!$ 个置换的集合S_n关于合成运算构成一个置换群，称为 n 的对称群。

回顾：几何图形的对称

- 对称：设Ω是一个几何图形，Ω到它自身的一个(几何)运动或全等称为Ω的一个对称。
- 考虑的几何图形是由角点（顶点）、边、及三维情形下的面（或侧面）所构成
  - ✓ 如正方形、四面体、立方体等
- 对称构成置换群，称为Ω的对称群
  - ✓ 顶点对称群：Ω的角点上的置换群G_C
  - ✓ 边对称群：Ω的边上的置换群G_E
  - ✓ 面对称群：Ω是三维情形下的面上的置换群G_F

第十四章Pólya计数

4.1 置换群与对称群

4.2 Burnside定理

4.3 Pólya计数

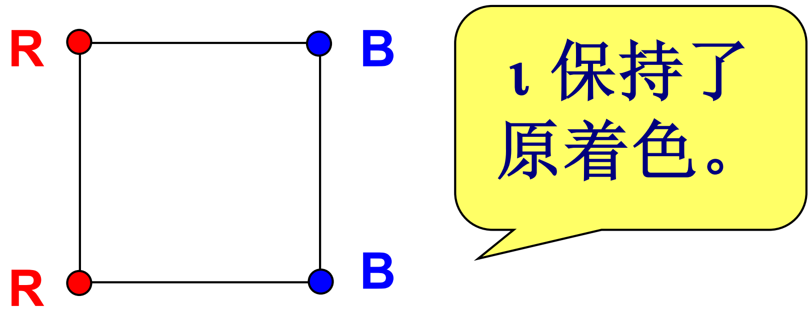
Burnside定理

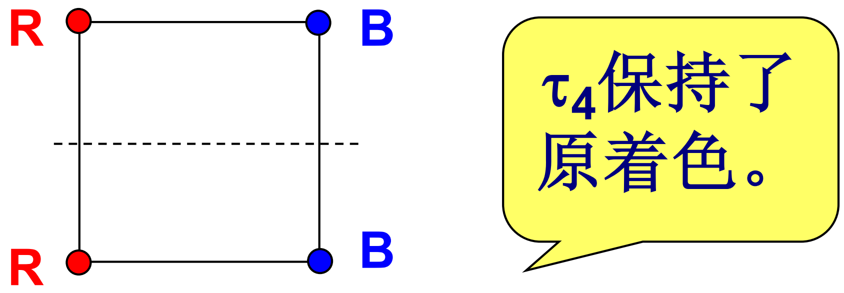
- 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且 G 作用在C上，满足：对于 G 中任意置换 f 与 C 中任意着色 c， $f*c \in C$
- 在集合X 的置换群G的作用下，计算 X 的非等价着色数的Burnside公式

稳定核与不变着色集

- 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且 G 作用在C上，满足：对于 G 中任意置换 f 与 C 中任意着色 c，$f*c \in C$

例：





保持原着色的置换构成该着色的稳定核。

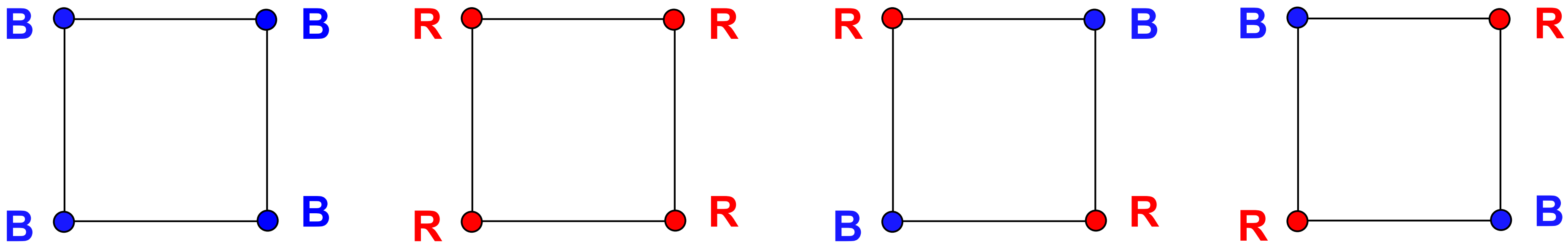
稳定核与不变着色集

- 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且 G 作用在C上，满足：对于 G 中任意置换 f 与 C 中任意着色 c， $f*c \in C$

例：

$$\rho_4^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

以下 4种着色在ρ_4^2作用下保持不变



在一个置换作用下保持不变的着色构成该置换的不变着色集。

稳定核与不变着色集

设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且G作用在C上。

- 使着色 c 保持不变的G中所有置换的集合

$$G(c) = \{ f \mid f \in G, f*c = c \},\ c \in C$$

$G(c) \subseteq G$

称为 c 的稳定核。

结论：任何着色 c 的稳定核也形成一个置换群。

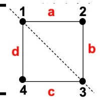
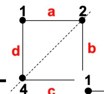
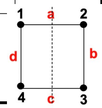
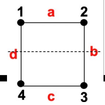
- 在置换 f 作用下保持不变的C中所有着色的集合：

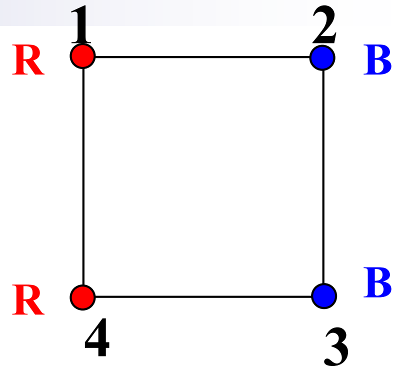
$$C(f) = \{ c \mid c \in C, f*c = c \}, f \in G$$

$C(f) \subseteq C$

称为 f 的不变着色集。

例：

G_C中的置换	作用在着色 c = (R, B, B, R) 上的结果
$\rho_4^0 = \iota$	(R, B, B, R)
ρ_4^1	(R, R, B, B)
ρ_4^2	(B, R, R, B)
ρ_4^3	(B, B, R, R)
τ_1 	(R, R, B, B)
τ_2 	(B, B, R, R)
τ_3 	(B, R, R, B)
τ_4 	(R, B, B, R)



着色 c = (R, B, B, R) 的稳定核 $G(c)=\{\rho_4^0=\iota, \tau_4\}$。

注意到： (1) $\iota\circ\tau_4=\tau_4\circ\iota=\tau_4$， $\tau_4\circ\tau_4=\iota$ (合成运算封闭性)

(2) $\iota\in G(c)$ (单位元)

(3) $\tau_4^{-1}=\tau_4$ (逆元封闭性)

(4) 显然有结合律

因此，$G(c)$是置换群。

定理14.2.1 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且G作用在C上。

$$G(c) = \{ f \mid f \in G, f*c = c \}$$

(1) 对C中任意着色c，c的稳定核 $G(c)$ 是一个置换群，且

(2) 对G中任意置换 f 与 g，$g*c = f*c$ 当且仅当 $f^{-1} \circ g \in G(c)$。

证明： (1) 置换群的四个条件：合成运算的封闭性，满足结合律，单位元和逆元运算的封闭性。

(a)设$f, g \in G(c)$，则$(g \circ f)*c = g*(f*c) = g*c = c$，所以$g \circ f \in G(c)$，即在合成运算下，$G(c)$具有封闭性。

(b)由于置换的合成满足结合律，因此， $G(c)$关于合成满足结合律。

(c)恒等置换 ι 必属于$G(c)$，使所有着色不变，为单位元。

(d) 设$f \in G(c)$，有$f*c = c$，则 $f^{-1}*c = f^{-1}*f(c) = (f^{-1} \circ f)(c) = \iota(c) = c$，得$f^{-1} \in G(c)$，

因此，$G(c)$对逆元具有封闭性。

综上，$G(c)$是一个置换群。

定理14.2.1 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且G作用在C上。

$$G(c) = \{ f \mid f \in G, f*c = c \}$$

(1) 对C中任意着色c，c的稳定核 $G(c)$ 是一个置换群，且

(2) 对G中任意置换 f 与 g，$g*c = f*c$ 当且仅当 $f^{-1}\circ g \in G(c)$。

$(f^{-1}\circ g)*c = c$

证明：(2) ($\Rightarrow$) 如果 $g*c = f*c$，则

$(f^{-1}\circ g)*c = f^{-1}*(g*c) = f^{-1}*(f*c) = (f^{-1}\circ f)*c = \iota*c = c$。

所以 $f^{-1}\circ g$ 使 c 不变，因此，$f^{-1}\circ g \in G(c)$。

($\Leftarrow$) 如果 $f^{-1}\circ g \in G(c)$，则$(f^{-1}\circ g)*c = c$，

所以 $g*c = ((f\circ f^{-1})\circ g)*c = (f\circ(f^{-1}\circ g))*c = f*((f^{-1}\circ g)*c) = f*c$。

定理14.2.1 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 的着色集合，且G作用在C上。

$$G(c) = \{ f \mid f \in G, f * c = c \}$$

(1) 对C中任意着色c，c的稳定核 $G(c)$ 是一个置换群，且

(2) 对G中任意置换 f 与 g，$g*c = f*c$ 当且仅当 $f^{-1} \circ g \in G(c)$。

问题：如何求在置换群 G 作用下的与 c 等价的着色数 ？

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数 $|\{f*c \mid f \in G\}|$ 等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数，

即 $|\{f*c \mid f \in G\}| = \dfrac{|G|}{|G(c)|}$ 。

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数 $|\{f*c \mid f\in G\}|$ 等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数，即 $|\{f*c \mid f \in G\}| = \frac{|G|}{|G(c)|}$ 。

证明：由定理14.2.1知，

$g*c = f*c \Leftrightarrow (f^{-1}\circ g) *c= c \Leftrightarrow f^{-1}\circ g \in G(c)$

$\Leftrightarrow \exists\, h \in G(c)$, s.t., $f^{-1}\circ g = h$, 即 $g = f\circ h$。

因此，与 f 作用在 c 上有同样效果的置换集合为：

$$\{ g \mid g \in G,\ g*c=f*c \} \subseteq \{ f\circ h \mid h\in G(c)\}。$$

对任意 $f\circ h$, 其中$h\in G(c)$， 由于

$$(f\circ h)*c = f*(h * c) = f *c,$$

得 $f\circ h\in \{ g \mid g \in G,\ g*c=f*c \}$。

因此，有$\{ g \mid g \in G,\ g*c=f*c \} = \{ f\circ h \mid h\in G(c)\}$。

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数 $|\{f*c \mid f\in G\}|$ 等于 G 的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数，即 $|\{f*c \mid f\in G\}| = \frac{|G|}{|G(c)|}$。

证明（续）：因此，有 $\{g \mid g\in G,\ g*c=f*c\} = \{f\circ h \mid h\in G(c)\}$。

对任意的 $h, h' \in G(c)$，若 $f\circ h = f\circ h'$，由消去律知 $h = h'$，

得 $|\{f\circ h \mid h\in G(c)\}| = |G(c)|$。

因此，$|\{g \mid g\in G,\ g*c=f*c\}| = |\{f\circ h \mid h\in G(c)\}| = |G(c)|$。

从而，对于每个置换 f，恰好存在 $|G(c)|$ 个置换，这些置换作用在 c 上与 f 有同样的效果。

而总共有 $|G|$ 个置换，所以，与 c 等价的着色数为

$$|\{f*c \mid f\in G\}| = \frac{|G|}{|G(c)|}。$$

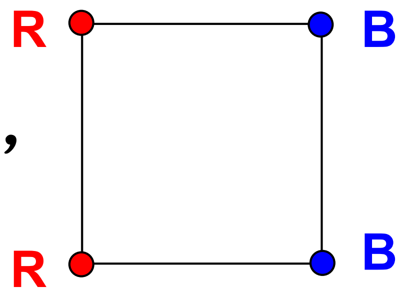
推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数 $|\{f*c \mid f\in G\}|$ 等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数，

即 $|\{f*c \mid f \in G\}| = \frac{|G|}{|G(c)|}$ 。

例：与 c_1=(R, B, B, R)等价的着色：

(R, B, B, R)、(R, R, B, B)、(B, R, R, B)、(B, B, R, R)，

即等价数目为4。



$G_c =\{ \rho_4^0= \iota, \rho_4^1, \rho_4^2, \rho_4^3, \tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4 \}$

$G_c(c_1) = \{\iota , \tau_4\}$

在G_c作用下，与c_1等价等价的着色数为

$$\frac{|G_c|}{G_c(c_1)} = \frac{8}{2} = 4$$

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f * c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中

$$C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}$$

- 设 $G=\{ f_1, f_2, \ldots, f_n\}$，则 $N(G, C) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|C(f_i)|$。

证明思想：（组合证明）采用两种不同方式进行计数，然后使计数相等。

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中

$$C(f) = \{\, c \mid c\in C, f*c = c \,\}$$

证明：计数使 f 保持c不变（即$f*c=c$）的对偶 (f, c)的个数。

存在两种计数方式：

- f 是保持 c 不变的置换
- c 是在置换f 作业下保持不变的着色

$$f*c=c \Leftrightarrow c\in C(f) \Leftrightarrow f\in G(c)$$

$$|\sum_{f\in G, c\in C(f)}(f, c)| = |\sum_{c\in C, f\in G(c)}(f, c)|$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$\sum_{f\in G}|C(f)| \qquad \sum_{c\in C}|G(c)|$$

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f * c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中

$$C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}$$

证明：计数使 f 保持c不变（即$f * c=c$）的对偶 (f, c)的个数。

存在两种计数方式：

(1)方式1：考察G中每个 f，计算 f 保持不变的着色数，然后相加，得对偶数为 $\sum_{f\in G}|C(f)|$。

(2)方式2：考察C中的每个c，计算满足$f*c=c$的置换数，然后相加所有的量，得对偶数为 $\sum_{c\in C}|G(c)|$。

则有 $\sum_{f\in G}|C(f)| = \sum_{c\in C}|G(c)|$。

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中

$$C(f) = \{\, c \mid c\in C, f*c = c \,\}$$

证明：由推论14.2.2得 $|G(c)| = \dfrac{|G|}{|\{f*c \mid f \in G\}|}$，

推论14.2.2 设 c 为 C 中的一种着色，那么与 c 等价的着色数 $|\{f*c \mid f\in G\}|$ 等于G的置换个数除以 c 的稳定核中的置换个数，

即 $|\{f*c \mid f \in G\}| = \dfrac{|G|}{|G(c)|}$。

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f * c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|} \sum_{f \in G} |C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中

$$C(f) = \{ c \mid c \in C, f * c = c \}$$

证明：由推论14.2.2得 $|G(c)| = \frac{|G|}{|\{f * c \mid f \in G\}|}$，

因此，$\sum_{c \in C} |G(c)| = |G| \sum_{c \in C} \frac{1}{|\{f * c \mid f \in G\}|}$。

证明：（续）因此，$\sum_{c\in C} G(c) = |G| \sum_{c\in C} \frac{1}{|\{f{*}c \mid f\in G\}|}$

由于非等价着色数 $N(G, C)$等于等价着色构成的等价类个数，

令 $C_1, \ldots, C_{N(G, C)}$ 为 C 的所有等价类，

假设C_i的代表元为c_i，$i = 1, 2, \ldots, N(G, C)$。

则有 $\sum_{c\in C} \frac{1}{|\{f{*}c \mid f\in G\}|} = \sum_{i=1}^{N(G,C)} \sum_{c\in C_i} \frac{1}{|\{f{*}c_i \mid f\in G\}|}$。

$$= \sum_{i=1}^{N(G,C)} \sum_{c\in C_i} \frac{1}{|C_i|}$$

$$= \sum_{i=1}^{N(G,C)} 1 = N(G, C)$$

即 $\sum_{c\in C} |G(c)| = |G| \times N(G, C)$，得

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|} \sum_{c\in C} |G(c)| = \frac{1}{|G|} \sum_{f\in G} |C(f)|。$$

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是 X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数，其中

$$C(f) = \{ c \mid c\in C, f*c = c \}$$

- 计数非等价的着色数$N(G, C)$的步骤：
  1. 确定置换群G;
  2. 确定着色集C;
  3. 计数G中每个着色的稳定核（或每个置换的不变着色集）的大小;
  4. 使用Burnside公式 $N(G, C) = \frac{\sum_{c\in C}|G(c)|}{|G|} = \frac{\sum_{f\in G}|C(f)|}{|G|}$

例：用红、蓝两种颜色给一个正方形的4个顶点着色，试问存在多少种不同的着色方法数。

解：正方形的顶点对称群为D_4={ $\rho_4^0 = \iota$, ρ_4^1, ρ_4^2, ρ_4^3, τ_1,τ_2,τ_3, τ_4 }

正方形的角点的着色集为$C=\{(c_1, c_2, c_3, c_4) | c_i \in \{R, B\}, 1 \le i \le 4\}$，因此，$|C|=16$。

(1) 单位元ι使所有着色保持不变，即$C(\iota)= C$，得$|C(\iota)|=16$。

(2) 旋转ρ_4和ρ_4^3各自保持 2 种着色，即所有顶点为红色和所有顶点为蓝色的着色不变，因此$C(\rho_4)$={(R, R, R, R), (B, B, B, B)}，$C(\rho_4^3)$ ={(R, R, R, R), (B, B, B, B)}，得$|C(\rho_4)|=|C(\rho_4^3)|=2$。

(3) 旋转ρ_4^2保持4种着色，即所有顶点为相同颜色以及红和蓝间隔出现的着色不变，因此$C(\rho_4^2)$ ={(R, R, R, R),(B, B, B, B), (R, B, R, B),(B, R, B,R)}，得 $|C(\rho_4^2)|=4$。

(4) 为了使在反射τ_1作用下着色保持不变，顶点1和3可以选择任何颜色，顶点2和4必须具有相同颜色。

所以，在τ_1的作用下保持着色不变的方法：对顶点1选择一种颜色（2种选择），对顶点3选择一种颜色（2种选择），对顶点2和4选择一种颜色（2种选择）。

所以，在τ_1的作用下保持着色不变的着色数是$|C(\tau_1)|=2\times2\times2=8$。即

$$C(\tau_1)=\{ (R,R,R,R),(R,R,B,R),(B,R,R,R),(B,R,B,R),$$
$$(R,B,R,B),(R,B,B,B),(B,B,R,B),(B,B,B,B) \}$$

(5) 类似地，在τ_2的作用下保持着色不变的着色数是$|C(\tau_2)|= 2\times2\times2=8$。即

$$C(\tau_2)=\{(R,R,R,B),(R,R,R,B),(R,B,R,R),(R,B,R,B)$$
$$(B,R,B,B),(B,R,B,B),(B,B,B,R),(B,B,B,B)\}$$

(6) 为了使在反射τ_3作用下着色保持不变，顶点1和2必须具有相同颜色，顶点3和4必须具有相同颜色。

所以，在τ_3的作用下保持着色不变的方法：对顶点1和2选择一种颜色（2种选择），对顶点3和4选择一种颜色（2种选择）。

因此，在τ_3的作用下保持着色不变的着色数是$|C(\tau_3)|= 2\times2=4$。

即$C(\tau_3)$={(R, R, R, R), (R, R, B, B), (B, B, R, R), (B, B, B, B}。

(7) 类似地，在τ_4的作用下保持着色不变的着色数是

$|C(\tau_4)|= 2\times2=4$。即

$C(\tau_4)$={(R, B, B, R), (R, R, R, R), (B, R, R, B), (B, B, B, B)}

根据Burnside定理，总的着色方法数为：

$$N(D_4,C)=\frac{1}{8}(16+2+4+2+8+8+4+4)=6$$

例：(循环排列计数) 把n个不同的对象放在一个圆上，有多少种放法？ $(n\text{-}1)!$

解：相当于用n种不同的颜色对正n角形 Ω 的顶点进行着色，此时，放法数为 Ω的循环群的非等价着色数。

令C 是对 Ω 的n个顶点进行着色且每种颜色只出现一次的所有n!种方法所组成的集合，则作用在C上的循环群为

$$G=\{\rho_n^0, \rho_n^1, \ldots, \rho_n^{n-1}\}。$$

显然，G 的恒等变换ρ_n^0保持 C中所有n!种着色不变，即 $c(\rho_n^0)=n!$。

因为在C的着色中，每个顶点有不同的颜色，因此且C中其他置换都不保持 C中的任意着色不变，即$c(\rho_n^i)=0$，$i=1,\ldots, n\text{-}1$。

由定理14.2.3得非等价着色数为：

$$N(G, C) = \frac{1}{n}(n!+0+\ldots+0) = (n\text{-}1)!$$

例（项链计数问题）用$n\geq 3$种不同颜色的珠子组成一条项链，问有多少种方法?

解：相当于用n种不同的颜色对正n角形 Ω 的顶点进行着色，此时，放法数为 Ω的正n角形的顶点对称群的非等价着色数。

令C 是对 Ω 的n个顶点进行着色且每种颜色只出现一次的所有$n!$种方法所组成的集合，则作用在C上的顶点对称群为$2n$阶的二面体群$D_n=\{\rho_n^0, \rho_n^1, \ldots, \rho_n^{n-1}, \tau_1, \ldots, \tau_n\}$。

显然，D_n的恒等变换保持 C中所有$n!$种着色不变，即$c(\rho_n^0)=n!$

因为在C的着色中，每个顶点有不同的颜色，因此且D_n中其他置换都不保持 C中的任意着色不变，即$c(\rho_n^i)=0$，$i=1,\ldots, n-1$，

$c(\tau_j)=0$，$j=1,\ldots, n$。

由定理14.2.3得非等价着色数为：$N(G,C)=\frac{1}{2n}(n!+0+\ldots+0)$

$$=\frac{1}{2}(n-1)!。$$

- 利用**Burnside**定理计数不等价的着色数的关键：
  1. 确定置换群G;
  2. 确定着色集C;
  3. 计数G中每个置换f的不变着色集$C(f)$的大小。
  4. 使用**Burnside**公式
- 缺点：第3步的计数过程比较复杂

为了使该计数过程变得更加容易，仅考虑置换的循环结构，并引入有向圈概念。**Pólya定理**