



第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形

5.2 二项式定理

5.3 二项式系数的单峰性

5.4 多项式定理

5.5 牛顿二项式定理

5.6 再论偏序集


回顾：集合的组合

- n 元素集合的 r 子集的数目

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r(r-1) \dots 1}$$

例：有10位专家，从中选取5位构成专家小组，一共可构成多少个专家小组？

$\binom{10}{5}$ 个专家小组



例： $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

证明：

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

另一种证明方式：组合证明

问题：从 n 个不同的球中取出 k 个球，有多少种方法？

方法1：直接取，共有 $\binom{n}{k}$ 种取法。

方法2：取出 $n-k$ 个球丢弃，留下剩下的 k 个球，共有 $\binom{n}{n-k}$ 种取法。

因此，得 $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ 。

组合证明

- 是一种依靠计数原理构建代数事实的证明方法
- 基本框架：
 1. 定义一个集合 S ;
 2. 通过一种计数方式得出 $|S| = n$;
 3. 通过另一种计数方式得出 $|S| = m$;
 4. 得出结论 $n = m$ 。

■ 二项式定理

令 n 是一个正整数, 那么对于所有的 x, y 有:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

二项式系数

n 元素集合的 r 子集的数目

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!} = \frac{n(n - 1) \dots (n - k + 1)}{k(k - 1) \dots 1}$$

本章的目的主要是讨论二项式系数一些相关等式和性质。



第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形

5.2 二项式定理

5.3 二项式系数的单峰性

5.4 多项式定理

5.5 牛顿二项式定理

5.1 帕斯卡三角形

定理5.1.1(Pascal公式) 对于满足 $1 \leq k \leq n$ 的所有整数 k 和 n , 有

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

n 元素集合的
 k 子集的数目

$n-1$ 元素集合的
 $k-1$ 子集的数目

$n-1$ 元素集合的
 k 子集的数目

设集合 $S=\{1, 2, \dots, n\}$, S 的 k 子集分为两类:

✓ 不包含1 的 k 子集 $\binom{n-1}{k}$ 个

✓ 包含1 的 k 子集 $\binom{n-1}{k-1}$ 个

(组合证明)

定理5.1.1(Pascal公式) 对于满足 $1 \leq k \leq n$ 的所有整数 k 和 n , 有

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

证明: 设 S 的 k 子集的集合为 X , 那么 $|X| = \binom{n}{k}$ 。

设 x 是 S 的一个元素,

令 A 是**不含** x 的 k 子集的集合,

B 是**包含** x 的 k 子集的集合,

那么, $X = A \cup B$, 且 $A \cap B = \emptyset$ 。

由加法原理, $|X| = |A| + |B|$ 。

计算得: $|A| = \binom{n-1}{k}$, $|B| = \binom{n-1}{k-1}$

因此, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ 。证毕。

Pascal三角形

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$\binom{n}{k}$ 的规律

- 对角线上元素全为1
- 第一列上元素全为1
- 对角线以外各项都是其上一行的两项的和：

- 直接上方的项
- 直接上方的项的直接左邻的项

$$\binom{6}{2} = \binom{5}{2} + \binom{5}{1}$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1									...
1	1	1								...
2	1	2	1							...
3	1	3	3	1						...
4	1	4	6	4	1					...
5	1	5	10	10	5	1				...
6	1	6	15	20	15	6	1			...
7	1	7	21	35	35	21	7	1		...
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	...
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

$n=9,10$ 的两行分别是多少？

Pascal三角形

每一行相加：
(第 n 行)

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 2^1$$

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1									...
1	1	1								...
2	1	2	1							...
3	1	3	3	1						...
4	1	4	6	4	1					...
5	1	5	10	10	5	1				...
6	1	6	15	20	15	6	1			...
7	1	7	21	35	35	21	7	1		...
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	



第1列:

$$\binom{n}{1} = n$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

■ 第2列是三角形数，即三角形阵列中的点数：

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

1
 $n=2$

3
 $n=3$

6
 $n=4$

10
 $n=5$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

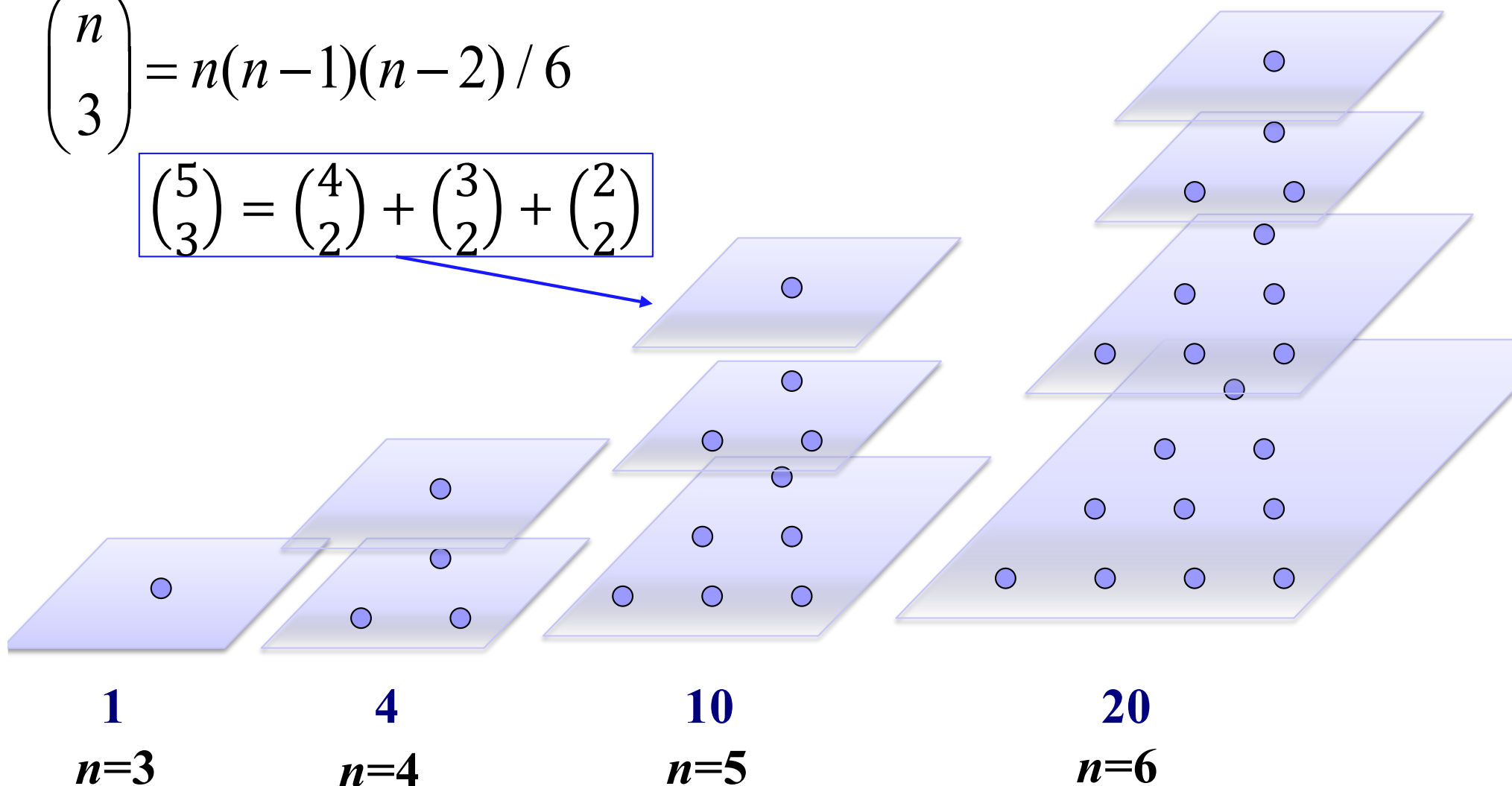
- 第3列是四面体数：
$$\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/6$$

K=3

- 第3列是四面体数，即四面体阵列中的点数

$$\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2) / 6$$

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$$



二项式系数的另一种组合解释

$p(n,k)$: 从 $\binom{0}{0}$ 项到 $\binom{n}{k}$ 项的路径的数目

两种移动方向:

$$p(n,0) = 1$$

$$p(n,n) = 1$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

二项式系数的另一种组合解释

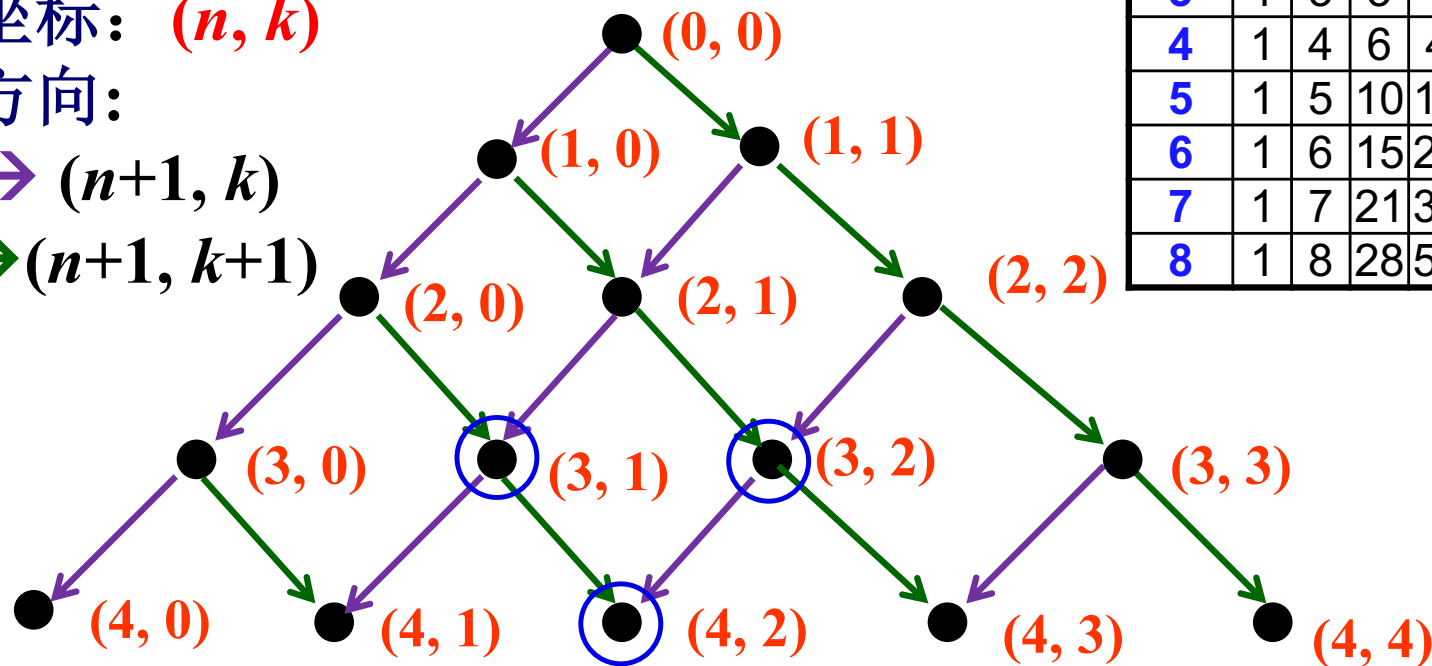
n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

• 顶点坐标: (n, k)

• 移动方向:

$(n, k) \rightarrow (n+1, k)$

$(n, k) \rightarrow (n+1, k+1)$



令 $p(n, k)$ 表示从 $(0,0)$ 到 (n,k) 的路径数,

• 规定 $p(0, 0)=1$

• 由加法原理, $p(n, k) = p(n-1, k) + p(n-1, k-1)$, 其中, $n \geq 1$.

用数学归纳法可证 $p(n, k) = \binom{n}{k}$



第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形

5.2 二项式定理

5.3 二项式系数的单峰性

5.4 多项式定理

5.5 牛顿二项式定理

5.2 二项式定理

定理5.2.1 令 n 是一个正整数, 那么对于所有的 x, y 有:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

证明: (组合证明) 将 $(x+y)^n$ 写成 n 个 $x+y$ 因子的乘积形式:
 $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y)$

用分配律将乘积展开, 再合并同类项。

展开时, 对于每个因子 $x+y$, 或者选择 x , 或者选择 y , 所以展开结果有 2^n 项, 其中, 每一项具有形式 $x^{n-k}y^k$,

$k=0,1,\dots,n$ 。

合并同类项时, $x^{n-k}y^k$ 的系数相当于在 n 项因子中选 k 个 y , 余下 $n-k$ 项因子是 x ,

因此, 等于组合数 $\binom{n}{k}$ 。

二项式定理的等价形式

令 n 是一个正整数, 那么对于所有的 x, y 有:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$(y+x)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$$

定理5.2.1 令 n 是一个正整数, 那么对于所有的 x, y 有:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

例: 用二项式定理求下列式子

$$(1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = (1+2)^n = 3^n$$

$$(2) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 3^{n-k} = (3+(-1))^n = 2^n$$

$$(3) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 9^{n-k} = (9+(-1))^n = 8^n$$

$$(4) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 9^k = (1+9)^n = 10^n$$

二项式定理及等价形式

令 n 是一个正整数, 那么对于所有的 x, y 有:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (y+x)^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$$

二项式系数的其他等式

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

- 例： n 个人中选 k 人组成足球队，其中一人为队长，有多少种不同选法？

- 先选足球队，然后从足球队中选队长，选法数目为：

$$\binom{n}{k} \binom{k}{1} = k \binom{n}{k}$$

- 先选队长，再在剩下的 $n-1$ 人中选 $k-1$ 个足球队员，选法数目为：

$$\binom{n}{1} \binom{n-1}{k-1}$$

二项式系数的其他等式

例：证明下列等式：

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n, n \geq 0$$

方法 1：对二项式令 $x = y = 1$ 即得。

方法 2（组合证明）：

令 $S = \{1, 2, \dots, n\}$, 如下构造 S 的子集：

对于每个 i , 可放进子集, 也可不放入;

一共有 2^n 种构造方法。

例：证明以下等式 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}, (n \geq 0)$

$$\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

第一个 n 元素集合选 k 个，
第2个 n 元素集合选 $n-k$ 个，
一共从 $2n$ 个元素中选 n 个

关键：（加法原理）两个 n 元素集合相交为空。

例：证明以下等式 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}, (n \geq 0)$

证明：设 $A=\{1, 2, \dots, n\}, B=\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ 。

令 $S=A \cup B$, S 的 n 子集数是 $\binom{2n}{n}$, 其中, 每个 n 子集含有 A 的元素为 k 个, 含有 B 的元素为 $n-k$ 个, $k=0,1,\dots,n$ 。
令 C_k 是含有 k 个 A 的元素的 S 的 n 子集的集合,
则 S 的所有 n 子集可划分为 C_0, C_1, \dots, C_n , 有

$$\binom{2n}{n} = |C_0| + |C_1| + \dots + |C_n|$$

其中, $|C_k| = \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ 。

因此, $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ 。

证毕。

二项式系数的其他等式

例：证明下列等式：

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(1) \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0, n \geq 1$$

$$(2) \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots = 2^{n-1}, n \geq 1$$

偶数个元素的子集的个数
= 奇数个元素的子集的个数

方法一：对二项式公式令 $x=1, y=-1$ 即得。

方法二：组合证明 (2) 成立。

二项式系数的其他等式

例：证明下列等式：

偶数个元素的子集的个数
= 奇数个元素的子集的个数

$$(2) \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots = 2^{n-1}, n \geq 1$$

证明：（组合证明）

设集合 $S = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ 是 n 元素集合，则可以把 S 的子集看成是以下选择过程：对每个 x_i 有两种选择：放入子集或不放入子集。

构造具有偶数个元素的子集时， x_1, \dots, x_{n-1} 中每个元素有2种选择，但 x_n 只有一种选择：

- 当选择了 x_1, \dots, x_{n-1} 中的偶数个， x_n 不能被选择；
- 当选择了 x_1, \dots, x_{n-1} 中的奇数个， x_n 必须被选择。

因此， S 的偶数个元素的子集个数为 2^{n-1} 。

同理可证 S 的奇数个元素的子集个数为 2^{n-1} 。证毕。

例：证明以下等式

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}, n \geq 1$$

证明：方法1

由 $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ 得，

$$\begin{aligned} & 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} \\ &= n\binom{n-1}{0} + n\binom{n-1}{1} + \dots + n\binom{n-1}{n-1} \\ &= n\left(\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-1}\right) = n2^{n-1} \end{aligned}$$



例：证明以下等式

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}, n \geq 1$$

方法2 求导法

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

例：证明以下等式

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}, n \geq 1$$

方法2 求导法

对等式

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{k}x^k + \dots + \binom{n}{n}x^n$$

两边对 x 求导得：

$$n(1+x)^{n-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \dots + k\binom{n}{k}x^{k-1} + \dots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

取 $x=1$ 即得等式。

组合证明?

例：用求导法证明以下等式

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2} \quad (n \geq 1)$$

证明：等式 $(1+x)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k$ 两边对 x 求导得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1},$$

两边同乘 x 得， $nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k$ 。

上式两边再对 x 求导数得

$$n(1+x)^{n-1} + nx(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} x^{k-1},$$

将 $x=1$ 代入得

$$\begin{aligned} n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} &= \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} \\ &= n(n+1)2^{n-2}. \end{aligned}$$

证毕。



■ 证明等式的方法

- 利用已有等式：帕斯卡公式
- 求导法、积分法
- 组合推理法

例：试给出下列等式的组合意义上的解释

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r} \binom{n}{0}, \text{ 其中 } r \leq \min(m, n)$$

证：假设有 $m+n$ 个不同的球，其中 m 个是红色， n 个是蓝色。

从中取出 r 个，一共有 $\binom{m+n}{r}$ 种取法。

可分为以下 $r+1$ 种情况：

假设取出的 r 种球中有 i 个红的， $r-i$ 个蓝的， $i=0, 1, \dots, r$,

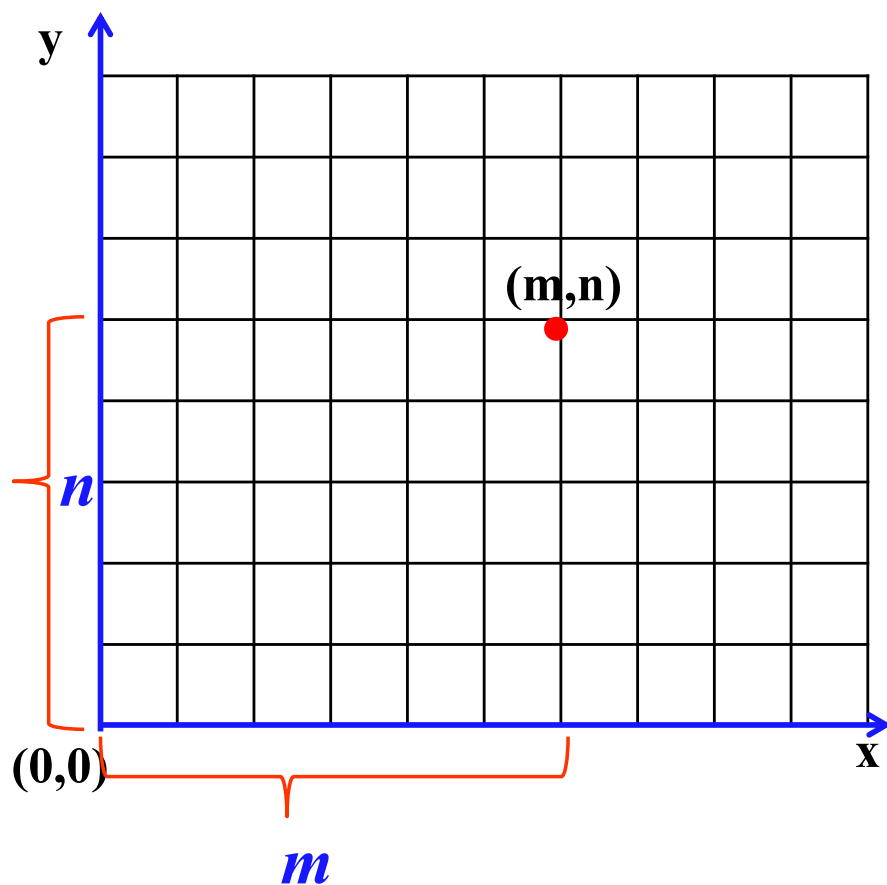
此时有 $\binom{m}{i} \binom{n}{r-i}$ 种情况。

因此，有 $\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}$ 。

例：试给出下列等式的组合意义上的解释

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r} \binom{n}{0}, \text{ 其中 } r \leq \min(m, n)$$

证：如图所示建立二维坐标系 (x, y) 。



首先证明：按照向右、向上方向从点 $(0,0)$ 到点 (m,n) 的路径条数为 $\binom{m+n}{m}$ 。

显然，按照向右和向上方向，无论怎么走，只要向右共走了 m 步，向上共走了 n 步，经过 $m+n$ 步到达 (m, n) 点。

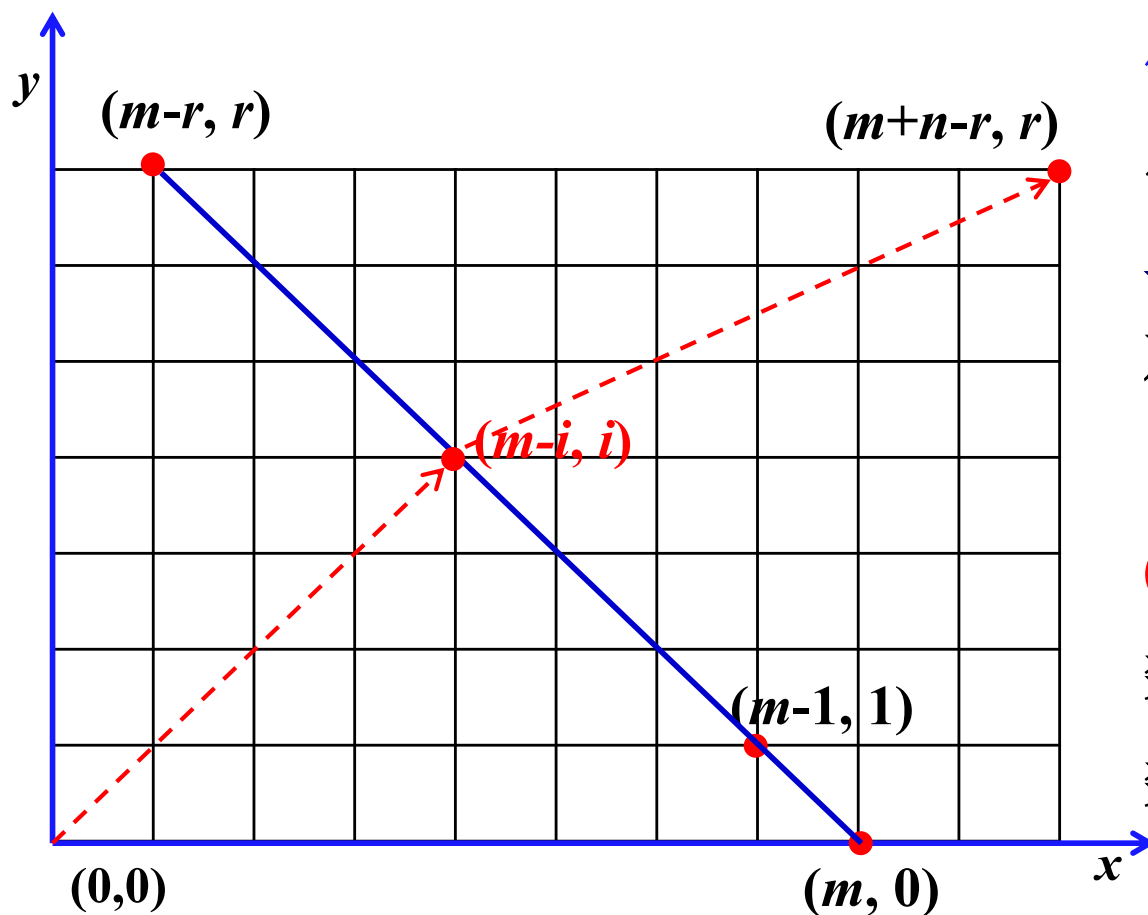
因此路径条数为 $m+n$ 步中选择 m 步向右走的组合数，即 $\binom{m+n}{m}$ 。

因此，从点 $(0,0)$ 到点 $(m+n-r, r)$ 的路径条数为 $\binom{m+n}{r}$ 。

例：试给出下列等式的组合意义上的解释

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r} \binom{n}{0}, \text{ 其中 } r \leq \min(m, n)$$

证：（续）



如图所示，

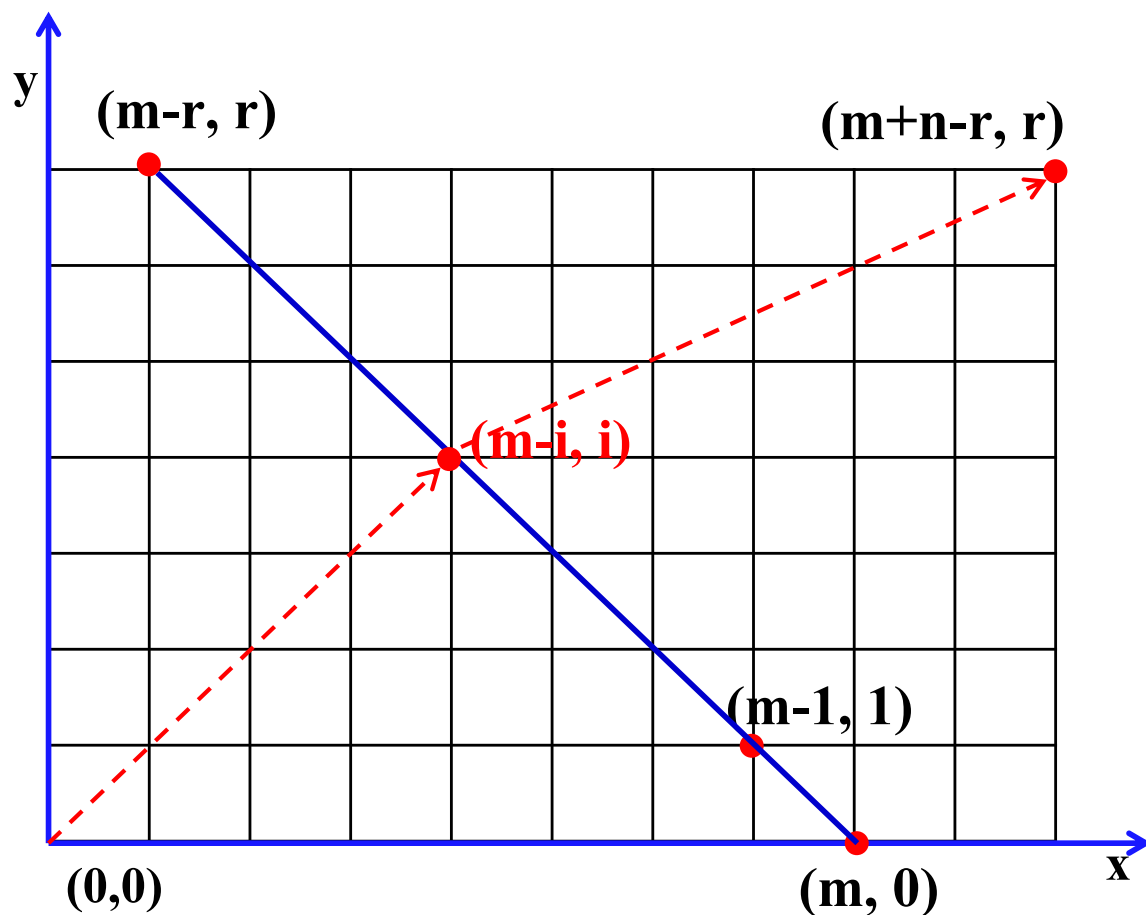
从 $(0,0)$ 走到 $(m+n-r, r)$ 的点一定经过从 $(m,0)$ 到 $(m-r,r)$ 线段上的点。

对该线段上任意一点 $(m-i, i)$ ，由乘法原理知，从 $(0,0)$ 通过 $(m-i, i)$ 到 $(m+n-r, r)$ 的路径条数为从 $(0,0)$ 到 $(m-i, i)$ 的路径数目与从 $(m-i, i)$ 到 $(m+n-r, r)$ 的路径数目的乘积。

例：试给出下列等式的组合意义上的解释

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r} \binom{n}{0}, \text{ 其中 } r \leq \min(m, n)$$

证：（续）



从 $(0,0)$ 到 $(m-i, i)$ 的路径数目

$$\text{为 } \binom{m-i+i}{i} = \binom{m}{i},$$

从 $(m-i, i)$ 到 $(m+n-r, r)$ 的路径数目为

$$\binom{m+n-r-(m-i)+(r-i)}{r-i}$$

$$= \binom{n}{r-i},$$

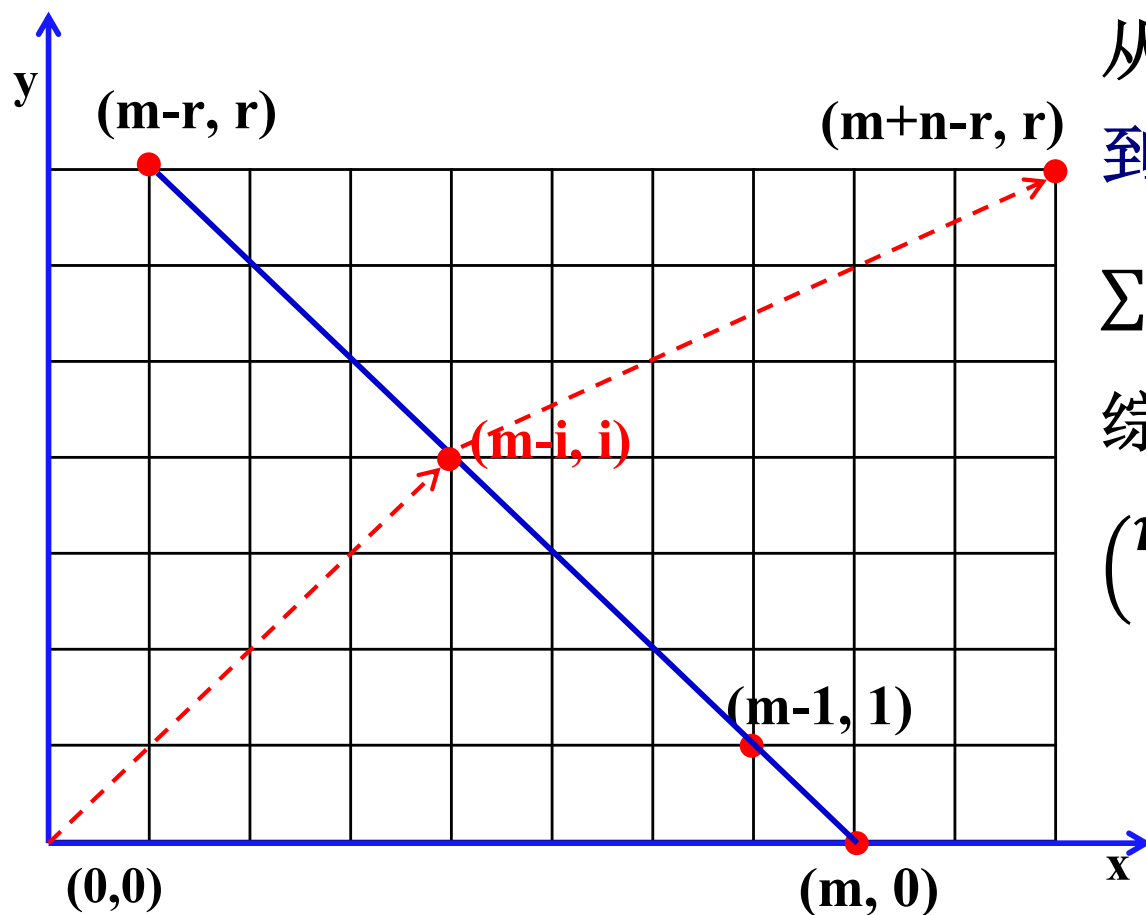
得从 $(0,0)$ 通过 $(m-i, i)$ 到 $(m+n-r, r)$ 的路径条数为

$$\binom{m}{i} \binom{n}{r-i}$$

例：试给出下列等式的组合意义上的解释

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r} \binom{n}{0}, \text{ 其中 } r \leq \min(m, n)$$

证：（续）



从而，由加法原理得，从(0,0)到(m+n-r, r)的路径数目为

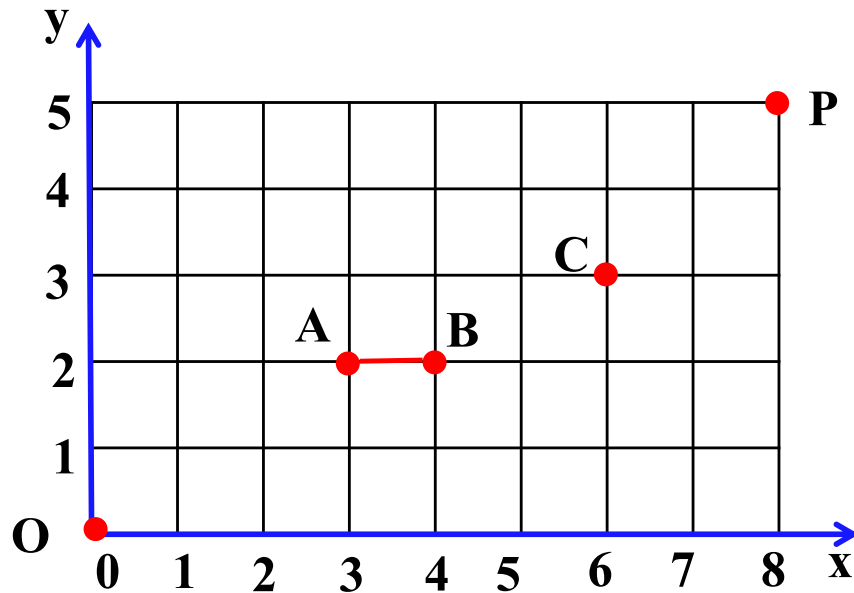
$$\sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}。$$

综上所述，得

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}。$$

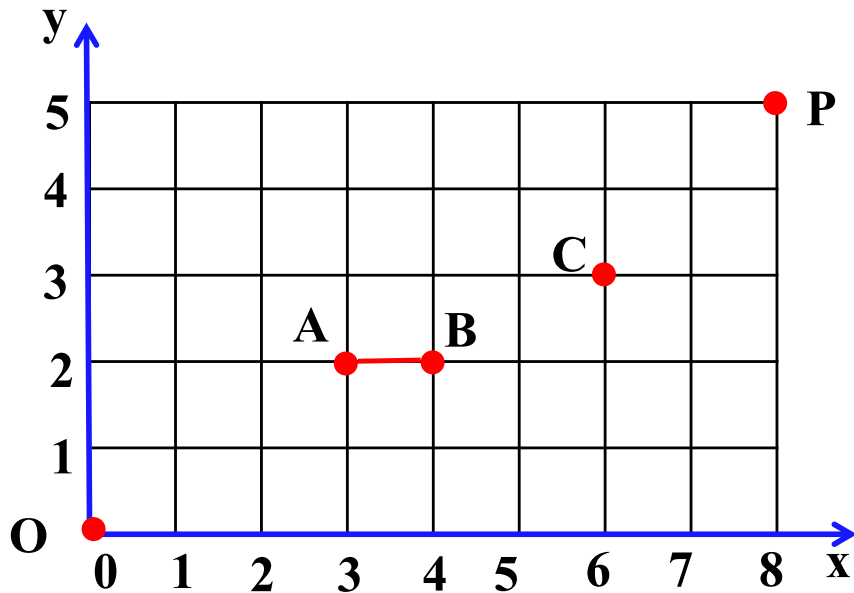
例：计算如图所示的从 **O** 点到 **P** 点的路径数。假设：

- (1) 路径必经过 **A** 点
- (2) 路径必过 **AB** 路径；
- (3) 路径必过 **A** 和 **C** 点；
- (4) 不通过 **AB**线（可以过 **A** 点和 **B** 点）



例：计算如图所示的从 O 点到 P 点的路径数。假设：

- (1) 路径必经过 A 点
- (2) 路径必过 AB 路径；
- (3) 路径必过 A 和 C 点；
- (4) 不通过 AB 线（可以过 A 点和 B 点）



解：(1) $\binom{5}{2} \binom{8}{5}$

(2) $\binom{5}{2} \binom{7}{3}$

(3) $\binom{5}{2} \binom{4}{1} \binom{4}{2}$

(4) $\binom{13}{5} - \binom{5}{2} \binom{7}{3}$

组合定义扩展

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!(n-k)}, n, k \text{ 为非负整数}$$

扩展: n 扩展为任意实数,

k 扩展为任意整数。

例: $\binom{5/2}{4}, \binom{-3.3}{3}, \binom{5/2}{0}, \binom{-3.3}{-3}$

组合定义扩展

令 r 可取任意实数, k 可取任意整数 (正的、负的或零),
定义二项式系数 $\binom{r}{k}$ 为

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}, & \text{若 } k \geq 1 \\ 1 & \text{, 若 } k = 0 \\ 0 & \text{, 若 } k \leq -1 \end{cases}$$

例: $\binom{5/2}{4} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{4!} = -\frac{5}{128}$

$$\binom{-3.3}{3} = \frac{(-3.3)(-4.3)(-5.3)}{3!} = -12.5345$$

$$\binom{5/2}{0} = 1 \qquad \binom{-3.3}{-3} = 0$$

组合定义扩展

- 扩展定义 $\binom{r}{k}$ 仍使Pascal公式成立。
- 令 r 可取任意实数, k 可取任意整数, 有

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$$

$$k \binom{r}{k} = r \binom{r-1}{k-1}$$

根据定义验证即可。



第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形

5.2 二项式定理

5.3 二项式系数的单峰性

5.4 多项式定理

5.5 牛顿二项式定理

回顾

- 二项式系数Pascal公式 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
- Pascal三角形 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

二项式系数先
递增后递减

5.3 二项式系数的单峰性

设序列 $s_0, s_1, s_2, \dots, s_n$, 若存在一个整数 t , $0 \leq t \leq n$, 使得:

$$s_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_t, \quad s_t \geq s_{t+1} \geq s_{t+2} \geq \dots \geq s_n$$

那么, 称序列是**单峰**的。

注意: 1. s_t 一定是序列中的最大数

2. t 不一定是唯一的

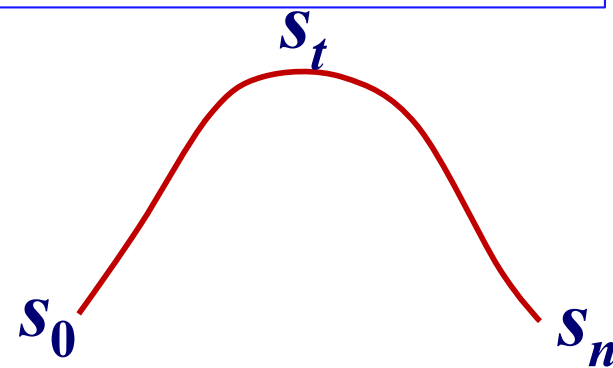
例: 1, 6, 15, **20**, 15, 6, 1

$$1 \leq 6 \leq 15 \leq \mathbf{20}, \mathbf{20} \geq 15 \geq 6 \geq 1: t=3$$

1, 7, 21, **35**, **35**, 21, 7, 1

$$1 \leq 7 \leq 21 \leq \mathbf{35} \leq \mathbf{35}, \mathbf{35} \geq 21 \geq 7 \geq 1: t=4$$

$$1 \leq 7 \leq 21 \leq \mathbf{35}, \mathbf{35} \geq \mathbf{35} \geq 21 \geq 7 \geq 1: t=3$$



二项式系数的单峰性

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

n 为偶数

n 为奇数

二项式系数的单峰性

定理5.3.1. 令 n 为正整数, 二项式系数序列是单峰序列, 其中,

□ 若 n 是偶数:


$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \boxed{\binom{n}{n/2}, \binom{n}{n/2}} > \dots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$


□ 若 n 是奇数:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \boxed{\binom{n}{(n-1)/2}, \binom{n}{(n+1)/2}} > \dots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

证明：考虑连续两个二项式系数的商：

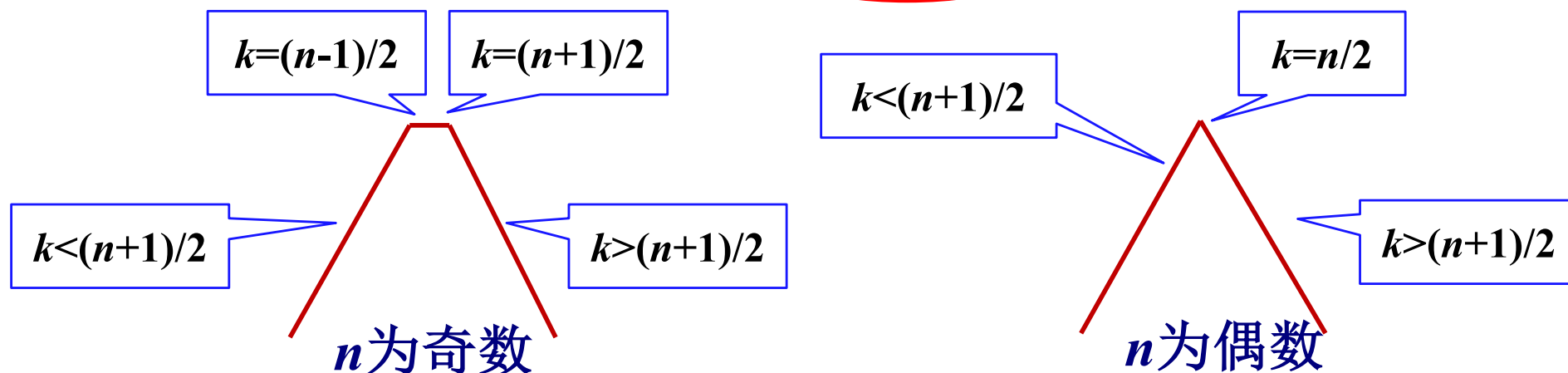
$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{n-k+1}{k}$$

若 $(n-k+1)/k > 1$, 则 $k < n-k+1$, $k < (n+1)/2$, 得 $\binom{n}{k} > \binom{n}{k-1}$ 

若 $(n-k+1)/k < 1$, 则 $k > n-k+1$, $k > (n+1)/2$, 得 $\binom{n}{k} < \binom{n}{k-1}$ 

只有 n 为奇数时出现

若 $(n-k+1)/k = 1$, 则 $k = n-k+1$, $k = (n+1)/2$, 得 $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}$



设 x 为任意实数, 令 $\lceil x \rceil$ 表示大于或等于 x 的最小整数, 称强取整(上取整); $\lfloor x \rfloor$ 表示小于或等于 x 的最大整数, 称弱取整(下取整).

例 : $\lceil 5/2 \rceil = 3$, $\lfloor 5/2 \rfloor = 2$

推论5.3.2 二项式系数 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ 的最大者是

✓ $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} = \binom{n}{n/2}$ (n 为偶数时,)

✓ $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} = \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$ (n 为奇数时)

对定理5.3.1的扩展

定理5.3.1. 令 n 为正整数, 二项式系数序列是单峰序列, 其中,

□ 若 n 是偶数:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{n/2}, \binom{n}{n/2} > \dots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

□ 若 n 是奇数:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{(n-1)/2}, \binom{n}{(n+1)/2} > \dots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

扩展:

- ✓ 由集合的子集的包含关系定义的链与反链
- ✓ 由包含关系推广到一般偏序

反链

令 S 是 n 个元素的集合， S 上的一条反链（antichain）是 S 的子集的一个集合 A ，其中 A 中的子集不相互包含。

例： $S = \{a, b, c, d\}$,

$\{ \{a, b\}, \{b, c, d\}, \{a, d\}, \{a, c\} \}$ 是 S 的一条反链

$\{ \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, d\}, \{a, c\} \}$ 不是 S 的反链

问题：如何找出 S 的反链？

令 $S = \{a, b, c, d\}$ ，以下集合均为 S 的反链

$$A_0 = \{ \{\emptyset\} \}$$

$$A_1 = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\} \}$$

$$A_2 = \{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\} \}$$

$$A_3 = \{ \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\} \}$$

$$A_4 = \{ \{a, b, c, d\} \}$$

如果反链中包含不止一种大小的子集，是否可以包含更多的子集？

■ 令 S 为 n 个元素的集合，一个构造反链的方法：

选择一个整数 $k \leq n$ ，取 A_k 为 S 所有的 k 子集的集合。

该方法构成的反链最多含有 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个子集。

问题：反链最多可包含多少个子集？

链

令 S 是 n 个元素的集合， S 上的一条链（chain）是 S 的子集的集合 C ，其中对于 C 中的每一对子集，总有一个包含在另一个之中：

对任意 $S_1, S_2 \in C$ ，且 $S_1 \neq S_2$ ，则 $S_1 \subset S_2$ 或者 $S_2 \subset S_1$

例： $S = \{a, b, c, d, e\}$,

$\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, e\}\}$ 是 S 的一条链，

$\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$ 是 S 的一条链。

最大链

最大链

令 S 是 n 个元素的集合, S 上的最大链 C 定义为:

$$C = \{A_0, A_1, \dots, A_n\},$$

满足:

(1) $A_0 = \Phi \subset A_1 \subset A_2 \dots \subset A_n$, 且

(2) $|A_i| = i$ ($i = 1, \dots, n$)

$n+1$ 个子集

问题: 怎么构造最大链?

最大链的构造方法

(0) $A_0 = \Phi$

(1) 从 S 中选择一个元素 i_1 , 形成 $A_1 = \{i_1\}$.

(2) 选择一个元素 $i_2 \neq i_1$, 形成 $A_2 = \{i_1, i_2\}$.

(3) 选择一个元素 $i_3 \neq i_1, i_2$ 形成 $A_3 = \{i_1, i_2, i_3\}$.

...

(k) 选择一个元素 $i_k \neq i_1, i_2, \dots, i_{k-1}$ 形成 $A_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.

...

(n) 选择一个元素 $i_n \neq i_1, \dots, i_{n-1}$ 形成 $A_n = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$.

- S 上的最大链与 S 的排列一一对应
- 最大链的数目为 $n!$

链与反链的关系

例: $S = \{a, b, c, d, e\}$,

$\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, e\}\}$ 是 S 上的一条链,

$\{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{c, d, e\}\}$ 是 S 上的一条反链。

S 上的一条链与一条反链可否包含两个公共子集?

- S 上的一条链最多只能包含 S 的任意一条反链中的一个子集
- S 上的一条反链最多只能包含 S 的任意一条链中的一个子集

反证法: 设 C 是 S 的一条链, A 是 S 的一条反链。

若 C 包含 A 中两个子集 S_1 和 S_2 , 则 S_1 与 S_2 不存在包含关系, 与 C 是 S 的一条链矛盾。

$$|C \cap A| \leq 1$$

定理 5.3.3. 设 S 为 n 个元素的集合, 则 S 上的一条反链最多包含 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个子集。

证明: 设 A 是 S 上的一条反链, S_1 是 A 中一个子集, 且 $|S_1|=k$, C 是包含 S_1 的最大链。

设 β 是所有二元组 (S_1, C) 的个数, 即

$$\beta = |\{(S_1, C) \mid S_1 \in A, C \text{ 是包含 } S_1 \text{ 的最大链}\}|$$

由于一个最大链最多只包含任意一个反链的一个子集。

因此不存在两个元组 (S_1, C) 与 (S_2, C) , 其中 S_1 与 S_2 为反链 A 的不同的子集, C 是包含 S_1, S_2 的最大链。

但 S_1 可能包含于多个最大链, (多少个?)

所以, β 不超过最大链的个数, 即 $\beta \leq n!$ 。

定理 5.3.3. 设 S 为 n 个元素的集合, 则 S 上的一条反链最多包含 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个子集。

证: (续) 设反链 A 中大小为 k 的子集个数为 a_k , 则

$$|A| = \sum_{k=0}^n a_k。$$

设 A_k 为 A 中一个大小为 k 的子集, 则包含 A_k 的最大链最多为 $k!(n-k)!$ 个,

则包含 A 中大小为 k 的子集的最大链最多为

$$a_k \cdot k!(n-k)! \text{ 个。}$$

因此, $\beta = \sum_{k=0}^n a_k k! (n-k)! \leq n!$ 。

从而 $\sum_{k=0}^n a_k k! (n-k)! / n! \leq 1$, 得 $\sum_{k=0}^n a_k / \binom{n}{k} \leq 1$ 。

定理 5.3.3. 设 S 为 n 个元素的集合, 则 S 上的一条反链最多包含 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个子集。

因此, $\beta = \sum_{k=0}^n a_k k! (n-k)! \leq n!$ 。

从而 $\sum_{k=0}^n a_k k! (n-k)! / n! \leq 1$, 得 $\sum_{k=0}^n a_k / \binom{n}{k} \leq 1$ 。

由于 $\binom{n}{k}$ 最大为 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, 得

$$(1 / \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}) \sum_{k=0}^n a_k \leq \sum_{k=0}^n a_k / \binom{n}{k} \leq 1,$$

因此, $|A| = \sum_{k=0}^n a_k \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 。证毕。

定理 5.3.3. 设 S 为 n 个元素的集合, 则 S 上的一条反链最多包含 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个子集。

□ S 的 k 子集构成的集合构成一条反链

例: $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, S 上的一个最大反链为所有 2 子集构成的集合:

$\{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\} \}$

S 的 3 子集构成的集合也是 S 上的一个最大反链!

更强的结果

定理 5.3.3. 设 S 为 n 个元素的集合，则 S 上的的一条反链最多包含 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个集合。

设 S 是为 n 个元素的集合，

- 如果 n 是偶数，则大小为 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 的唯一的反链是所有 $n/2$ 子集的反链；
- 如果 n 是奇数，则大小为 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 的反链有两个：
 - ✓ 所有 $(n-1)/2$ 子集构成的反链；
 - ✓ 所有 $(n+1)/2$ 子集构成的反链。

链、反链的推广

- 集合的包含关系是偏序关系
- 把链、反链的概念推广到偏序集

令 (X, \leq) 是一个有限偏序集,

- ✓ 链是 X 的一个子集, 其中任意两个元素都是可比的,
- ✓ 反链是 X 的一个子集, 其中任意两个元素都不可比.

令 (X, \leq) 是一个有限偏序集,

- ✓ 反链是 X 的一个子集, 其中任意两个元素都不可比;
- ✓ 链是 X 的一个子集, 其中任意两个元素都是可比的.

例: 设 $X = \{1, 2, \dots, 10\}$, 考虑偏序集 $(X, |)$, 其中 $|$ 为整除关系, 即 $a|b$ 表示 b 可被 a 整除。

反链 A : A 中任意两个不同的数 a, b , $a \nmid b$ 且 $b \nmid a$

链 C : C 中任意两个不同的数 a, b ,

或者 $a | b$, 或者 $b | a$

$\{4, 6, 7, 9, 10\}$ 是一条反链

$\{1, 2, 4, 8\}$ 是一条链

令 (X, \leq) 是一个有限偏序集,

- ✓ 反链是 X 的一个子集, 其中任意两个元素都不可比;
- ✓ 链是 X 的一个子集, 其中任意两个元素都是可比的.

- 极小元: a 是偏序集的极小元当且仅当 X 中不存在满足 $x < a$ 的元素 x

X 的所有极小元构成的子集是反链。

- 极大元: a 是偏序集的极大元当且仅当 X 中不存在满足 $x > a$ 的元素 x

X 的所有极大元构成的子集也是反链。

定理5.6.1: 令 (X, \leq) 是一个有限偏序集, 并令 r 是最大链的大小, 则 X 可以被划分成 r 个反链, 但不能划分为少于 r 个的反链。

证明: 首先, 证明: X 不能划分为少于 r 个的反链。

设 A 是 (X, \leq) 的最大链, 且 $|A|=r$ 。设 $A=\{a_1, \dots, a_r\}$ 。

假设 X 划分为少于 r 个反链,

由鸽巢原理, 至少存在一条反链至少包含最大链 A 中两个不同的元素, 矛盾。

因此, 假设不成立, 即 X 不能划分为少于 r 个反链。

定理5.6.1: 令 (X, \leq) 是一个有限偏序集, 并令 r 是最大链的大小, 则 X 可以被划分成 r 个反链, 但不能划分为少于 r 个的反链.

证明: (续) 下面证明: X 可以被划分成 r 个反链。

$A_p = X_p = X_{p-1} - A_{p-1}$ 的极小元集

...

$A_3: X_3 = X_2 - A_2$ 的极小元集

$A_2: X_2 = X - A_1$ 的极小元集

$A_1: X$ 的极小元集

X

$X_p \neq \emptyset$, 而 $X_{p+1} = X_p - A_p = \emptyset$

此时, 得到 X 的划分 A_1, A_2, \dots, A_p 。

需要证明:

- 每个 A_i 是反链, $i = 1, 2, \dots, p$
- $p = r$

定理5.6.1: 令 (X, \leq) 是一个有限偏序集, 并令 r 是最大链的大小, 则 X 可以被划分成 r 个反链, 但不能划分为少于 r 个的反链.

证明: (续) 下面证明: X 可以被划分成 r 个反链。

$A_p = X_p = X_{p-1} - A_{p-1}$ 的极小元集

...

$A_3: X_3 = X_2 - A_2$ 的极小元集

$A_2: X_2 = X - A_1$ 的极小元集

$A_1: X$ 的极小元集

X

$X_p \neq \emptyset$, 而 $X_{p+1} = X_p - A_p = \emptyset$

此时, 得到 X 的划分 A_1, A_2, \dots, A_p 。
考虑任意 A_i , 由极小元的定义知,
对任意 $a, b \in A_i$ 且 $a \neq b$, a 与 b 不可比。
因此, A_i 是 X 的一条反链,
故 A_1, A_2, \dots, A_p 是 X 的一条反链划分。
下面证明 $p = r$ 。

定理5.6.1: 令 (X, \leq) 是一个有限偏序集, 并令 r 是最大链的大小, 则 X 可以被划分成 r 个反链, 但不能划分为少于 r 个的反链.

证明: (续) 下面证明: X 可以被划分成 r 个反链.

$A_p = X_p = X_{p-1} - A_{p-1}$ 的极小元集

...

$A_3: X_3 = X_2 - A_2$ 的极小元集

$A_2: X_2 = X - A_1$ 的极小元集

$A_1: X$ 的极小元集

X

证明: (续) 因为 X 不能划分为少于 r 个反链, 故 $p \geq r$.

对于 A_1, A_2, \dots, A_p , 满足:

对任意 $a_i \in A_i$, 一定存在 $a_{i-1} \in A_{i-1}$, 使得 $a_{i-1} < a_i$, $i=2, \dots, p$.

得到 X 的一个链: $a_1 < a_2 < \dots < a_p$,

其中 $a_i \in A_i$, $i=1, 2, \dots, p$.

由于 r 是最大链的大小, 因此有 $p \leq r$. 故 $p=r$. 证毕.

定理5.6.1: 令 (X, \leq) 是一个有限偏序集, 并令 r 是最大链的大小, 则 X 可以被划分成 r 个反链, 但不能划分为少于 r 个的反链.

例: 设 $X = \{1, 2, \dots, n\}$, 考虑 X 的幂集 $\mathcal{P}(X)$ 在集合包含关系下构成的偏序集 $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ 。

最大链: $\Phi \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \dots \subset \{1, 2, \dots, n\}$

则 $\mathcal{P}(X)$ 可被划分成 $n+1$ 个反链:

问题: 极小元的集合是什么形式?

$\mathcal{P}(X)$ 的 k 子集, $k = 0, 1, \dots, n$

定理5.6.2 令 (X, \leq) 是一个有限偏序集, 并令 m 是最大反链的大小, 则 X 可以被划分成 m 个链, 但不能划分成少于 m 个链。

证明: 首先类似定理5.6.1的证明可证: X 不能划分为少于 m 个链。

下面证明 X 可划分成 m 个链。

对 X 中元素个数 n 进行归纳证明。

$n=1$ 时, X 本身就是一个链, 结论显然成立。

设 $n > 1$, 假设当 $|X| < n$ 时结论成立。

(第二数学归纳法)

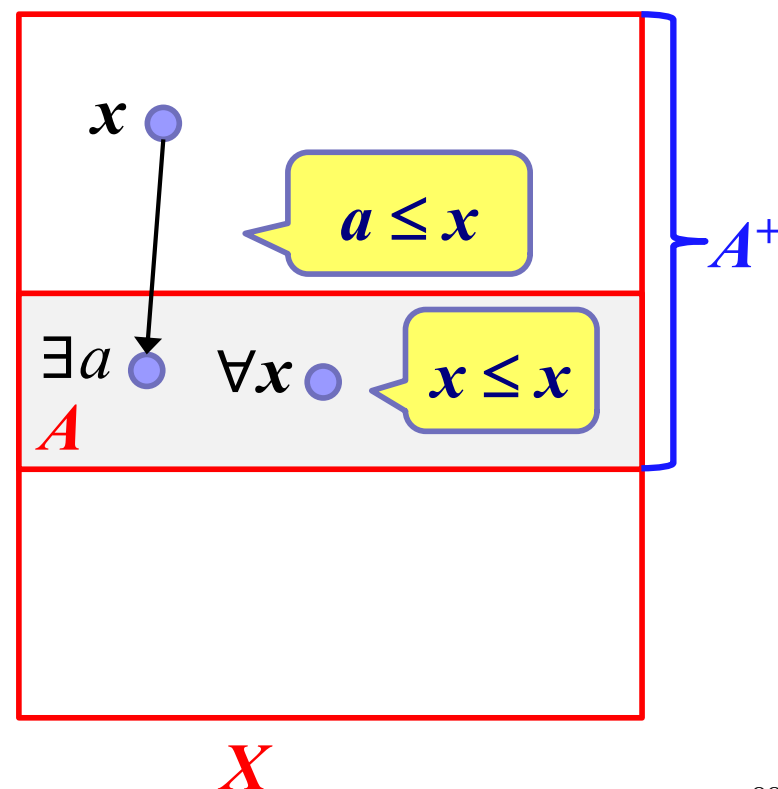
定理5.6.2 令 (X, \leq) 是一个有限偏序集, 并令 m 是最大反链的大小, 则 X 可以被划分成 m 个链, 但不能划分成少于 m 个链。

证明: (续) 当 $|X|=n$ 时, 已知 X 的极大元集合与极小元集合一定是 X 的反链, 分两种情形讨论:

- (1) 存在大小为 m 的反链 A , 既不是 X 所有极大元的集合, 也不是所有极小元的集合。
- (2) 最多存在两个大小为 m 的反链, 即它们或者是所有极大元的集合和极小元的集合, 或者是它们中的一个。

证明(续): (1) 存在大小为 m 的**反链** A ，既不是 X 所有极大元的集合，也不是所有极小元的集合。

令 $A^+ = \{x \mid x \in X \text{ 且存在 } a \in A \text{ 使得 } a \leq x\}$ ，(“上覆盖”)
 即， A^+ 包含 X 中 **A 的所有元素**及在 **A 中某个元素“之上”**的所有元素组成的集合且 **A 是 A^+ 的极小元集合**。



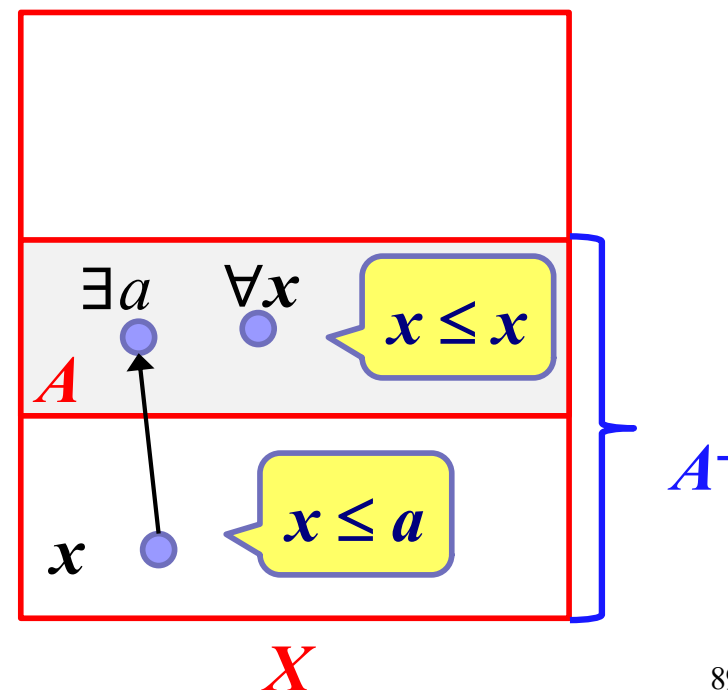
证明(续): (1) 存在大小为 m 的反链 A , 既不是 X 所有极大元的集合, 也不是所有极小元的集合。

令 $A^+ = \{x \mid x \in X \text{ 且存在 } a \in A \text{ 使得 } a \leq x\}$, (“上覆盖”)

即, A^+ 包含 X 中 A 的所有元素及在 A 中某个元素“之上”的所有元素组成的集合且 A 是 A^+ 的极小元集合。

令 $A^- = \{x \mid x \in X \text{ 且存在 } a \in A \text{ 使得 } x \leq a\}$ (“下覆盖”)

即, A^- 包含 X 中 A 的所有元素及在 A 中某个元素“之下”的所有元素组成的集合;
且 A 是 A^- 的极大元集合。



证明(续): (1) 存在大小为 m 的反链 A , 既不是 X 所有极大元的集合, 也不是所有极小元的集合。

可验证以下性质:

$|A^+| < n$: 因为存在不在 A 中的 X 的极小元。

$|A^-| < n$: 因为存在不在 A 中的 X 的极大元。

$A^+ \cap A^- = A$: 若存在 $x \in A^+ \cap A^-$, 但 $x \notin A$,

$$A \subseteq A^+ \cap A^-$$

则存在 $a_1, a_2 \in A$, 使得 $a_1 < x < a_2$, 与 A 是反链矛盾。

$A^+ \cup A^- = X$: 若存在 $x \in X$, 但 $x \notin A^+ \cup A^-$,

$$A^+ \cup A^- \subseteq X$$

则对任意 $a \in A$, $a \not\leq x$ 且 $x \not\leq a$,

得 $A \cup \{x\}$ 是反链, 与 A 是最大反链矛盾。

证明(续): 因为 $|A^+| < n$, $|A^-| < n$, 且 A^+ 和 A^- 都包含长度为 m 的最大反链 A ,

由归纳假设知, A^+ 可划分为 m 个链 E_1, E_2, \dots, E_m ,

A^- 可划分为 m 个链 F_1, F_2, \dots, F_m 。

由于 $A^+ \cap A^- = A$ 且 A 是反链,

因此对任意 $a \in A$, 一定存在唯一的 E_i 和唯一的 F_j , 使得

- $a \in E_i$ 且 $a \in F_j$, (每个链(反链)只能包含任意一个反链(链)中最多一个元素)
- E_i 中其他元素 x 都满足 $a \leq x$, (A 是 A^+ 的极小元集)
- F_j 中其他元素 y 都满足 $y \leq a$ 。 (A 是 A^- 的极大元集)

因此 E_i 与 F_j 可以连接成一个的链 $E_i \cup F_j$ 。

同理可构成其他 $m-1$ 个链, 构成了 X 的划分。

证明(续): 因为 $|A^+| < n$, $|A^-| < n$, 且 A^+ 和 A^- 都包含长度为 m 的最大反链 A ,

由归纳假设知, A^+ 可划分为 m 个链 E_1, E_2, \dots, E_m ,
 A^- 可划分为 m 个链 F_1, F_2, \dots, F_m 。

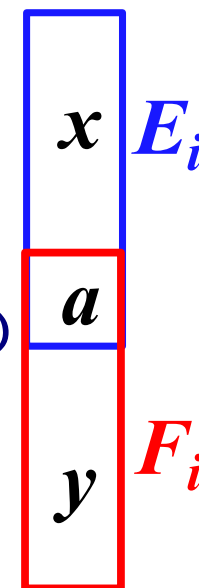
由于 $A^+ \cap A^- = A$ 且 A 是反链,


因此对任意 $a \in A$, 一定存在唯一的 E_i 和唯一的 F_j , 使得

- $a \in E_i$ 且 $a \in F_j$, (每个链只能包含任意一个反链中最多一个元素)
- E_i 中其他元素 x 都满足 $a \leq x$, (A 是 A^+ 的极小元集)
- F_j 中其他元素 y 都满足 $y \leq a$ 。(A 是 A^- 的极大元集)

因此 E_i 与 F_j 可以连接成一个的链 $E_i \cup F_j$ 。

同理可构成其他 $m-1$ 个链, 构成了 X 的划分。





证明(续): (2) 最多存在两个大小为 m 的反链, 即它们或者是所有极大元的集合和极小元的集合, 或者是它们中的一个。

令 x 是极小元, 而 y 是极大元且 $x \leq y$ (x 可以等于 y), 此时 $X \setminus \{x, y\}$ 的一条反链的最大的大小为 $m-1$ 。

由归纳假设, $X \setminus \{x, y\}$ 可以被划分为 $m-1$ 个链。

这些链与链 $\{x, y\}$ 一起构成了 X 的一个划分。

证毕。

定理5.6.2 令 (X, \leq) 是一个有限偏序集, 并令 m 是最大反链的大小, 则 X 可以被划分成 m 个链, 但不能划分成少于 m 个链。

定理5.3.3: 令 S 为 n 个元素的集合, 则 S 的一条反链最多包含 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个集合。

□ S 的幂集 $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ 的最大反链大小为 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$

□ S 的幂集 $\mathcal{P}(S)$ 可以被划分成 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个链。

问题: 如何构造这个划分? 对称链划分

对称链划分

设 $S=\{1, 2, \dots, n\}$ ，如果 S 的幂集 $\mathcal{P}(S)$ 的一个链划分满足以下两个条件，则称其是一个对称链划分：

- (1) 链中每一个子集比它前面的子集的元素个数多 1；
- (2) 链中第一个子集与最后一个子集的大小和等于 n 。

如果这个链只含一个子集，那么这个子集既是第一个子集也是最后一个子集，所以其大小为 $n/2$ （此时， n 为偶数）。

例： $S=\{1, 2, 3\}$ 的幂集

$$\mathcal{P}(S) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

的一个对称链划分：

$$C_1: \emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$$

$$C_2: \{2\} \subset \{2, 3\}$$

$$C_3: \{3\} \subset \{1, 3\}$$

$\mathcal{P}(S)$ 的最长反链的长度为 3

对称链划分的构造方法

基本思路：将 S 的所有子集划分为 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个对称链。

令 $S = \{1, 2, \dots, n\}$ ，对 n 进行归纳构造：

对于 $n=k$ 时的每一个含多个子集的链 E ，可构造 $n=k+1$ 时的两个链：

1. 对 E 增加如下子集：在 E 的最后一个子集中增加 $k+1$ ，构成一个新子集
2. 把 $k+1$ 加到 E 中除最后一个子集之外的所有子集，并删除最后一个子集

对于 $n=k$ 时的每一个含多个子集的链 E ，可构造 $n=k+1$ 时的两个链：

1. 对 E 增加如下子集：在 E 的最后一个子集中增加 $k+1$ ，构成一个新子集
2. 把 $k+1$ 加到 E 中除最后一个子集之外的所有子集，并删除最后一个子集

$n=1$ 时， $\emptyset \subset \{1\}$

$n=2$ 时， $\emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\}$
 $\{2\}$

$n=3$ 时， $\emptyset \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$
 $\{3\} \subset \{1, 3\}$
 $\{2\} \subset \{2, 3\}$

对于 $n=k$ 时的每一个含多个子集的链 E ，可构造 $n=k+1$ 时的两个链：

1. 对 E 增加如下子集：在 E 的最后一个子集中增加 $k+1$ ，构成一个新子集
2. 把 $k+1$ 加到 E 中除最后一个子集之外的所有子集，并删除最后一个子集

$n=3$ 时

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\}$$

$$\{3\} \subset \{1,3\}$$

$$\{2\} \subset \{2,3\}$$

$n=4$ 时

$$\emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\}$$
$$\{4\} \subset \{1,4\} \subset \{1,2,4\}$$

$$\{3\} \subset \{1,3\} \subset \{1,3,4\}$$
$$\{3,4\}$$

$$\{2\} \subset \{2,3\} \subset \{2,3,4\}$$
$$\{2,4\}$$

设 $S=\{1, 2, \dots, n\}$ ，如果 S 的幂集 $\mathcal{P}(S)$ 的一个链划分满足以下两个条件，则称其是一个对称链划分：

- (1) 链中每一个子集比它前面的子集的元素个数多 1；
- (2) 链中第一个子集与最后一个子集的大小和等于 n 。

如果这个链只含一个子集，那么这个子集既是第一个子集也是最后一个子集，所以其大小为 $n/2$ （此时， n 为偶数）。

■ 注意：

- 对称链划分中的每一个链必须正好含有一个 $\lfloor n/2 \rfloor$ 子集（也正好含有一个 $\lceil n/2 \rceil$ 子集）
- 对称链划分中的链的个数等于

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$$

构造方法的正确性

归纳假设：设集合 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 的幂集有对称链划分。
任取一条对称链：

$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k$, 其中 A_i 的元素个数比 A_{i-1} 元素个数多1,
且 $|A_1| + |A_k| = n-1, i=2, \dots, k, k \geq 1$

构造 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的对称链。

对 $k \geq 1$ 分两种情况：

(1)若 $k > 1$, 可生成 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的两条链：

$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \subset A_k \cup \{n\}$; 和

$A_1 \cup \{n\} \subset A_2 \cup \{n\} \subset \dots \subset A_{k-1} \cup \{n\}$

由 $|A_1| + |A_k| = n-1$, 得 $|A_1| + |A_k \cup \{n\}| = n$,

且 $|A_1 \cup \{n\}| + |A_{k-1} \cup \{n\}| = n$

(2)若 $k=1$, 生成 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的 1条对称链:

$$A_k \subset A_k \cup \{n\}$$

由于 $|A_k|=(n-1)/2$, 因此 $|A_k|+|A_k \cup \{n\}|=n$.

综上, 构造的链仍然是对称链。

注意到: $\{1, 2, \dots, n\}$ 的任一个子集或者是 A 或者是 $A \cup \{n\}$ 的形式, 其中 A 是 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 的一个子集。

那么, 可以验证: $\{1, 2, \dots, n\}$ 的每一个子集恰好出现在上面构造的某个对称链中, 这些链构成了 $\{1, 2, \dots, n\}$ 所有子集的一个划分。

小结

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

- 二项式系数序列的单峰性
 - 最大值: $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$
 - k -子集的个数的最大值
- n 元集合 S 的链、反链(S 的子集的集合)
 - 反链: k -子集、最大反链: 所有 $\lfloor n/2 \rfloor$ -子集
 - 链: 对应 n 元排列, $n!$ 个
- n 元偏序集 (X, \leq) 的链、反链
 - 反链与最大链的大小
 - 链与最大反链的大小
 - 幂集的对称链的构造



第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形

5.2 二项式定理

5.3 二项式系数的单峰性

5.4 多项式定理

5.5 牛顿二项式定理

5.4 多项式定理

■ 把二项式定理 $(x+y)^n$ 扩展到 $(x_1+x_2+\dots+x_t)^n$

■ 多项式系数:

$\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_t} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!}$, 其中 n_1, n_2, \dots, n_t 是非负整数, 且 $n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$ 。

□ 表示重数分别为 n_1, n_2, \dots, n_t 的 t 种不同类型物品的多重集的排列数

二项式系数: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, 可记为 $\binom{n}{r \quad n-r}$

多项式系数的帕斯卡公式

■ 二项式系数的帕斯卡公式

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

■ 多项式系数的帕斯卡公式

$$\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_t} = \binom{n-1}{n_1-1 n_2 \dots n_t} + \binom{n-1}{n_1 n_2-1 \dots n_t} + \dots + \binom{n-1}{n_1 n_2 \dots n_t-1}$$

多项式系数的帕斯卡公式

$$\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_t} = \binom{n-1}{\textcolor{blue}{n}_1 - 1 n_2 \dots n_t} + \binom{n-1}{n_1 \textcolor{blue}{n}_2 - 1 \dots n_t} + \dots + \binom{n-1}{n_1 n_2 \dots \textcolor{blue}{n}_t - 1}$$

组合证明：

设多重集 S 有 t 个不同的元素 a_1, a_2, \dots, a_t ，每个元素的重复数分别为 n_1, n_2, \dots, n_t ，则 S 的全排列一共有 $\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_t}$ 个。

假设全排列的第1个位置的元素为 a_i ， $1 \leq i \leq t$ ，此时 S 的全排列个数为 $\binom{n-1}{n_1 \dots n_{i-1} \textcolor{red}{n}_i - 1 n_{i+1} \dots n_t}$ 。

因此，等式成立。

定理 5.4.1. 设 n 是正整数。对于所有的 x_1, x_2, \dots, x_t , 有

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$$

其中求和是对 $n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$ 的所有非负整数解 n_1, n_2, \dots, n_t 进行的。（证明方法同二项式定理）

例. 确定在 $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$ 的展开式中, $x_1^3 x_2 x_3^4 x_5^2$ 的系数。

解: $x_1^3 x_2 x_3^4 x_5^2$ 的系数为 $\binom{10}{3 \ 1 \ 4 \ 0 \ 2} = \frac{10!}{3!4!2!}$

定理 5.4.1. 设 n 是正整数。对于所有的 x_1, x_2, \dots, x_t , 有

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$$

其中求和是对 $n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$ 的所有非负整数解 n_1, n_2, \dots, n_t 进行的。（证明方法同二项式定理）

例. 证明: $\sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1 n_2 n_3} (-1)^{n_1-n_2+n_3} = (-3)^n$

证明: $(-3)^n = ((-1) + (-1) + (-1))^n$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1 n_2 n_3} (-1)^{n_1} (-1)^{n_2} (-1)^{n_3}$$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1 n_2 n_3} (-1)^{n_1} (-1)^{-n_2} (-1)^{n_3}$$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1 n_2 n_3} (-1)^{n_1-n_2+n_3}$$



第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形

5.2 二项式定理

5.3 二项式系数的单峰性

5.4 多项式定理

5.5 牛顿二项式定理

A decorative graphic consisting of several squares of different shades of blue and purple, arranged in a non-uniform pattern.



思考？

- 牛顿二项式定理？
- 几何级数(geometric series)展开？

- $\frac{1}{1+z}$, $\frac{1}{1-z}$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \forall x : |x| < 1$$

- 生成函数？

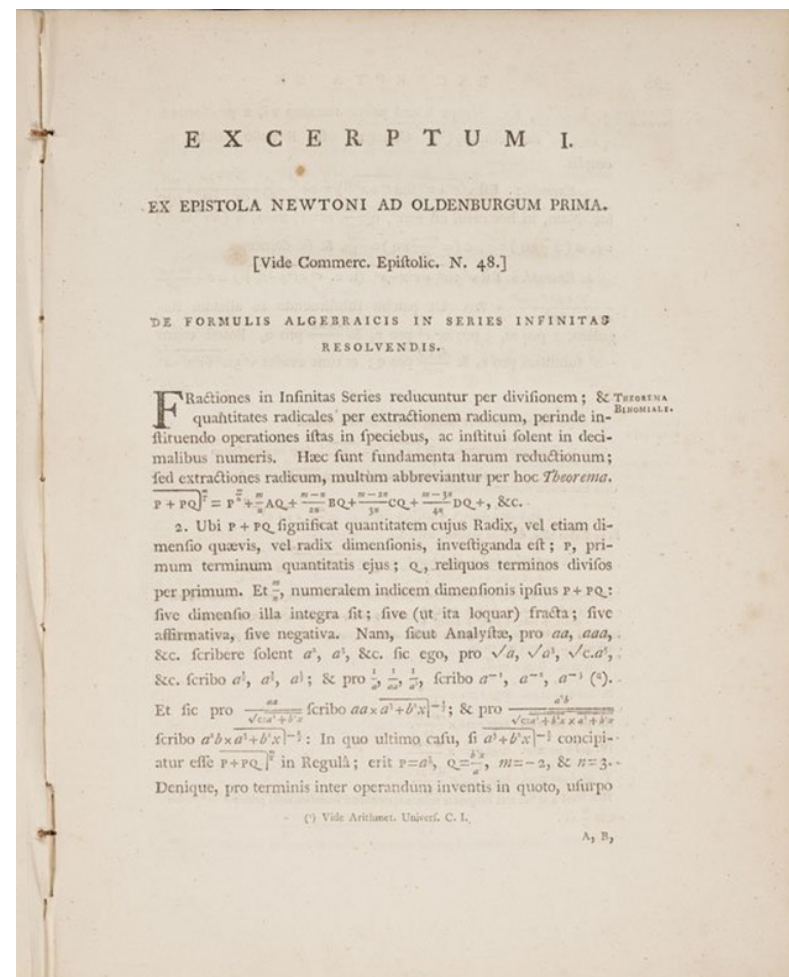
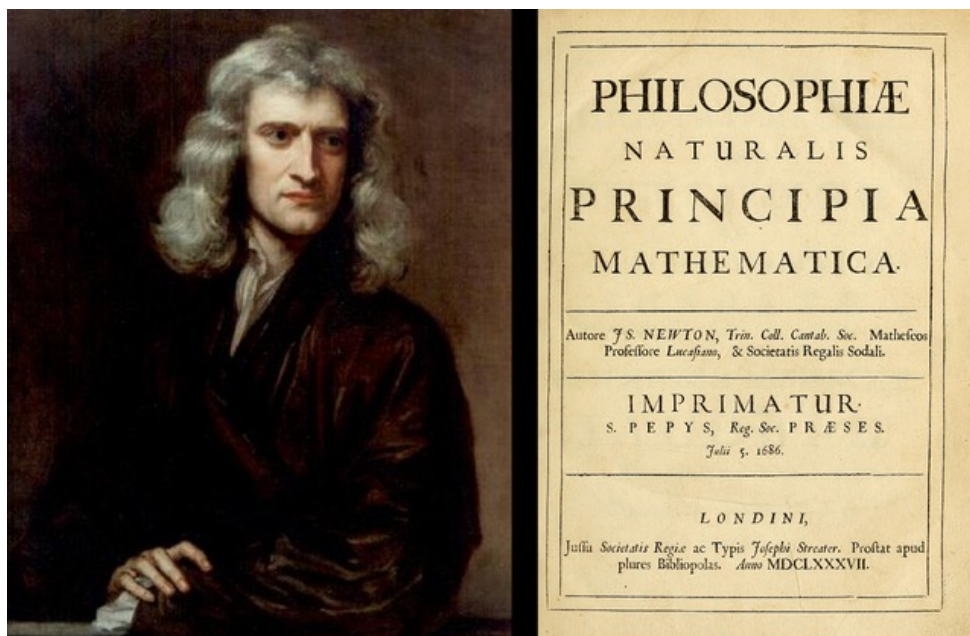
- 拆分数？

□ $3=1+1+1=1+2$

5.5 牛顿二项式定理

在数学方面，牛顿“明显地推进了当时数学的每一个分支”，最著名的两项发现是**广义二项式展开**、**微积分**

发现了所谓的广义二项式展开，这最早出现在1676年他写给戈特弗里德·莱布尼茨的一封信中。



5.5 牛顿二项式定理

定理5.5.1: 令 α 是一个实数, 对于所有满足 $0 \leq |x| < |y|$ 的变量 x, y 有

$$(x + y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k}$$

其中,
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

- 如果 α 是整数 n , 那么对于 $n < k$, $\binom{n}{k} = 0$, 上述式子即为二项式定理:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$



关于牛顿二项式定理注记

- 牛顿二项式定理是二项式**无穷级数展开式**。
可通过“泰勒级数”展开式证明。
- 可以用于**计算一些无理数的精确值**，如平方根。
- 主要用于第7章中生成函数。

牛顿二项式的等价形式

定理5.5.1: 令 α 是一个实数, 对于所有满足 $0 \leq |x| < |y|$ 的变量 x, y 有

$$(x + y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k}$$

其中,
$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

令 $z = \frac{x}{y}$ (此时, $|z| < 1$) 得 $(x+y)^\alpha = (zy+y)^\alpha = y^\alpha(z+1)^\alpha$ 。

则牛顿二项式定理可以等价地转述成:

对满足 $|z| < 1$ 的任意 z , 有

$$(1+z)^\alpha = \frac{(x+y)^\alpha}{y^\alpha} = \left(1 + \frac{x}{y}\right)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \left(\frac{x}{y}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$$

牛顿二项式的等价形式

对满足 $|z| < 1$ 的任意 z , 有 $(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$

令 $\alpha = -n$, 则有 $(1+z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} z^k$,

$$\begin{aligned} \text{由于 } \binom{-n}{k} &= \frac{-n(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \cdot \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \cdot \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

因此, 当 $|z| < 1$ 时, $(1+z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$

牛顿二项式的等价形式

对满足 $|z|<1$ 的任意 z ，有 $(1+z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$

□ $n=1$ 时，得

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \quad (|z|<1)$$

□ 用 $-z$ 代替 z ，得

$$(1-z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k \quad (|z|<1)$$

□ $n=1$ 时，得 $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (|z|<1)$

组合推理: $(1-z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k \quad (|z| < 1)$

$$\begin{aligned}(1-z)^{-n} &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} \cdots \frac{1}{1-z} \\ &= (1+z+z^2+\dots) \cdots (1+z+z^2+\dots) \quad (n \text{ 个因子})\end{aligned}$$

假设从第1个因子取 z^{k_1} , 从第2个因子取 z^{k_2} ..., 从第 n 个因子取 z^{k_n} , 且 $k_1 + \dots + k_n = k$, 其中 k_1, \dots, k_n 为非负整数。

因此得到 z^k 的不同方法等于 $k_1 + \dots + k_n = k$ 的非负整数

解的个数, 即 $\binom{n+k-1}{k}$ 。

因此等式成立。

应用：求解任意精度的平方根

令 $\alpha = 1/2$ ，有 $\binom{\alpha}{0} = 1$ 。对于 $k > 0$ 有

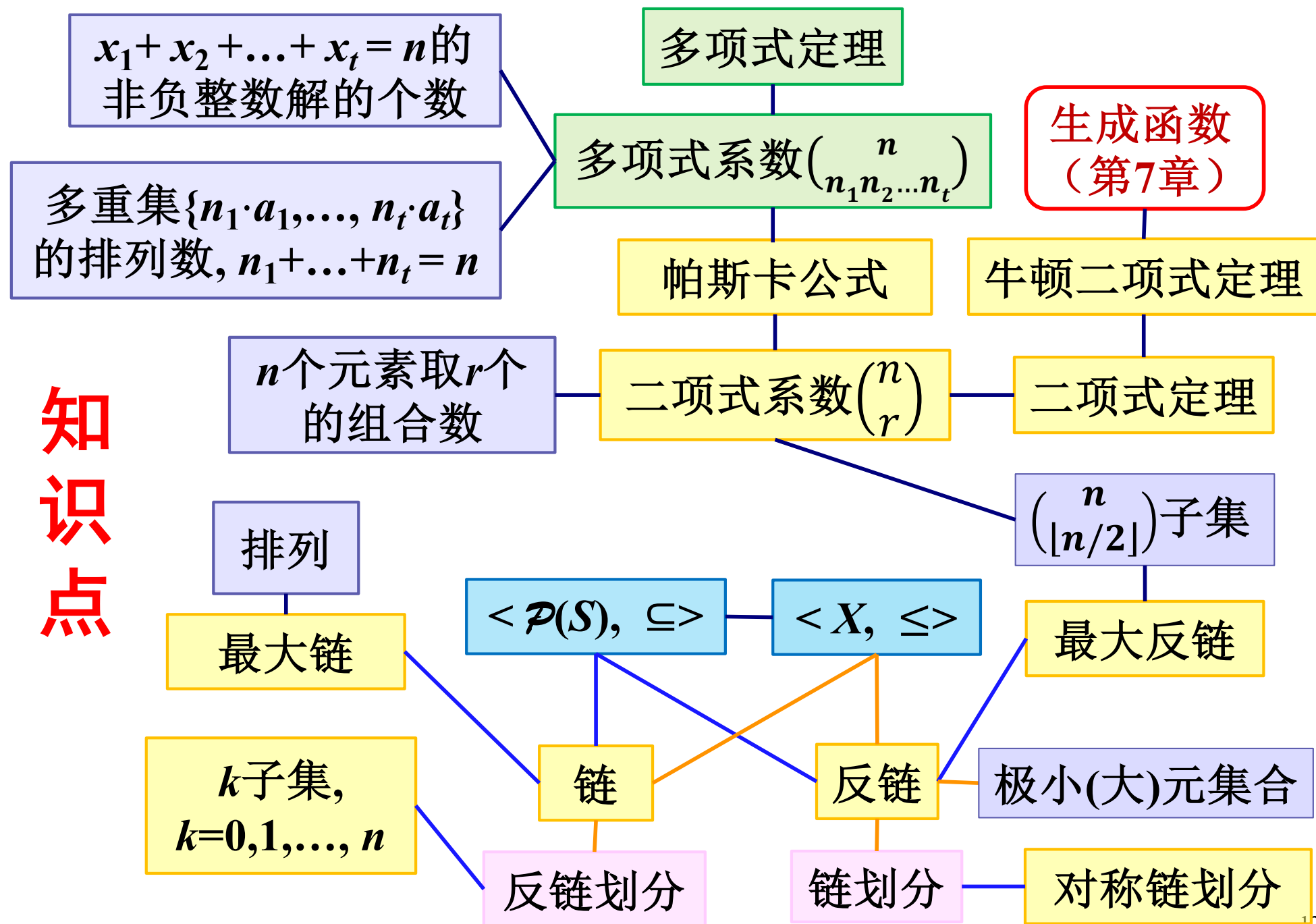
$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{k} &= \binom{1/2}{k} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdots \left(\frac{1}{2} - k + 1 \right)}{k!} \\&= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (2k-3) \times (2k-2)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2k-2) \times (k!)} \\&= \frac{(-1)^{k-1} (2k-2)!}{k \times 2^{2k-1} (k-1)!^2} \\&= \frac{(-1)^{k-1}}{k \times 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{20} &= \sqrt{16 + 4} = 4 \sqrt{1 + 0.25} \\&= 4 \left(1 + \frac{1}{2}(0.25) - \frac{1}{8}(0.25)^2 + \frac{1}{16}(0.25)^3 - \cdots \right) \\&= 4.472 \dots\end{aligned}$$

因此, 对 $|z| < 1$, 有

$$\begin{aligned}\sqrt{1+z} &= (1+z)^{1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k \times 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1} z^k \\&= 1 + \frac{1}{2} z - \frac{1}{2 \times 2^3} \binom{2}{1} z^2 + \frac{1}{3 \times 2^5} \binom{4}{2} z^3 - \cdots\end{aligned}$$

知识点





总结

- 帕斯卡三角形
 - 帕斯卡公式、
- 二项式定理
 - 二项式系数相关等式的证明
 - 利用已有公式化简
 - 求导法、积分法
 - 组合证明（推理）
- 二项式系数的单峰性
 - 链、反链
 - 链划分、反链划分
- 多项式定理、牛顿二项式定理