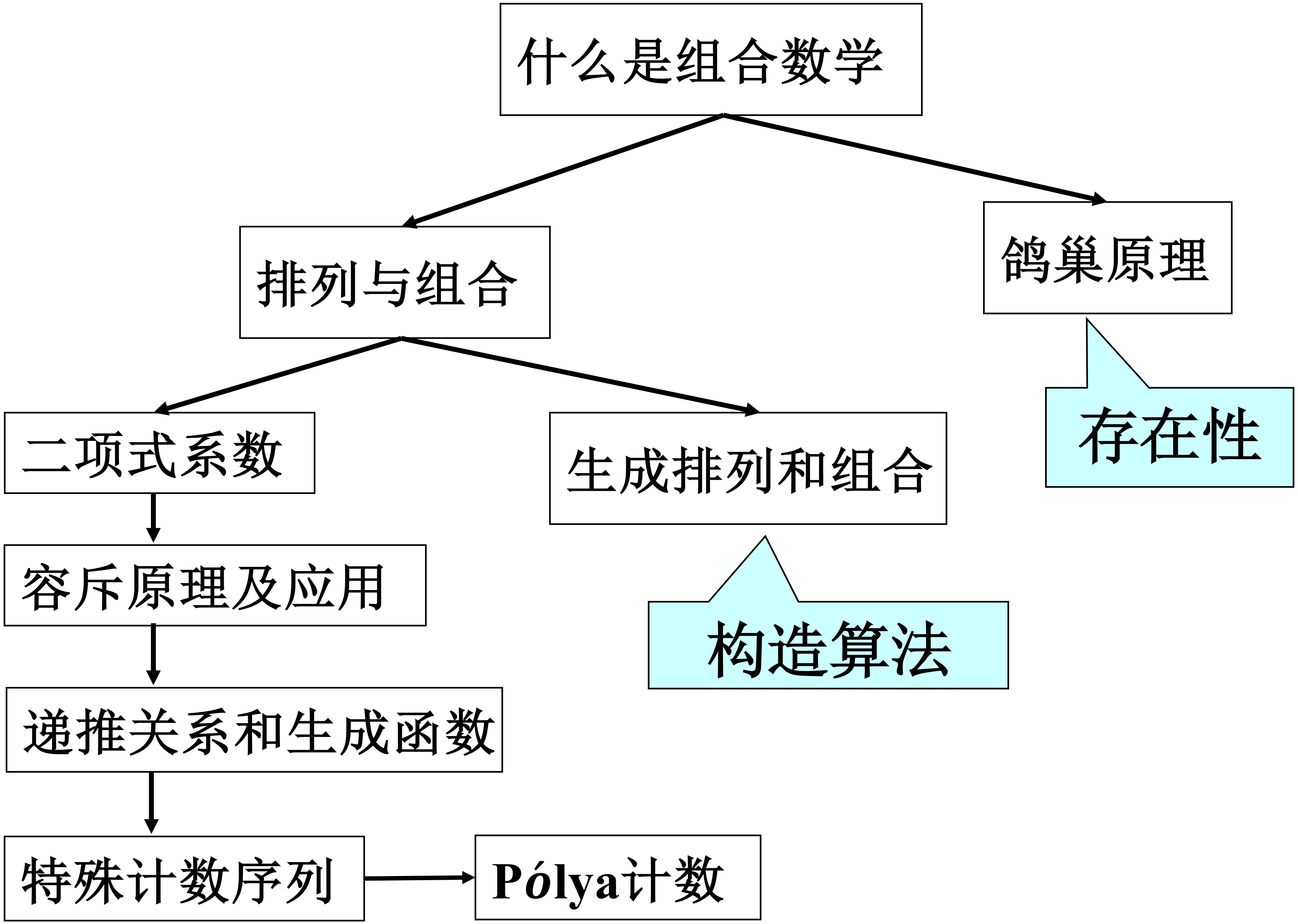
期末复习

知识结构


什么是组合数学
排列与组合
鸽巢原理
存在性
二项式系数
生成排列和组合
容斥原理及应用
构造算法
递推关系和生成函数
特殊计数序列
Pólya计数

组合、排列与循环排列

集合$\{1, 2, \ldots, n\}$	计数
r 组合	$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
全排列	$n!$
r 排列	$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\ldots.(n-r+1)$
循环r 排列	$\frac{P(n,r)}{r} = \frac{n!}{r(n-r)!}$
循环全排列	$(n-1)!$
项链排列	$\frac{(n-1)!}{2}$

多重集的排列

<table>
<tr><th>多重集</th><th>r 排列的个数 h_r</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$</td><td>$k^r$</td></tr>
<tr><td>$h_0, h_1, h_2, \ldots$的指数生成函数
$g^{(e)}(x) = (\sum_{e_1=0}^{\infty} \frac{x^{e_1}}{e_1!}) (\sum_{e_2=0}^{\infty} \frac{x^{e_2}}{e_2!}) \ldots (\sum_{e_k=0}^{\infty} \frac{x^{e_k}}{e_k!})$
的展开式中$\frac{x^r}{r!}$的系数.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$
$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$</td><td>$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\ (r=n)$</td></tr>
<tr><td>$h_0, h_1, h_2, \ldots$的指数生成函数 $(r < n)$
$g^{(e)}(x) = (\sum_{e_1=0}^{n_1} \frac{x^{e_1}}{e_1!}) (\sum_{e_2=0}^{n_2} \frac{x^{e_2}}{e_2!}) \ldots (\sum_{e_k=0}^{n_k} \frac{x^{e_k}}{e_k!})$
的展开式中 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数.</td></tr>
</table>

多重集的排列：每类元素出现次数有约束

<table>
<tr><th>多重集</th><th>r 排列的个数 h_r</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2 \ldots, \infty\cdot a_k\}$</td><td>$k^r$</td></tr>
<tr><td>$h_0, h_1, h_2,\ldots$的指数生成函数
$g^{(e)}(x) = (\sum_{e_1=0}^{\infty} \frac{x^{e_1}}{e_1!}) (\sum_{e_2=0}^{\infty} \frac{x^{e_2}}{e_2!})\ldots(\sum_{e_k=0}^{\infty} \frac{x^{e_k}}{e_k!})$
的展开式中$\frac{x^r}{r!}$的系数. （对应的因子进行约束）</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2 \ldots, n_k\cdot a_k\}$
$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$</td><td>$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\ (r=n)$</td></tr>
<tr><td>$h_0, h_1, h_2,\ldots$的指数生成函数 （$r<n$）
$g^{(e)}(x) = (\sum_{e_1=0}^{n_1} \frac{x^{e_1}}{e_1!}) (\sum_{e_2=0}^{n_2} \frac{x^{e_2}}{e_2!})\ldots(\sum_{e_k=0}^{n_k} \frac{x^{e_k}}{e_k!})$
（对应的因子进行约束）
的展开式中 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数.</td></tr>
</table>

多重集的组合

<table>
<tr><th>多重集</th><th>r 组合的个数 h_r</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2 \ldots, \infty\cdot a_k\}$</td><td>$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$</td></tr>
<tr><td>方程$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$的非负整数解的个数</td></tr>
<tr><td>$h_0, h_1, h_2,\ldots$的生成函数
$g(x)=(\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1})(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{e_2})\ldots(\sum_{e_k=0}^{\infty} x^{e_k})$
的展开式中x^r的系数.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2 \ldots, n_k\cdot a_k\}$
$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$</td><td>$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$ $(r\le n_i,\ 1\le i\le k)$</td></tr>
<tr><td>容斥原理：方程 $x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ 的非负整数解的个数 ($0\le x_i\le n_i$, $1\le i\le k$)</td></tr>
<tr><td>$h_0, h_1, h_2,\ldots$的生成函数 $(\exists i\ r>n_i)$
$g(x)=(\sum_{j=0}^{n_1} x^{e_1})(\sum_{j=0}^{n_2} x^{e_2})\ldots(\sum_{j=0}^{n_k} x^{e_k})$
的展开式中 x^r的系数.</td></tr>
</table>

多重集的组合：每类元素出现次数有约束

多重集	r 组合的个数 h_r
$S=\{\infty\cdot a_1, \infty\cdot a_2, \ldots, \infty\cdot a_k\}$	$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$
	方程$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$的非负整数解的个数
	$h_0, h_1, h_2,\ldots$的生成函数 $g(x)=(\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1})(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{e_2})\ldots(\sum_{e_k=0}^{\infty} x^{e_k})$ 的展开式中x^r的系数.（对应的因子进行约束）
$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$ $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$	$\binom{r+k-1}{r}=\binom{r+k-1}{k-1}$ $(r\le n_i,\ \ 1\le i\le k)$
	容斥原理：方程 $x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ 的非负整数解的个数 $(0\le x_i\le n_i, 1\le i\le k)$
	$h_0, h_1, h_2,\ldots$的生成函数 $(\exists i\ r>n_i)$ $g(x)=(\sum_{j=0}^{n_1} x^{e_1})(\sum_{j=0}^{n_2} x^{e_2})\ldots(\sum_{j=0}^{n_k} x^{e_k})$ 的展开式中 x^r的系数.（对应的因子进行约束）

特殊计数序列：Catalan数列

- **Catalan数列**
  - 序列 $C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots$, 其中

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

是第n个Catalan数。

- **判断Catalan数的两种方法**
  - $C_n = C_0C_{n\text{-}1} + C_1C_{n\text{-}2} + \ldots + C_{n\text{-}1}C_0$， $C_0 = 1$
  - 由n个+1和n个-1构成的$2n$项序列

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2n},$$

其部分和总满足：$a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 0\ (k = 1, 2, \ldots, 2n)$

的序列的个数等于第 n 个Catalan数

特殊计数序列：差分序列与Stirling数

- 设序列$h_n(n=0, 1, 2,\ldots)$，有差分表

$$
\begin{array}{ccccccccc}
h_0 & & h_1 & & h_2 & & h_3 & & h_4 \;\ldots \\
& \Delta^1 h_0 & & \Delta^1 h_1 & & \Delta^1 h_2 & & \Delta^1 h_3 \ldots & \\
& & \Delta^2 h_0 & & \Delta^2 h_1 & & \Delta^2 h_2 \ldots & & \\
& & & \Delta^3 h_0 & & \Delta^3 h_1 \ldots & & & \\
& & & & \ldots & & & &
\end{array}
$$

- 设序列的通项 h_n是n的p次多项式：

$$h_n = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + a_{p-2} n^{p-2} + \ldots\ldots + a_1 n + a_0,\ a_p \neq 0$$

则对于所有的$n \geq 0$，必有: $\Delta^{p+1} h_n = 0$。

特殊计数序列：差分序列与Stirling数

- 设序列$h_n(n=0, 1, 2,\ldots)$，有差分表

$$
\begin{array}{ccccccccc}
h_0 & & h_1 & & h_2 & & h_3 & & h_4 \;\ldots \\
& \Delta^1 h_0 & & \Delta^1 h_1 & & \Delta^1 h_2 & & \Delta^1 h_3 \ldots & \\
& & \Delta^2 h_0 & & \Delta^2 h_1 & & \Delta^2 h_2 \ldots & & \\
& & & \Delta^3 h_0 & & \Delta^3 h_1 \ldots & & & \\
& & & & \ldots & & & &
\end{array}
$$

- 差分表的第0条对角线等于$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p, 0, 0, \ldots,$ 其中$c_p \neq 0$，则
  - $h_n = c_0\binom{n}{0} + c_1\binom{n}{1} + c_2\binom{n}{2} + \ldots + c_p\binom{n}{p}$
  - $\sum_{k=0}^{n} h_k = c_0\binom{n+1}{1} + c_1\binom{n+1}{2} + \ldots + c_p\binom{n+1}{p+1}$

特殊计数序列：差分序列与Stirling数

- 第二类 Stirling数
  - $h_n = n^p = \sum_{k=0}^{p} \frac{c(p,k)}{k!}[n]_k = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[n]_k$,
    - $c(p, k)$是序列$h_n = n^p$(n=0, 1, 2,…)的差分表中第0条对角线上的第k个元素
    - $[n]_p = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(p-1))$，即$n$个元素取$p$个的排列数
  - $S(p,k)=\frac{c(p,k)}{k!}$, $S(0, 0)=1$, $S(p, 0)=0$ $(p\geq 1)$，$S(p, p)=1$
  - 把 p元素集合划分到 k个不可区分的盒子且没有空盒子的划分的个数
  - 如果$1\leq k \leq p-1$ 则

$$S(p, k) = k\, S(p-1, k) + S(p-1, k-1)$$

特殊计数序列：差分序列与Stirling数

- **第一类 Stirling数**
  - $[n]_p = \sum_{k=0}^{p} s(p, k) n^k$
    - $[n]_p = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(n-(p-1))$，即$n$个元素取$p$个的排列数
  - 如果 $1 \le k \le p-1$则:

$$s(p, k) = (p-1)s(p-1, k) + s(p-1, k-1)$$

  - 将p个物品排成 k个非空的循环排列的方法数

特殊计数序列：差分序列与Stirling数

- **Bell数**
  - 将p个元素的集合划分到非空、不可区分的盒子的划分数，记为B_p，则 $B_p = S(p, 0)+S(p, 1)+\ldots+S(p, p)$
  - 如果$p\geq 1$，则

$$B_p = \binom{p-1}{0}B_0 + \binom{p-1}{1}B_1 + \binom{p-2}{2}B_2 \ldots + \binom{p-1}{p-1}B_{p-1}$$

- $S^{\#}(p, k)$
  - 把$\{1, 2, \ldots, p\}$分到 k 个非空且可区分的盒子的划分个数，则 $S^{\#}(p, k) = k!\, S(p, k)$
  - $S^{\#}(p, k) = \sum_{t=0}^{k}(-1)^t \binom{k}{t} (k-t)^p$

特殊计数序列：差分序列与Stirling数

p 个球	k 个盒	是否为空	方案个数
有区别	有区别	有空盒	k^p
	无区别	无空盒	第二类Stiring数： $S(p, k)$
	有区别	无空盒	$k!\,S(p, k)$
	无区别	有空盒	$S(p, 1)+S(p, 2)+\ldots+S(p, k), p\geq k$
			Bell数： $S(p, 1)+S(p, 2)+\ldots+S(p, p), p\leq k$
	k个循环排列	非空	第一类Stiring数： $s(p, k)$

特殊计数序列：分拆数

- 若存在正整数集 $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ （$1 \le k \le n, 1 \le n_i \le n$），使得 $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$，则
  - 称 $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ 是 n 的一个分拆
  - 称每个 n_i 为 n 的一个部分（或类）
  - 记 n 的所有包含 k 个部分的不同分拆的个数为 p_n^k，有

$$\sum_{j=1}^{k} p_n^j = p_{n+k}^k, \quad p_n^1 = p_n^n = 1$$

  - n 的所有不同分拆的个数记为 p_n，称为 n 的分拆数，有

$$p_n = \sum_{i=1}^{n} p_n^i$$

特殊计数序列：分拆数

- 分拆数数列 $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots.$的生成函数是

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - x^k)^{-1}$$

$$= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{1a_1} + \ldots.) \times$$

$$(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2a_2} + \ldots.) \times \ldots$$

$$(1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \ldots + x^{ka_k} + \ldots.) \times \ldots$$

  - $1a_1+2a_2+3a_3+\ldots\ ka_k+\ldots\ na_n = n$ $(0 \le a_i \le n)$ 的一个正整数解对应 n的一个拆分
  - x^n 前的系数为 n的分拆数
  - 对拆分的每个部分有约束时，反映到生成函数的因子上

容斥原理

设集合 S中具有性质P_i 的元素的集合为 A_i

- 集合 S 不具有性质$P_1, P_2,\ldots,P_m$的物体的个数：

$$|\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_m} = |S| - \Sigma|A_i| + \Sigma|A_i \cap A_j| - \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+\ldots+ (-1)^m|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

- 集合S中至少具有性质$P_1, P_2, \ldots, P_m$之一的元素的个数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = \Sigma|A_i| - \Sigma|A_i \cap A_j| + \Sigma|A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$+\ldots+ (-1)^{m+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$$

其中，第一个和对$\{1, 2, \ldots, m\}$的所有的 1 子集 $\{ i \}$ 进行，第二个和对$\{1, 2,\ldots, m\}$的所有的 2 集合$\{ i, j \}$进行, 依此类推.

容斥原理的应用

- 多重集的组合
- 错位排列
- 带有绝对/相对禁止位置的排列
- 几何问题/Catalan数

容斥原理的应用：多重集的组合

多重集	r 组合的个数 h_r
$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2 \ldots, n_k\cdot a_k\}$ 每个n_i可能为整数或∞	方程$x_1+x_2+\ldots+x_k=r$ 满足 $0\le x_1\le n_1, 0\le x_2\le n_2, \ldots, 0\le x_k\le n_k$ 整数解的个数

- 不满足以上形式的方程进行变量代换转化为以上形式
  - $x_1+x_2+\ldots+x_k=r$

    关键：x_i 系数不为1，则进行变量代换使得系数为1，使用生成函数方法
  - $0\le x_1\le n_1, 0\le x_2\le n_2, \ldots, 0\le x_k\le n_k$

    关键：进行变量代换使之为非负整数

容斥原理的应用：错位排列

- 设 $X=\{1,2,\ldots,n\}$，它的排列用 $i_1\ i_2\ldots\ i_n$ 表示，错位排列是使得 $i_1\neq 1,\ i_2\neq 2,\ldots,\ i_n\neq n$ 的排列。
- 用 D_n 表示错位排列个数。
  - $D_n = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right)$， $n\geq 1$
- D_n 满足如下递推关系:
  - $D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$, $n=3, 4,\ldots$
  - $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$， $n=2, 3,\ldots$

容斥原理的应用：绝对禁止位置排列

- 令$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是$\{1, 2, \ldots, n\}$的子集（可以为空集），

用$P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$表示$\{1,2,\ldots,n\}$的排列$i_1i_2\ldots i_n$的集合，使得：

i_1不在X_1内， i_2不在X_2内， …， i_n不在X_n内

- 带禁止位置的“非攻击型车”

容斥原理的应用：相对禁止位置排列

- **{1, 2,…, *n*}**的排列中没有**12, 23, …, (*n*-1)*n*** 这些模式出现的排列的个数，记为 Q_n
- 对于$n≥1$,

$$Q_n = n! + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}(n-k)!$$

$$= n! -\binom{n-1}{1}(n-1)!+\binom{n-1}{2}(n-2)!+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

- $Q_n=D_n+D_{n-1}$

生成函数与指数生成函数

- 令$h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$为一无穷数列, 其
  - 生成函数 $g(x)=h_0+h_1x+h_2x^2+\ldots+h_nx^n+\ldots$
  - 指数生成函数 $g^{(e)}(x)=h_0+h_1x+h_2\frac{x^2}{2!}+\ldots+h_n\frac{x^n}{n!}+\ldots$
- $S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2 \ldots, n_k\cdot a_k\}$，每个$n_i$可能为整数或$\infty$

r 组合的个数 h_r： $h_0, h_1, h_2, \ldots$的生成函数 $g(x)=(\sum_{j=0}^{n_1}x^{e_1})(\sum_{j=0}^{n_2}x^{e_2})\ldots(\sum_{j=0}^{n_k}x^{e_k})$ 的展开式中 x^r的系数.
r 排列的个数 h_r: $h_0, h_1, h_2, \ldots$的指数生成函数 $g^{(e)}(x)=(\sum_{e_1=0}^{n_1}\frac{x^{e_1}}{e_1!})(\sum_{e_2=0}^{n_2}\frac{x^{e_2}}{e_2!})\ldots(\sum_{e_k=0}^{n_k}\frac{x^{e_k}}{e_k!})$ 的展开式中 $\frac{x^r}{r!}$ 的系数.

- 把对每类元素出现次数的约束加到（指数）生成函数对应的因子上。
- 生成函数的另一个应用：求解常系数线性递推关系

求解递推关系

- 从具体问题求递推关系
- 从递推关系求解一般项h_n
  - 常系数线性齐次递推关系
    - 特征方程方法
    - 生成函数法
  - 常系数线性非齐次递推关系
    - 特征方程方法
    - 生成函数法

常系数线性齐次递推关系

常系数线性齐次递推关系：

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k} \quad (a_k\neq 0,\ n\geq k)$$

- 特征方程法
  - 求特征方程 $x^k-a_1x^{k-1}-a_2x^{k-2}-\ldots-a_k=0$ 的特征根；
  - 分互异根及重根两种情形。
- 生成函数法
  - 求生成函数形如$p(x)/q(x)$
  - 生成函数的展开式，通常化为代数分式和形式：$c/(1-rx)^t$, 利用牛顿二项式展开。

求解常系数线性齐次递推关系

定理7.4.1：令 q为一个非零数，则 $h_n= q^n$ 是常系数线性齐次递推关系

$h_n - a_1h_{n-1} - a_2h_{n-2} - \ldots - a_kh_{n-k} = 0$

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k} \quad (a_k\neq 0,\ n\geq k) \quad (1)$$

的解当且仅当 q 是多项式方程

$$x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \ldots - a_{k-1}x - a_k=0 \quad (2)$$

的一个根.

若多项式方程 (2) 有 k个不同的根 $q_1, q_2,\ldots, q_k$, 则

$$h_n=c_1q_1^n+ c_2q_2^n+\ldots+ c_kq_k^n \quad (3)$$

是下述意义下(1)的通解：任意给定初始值$h_0, h_1, \ldots,h_{k-1}$, 都存在$c_1, c_2,\ldots, c_k$使得(3)式是满足(1)式和初始条件的唯一的数列。

求解常系数线性齐次递推关系

定理7.4.2 令$q_1, q_2,\ldots,q_t$为常系数线性齐次递推关系:

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k} \quad (n\geq k) \quad (1)$$

的特征方程的互异的根。

如果 q_i 是 (1)的特征方程的 s_i 重根，那么该递推关系的通解中对应于q_i的部分为

$$H_n^{(i)}= c_1q_i^n+c_2nq_i^n+\ldots+c_{s_i}n^{s_i-1}q_i^n,$$

且该递推关系的通解为:

s_i项的和

$$h_n= H_n^{(1)} + H_n^{(2)} +\ldots+ H_n^{(t)}$$

常系数线性非齐次递推关系

非齐次线性递推关系：

$$h_n=a_1h_{n-1}+a_2h_{n-2}+\ldots+a_kh_{n-k}+b_n,\quad (a_k,\ b_n\neq 0,\ n\geq k)$$

- 特征函数法

(1) 求齐次关系的一般解

(2) 求非齐次关系的一个特解

(3) 将一般解和特解结合,通过初始条件确定一般解中出现的常系数值

- 生成函数法

排列和组合生成算法

- 排列生成算法
  - 递归方法
  - 邻位替换
  - 逆序生成算法
- 生成组合算法
  - 字典序
  - 组合压缩序
  - 反射Gray序（逐次法）
- 生成 r组合算法
  - 字典序 r组合生成算法

二项式系数

- 帕斯卡三角形
- 二项式定理
- 二项式系数的单峰性
- 多项式定理
- 牛顿二项式定理

鸽巢原理

- 主要内容
  - 鸽巢原理的简单形式
  - 鸽巢原理的加强形式
  - Ramsey定理

定理3.1.1 如果把$n+1$个物体放进 n个盒子，那么至少有一个盒子包含两个或者更多的物体。

定理3.2.1 令q_1, q_2, …, q_n为正整数.若将

$$q_1+q_2+\ldots+q_n-n+1$$

个物体被放进n个盒子内，那么，

- 或者第1个盒子至少含有q_1个物体，
- 或者第2个盒子至少含有q_2个物体，…，
- 或者第n个盒子至少含有q_n个物体。

平均原理：设m和n都是正整数。如果m个物体放入n个盒子，则至少有一个盒子包含至少⌈m/n⌉个物体。

Pólya计数

- 非等价着色数的计算

定理14.2.3 (Burnside定理) 设 G 是 X 的置换群，C 是X 中一个满足下面条件的着色集合：对于G中所有 f 与C 中所有 c，$f*c$ 仍在C中，则C 中非等价的着色数 $N(G, C)$为：

$$N(G, C) = \frac{1}{|G|}\sum_{f\in G}|C(f)|$$

即，C中非等价的着色数等于在G中的置换作用下保持不变的着色的平均数。

计算$|C(f)|$的方法：

- ✓ 直接计算
- ✓ 循环因子分解

- 各颜色使用特定次数时的非等价着色数的计算
  - ✓ 循环因子分解 → 循环指数 → 生成函数

题型介绍

- 填空题（约10空，每空5分）
- 计算题、证明题