第5章 二项式系数

回顾：集合的组合

- $\boldsymbol{n}$元素集合的 $\boldsymbol{r}$ 子集的数目

$$\binom{n}{r} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{r}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!} = \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\ldots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})\ldots\mathbf{1}}$$

例: 有10位专家，从中选取5位构成专家小组，一共可构成多少个专家小组?

$\binom{10}{5}$个专家小组

例：$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

证明：

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

另一种证明方式：组合证明

问题：从 n 个不同的球中取出 k 个球，有多少种方法?

方法1：直接取，共有$\binom{n}{k}$种取法。

方法2：取出 n-k 个球丢弃，留下剩下的 k 个球，共有$\binom{n}{n-k}$种取法。

因此，得$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$。

组合证明

- 是一种依靠计数原理构建代数事实的证明方法
- 基本框架：
  1. 定义一个集合S；
  2. 通过一种计数方式得出 $|S|= n$；
  3. 通过另一种计数方式得出 $|S|= m$；
  4. 得出结论 $n = m$。

■ 二项式定理

令 n 是一个正整数, 那么对于所有的 x, y有:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \boxed{\binom{n}{k}} x^{n-k} y^k$$

二项式系数　　n元素集合的 r 子集的数目

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)\,!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k(k-1)\ldots1}}$$

本章的目的主要是讨论二项式系数一些相关等式和性质。

第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形

定理5.1.1(Pascal公式) 对于满足$1\le k\le n$的所有整数 k 和 n, 有

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

n元素集合的k子集的数目

n-1元素集合的k子集的数目

n-1元素集合的k-1子集的数目

设集合 $S=\{1, 2, \ldots, n\}$, S的k子集分为两类:

- ✓ 不包含1 的k子集 $\binom{n-1}{k}$个
- ✓ 包含1 的k子集 $\binom{n-1}{k-1}$个

（组合证明）

定理5.1.1(Pascal公式) 对于满足$1\le k\le n$的所有整数 k 和 n, 有

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

证明：设 S 的 k子集的集合为X，那么$|X|=\binom{n}{k}$。

设 x是 S的一个元素,

令A是不含 x 的 k 子集的集合,

B是包含 x 的 k 子集的集合,

那么，$X=A\cup B$, 且$A\cap B=\varnothing$。

由加法原理，$|X|=|A|+|B|$。

计算得：$|A|=\binom{n-1}{k}$，$|B|=\binom{n-1}{k-1}$

因此，$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$。证毕。

Pascal三角形

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$\binom{n}{k}$的规律

- 对角线上元素全为1
- 第一列上元素全为1
- 对角线以外各项都是其上一行的两项的和：
  - 直接上方的项
  - 直接上方的项的直接左邻的项

$$\binom{6}{2} = \binom{5}{2} + \binom{5}{1}$$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	1									…
1	1	1								…
2	1	2	1							…
3	1	3	3	1						…
4	1	4	6	4	1					…
5	1	5	$\boxed{10}$	10	5	1				…
6	1	6	$\boxed{15}$	20	15	6	1			…
7	1	7	21	35	35	21	7	1		…
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	…
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

n=9,10的两行分别是多少？

Pascal三角形

每一行相加:
(第n行)

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=2^1$$

$$\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4$$

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…
0	1									…
1	1	1								…
2	1	2	1							…
3	1	3	3	1						…
4	1	4	6	4	1					…
5	1	5	10	10	5	1				…
6	1	6	15	20	15	6	1			…
7	1	7	21	35	35	21	7	1		…
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

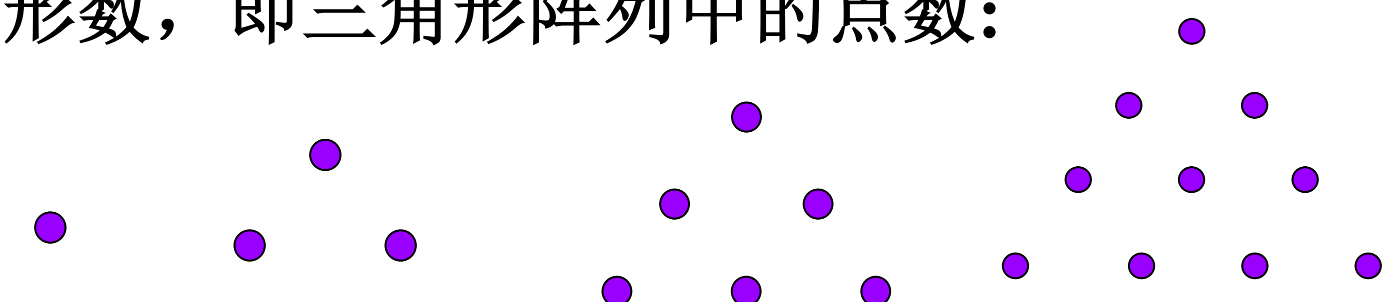
$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

第1列：

$$\binom{n}{1}=n$$

- 第2列是三角形数，即三角形阵列中的点数:

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$



1 n=2　　3 n=3　　6 n=4　　10 n=5

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

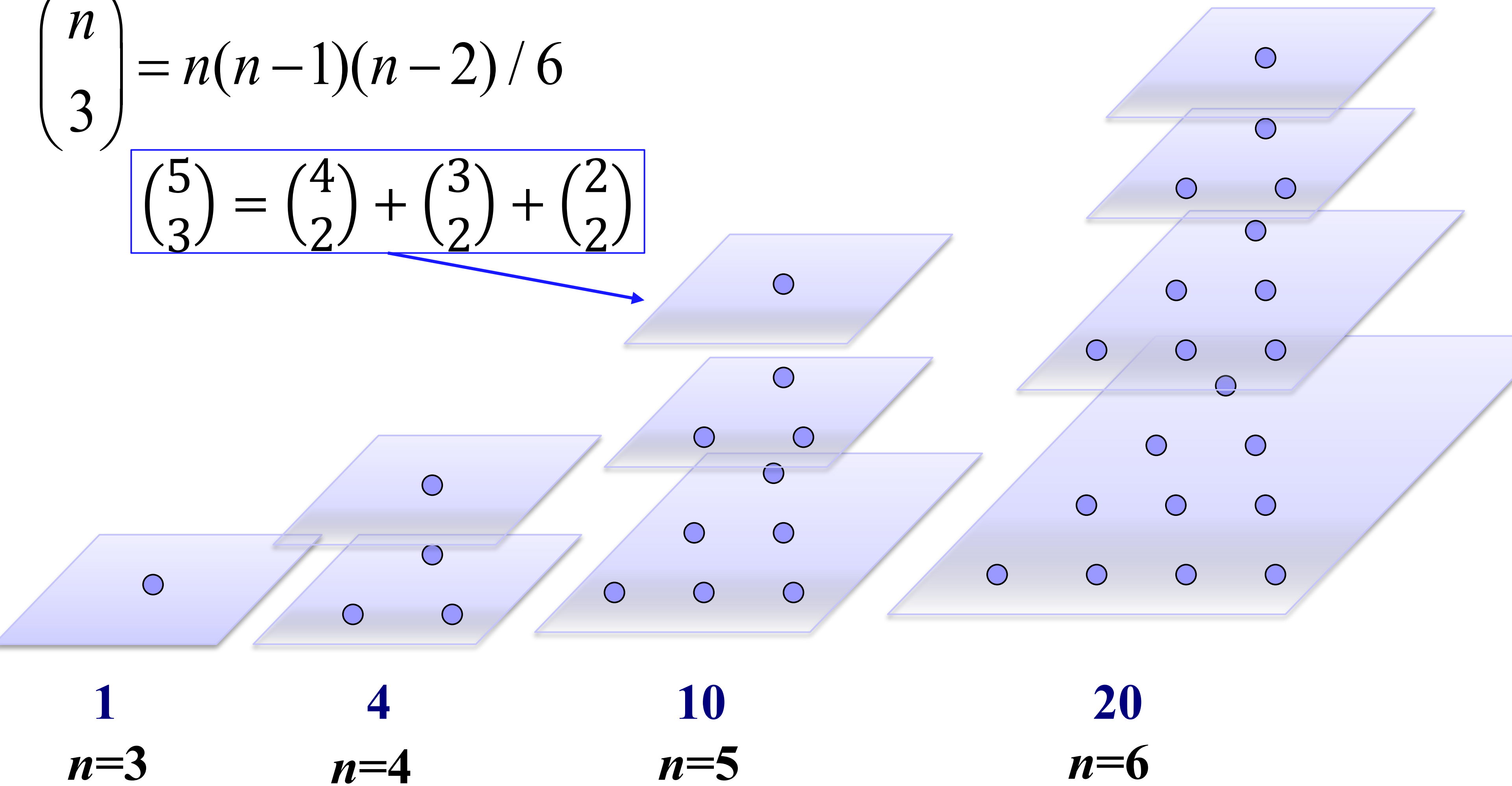
- 第3列是四面体数： $\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/6$

K=3

- 第3列是四面体数，即四面体阵列中的点数

$$\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2)/6$$

$$\boxed{\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}}$$



二项式系数的另一种组合解释

$p(n,k)$：从$\binom{0}{0}$项到$\binom{n}{k}$项的路径的数目

两种移动方向：

$p(n,0)=1$

$p(n,n)=1$

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

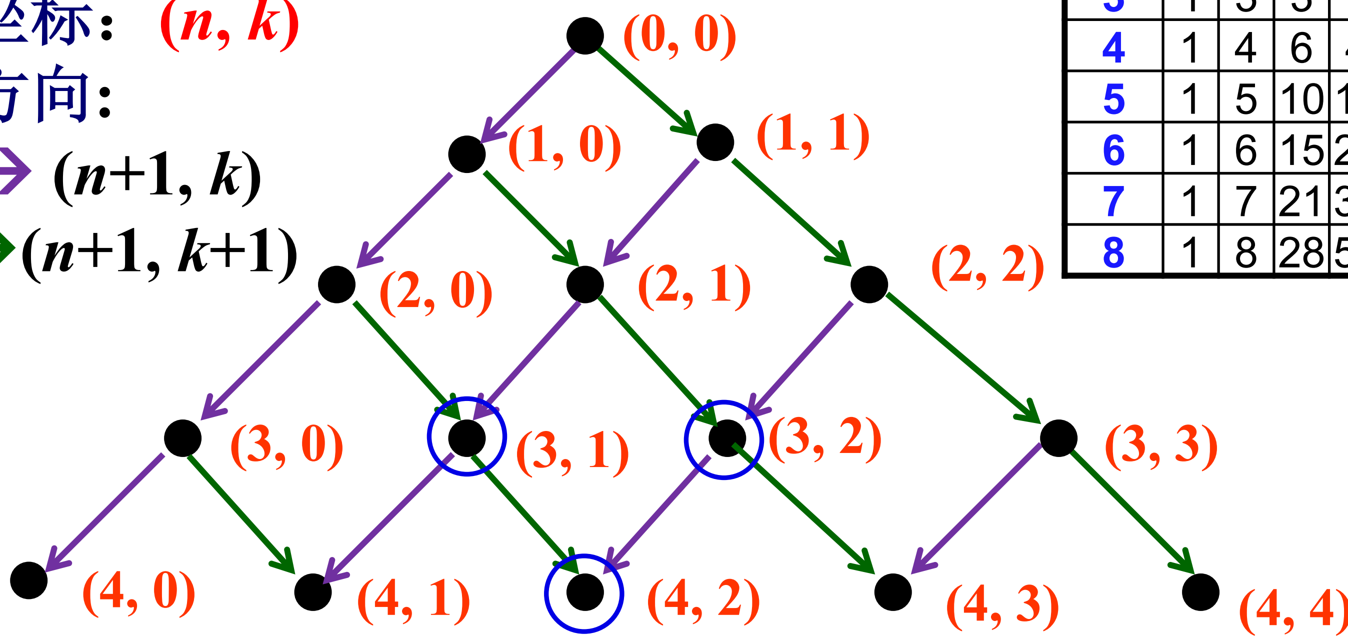
二项式系数的另一种组合解释

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

- 顶点坐标：(n, k)
- 移动方向：

$(n, k) \rightarrow (n+1, k)$

$(n, k) \rightarrow (n+1, k+1)$



令 $p(n, k)$ 表示从 $(0,0)$到 (n,k) 的路径数,

- 规定 $p(0, 0)=1$
- 由加法原理，$p(n, k) = p(n\text{-}1, k)+p(n\text{-}1, k\text{-}1)$, 其中， $n\geq 1$.

用数学归纳法可证 $p(n,k)=\binom{n}{k}$

第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形
5.2 二项式定理
5.3 二项式系数的单峰性
5.4 多项式定理
5.5 牛顿二项式定理

5.2 二项式定理

定理5.2.1 令n是一个正整数, 那么对于所有的x, y有：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

证明：（组合证明）将 $(x+y)^n$ 写成 n 个$x+y$ 因子的乘积形式： $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\ldots(x+y)$

用分配律将乘积展开，再合并同类项。

展开时，对于每个因子 $x+y$，或者选择 x，或者选择y，所以展开结果有2^n项，其中，每一项具有形式 $x^{n-k}y^k$, $k=0,1,\ldots,n$。

合并同类项时， $x^{n-k}y^k$的系数相当于在 n 项因子中选 k 个 y, 余下 n-k 项因子是 x ,

因此，等于组合数 $\binom{n}{k}$。

二项式定理的等价形式

令n是一个正整数，那么对于所有的x, y有：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$(y+x)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$$

定理5.2.1 令n是一个正整数, 那么对于所有的x, y有:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

例：用二项式定理求下列式子

(1) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ $=(1+2)^n = 3^n$

(2) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 3^{n-k}$ $=(3+(-1))^n = 2^n$

(3) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 9^{n-k}$ $=(9+(-1))^n = 8^n$

(4) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 9^k$ $=(1+9)^n = 10^n$

二项式定理及等价形式

令n是一个正整数, 那么对于所有的x, y有：

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k}$$

$(y+x)^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k$$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} x^{k} y^{n-k}$$

二项式系数的其他等式

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

- 例：n个人中选 k 人组成足球队，其中 一人为队长，有多少种不同选法?
  - 先选足球队，然后从足球队中选队长，选法数目为:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{1}=k\binom{n}{k}$$

  - 先选队长，再在剩下的n-1人中选k-1个足球队员,选法数目为:

$$\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1}$$

二项式系数的其他等式

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

例：证明下列等式：

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n,\ n \geq 0$$

方法 1：对二项式令 $x = y = 1$即得。

方法 2（组合证明）：

令 $S=\{1, 2, \ldots, n\}$, 如下构造 S 的子集：

对于每个 i，可放进子集，也可不放入；

一共有 2^n 种构造方法。

例：证明以下等式 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$，（$n\geq 0$）

$$\binom{n}{k}^2=\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

第一个n元素集合选 k 个，
第2个n 元素集合选 n-k 个，
一共从 2n 个元素中选 n个

关键：（加法原理）两个n元素集合相交为空。

例：证明以下等式 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$，（$n\geq 0$）

证明：设$A=\{1, 2, \ldots, n\}$, $B=\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$。

令$S=A\cup B$，S的n子集数是$\binom{2n}{n}$，其中，每个n子集含有A的元素为k个，含有B的元素为$n-k$个, $k=0,1,\ldots, n$。

令 C_k 是含有 k个A的元素的S的n子集的集合，

则 S的所有n子集可划分为 $C_0, C_1,\ldots, C_n$，有

$$\binom{2n}{n}=|C_0|+|C_1|+\ldots+|C_n|$$

其中，$|C_k|=\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}^2$。

因此，$\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$。

证毕。

二项式系数的其他等式

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

例：证明下列等式：

(1) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0,\ n \geq 1$

(2) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots = 2^{n-1},\ n \geq 1$

偶数个元素的子集的个数
= 奇数个元素的子集的个数

方法一：对二项式公式令 $x = 1, y = -1$即得。

方法二：组合证明 (2) 成立。

二项式系数的其他等式

例：证明下列等式：

偶数个元素的子集的个数
= 奇数个元素的子集的个数

$$(2)\ \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\ldots=2^{n-1},\ n\geq 1$$

证明：（组合证明）

设集合$S=\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}$是 n 元素集合，则可以把 S 的子集看成是以下选择过程：对每个 x_i 有两种选择：放入子集或不放入子集。

构造具有偶数个元素的子集时，$x_1,\ldots,x_{n-1}$中每个元素有2种选择，但 x_n只有一种选择：

- 当选择了$x_1,\ldots,x_{n-1}$中的偶数个，x_n不能被选择；
- 当选择了$x_1,\ldots,x_{n-1}$中的奇数个，x_n必须被选择。

因此，S的偶数个元素的子集个数为 2^{n-1}。

同理可证 S 的奇数个元素的子集个数为 2^{n-1}。证毕。

例：证明以下等式

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1},\ n\geq 1$$

证明：方法1

由 $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$ 得，

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}$$

$$=n\binom{n-1}{0}+n\binom{n-1}{1}+\ldots+n\binom{n-1}{n-1}$$

$$=n(\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\ldots+\binom{n-1}{n-1})=n2^{n-1}$$

例：证明以下等式

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1},\ n \geq 1$$

方法2 求导法

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{k}x^k + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

例：证明以下等式

$$1\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\ldots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1},\ n\geq 1$$

方法2 求导法

对等式

$$(1+x)^n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots+\binom{n}{k}x^k+\ldots+\binom{n}{n}x^n$$

两边对 x 求导得：

$$n(1+x)^{n-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+\ldots+k\binom{n}{k}x^{k-1}+\ldots+n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

取 $x=1$ 即得等式。

组合证明？

例：用求导法证明以下等式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}（n\geq 1）$$

证明：等式 $(1+x)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k$ 两边对 x 求导得

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1},$$

两边同乘 x 得， $nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^k$。

上式两边再对 x 求导数得

$$n(1+x)^{n-1} + nx(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^{k-1},$$

将 $x=1$ 代入得

$$n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

$$= n(n+1)2^{n-2}。$$

证毕。

- 证明等式的方法
  - 利用已有等式：帕斯卡公式
  - 求导法、积分法
  - 组合推理法

例：试给出下列等式的组合意义上的解释

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$$, 其中$r\le \min(m,n)$

证：假设有$m+n$个不同的球，其中m个是红色，n个是蓝色。

从中取出 r 个，一共有$\binom{m+n}{r}$种取法。

可分为以下$r+1$种情况：

假设取出的 r 种球中有i个红的，$r-i$个蓝的，$i=0, 1,\ldots, r$,

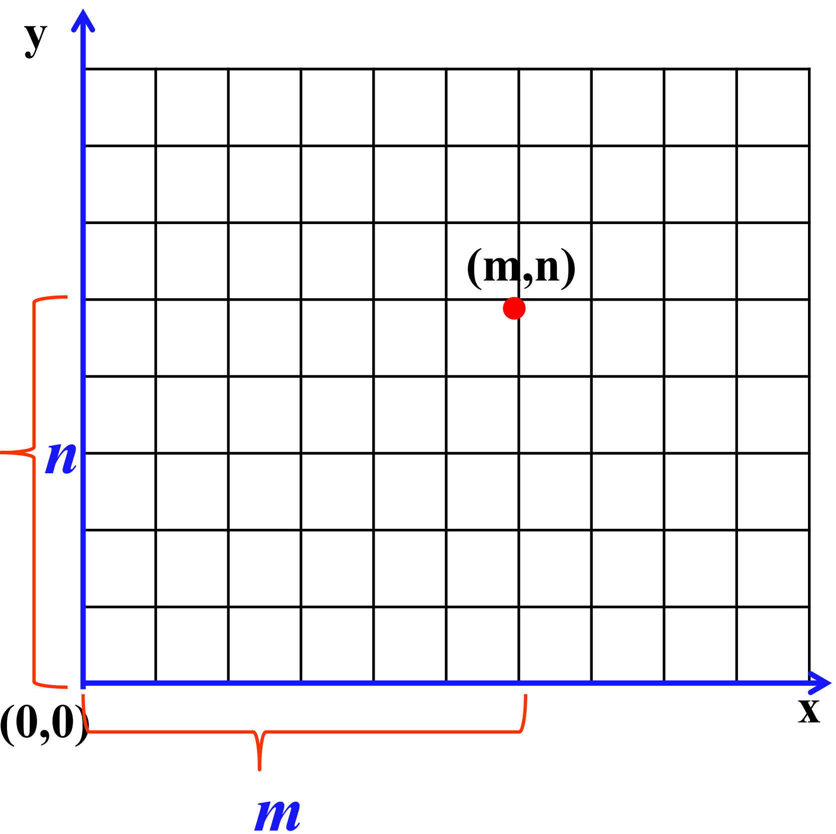
此时有$\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$种情况。

因此，有$\binom{m+n}{r}=\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$。

例：试给出下列等式的组合意义上的解释

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0},\text{其中} r\leq \min(m,n)$$

证: 如图所示建立二维坐标系(x, y)。



首先证明：按照向右、向上方向从点(0,0)到点(m,n)的路径条数为$\binom{m+n}{m}$。

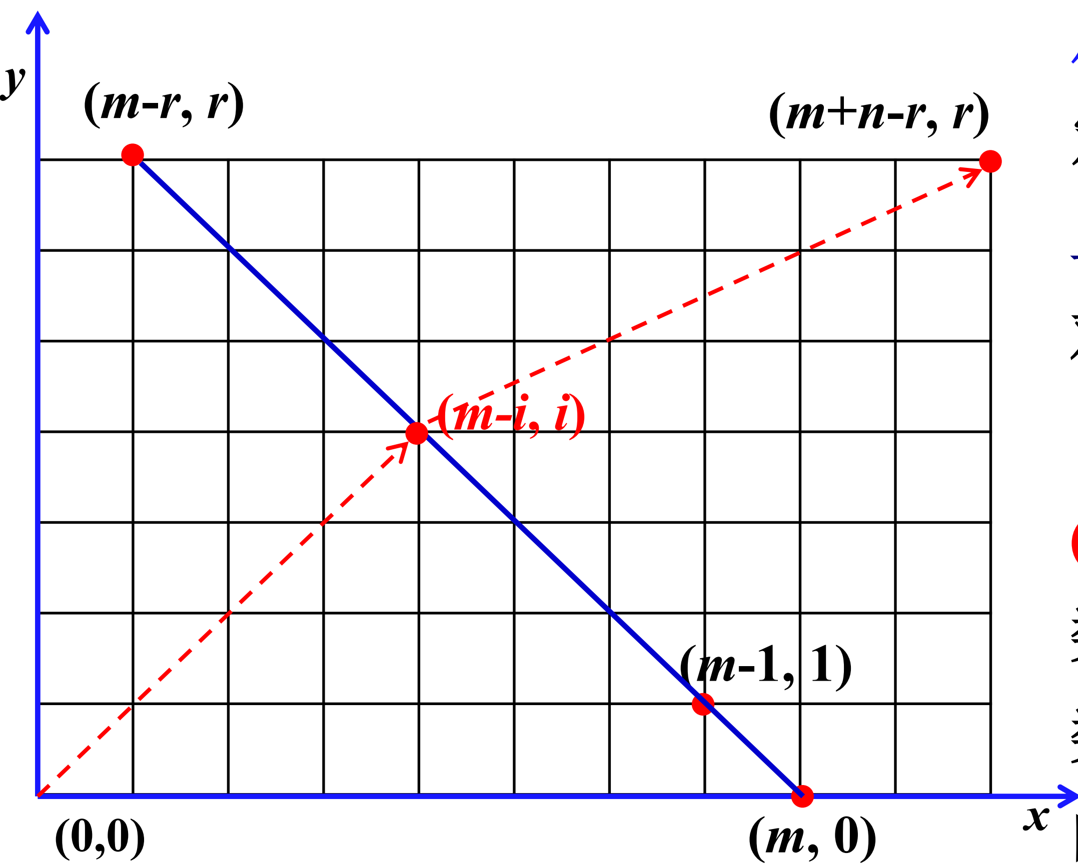
显然, 按照向右和向上方向，无论怎么走，只要向右共走了m步，向上共走了n步，经过$m+n$步到达(m, n)点。因此路径条数为$m+n$步中选择m步向右走的组合数，即 $\binom{m+n}{m}$。

因此，从点(0,0)到点$(m+n-r, r)$ 的路径条数为 $\binom{m+n}{r}$。

例：试给出下列等式的组合意义上的解释

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0},\text{ 其中}r\le\min(m,n)$$

证：（续）



如图所示，

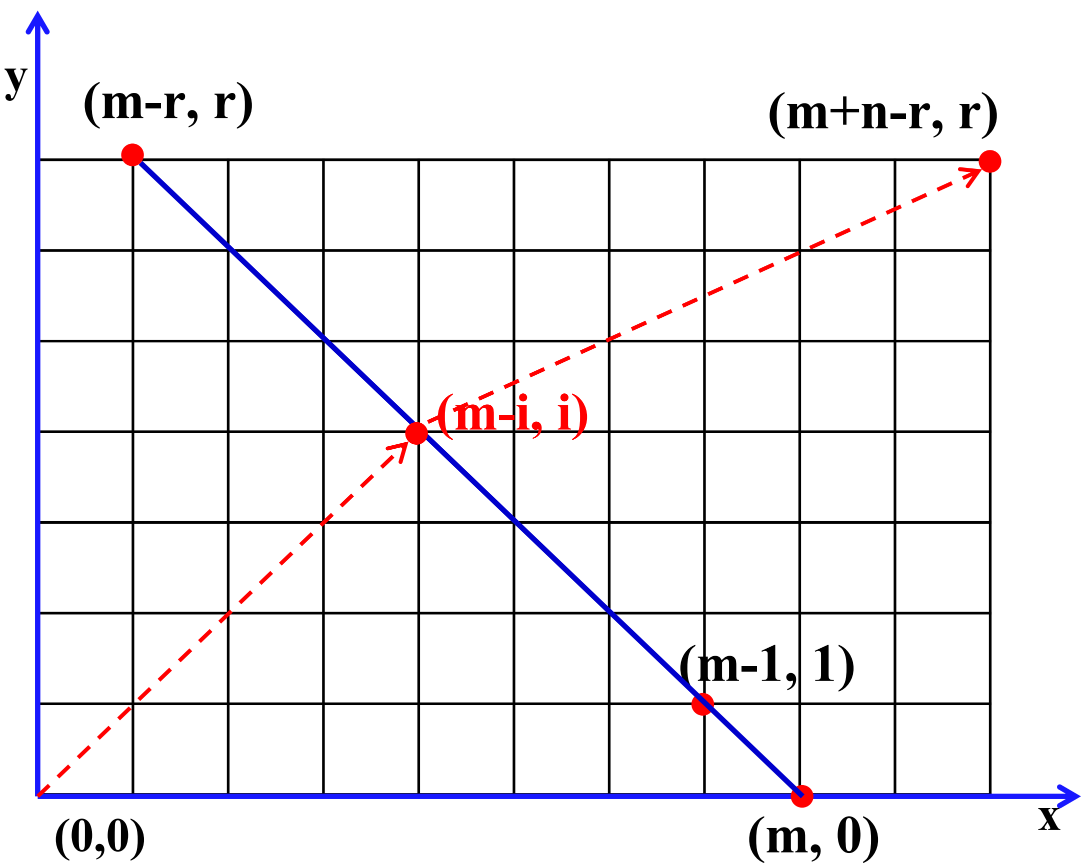
从(0,0)走到$(m+n-r, r)$的点一定经过从$(m,0)$到$(m-r,r)$线段上的点。

对该线段上任意一点$(m-i, i)$，由乘法原理知，从(0,0)通过$(m-i, i)$到$(m+n-r, r)$的路径条数为从(0,0)到$(m-i, i)$的路径数目与从$(m-i, i)$到$(m+n-r, r)$的路径数目的乘积。

例：试给出下列等式的组合意义上的解释

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$$, 其中r ≤ min(m, n)

证：（续）



从(0,0)到(*m-i, i*)的路径数目为$\binom{m-i+i}{i}=\binom{m}{i}$,

从(m-i, i)到(m+n-r, r)的路径数目为

$$\binom{m+n-r-(m-i)+(r-i)}{r-i}=\binom{n}{r-i},$$

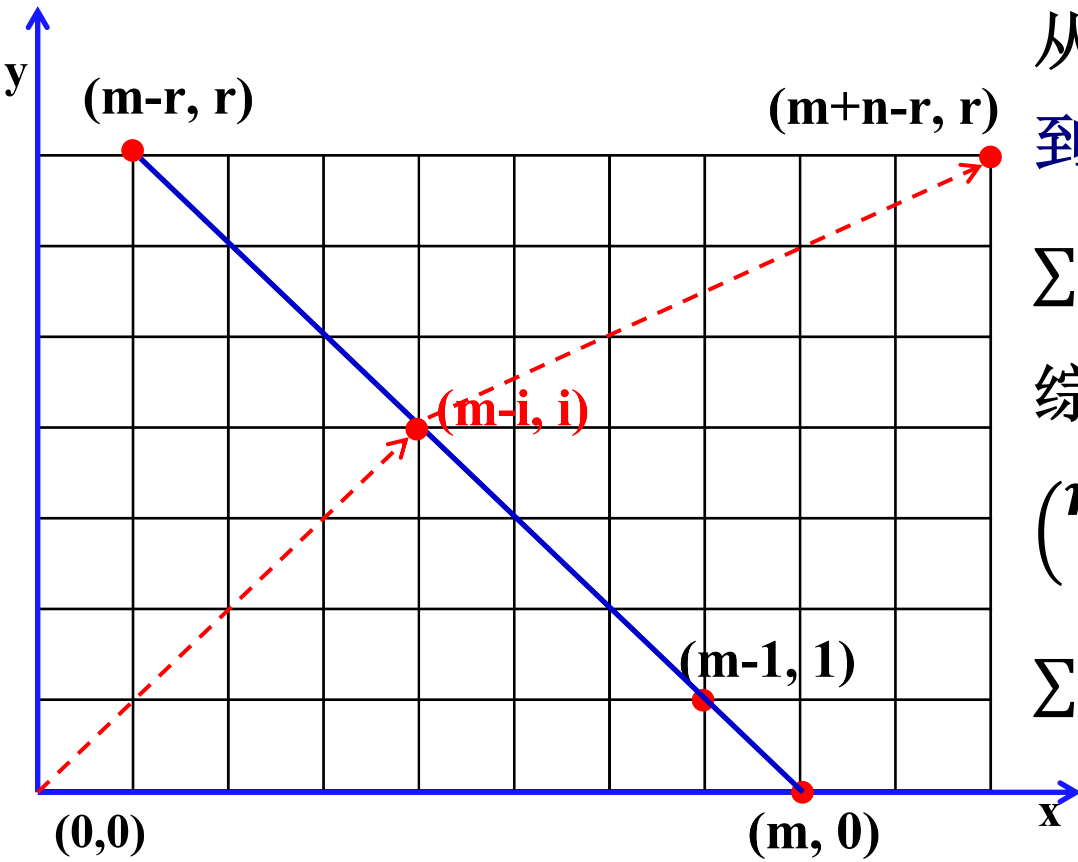
得从(0,0)通过(*m-i, i*)到(*m+n-r, r*) 的路径条数为

$$\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$$

例：试给出下列等式的组合意义上的解释

$$\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}, \text{其中} r\le \min(m, n)$$

证：（续）



从而，由加法原理得，从(0,0)到($m+n-r$, r)的路径数目为

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}。$$

综上所述，得

$$\binom{m+n}{r}=$$

$$\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}。$$

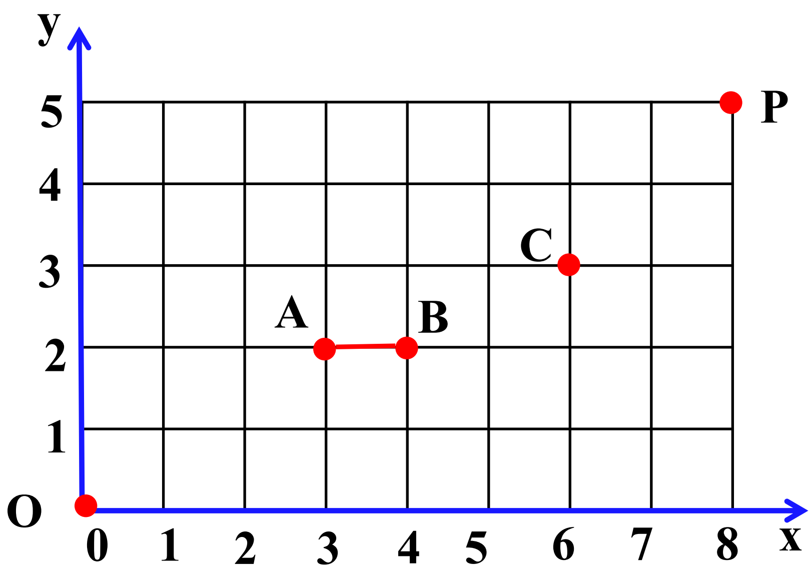
例：计算如图所示的从 O 点到 P 点的路径数。假设：

(1) 路径必经过 A 点

(2) 路径必过 AB 路径；

(3) 路径必过 A 和 C 点；

(4) 不通过 AB线（可以过 A 点和 B 点）



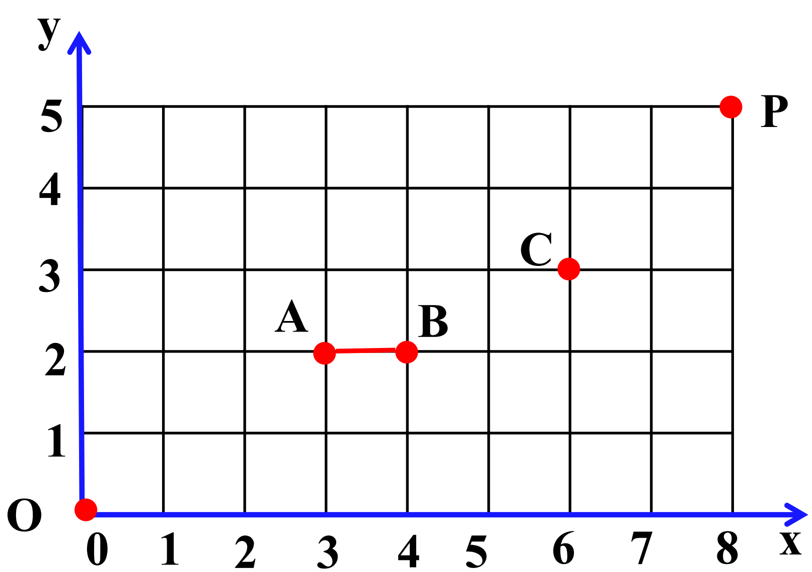
例：计算如图所示的从 O 点到 P 点的路径数。假设：

(1) 路径必经过 A 点

(2) 路径必过 AB 路径；

(3) 路径必过 A 和 C 点；

(4) 不通过 AB线（可以过 A 点和 B 点）



解: (1) $\binom{5}{2}\binom{8}{5}$

(2) $\binom{5}{2}\binom{7}{3}$

(3) $\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{2}$

(4) $\binom{13}{5}-\binom{5}{2}\binom{7}{3}$

组合定义扩展

$$\binom{n}{k}=\frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})}=\frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\ldots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}{\boldsymbol{k}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})}$$ ，$\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}$ 为非负整数

扩展： $\boldsymbol{n}$ 扩展为任意实数，

$\boldsymbol{k}$ 扩展为任意整数。

例：$\binom{\mathbf{5/2}}{\mathbf{4}}$，$\binom{-\mathbf{3.3}}{\mathbf{3}}$，$\binom{\mathbf{5/2}}{\mathbf{0}}$，$\binom{-\mathbf{3.3}}{-\mathbf{3}}$

组合定义扩展

令 r 可取任意实数，k 可取任意整数（正的、负的或零），定义二项式系数 $\binom{r}{k}$ 为

$$\binom{r}{k}=\begin{cases}\dfrac{r(r-1)\ldots(r-k+1)}{k!}, & 若 k\geq 1\\ 1, & 若 k=0\\ 0, & 若 k\leq -1\end{cases}$$

例：$\binom{5/2}{4}=\dfrac{\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{4!}=-\dfrac{5}{128}$

$$\binom{-3.3}{3}=\frac{(-3.3)(-4.3)(-5.3)}{3!}=-12.5345$$

$$\binom{5/2}{0}=1 \qquad \binom{-3.3}{-3}=0$$

组合定义扩展

- 扩展定义 $\binom{r}{k}$ 仍使Pascal公式成立。
- 令 r 可取任意实数, k可取任意整数，有

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}$$

$$k\binom{r}{k} = r\binom{r-1}{k-1}$$

根据定义验证即可。

第5章 二项式系数

回顾

- 二项式系数Pascal公式 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
- Pascal三角形 $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

二项式系数先递增后递减

5.3 二项式系数的单峰性

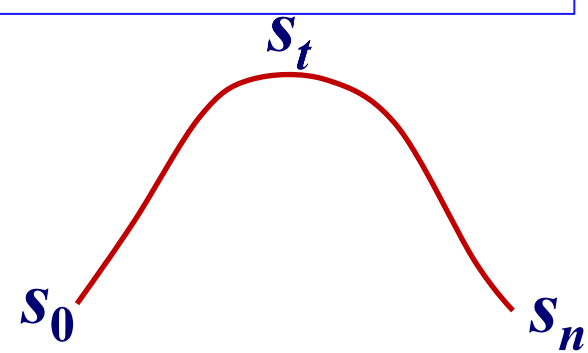
设序列$s_0,s_1,s_2,\ldots,s_n$, 若存在一个**整数** t, $0\le t\le n$, 使得:

$$s_0\le s_1\le s_2\le \ldots \le s_t,\quad s_t\ge s_{t+1}\ge s_{t+2}\ge \ldots \ge s_n$$

那么, 称序列是**单峰**的。

注意：1. s_t一定是序列中的最大数

2. t不一定是唯一的



例: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

$1\le 6\le 15\le 20,\ 20\ge 15\ge 6\ge 1$: $t=3$

1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

$1\le 7\le 21\le 35\le 35,\quad 35\ge 21\ge 7\ge 1$: $t=4$

$1\le 7\le 21\le 35,\quad 35\ge 35\ge 21\ge 7\ge 1$: $t=3$

二项式系数的单峰性

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

n为偶数

n为奇数

二项式系数的单峰性

定理5.3.1. 令n为正整数, 二项式系数序列是单峰序列, 其中,

- 若n是偶数:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \boxed{\binom{n}{n/2}, \binom{n}{n/2}} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

- 若n是奇数:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \boxed{\binom{n}{(n-1)/2}, \binom{n}{(n+1)/2}} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

证明：考虑连续两个二项式系数的商：

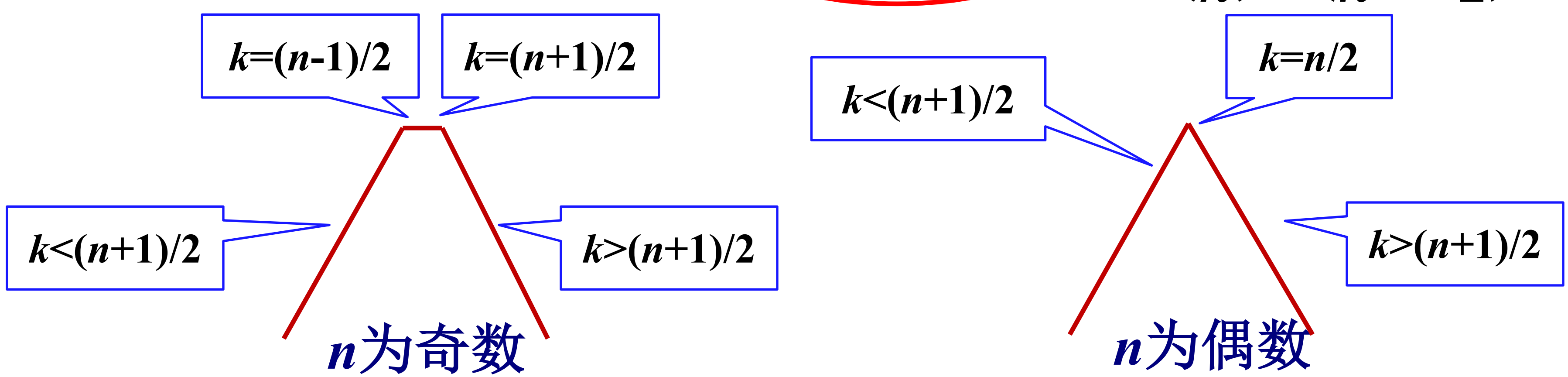
$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}=\frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}}=\frac{n-k+1}{k}$$

若$(n-k+1)/k>1$, 则$k<n-k+1$, $k<(n+1)/2$，得$\binom{n}{k}>\binom{n}{k-1}$

若$(n-k+1)/k<1$, 则$k>n-k+1$, $k>(n+1)/2$，得$\binom{n}{k}<\binom{n}{k-1}$

只有n为奇数时出现

若$(n-k+1)/k=1$, 则$k=n-k+1$, $k=(n+1)/2$，得$\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}$



设x为任意实数，令$\lceil x \rceil$表示大于或等于x的最小整数，称强取整(上取整)；$\lfloor x \rfloor$表示小于或等于x的最大整数，称弱取整(下取整).

例：$\lceil 5/2 \rceil=3$, $\lfloor 5/2 \rfloor=2$

推论5.3.2 二项式系数$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$的最大者是

✓$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} = \binom{n}{n/2}$（$n$为偶数时,）

✓$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} = \binom{n}{(n-1)/2} = \binom{n}{(n+1)/2}$（$n$为奇数时）

对定理5.3.1的扩展

定理5.3.1. 令n为正整数, 二项式系数序列是单峰序列, 其中,

- 若n是偶数:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{n/2}, \binom{n}{n/2} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

- 若n是奇数:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{(n-1)/2}, \binom{n}{(n+1)/2} > \ldots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

扩展:

- ✓ 由集合的子集的包含关系定义的链与反链
- ✓ 由包含关系推广到一般偏序

反链

令 S是 n 个元素的集合， S 上的一条反链（antichain）是S 的子集的一个集合A，其中 A中的子集不相互包含。

例：$S=\{a, b, c, d\}$,

$\{ \{a, b\}, \{b, c, d\}, \{a, d\}, \{a, c\} \}$是 S 的一条反链

$\{ \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{a, d\}, \{a, c\} \}$不是 S 的反链

问题：如何找出 S 的反链？

令$S=\{a, b, c, d\}$，以下集合均为 S 的反链

$A_0=\{\{\varnothing\}\}$

$A_1=\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}$

如果反链中包含不止一种大小的子集，是否可以包含更多的子集？

$A_2=\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$

$A_3=\{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$

$A_4=\{\{a, b, c, d\}\}$

- 令S为n个元素的集合，一个构造反链的方法：

选择一个整数 $k \le n$，取 A_k 为 S 所有的 k子集的集合。

该方法构成的反链最多含有$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$个子集。

问题：反链最多可包含多少个子集？

链

令 S是 n 个元素的集合， S 上的一条**链**（**chain**）是 S 的子集的集合C ，其中对于C 中的每一对子集，总有一个包含在另一个之中：

对任意 S_1， $S_2 \in C$ ，且$S_1 \neq S_2$，则 $S_1 \subset S_2$ 或者 $S_2 \subset S_1$

例： $S = \{a, b, c, d, e\}$，

$\{\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, e\}\}$ 是 S 的一条链，

$\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, d, e\}\}$ 是 S 的一条链。

最大链

最大链

令 S 是 n个元素的集合，S 上的最大链 C 定义为：

$$C = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\},$$

满足：

(1) $A_0 = \Phi \subset A_1 \subset A_2 \ldots \subset A_n$, 且

(2) $|A_i| = i$ $(i = 1, \ldots, n)$

n+1个子集

问题： 怎么构造最大链？

最大链的构造方法

(0) $A_0 = \Phi$

(1) 从 S 中选择一个元素i_1, 形成 $A_1=\{i_1\}$.

(2) 选择一个元素 $i_2 \neq i_1$, 形成 $A_2=\{i_1, i_2\}$.

(3) 选择一个元素 $i_3 \neq i_1, i_2$ 形成 $A_3=\{i_1, i_2, i_3\}$.

…

(k) 选择一个元素 $i_k \neq i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$ 形成 $A_k=\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$.

…

(n) 选择一个元素$i_n \neq i_1, \ldots, i_{n-1}$ 形成 $A_n=\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$.

- S上的最大链与 S 的排列一一对应
- 最大链的数目为 $n!$

链与反链的关系

S上的一条链与一条反链可否包含两个公共子集?

例：$S = \{a, b, c, d, e\}$,

$\{ \{a, b\}, \{\underline{a, b, c}\}, \{a, b, c, e\} \}$ 是 S上的一条链，

$\{\{\underline{a, b, c}\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{c, d, e\}$

是 S 上的一条反链。

- S上的一条链最多只能包含S的任意一条反链中的一个子集
- S上的一条反链最多只能包含S的任意一条链中的一个子集

反证法：设 C 是 S 的一条链，A是 S 的一条反链。

若 C 包含 A中两个子集 S_1和S_2，则 S_1与 S_2不存在包含关系，与 C是 S的一条链矛盾。

$|C \cap A| \leq 1$

定理 5.3.3. 设 S为 n个元素的集合，则 S上的一条反链最多包含$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$个子集。

证明：设 A是 S上的一条反链，S_1是 A中一个子集，且$|S_1|=k$，C 是包含 S_1 的最大链。

设 β 是 所有二元组(S_1, C)的个数，即

$$\beta = |\{(S_1, C) \mid S_1 \in A, C \text{ 是包含 } S_1 \text{ 的最大链}\}|$$

由于一个最大链最多只包含任意一个反链的一个子集。因此不存在两个元组(S_1, C)与(S_2, C)，其中S_1与S_2为反链 A的不同的子集，C是包含S_1，S_2的最大链。

但 S_1 可能 包含于多个最大链，（多少个?）

所以，β 不超过最大链的个数，即 $\beta \le n!$。

定理 5.3.3. 设 S为 n个元素的集合，则 S上的一条反链最多包含$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$个子集。

证: (续) 设反链A中大小为 k 的子集个数为 a_k，则

$$|A| = \sum_{k=0}^{n} a_k 。$$

设 A_k 为A中一个大小为 k 的子集，则包含 A_k的最大链最多为 $k!(n\text{-}k)!$ 个，

则包含A中大小为 k的子集的最大链最多为

$$a_k \cdot k!(n\text{-}k)!个。$$

因此， $\beta = \sum_{k=0}^{n} a_k k!\,(n-k)! \le n!$。

从而 $\sum_{k=0}^{n} a_k k!\,(n-k)!\,/n! \le 1$, 得$\sum_{k=0}^{n} a_k/\binom{n}{k} \le 1$。

定理 5.3.3. 设 S为 n个元素的集合，则 S上的一条反链最多包含$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$个子集。

因此， $\beta = \sum_{k=0}^{n} a_k k!\,(n-k)! \le n!$。

从而 $\sum_{k=0}^{n} a_k k!\,(n-k)!\,/n! \le 1$, 得$\sum_{k=0}^{n} a_k / \binom{n}{k} \le 1$。

由于$\binom{n}{k}$ 最大为$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$，得

$$(1/\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}) \sum_{k=0}^{n} a_k \le \sum_{k=0}^{n} a_k / \binom{n}{k} \le 1,$$

因此，$|A| = \sum_{k=0}^{n} a_k \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$。证毕。

定理 5.3.3. 设 S为 n个元素的集合，则 S上的一条反链最多包含$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$个子集。

- S的*k*子集构成的集合构成一条反链

例：S={1, 2, 3, 4, 5}, S上的一个最大反链为所有2子集构成的集合：

{ {1,2},{1,3},{1,4},{1,5},{2,3}, {2,4},{2,5}, {3,4}, {3,5}, {4,5} }

S的 3子集构成的集合也是S上的一个最大反链！

更强的结果

定理 5.3.3. 设S为n个元素的集合，则S上的的一条反链最多包含$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$个集合。

设S是为n个元素的集合，

- 如果n是偶数，则大小为$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$的唯一的反链是所有$n/2$子集的反链；
- 如果n是奇数，则大小为$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$的反链有两个：
  - ✓ 所有 (n-1)/2 子集构成的反链；
  - ✓ 所有 (n+1)/2 子集构成的反链。

链、反链的推广

- 集合的包含关系是偏序关系
- 把链、反链的概念推广到偏序集

令$(X, \leq)$是一个有限偏序集,

- ✓ 链是 X 的一个子集, 其中任意两个元素都是可比的,
- ✓ 反链是 X的一个子集, 其中任意两个元素都不可比.

令 $(X, \leq)$ 是一个有限偏序集,

- ✓ 反链是 X的一个子集, 其中任意两个元素都不可比;
- ✓ 链是 X的一个子集, 其中任意两个元素都是可比的.

例：设 $X=\{1, 2,\ldots, 10\}$, 考虑偏序集 $(X, |)$, 其中 | 为整除关系，即$a|b$表示 b 可被 a 整除。

反链A：A中任意两个不同的数a, b，$a\nmid b$且$b\nmid a$

链C：C中任意两个不同的数a, b,

或者$a \mid b$，或者$b \mid a$

{4，6，7，9，10}是一条反链

{1，2，4，8}是一条链

令 $(X, \leq)$ 是一个有限偏序集,

✓ 反链是 X的一个子集, 其中任意两个元素都不可比;

✓ 链是 X的一个子集, 其中任意两个元素都是可比的.

- 极小元：a 是偏序集的极小元当且仅当 X 中不存在满足 $x < a$ 的元素 x

  X 的所有极小元构成的子集是反链。

- 极大元：a 是偏序集的极大元当且仅当 X 中不存在满足 $x > a$ 的元素 x

  X 的所有极大元构成的子集也是反链。

定理5.6.1: 令$(X, \leq)$是一个有限偏序集, 并令 r 是最大链的大小, 则 X 可以被划分成 r 个反链，但不能划分为少于 r 个的反链。

证明：首先，证明：X 不能划分为少于 r 个的反链。

设 A是$(X, \leq)$的最大链，且 $|A|=r$。设 $A=\{a_1, \ldots, a_r\}$。

假设 X 划分为少于 r 个反链，

由鸽巢原理，至少存在一条反链至少包含最大链 A 中两个不同的元素，矛盾。

因此，假设不成立， 即X 不能划分为少于 r 个反链。

定理5.6.1: 令$(X, \leq)$是一个有限偏序集, 并令 r 是最大链的大小, 则 X 可以被划分成 r 个反链， 但不能划分为少于 r 个的反链.

证明: (续) 下面证明: X 可以被划分成 r 个反链。

X
$A_p = X_p = X_{p-1} - A_{p-1}$的极小元集
…
A_3: $X_3 = X_2 - A_2$的极小元集
A_2: $X_2 = X - A_1$的极小元集
A_1: X的极小元集

$X_p \neq \varnothing$， 而 $X_{p+1} = X_p - A_p = \varnothing$

此时， 得到 X的划分$A_1, A_2, \ldots, A_p$。

需要证明:

- 每个A_i 是反链， $i = 1, 2, \ldots, p$
- $p = r$

定理5.6.1: 令$(X, \leq)$是一个有限偏序集, 并令 r 是最大链的大小, 则 X 可以被划分成 r 个反链， 但不能划分为少于 r 个的反链.

证明: (续) 下面证明: X 可以被划分成 r 个反链。

$A_p = X_p = X_{p-1} - A_{p-1}$的极小元集

…

A_3: $X_3 = X_2 - A_2$的极小元集

A_2: $X_2 = X - A_1$的极小元集

A_1: X的极小元集

X

$X_p \neq \varnothing$， 而 $X_{p+1} = X_p - A_p = \varnothing$

此时， 得到 X的划分$A_1, A_2, \ldots, A_p$。

考虑任意 A_i, 由极小元的定义知，

对任意$a,b \in A_i$ 且$a \neq b$， a与b不可比。

因此， A_i 是X的一条反链，

故 $A_1, A_2, \ldots, A_p$是X的一条反链划分。

下面证明 $p = r$。

定理5.6.1: 令(X, ≤)是一个有限偏序集, 并令 r 是最大链的大小, 则 X 可以被划分成 r 个反链，但不能划分为少于 r 个的反链.

证明: (续) 下面证明: X 可以被划分成 r 个反链。

$A_p= X_p=X_{p-1}-A_{p-1}$的极小元集

…

A_3: $X_3 = X_2 - A_2$的极小元集

A_2: $X_2=X-A_1$的极小元集

A_1: X的极小元集

X

证明: (续) 因为 X不能划分为少于r个反链，故 $p\geq r$。

对于$A_1, A_2,\ldots, A_p$，满足:

对任意$a_i\in A_i$，一定存在$a_{i-1}\in A_{i-1}$，使得 $a_{i-1}< a_i$， $i=2,\ldots,p$。

得到 X的一个链： $a_1<a_2<\ldots<a_p$,

其中$a_i\in A_i$, $i= 1, 2, \ldots, p$.

由于r是最大链的大小，因此有 $p\leq r$。

故 $p=r$。证毕。

定理5.6.1: 令$(X, \leq)$是一个有限偏序集, 并令 r 是最大链的大小, 则 X 可以被划分成 r 个反链，但不能划分为少于 r 个的反链.

例： 设 $X=\{1, 2, \ldots, n\}$，考虑 X 的幂集 $\mathcal{P}(X)$ 在集合包含关系下构成的偏序集 $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$。

最大链：$\Phi \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \ldots \subset \{1,2,\ldots, n\}$

则 $\mathcal{P}(X)$ 可被划分成 $n+1$个反链:

问题： 证明中的极小元的集合是什么形式?

X 的 k 子集，$k=0, 1, \ldots, n$

定理5.6.2 令$(X, \leq)$ 是一个有限偏序集, 并令m是最大反链的大小, 则 X可以被划分成m个链，但不能划分成少于m个链。

证明：首先类似定理5.6.1的证明可证：X 不能划分为少于m 个链。

下面证明 X 可划分成 m个链。

对 X 中元素个数 n 进行归纳证明。

n=1时，X本身就是一个链，结论显然成立。

设 n >1，假设当$|X|<n$时结论成立。

（第二数学归纳法）

定理5.6.2 令$(X, \leq)$ 是一个有限偏序集, 并令m是最大反链的大小, 则 X可以被划分成m个链，但不能划分成少于m个链。

证明：（续）当$|X|= n$时，已知 X 的极大元集合与极小元集合一定是 X的反链，分两种情形讨论：

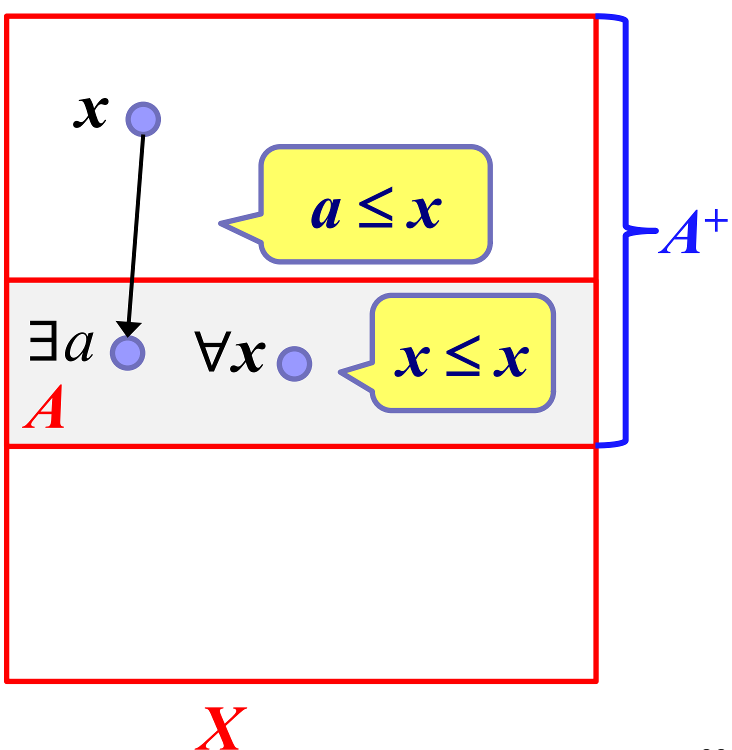
(1) 存在大小为 m 的反链 A，既不是 X 所有极大元的集合，也不是所有极小元的集合。

(2) 最多存在两个大小为 m的反链，即它们或者是所有极大元的集合和极小元的集合，或者是它们中的一个。

证明(续): (1) 存在大小为 m 的反链A，既不是 X 所有极大元的集合，也不是所有极小元的集合。

令 $A^+=\{x \mid x\in X$且存在 $a\in A$ 使得$a\le x\}$，(“上覆盖”)

即，A^+包含 X 中A的所有元素及在A中某个元素“之上”的所有元素组成的集合且A是A^+的极小元集合。



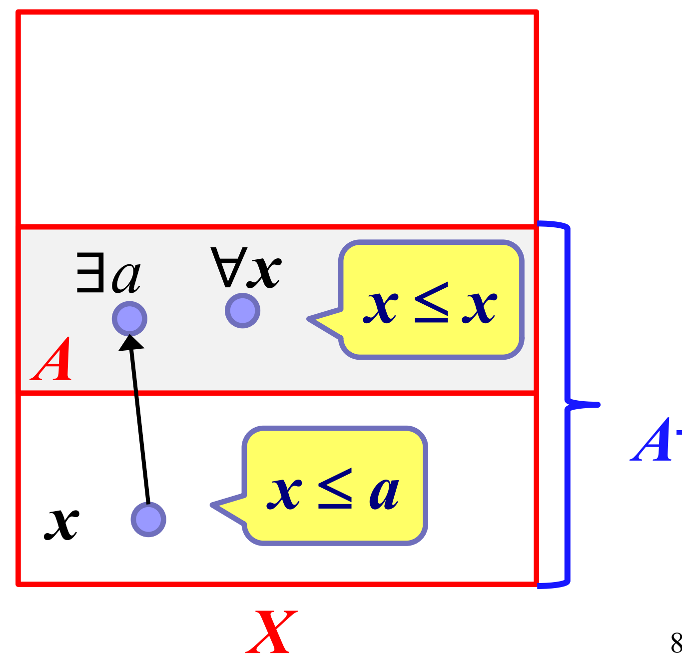
证明(续): (1) 存在大小为 m 的反链A，既不是 X 所有极大元的集合，也不是所有极小元的集合。

令 $A^+=\{x \mid x\in X$且存在 $a\in A$ 使得$a \le x\}$, (“上覆盖”)

即，A^+包含 X 中A的所有元素及在A中某个元素“之上”的所有元素组成的集合且A是A^+的极小元集合。

令$A^-=\{x \mid x\in X$且存在$a\in A$使得$x \le a\}$ (“下覆盖”)

即，A^-包含 X 中A 的所有元素及在 A 中某个元素“之下”的所有元素组成的集合；且A是A^-的极大元集合。



证明(续): (1) 存在大小为 m 的反链A，既不是 X 所有极大元的集合，也不是所有极小元的集合。

可验证以下性质：

$|A^+|<n$：因为存在不在 A中的 X 的极小元。

$|A^-|<n$：因为存在不在 A中的 X 的极大元。

$A^+\cap A^-=A$：若存在 $x\in A^+\cap A^-$, 但$x\notin A$,

$A\subseteq A^+\cap A^-$

则存在$a_1, a_2\in A$, 使得 $a_1< x <a_2$，与A是反链矛盾。

$A^+\cup A^-=X$：若存在 $x\in X$, 但 $x\notin A^+\cup A^-$,

$A^+\cup A^-\subseteq X$

则对任意 $a\in A$，$a\not\leq x$ 且 $x\not\leq a$，

得$A\cup\{x\}$是反链，与A是最大反链矛盾。

证明(续): 因为 $|A^+|<n$ ， $|A^-|<n$ ， 且A^+和A^-都包含长度为m的最大反链A,

由归纳假设知， A^+可划分为 m个链$E_1, E_2,\ldots, E_m$,

A^-可划分为 m个链$F_1, F_2,\ldots, F_m$ 。

由于$A^+\cap A^-=A$ 且A是反链,

因此对任意$a\in A$, 一定存在唯一的E_i和唯一的F_j, 使得

- $a \in E_i$ 且 $a \in F_j$, （每个链(反链)只能包含任意一个反链(链)中最多一个元素）
- E_i 中其他元素 x都满足 $a\leq x$, （A是A^+的极小元集）
- F_j 中其他元素 y 都满足$y\leq a$ 。 （A是A^- 的极大元集）

因此 E_i与F_j可以连接成一个的链 $E_i\cup F_j$ 。

同理可构成其他 m-1个链，构成了X 的划分。

证明(续): 因为 $|A^+|<n$， $|A^-|<n$， 且A^+和A^-都包含长度为m的最大反链A,

由归纳假设知， A^+可划分为 m个链$E_1, E_2,\ldots, E_m$,

A^-可划分为 m个链$F_1, F_2,\ldots, F_m$ 。

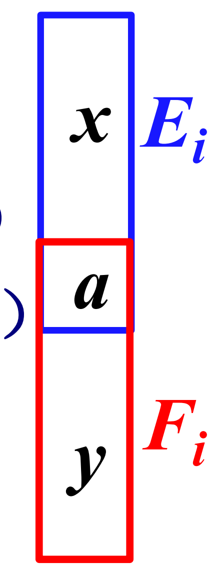
由于$A^+ \cap A^- = A$ 且A是反链,

因此对任意$a \in A$, 一定存在唯一的E_i和唯一的F_j, 使得

- $a \in E_i$ 且 $a \in F_j$, （每个链只能包含任意一个反链中最多一个元素）
- E_i中其他元素 x都满足 $a \le x$,（A是A^+的极小元集）
- F_j中其他元素 y 都满足$y \le a$ 。（A是A^-的极大元集）

因此 E_i与F_j可以连接成一个的链 $E_i \cup F_j$ 。

同理可构成其他 m-1个链，构成了X 的划分。



证明(续)：(2) 最多存在两个大小为 m 的反链，即它们或者是所有极大元的集合和极小元的集合，或者是它们中的一个。

令 x 是极小元，而 y 是极大元且 $x \leq y$ (x 可以等于 y)，此时$X\backslash\{x, y\}$的一条反链的最大的大小为 m-1。

由归纳假设，$X\backslash\{x, y\}$可以被划分为m-1个链。

这些链与链$\{x , y\}$一起构成了X 的一个划分。

证毕。

定理5.6.2 令$(X, \leq)$ 是一个有限偏序集, 并令m是最大反链的大小, 则X可以被划分成m个链，但不能划分成少于m个链。

定理5.3.3: 令 S为 n个元素的集合, 则 S的一条反链最多包含 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$个集合。

- S 的幂集 $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ 的最大反链大小为$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$
- S 的幂集 $\mathcal{P}(S)$ 可以被划分成 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个链。

问题：如何构造这个划分？对称链划分

对称链划分

设$S=\{1, 2,\ldots, n\}$，如果 S的幂集$\mathcal{P}(S)$的一个链划分满足以下两个条件，则称其是一个对称链划分：

(1) 链中每一个子集比它前面的子集的元素个数多 1；

(2) 链中第一个子集与最后一个子集的大小和等于 n。

如果这个链只含一个子集，那么这个子集既是第一个子集也是最后一个子集，所以其大小为$n/2$（此时，n为偶数）。

例：$S=\{1, 2, 3\}$的幂集

$$\mathcal{P}(S)=\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$$

的一个对称链划分：

$$C_1:\ \emptyset \subset\{1\} \subset \{1, 2\} \subset\{1, 2, 3\}$$

$$C_2:\ \{2\} \subset\{2, 3\}$$

$$C_3:\ \{3\} \subset\{1, 3\}$$

$\mathcal{P}(S)$的最长反链的长度为 3

对称链划分的构造方法

基本思路：将 S 的所有子集划分为 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个对称链。

令$S=\{1, 2, \ldots, n\}$，对n 进行归纳构造：

对于$n=k$时的每一个含多个子集的链 E，可构造 $n=k+1$时的两个链：

1. 对 E 增加如下子集：在 E 的最后一个子集中增加 $k+1$，构成一个新子集
2. 把$k+1$加到 E中除最后一个子集之外的所有子集，并删除最后一个子集

对于$n=k$时的每一个含多个子集的链 E，可构造 $n=k+1$时的两个链：

1. 对 E 增加如下子集：在 E 的最后一个子集中增加 $k+1$，构成一个新子集
2. 把$k+1$加到 E中除最后一个子集之外的所有子集，并删除最后一个子集

$n=1$时，$\varnothing \subset \{1\}$

$n=2$时，$\varnothing \subset \{1\} \subset \{1, 2\}$

$\{2\}$

$n=3$时，$\varnothing \subset \{1\} \subset \{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$

$\{3\} \subset \{1, 3\}$

$\{2\} \subset \{2, 3\}$

对于$n=k$时的每一个含多个子集的链 E，可构造$n=k+1$时的两个链：

1. 对 E 增加如下子集：在 E 的最后一个子集中增加$k+1$，构成一个新子集
2. 把$k+1$加到 E中除最后一个子集之外的所有子集，并删除最后一个子集

$n=3$时	$n=4$时
$\varnothing\subset\{1\}\subset\{1,2\}\subset\{1,2,3\}$	$\varnothing\subset\{1\}\subset\{1, 2\}\subset\{1, 2, 3\}\subset\{1,2,3,4\}$
	$\{4\}\subset\{1, 4\}\subset\{1, 2, 4\}$
$\{3\}\subset\{1,3\}$	$\{3\}\subset\{1, 3\}\subset\{1, 3, 4\}$
	$\{3, 4\}$
$\{2\}\subset\{2,3\}$	$\{2\}\subset\{2, 3\}\subset\{2, 3, 4\}$
	$\{2, 4\}$

设$S=\{1, 2, \ldots, n\}$，如果 S的幂集$\mathcal{P}(S)$的一个链划分满足以下两个条件，则称其是一个对称链划分：

(1) 链中每一个子集比它前面的子集的元素个数多 1；

(2) 链中第一个子集与最后一个子集的大小和等于 n。

如果这个链只含一个子集，那么这个子集既是第一个子集也是最后一个子集，所以其大小为$n/2$（此时，n为偶数）。

- 注意：
  - 对称链划分中的每一个链必须正好含有一个$\lfloor n/2 \rfloor$子集（也正好含有一个$\lceil n/2 \rceil$子集）
  - 对称链划分中的链的个数等于

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}=\binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$$

构造方法的正确性

归纳假设： 设集合{1, 2, …, $n-1$}的幂集有对称链划分。

任取一条对称链：

$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k$, 其中$A_i$的元素个数比$A_{i-1}$元素个数多1,

且$|A_1|+|A_k|=n-1$, $i=2, \ldots, k$, $k \geq 1$

构造{1, 2, …, n}的对称链 。

对$k \geq 1$分两种情况：

(1)若$k>1$, 可生成{1, 2,…, n}的两条链：

$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset A_k \cup \{n\}$; 和

$A_1 \cup \{n\} \subset A_2 \cup \{n\} \subset \ldots \subset A_{k-1} \cup \{n\}$

由$|A_1|+|A_k|=n-1$，得 $|A_1|+|A_k \cup \{n\}|=n$，

且 $|A_1 \cup \{n\}|+|A_{k-1} \cup \{n\}|=n$

(2)若 $k=1$, 生成$\{1, 2,\ldots, n\}$的 1条对称链:

$$A_k \subset A_k \cup \{n\}$$

由于 $|A_k|=(n-1)/2$，因此$|A_k|+|A_k \cup \{n\}|=n$.

综上，构造的链仍然是对称链。

注意到：$\{1, 2,\ldots, n\}$的任一个子集或者是 A 或者是 $A \cup \{n\}$的形式，其中A是$\{1, 2,\ldots, n-1\}$的一个子集。

那么，可以验证：$\{1, 2,\ldots, n\}$的每一个子集恰好出现在上面构造的某个对称链中，这些链构成了$\{1, 2, \ldots, n\}$所有子集的一个划分。

小结

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

- 二项式系数序列的单峰性
  - 最大值：$\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$
  - k-子集的个数的最大值
- n元集合S的链、反链(S的子集的集合)
  - 反链：k-子集、最大反链：所有$\lfloor n/2\rfloor$-子集
  - 链：对应 n元排列，$n!$ 个
- n元偏序集 $(X,\le)$的链、反链
  - 反链与最大链的大小
  - 链与最大反链的大小
  - 幂集的对称链的构造

第5章 二项式系数

5.1 帕斯卡三角形
5.2 二项式定理
5.3 二项式系数的单峰性
5.4 多项式定理
5.5 牛顿二项式定理

5.4 多项式定理

- 把二项式定理 $(x+y)^n$ 扩展到$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n$

- 多项式系数：

$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_t!}$, 其中 $n_1, n_2, \ldots n_t$是非负整数，且$n_1+n_2+\ldots+n_t=n$。

  - 表示重数分别为$n_1, n_2, \ldots n_t$的 t 种不同类型物品的多重集的排列数

二项式系数：$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, 可记为$\binom{n}{r\ n-r}$

多项式系数的帕斯卡公式

- 二项式系数的帕斯卡公式

$$\binom{n}{k\ \ n-k} = \binom{n-1}{k\ \ n-k-1} + \binom{n-1}{k-1\ \ n-k}$$

- 多项式系数的帕斯卡公式

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t} = \binom{n-1}{n_1-1\ n_2 \ldots n_t} + \binom{n-1}{n_1\ n_2-1 \ldots n_t} + \ldots + \binom{n-1}{n_1\ n_2 \ldots n_t-1}$$

多项式系数的帕斯卡公式

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t} = \binom{n-1}{n_1-1\ n_2 \ldots n_t} + \binom{n-1}{n_1\ n_2-1\ \ldots\ n_t} + \ldots + \binom{n-1}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_t-1}$$

组合证明：

设多重集 S 有 t个不同的元素$a_1, a_2, \ldots, a_t$，每个元素的重复数分别为$n_1, n_2, \ldots, n_t$，则 S的全排列一共有$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_t}$个。

假设全排列的第1个位置的元素为a_i, $1 \le i \le t$，此时S的全排列个数为 $\binom{n-1}{n_1 \ldots n_{i-1}\ n_i-1\ \ n_{i+1} \ldots n_t}$。

因此，等式成立。

定理 5.4.1. 设 n是正整数。对于所有的$x_1, x_2,\ldots, x_t$, 有

$$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1 n_1 \ldots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_t^{n_t}$$

其中求和是对$n_1+n_2+\ldots+n_t=n$的所有非负整数解$n_1, n_2, \ldots, n_t$进行的。（证明方法同二项式定理）

例. 确定在$(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)^{10}$的展开式中，$x_1^3x_2x_3^4x_5^2$的系数。

解: $x_1^3x_2x_3^4x_5^2$的系数为$\binom{10}{3\ 1\ 4\ 0\ 2} = \frac{10\,!}{3!4!2!}$

定理 5.4.1. 设 n是正整数。对于所有的$x_1, x_2,\ldots, x_t$，有

$$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1 n_1 \ldots n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_t^{n_t}$$

其中求和是对$n_1+n_2+\ldots+n_t=n$的所有非负整数解$n_1, n_2, \ldots, n_t$进行的。（证明方法同二项式定理）

例. 证明：$\sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1 n_2 n_3} (-1)^{n_1-n_2+n_3} = (-3)^n$

证明：$(-3)^n = ((-1)+(-1)+(-1))^n$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1 n_2 n_3} (-1)^{n_1} (-1)^{n_2} (-1)^{n_3}$$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1 n_2 n_3} (-1)^{n_1} (-1)^{-n_2} (-1)^{n_3}$$

$$= \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \binom{n}{n_1 n_2 n_3} (-1)^{n_1-n_2+n_3}$$

第5章 二项式系数

5.5 牛顿二项式定理

1676年牛顿把二项式定理进行扩展：

定理5.5.1: 令 α 是一个实数, 对于所有满足 $0 \le |x| < |y|$ 的变量 x, y 有

$$(x+y)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k y^{\alpha-k}$$

其中, $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$

- 如果 α 是整数 n，那么对于$k>n$, $\binom{n}{k} = 0$，上述式子即为二项式定理：

$$(x+y)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

关于牛顿二项式定理注记

- 牛顿二项式定理是二项式无穷级数展开式。可通过“泰勒级数”展开式证明。
- 可以用于计算一些无理数的精确值，如平方根。
- 主要用于第7章中生成函数。

牛顿二项式的等价形式

定理5.5.1: 令 α 是一个实数, 对于所有满足 $0\le |x| < |y|$ 的变量 x , y有

$$(x+y)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{k}y^{\alpha-k}$$

其中, $\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$

令 $z=\frac{x}{y}$ （此时，$|z|<1$ ）得 $(x+y)^{\alpha}=(zy+y)^{\alpha}=y^{\alpha}(z+1)^{\alpha}$。

则牛顿二项式定理可以等价地转述成:

对满足 $|z|<1$ 的任意 z， 有

$$(1+z)^{\alpha}=\frac{(x+y)^{\alpha}}{y^{\alpha}}=(1+\frac{x}{y})^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(\frac{x}{y})^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^{k}$$

牛顿二项式的等价形式

对满足 $|z|<1$ 的任意 z， 有 $(1+z)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}z^k$

令 $\alpha=-n$, 则有 $(1+z)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}z^k$,

由于 $\binom{-n}{k}=\frac{-n(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!}$

$$=(-1)^k\cdot\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}=(-1)^k\cdot\binom{n+k-1}{k}$$

因此，当 $|z|<1$时，$(1+z)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}z^k$

对满足$|z|<1$的任意z，有$(1+z)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k-1}{k}z^k$

- $n=1$时，得

$$\frac{1}{1+z}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k \quad (|z|<1)$$

- 用$-z$代替z，得

$$(1-z)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}z^k \quad (|z|<1)$$

$n=1$时，得 $\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k \quad (|z|<1)$

组合推理： $(1-z)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k \quad (|z|<1)$

$$(1-z)^{-n} = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} \cdots \frac{1}{1-z}$$

$$= (1+z+z^2+\ldots) \ldots (1+z+z^2+\ldots) \quad (n\text{个因子})$$

假设从第1个因子取 z^{k_1},从第2个因子取 z^{k_2} …, 从第n个因子取 z^{k_n}， 且$k_1+\ldots+k_n=k$, 其中 $k_1,\ldots,k_n$为非负整数。因此得到 z^k 的不同方法等于$k_1+\ldots+k_n=k$ 的非负整数解的个数，即$\binom{n+k-1}{k}$。

因此等式成立。

应用：求解任意精度的平方根

令 α =1/2，有$\binom{\alpha}{0}=1$。对于k>0有

$$\binom{\alpha}{k}=\binom{1/2}{k}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\frac{1\times 2\times 3\times 4\times\cdots\times(2k-3)\times(2k-2)}{2\times 4\times\cdots\times(2k-2)\times(k!)}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{k\times 2^{2k-1}}\frac{(2k-2)!}{(k-1)!^2}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}}{k\times 2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}$$

$$\sqrt{20}=\sqrt{16+4}=4\sqrt{1+0.25}$$
$$=4\left(1+\frac{1}{2}(0.25)-\frac{1}{8}(0.25)^2+\frac{1}{16}(0.25)^3-\cdots\right)$$
$$=4.472\cdots$$

因此, 对$|z|<1$, 有

$$\sqrt{1+z}=(1+z)^{1/2}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\times 2^{2k-1}}\binom{2k-2}{k-1}z^k$$

$$=1+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2\times 2^3}\binom{2}{1}z^2+\frac{1}{3\times 2^5}\binom{4}{2}z^3-\cdots$$

总结

- 帕斯卡三角形
  - 帕斯卡公式、
- 二项式定理
  - 二项式系数相关等式的证明
    - 利用已有公式化简
    - 求导法、积分法
    - 组合证明（推理）
- 二项式系数的单峰性
  - 链、反链
  - 链划分、反链划分
- 多项式定理、牛顿二项式定理