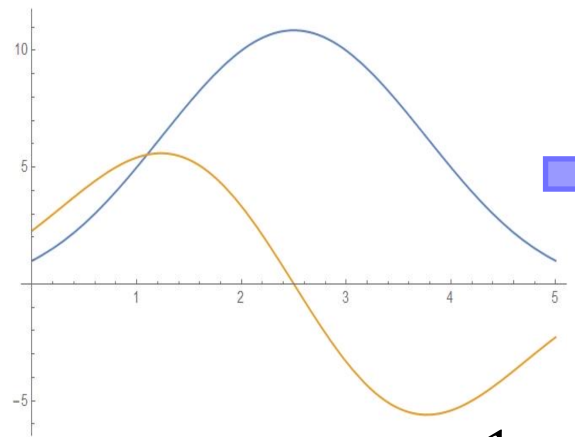
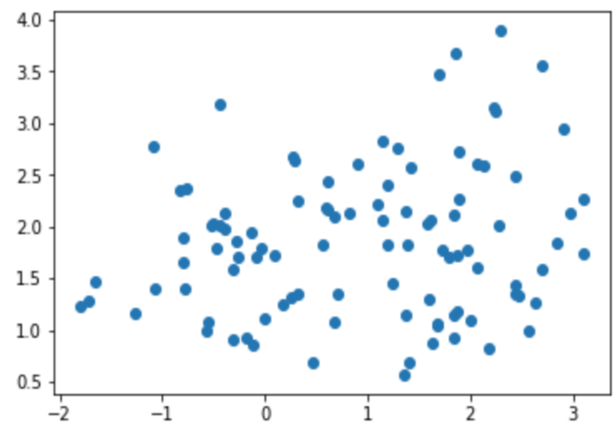
第七章 递推关系和生成函数

Recurrence-Relation & Generating function

生成函数：函数与序列间桥梁





多重集
$\{n_1 \cdot a_1, \ldots, n_k \cdot a_k\}$
排列数
组合数 h_n

函数：$\dfrac{1}{(1-x)^k}$

序列：$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

幂级数：$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

生成函数（也称母函数）核心思想：
（1）把离散数列和幂级数一一对应起来，
把离散数列间的相互结合关系对应成为幂级数间的运算关系
（2）由幂级数形式来确定 离散数列 的构造

知识谱系1

第2章
$\binom{n+k-1}{n}$,
$n_i \geq n, i=1, 2, \ldots, k$

所有$n_i \geq n$

多重集$\{n_1 \cdot a_1, \ldots, n_k \cdot a_k\}$的
n 组合数 h_n

$\exists n_i < n$

第6章
容斥原理

e_i是n组合中a_i
出现的次数,

h_n： 方程 $e_1+e_2+\ldots+e_k=n$ 的
非负整数解个数, $e_i \leq n_i$, $i=1,\ldots, k$

n组合中
a_i的出现
次数e_i有约束
$\exists n_i < n$

$n_i=\infty$,
$i=1, \ldots, k$

数列 $h_0, h_1,\ldots,h_n\ldots$的生成函数：

$g(x) = h_0 + h_1x + h_2x^2 + \ldots + h_nx^n\ldots$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n = \frac{1}{(1-x)^k}$

$= (\sum_{e_1=0}^{\infty} x^{e_1})(\sum_{e_2=0}^{\infty} x^{e_2})\ldots(\sum_{e_k=0}^{\infty} x^{e_k})$

$= \sum_{e_1+\cdots+e_k=n=0}^{\infty} x^{e_1}x^{e_2}\ldots x^{e_k}$

$\sum_{e_k=0}^{\infty} x^{e_i}$

奇数次 $x^1+x^3+x^5+\cdots$

偶数次 $x^0+x^2+x^4+\cdots$

至少3次 $x^3+x^4+x^5+\cdots$

最多3次 $x^0+x^1+x^2+x^3$

牛顿二项式定理的等价形式（第5章）
$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k$

知识谱系2

多重集$\{n_1\cdot a_1,\dots, n_k\cdot a_k\}$的 n 排列数 h_n

$n_1+\dots+n_k=n$

第2章

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}$$

$n_1+\dots+n_k<n$

$h_0, h_1, h_2,\dots, h_k\dots$的指数生成函数 $g^{(e)}$为:

$$g^{(e)}(x)=h_0+h_1x+h_2\frac{x^2}{2!}+\dots+h_n\frac{x^n}{n!}+\dots$$

$$=f_{n_1}(x)\,f_{n_2}(x)\dots f_{n_k}(x)$$

$$f_{n_i}(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{n_i}}{n_i!},\ i=1,\dots,k$$

n排列中a_i的出现次数有约束

$$f_{n_i}(x)=\sum_{e_k=0}^{\infty}\frac{x^{n_i}}{n_i!}$$

奇数次

$$x^1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

偶数次

$$x^0+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

至少3次

$$\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

最多3次

$$x^0+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

$$e^{-x}==1-x+\frac{x^2}{2!}+\dots+(-1)\frac{x^n}{n!}+\dots$$

$$\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^{2n}}{2n!}+\dots$$

$$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots$$

知识谱系3

数列 $h_0, h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$

通项 h_n

递推关系

斐波那契数列 f_n:
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ n \geq 2,\ f_0 = 0,\ f_1 = 1$

错位排列 D_n:
$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}),\ n \geq 2$
$D_0 = 0,\ D_1 = 1$

常系数线性齐次递推关系:
$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_k h_{n-k} \quad (n \geqslant k)$

常系数线性非齐次递推关系:
$h_n = a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} + \dots + a_k h_{n-k} + b_n \quad (n \geqslant k)$

求解通项 h_n

特征方程

生成函数

第七章 递推关系和生成函数

Recurrence-Relation & Generating function

7.1 若干数列
7.2 生成函数 Generating function
7.3 指数生成函数
7.4 求解线性齐次递推关系
7.5 非齐次递推关系
7.6 一个几何例子

回顾：错位排列计数公式的递推关系

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

递推关系

(1) $D_n=(n-1)(D_{n-2}+D_{n-1})$, $(n=3, 4,\ldots)$

(2) $D_n=nD_{n-1}+(-1)^n$ ， $(n=2, 3, \ldots)$

7.1 (1) 数列–定义回顾

- 设 $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$表示一个数列，
  - ✓ 其中 h_n 叫做数列的一般项或通项

例如：算术数列（等差数列）：

$$h_0, h_0+q, h_0+2q, \ldots, h_0+nq, \ldots$$

- ✓ 递推关系：$h_n = h_{n-1}+q$
- ✓ 一般项：$h_n = h_0+nq$
- ✓ 前n+1项和：$s_n = (n+1)h_0+qn(n+1)/2$

7.1 （1）数列–定义回顾

- 设 $h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots$表示一个数列，
  - ✓ 其中 h_n 叫做数列的一般项或通项

例如：几何数列（等比数列）：

$$h_0, qh_0, q^2h_0, \ldots, q^nh_0, \ldots$$

- ✓ 递推关系：$h_n = qh_{n-1}$ （$n \geq 1$）
- ✓ 一般项：　$h_n = q^nh_0$ （$n \geq 0$）
- ✓ 前n+1项和：$s_n = h_0(1-q^{n+1})/(1-q)$

7.1 （1）数列–举例

例：算术数列(等差数列)举例

(1) $h_0=1, q=2$: 1, 3, 5, …, $1+2n$

正奇整数数列：$h_n=1+2n, n\geq 0$

(2) $h_0=4, q=0$: 4, 4, 4,…, 4,…

每一项都等于4的常数数列： $h_n=4, n\geq 0$

(3) $h_0=0, q=1$: 0, 1, 2, …, n,..

非负整数数列: $h_n=n, n\geq 0$

例：几何数列(等比数列)举例

(1) $h_0=1, q=2$: 1, 2, 2^2, …, 2^n, …

n元集合的子集数: $h_n=2^n$, $n\geq 0$

(2) $h_0=5, q=3$: 5, $3\cdot 5$, $3^2\cdot 5$,…, $3^n\cdot 5$,…

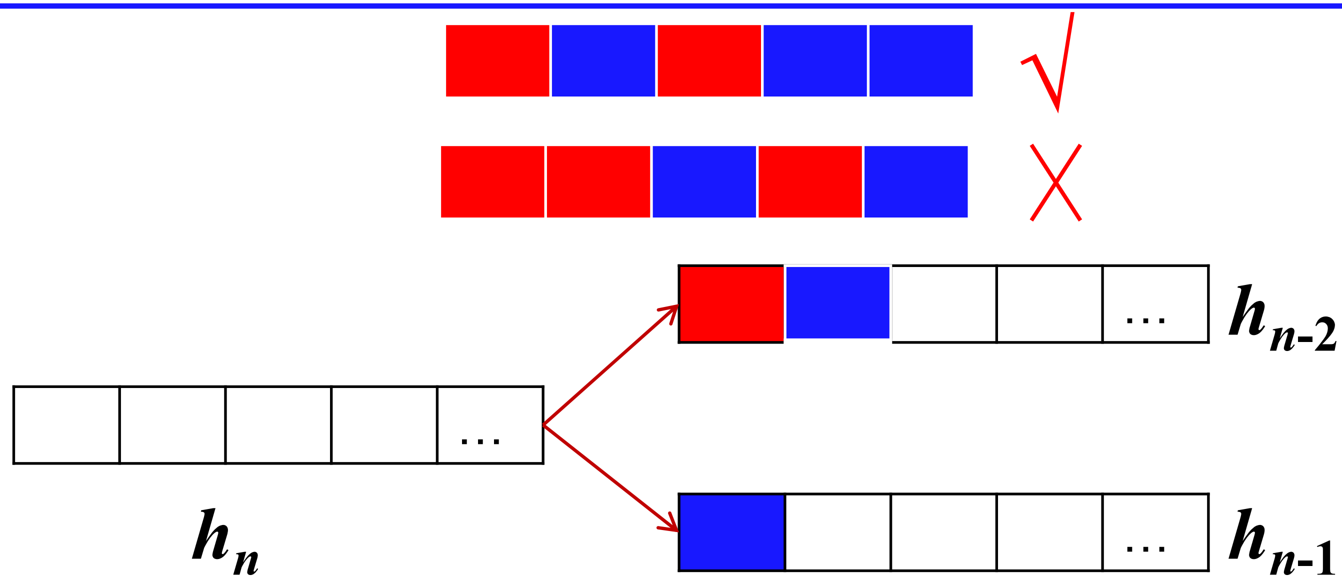
$h_n= 3^n\cdot 5, n\geq 0$

7.1 序列的两个内容

- **(2)求递推式**
- **(3)斐波那契（Fibonacci）序列**

7.1 (2)序列的递推:实例

例1: 考虑1行 n列棋盘。假设用红和蓝两种颜色给这个棋盘的每一个方格着色。设 h_n是使得没有两个着成红色的方格相邻的着色方法数。求h_n满足的递推关系。

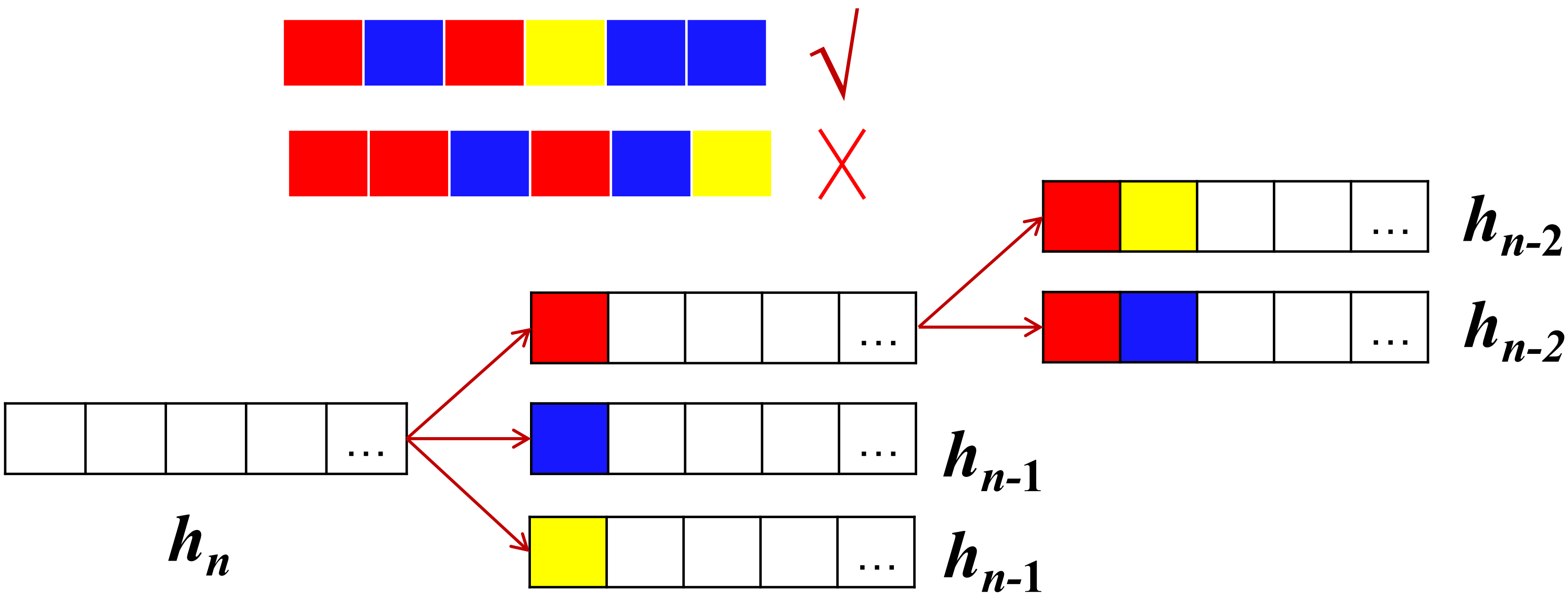


h_n满足的递推关系为：$h_n=h_{n-1}+h_{n-2}\ (n \geq 3)$

$h_1=2,\ h_2=3$

7.1 (2)序列的递推：实例

例2：设h_n等于1行n列棋盘的方格能够用红、黄和蓝三种颜色着色并使得没有着成红色的方格相邻的着色方法数。求出并验证h_n满足的递推关系。



$h_n=2h_{n-1}+2h_{n-2}$,

$h_1=3$, $h_2= 4+2=6$

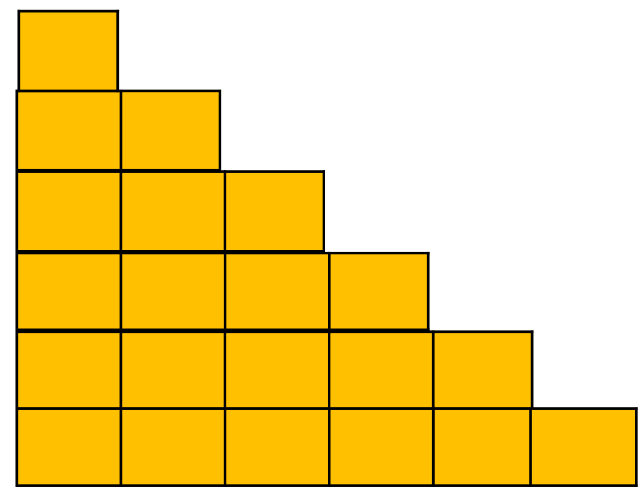
7.1 (2)序列的递推:练习

例：有n个台阶，某人每步上一个台阶或两个台阶，求上n个台阶的方案数的递推公式。

解：设h_n是上n个台阶的方案数。

共有两类方案：

- ✓ 第一步上一个台阶：h_{n-1}
- ✓ 第一步上两个台阶：h_{n-2}



因此，满足的递推关系

$$h_n=h_{n-1}+h_{n-2}\ (n\geq 3)$$

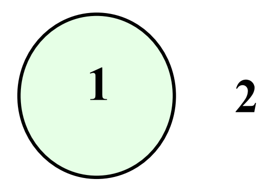
$$h_1=1,\ h_2=2$$

7.1 (2)序列的递推:练习

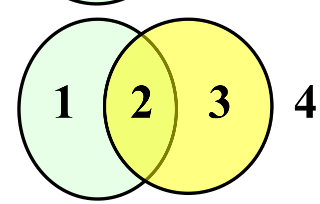
例3. 确定平面一般位置上的 *n*个互相交叠的圆所形成的区域数，其中

- 互相交叠是指每两个圆相交在不同的两个点上;
- 一般位置是指不存在有一个公共点的三个圆。

解：用h_n表示平面一般位置上的n个互相交叠的圆所形成的区域数。



$h_0=1$：一个区域即一个平面

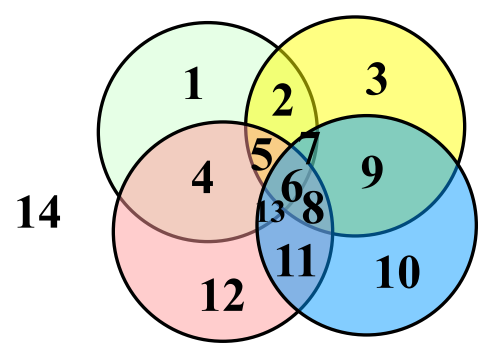


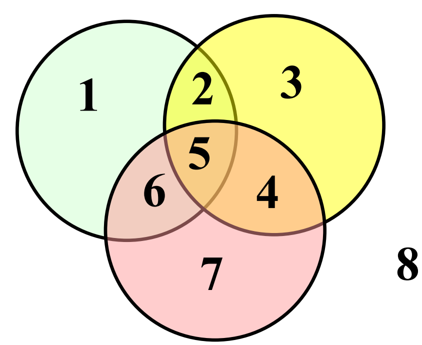
$h_1=2$：圆内区域和圆外区域

$h_2=4$

$h_3=8$

$h_4=14$



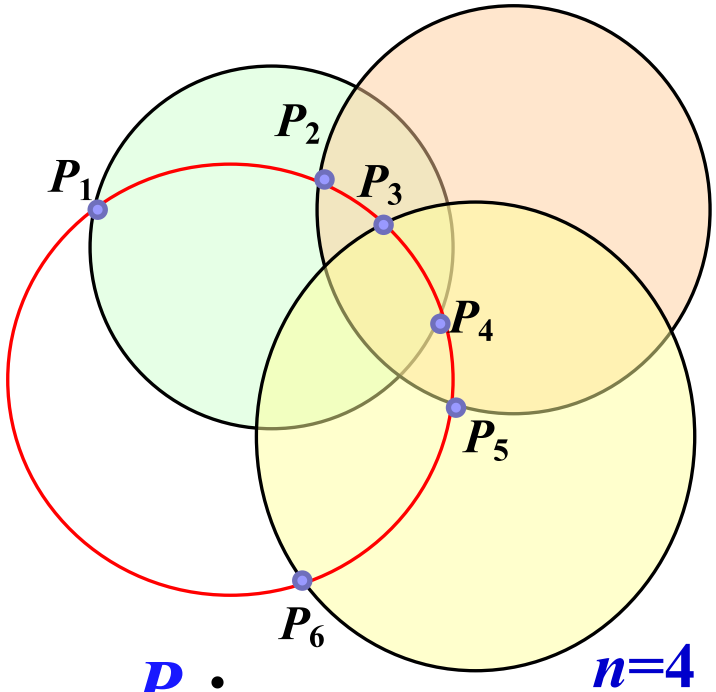


7.1 (2)序列的递推:练习

一般递推关系(n≥2):

第n个圆与前n-1个圆相交于

2(n-1)不同交点：$P_1, P_2, \ldots, P_{2(n-1)}$。



共形成第n个圆上的2(n–1)条弧:

P_1P_2, P_2P_3, …, $P_{2(n-1)-1}\ P_{2(n-1)}$和$P_{2(n-1)}\ P_1$:

- 每条弧把穿过的区域一分为二
- 增加了2(n–1)个区域

因此, 得到递推关系：$h_n=h_{n-1}+2(n-1)$，$h_0=1$，$h_1=2$

迭代递推关系：

$$h_n = h_{n-1} + 2(n-1)$$
$$= h_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1)$$
$$= h_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1)$$

…

$$= h_1 + 2\times 1 + 2\times 2 + \ldots + 2(n-2) + 2(n-1)$$
$$= h_1 + 2\times[1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1)]$$

得到：

$$h_n = 2 + 2[n(n-1)/2] = n^2 - n + 2, \quad n \geq 2$$
$$h_1 = 2$$

7.2 (2)斐波那契（Fibonacci）序列

- **1202年出版的著作《珠算原理》(Liber Abaci)中提出问题：**

> 年初把一对新生的雌雄兔子放进笼子，从第二个月开始每月生出一对雌雄兔子，每对新兔也从第二个月开始每月生出一对雌雄兔子，问一年后笼子内共有多少对兔子。

是意大利数学家列昂纳多·斐波那契（Leonardo Fibonacci，1170-1240，籍贯大概是比萨）

1202年出版的著作《珠算原理》(Liber Abaci）
这本书的开头介绍了一些算盘知识，而后却偏离了这一课题．因此，书名中“算盘”一词已失去它作为计算工具的本意，

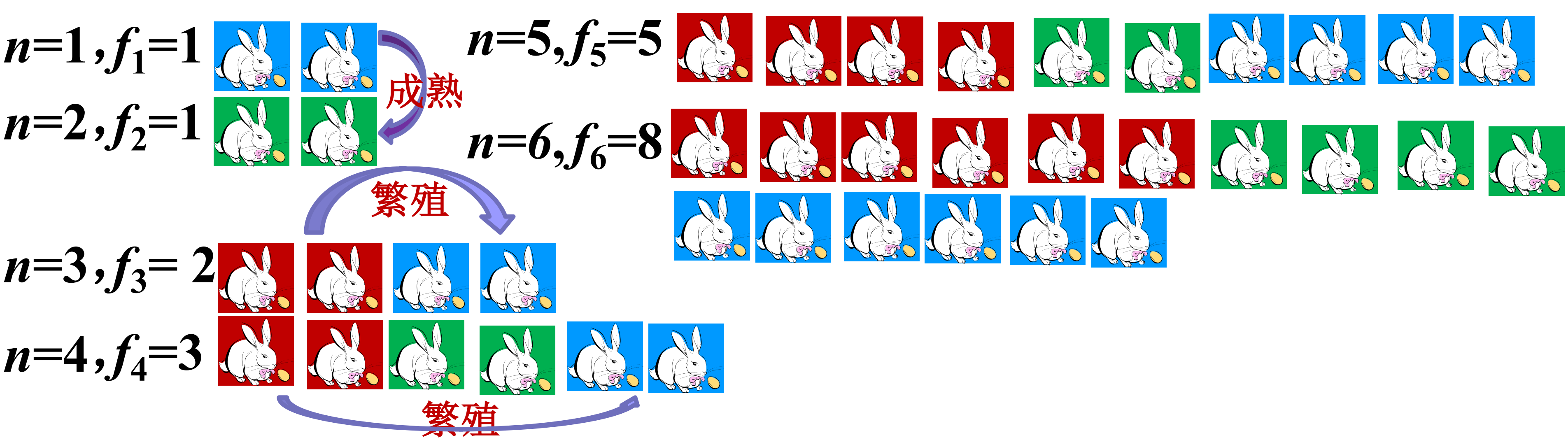
除了《算盘书》外，斐波那契还有三部著作传世：
《实用几何》(Practicageometriae，1220)、
《花絮》(Flos，1225)
《平方数书》(Liberquadratorum，1225).

7.2 (2)斐波那契（Fibonacci）序列

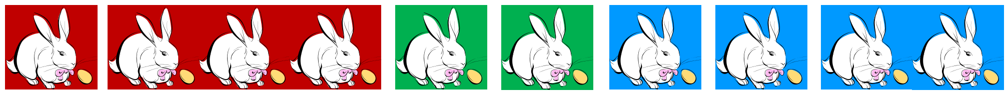
- **1202年出版的著作《珠算原理》(Liber Abaci中提出问题：**

> 年初把一对新生的雌雄兔子放进笼子，从第二个月开始每月生出一对雌雄兔子，每对新兔也从第二个月开始每月生出一对雌雄兔子，问一年后笼子内共有多少对兔子。

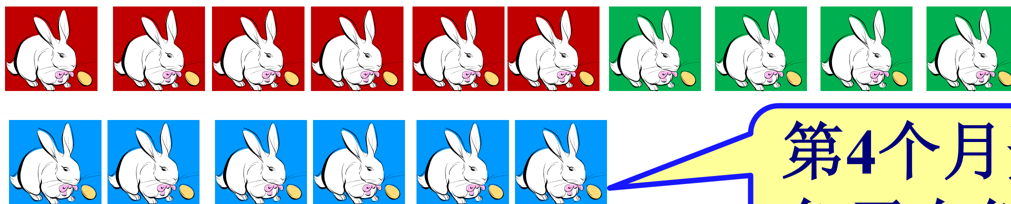
设 f_n 表示第n个月开始（即第 n-1个月结束）时笼子里的兔子对数。



设f_n表示第n个月开始（即第n-1个月结束）时笼子里的兔子对数。

f_5=5：

第5个月开始已有的兔子

f_6=8 

第4个月开始已有的新生兔子在第5个月生的兔子

- 第n个月开始（第n-1个月结束）兔子对数分为两个部分：
  - 第n-1个月开始（第n-2个月结束）已有的兔子对数
  - 第n-1个月期间出生的兔子对数

||

第n-2个月开始已有的兔子对数

$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, n≥2

$f_0=0, f_1=1$

f_7=13，f_8=21，f_9=34，…

7.2 (2)斐波那契（Fibonacci）序列

设有数列$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$。如果

$f_0=0, f_1=1$, 且满足递推关系 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$， $n\geq 2$

称该数列为斐波那契（**Fibonacci**）数列，这个数列的项称为斐波那契数。

定理7.1.1 斐波那契数 f_n 满足公式

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,\ n\geq 0$$

求解线性齐次递推式

7.2 (2)斐波那契（Fibonacci）序列

设有数列$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$。如果

$f_0=0, f_1=1$, 且满足递推关系 $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$， $n\geq 2$

称该数列为斐波那契（**Fibonacci**）数列，这个数列的项称为斐波那契数。

性质：斐波那契数列的项的部分和为

$$s_n=f_0+f_1+f_2+\ldots+f_n=f_{n+2}-1$$

证明：对n施归纳法证明。

例：斐波那契数列的部分和为

$$s_n = f_0+f_1+\ldots+f_n = f_{n+2}-1$$

证明：对 n 用数学归纳法。

当n=0时，$s_0=f_0=0$，且f_2-1=1-1=0，结论成立。

当$n\geq 1$时，假设结论对n成立，即$s_n=f_0+f_1+\ldots+f_n= f_{n+2}-1$。

考虑n+1时， $s_{n+1}= f_0+f_1+\ldots+f_n+f_{n+1}= f_{n+2}-1+f_{n+1}=f_{n+3}-1$。

由归纳法，结论对$n\geq 0$时成立。

7.2 (2)斐波那契（Fibonacci）序列

设有数列$f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$。如果

$f_0=0, f_1=1$，且满足递推关系 $f_n = f_{n-1}+f_{n-2}$， $n\geq 2$

称该数列为斐波那契（**Fibonacci**）数列，这个数列的项称为斐波那契数。

性质：

(1) 斐波那契数列的部分和为

$$s_n = f_0+f_1+\ldots+f_n = f_{n+2}-1$$

(2) 斐波那契数是偶数当且仅当n被3整除

(3) 斐波那契数能被3整除当且仅当n可被4整除

(4) 斐波那契数能被4整除当且仅当n可被6整除

例：斐波那契数f_n是偶数当且仅当 n被3整除。

$f_0=0$, $f_1=1$, $f_2=1$,

$f_3=2$, $f_4=3$, $f_5=5$,

$f_6=8$, $f_7=13$, $f_8=21$, …

(偶数，奇数，奇数)

偶数，奇数，奇数，偶数，奇数，奇数

证明：可证，斐波那契数列的每三项构成了

(偶数，奇数，奇数)的形式，

即，对于任意的$i=\geq 0$，

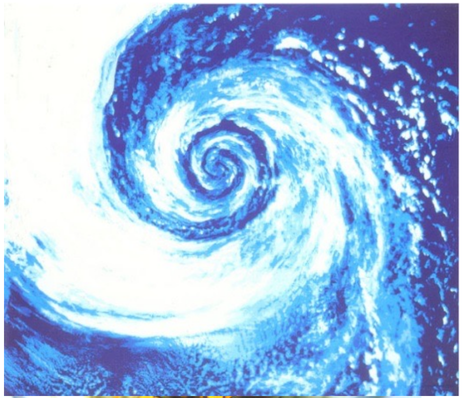
f_{3i}为偶数,f_{3i+1}为奇数,f_{3i+2}为奇数（数学归纳法）。

因此，斐波那契数是偶数当且仅当n被3整除。

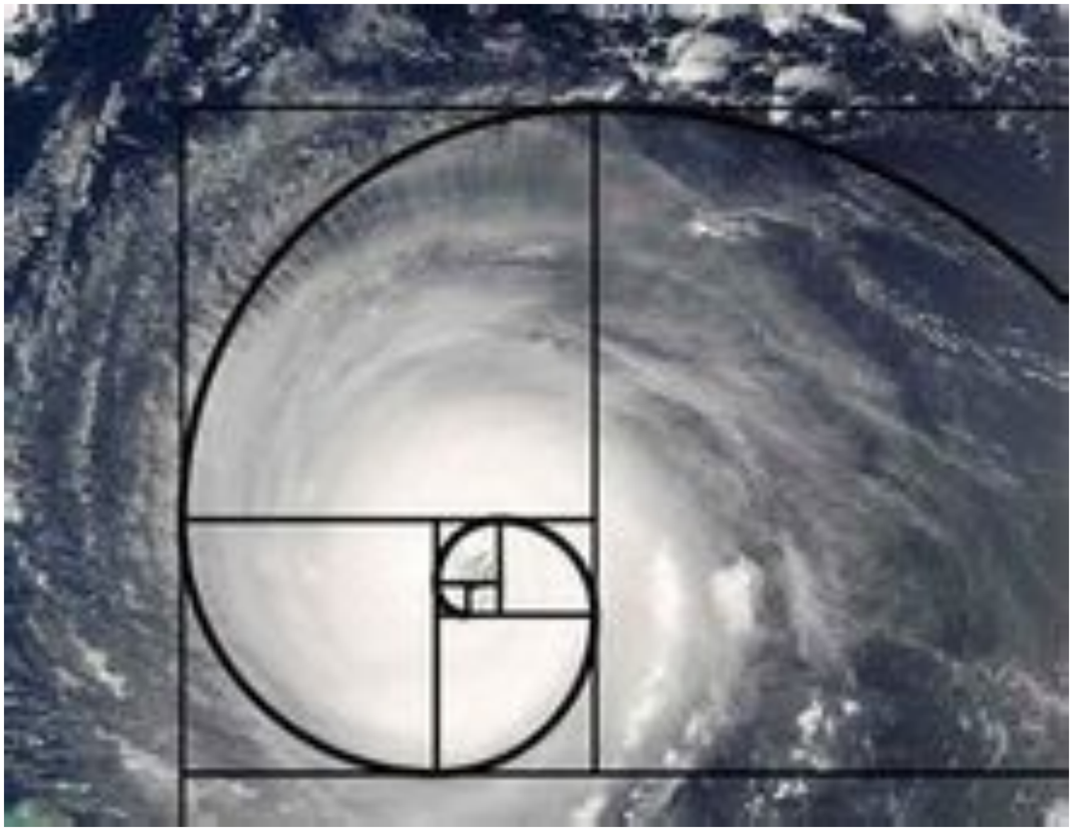
奇妙的斐波那契数列

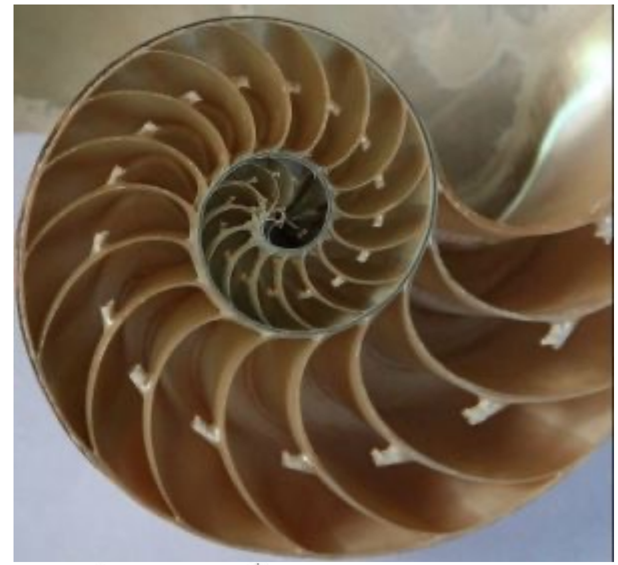
斐波那契螺旋

- 也称“黄金螺旋”，是根据斐波那契数列画出来的螺旋曲线
- 斐波那契螺旋线，以斐波那契数为边的正方形拼成的长方形，然后在正方形里面画一个90度的扇形，连起来的弧线就是斐波那契螺旋线
- 自然界中存在许多斐波那契螺旋线的图案，是自然界最完美的经典黄金比例。

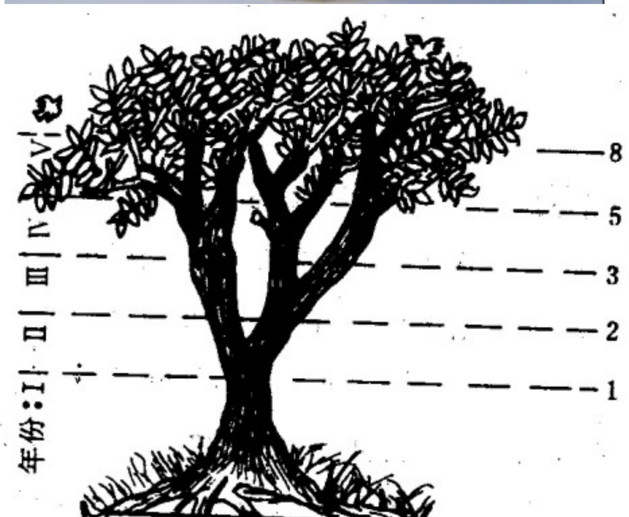


斐波那契螺旋





一株树木各个年份的枝桠数构成斐波那契数列



性质：Fibonacci数列与黄金分割数

- 观察数据：$\{\frac{f_n}{f_{n+1}}, n \geq 0\}$：

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \cdots$$

- 数列 $\{\frac{f_n}{f_{n+1}}, n \geq 0\}$ 不是单调函数，但随着n的增大，Fibonacci数列的前两项与之比趋近于黄金数0.618。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$$

斐波那契数在其他组合学问题的应用

定理7.1.2 沿Pascal三角形从左下到右上的对角线上的二项式系数和是斐波那契数, 即

$$f_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots + \binom{n-t}{t-1}$$

其中，$t = \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$。

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	2						
1	1	1	3	5					
2	1	2	1	8	13				
3	1	3	3	1	21	34			
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

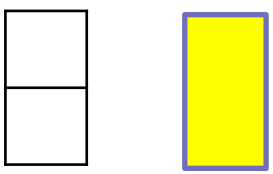
斐波那契数在其他组合学问题的应用

例1：确定2×n棋盘用多米诺牌完美覆盖的方法数h_n。

（每张多米诺骨牌正好可以覆盖棋盘上两个相邻的方格）

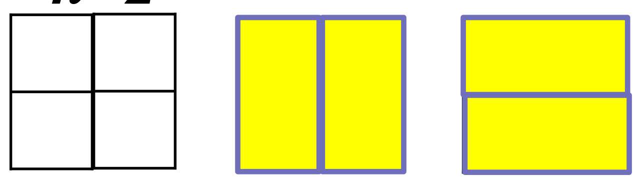
规定 $h_0=1$.

$n=1$



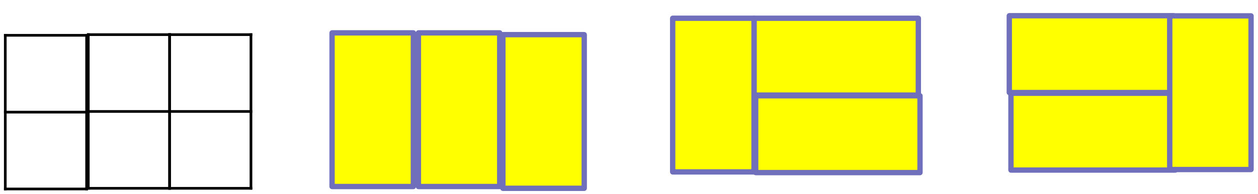
$h_1=1$

$n=2$



$h_2=2$

$n=3$



$h_3=3$

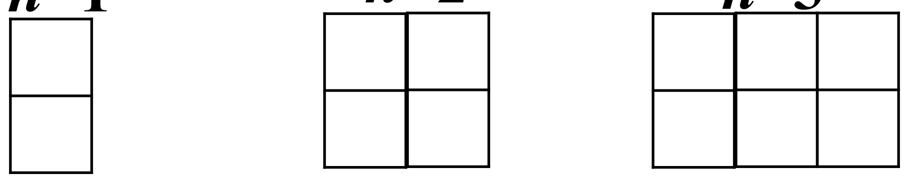
斐波那契数在其他组合学问题的应用

例2： 确定$2\times n$棋盘用多米诺牌完美覆盖的方法数h_n。

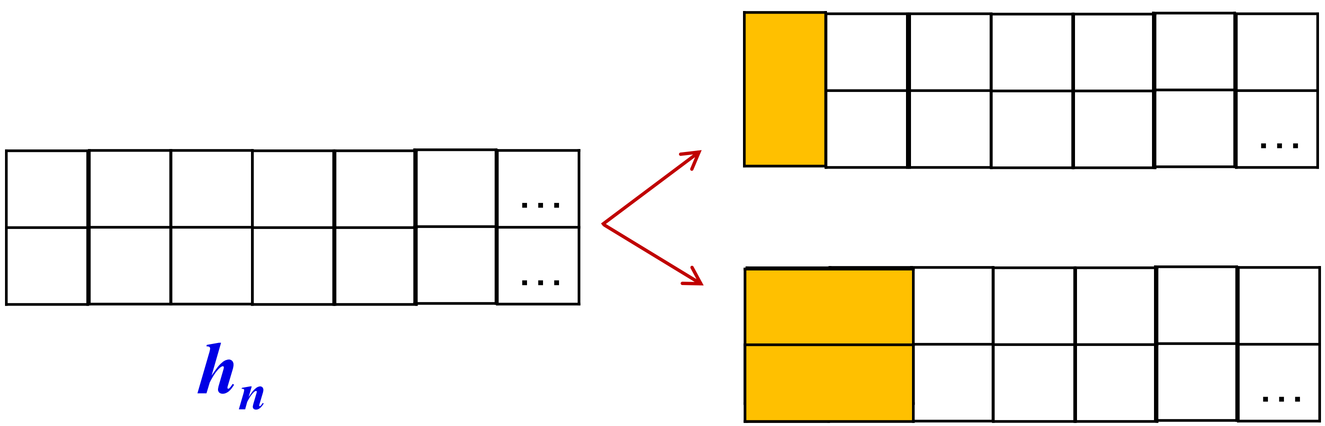
（每张多米诺骨牌正好可以覆盖棋盘上两个相邻的方格）

规定 $h_0=1$.

$n=1$　$n=2$　$n=3$



$h_1=1$　$h_2=2$　$h_3=3$



h_{n-1}

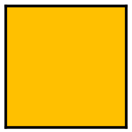
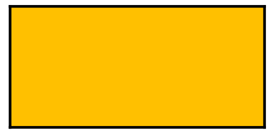
h_{n-2}

h_n

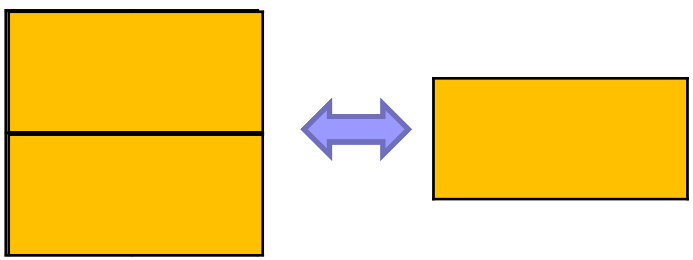
$h_n=h_{n-1}+h_{n-2}$ 满足斐波那契递推关系。h_n是斐波那契数。

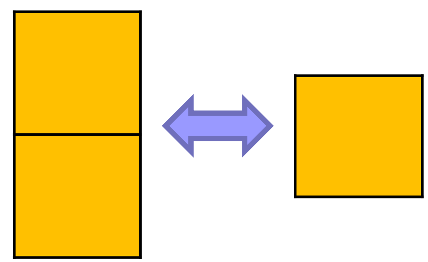
在其他组合学问题的应用

例2：确定用单牌和多米诺牌完美覆盖$1\times n$棋盘的方法数b_n。

单牌： 多米诺牌：

$2\times n$棋盘用多米诺牌的完美覆盖与
$1\times n$棋盘用单牌和多米诺牌的完美覆盖的一一对应





因此，用单牌和多米诺牌覆盖$1\times n$棋盘的完美覆盖数等于用多米诺牌覆盖$2\times n$棋盘的完美覆盖数

$b_n=b_{n-1}+b_{n-2}$ 满足斐波那契递推关系。h_n是斐波那契数。