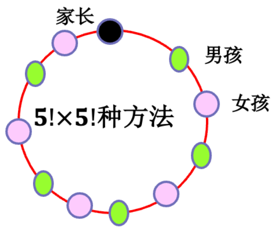
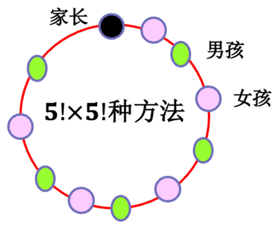
第 2 次作业

1. 我们要围着一张桌子一圈给 5 个男孩、5 个女孩和一名家长安排座位。
(1) 如果男孩不坐在男孩旁边，女孩不坐在女孩旁边，那么有多少种座位安排方式?
(2) 如果有两名家长，又有多少种座位安排方式?

解题思想:

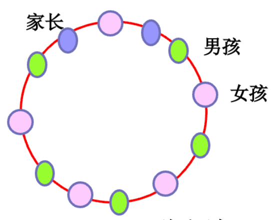
(1) 一名家长：先排家长，再排男孩，最后排女孩。



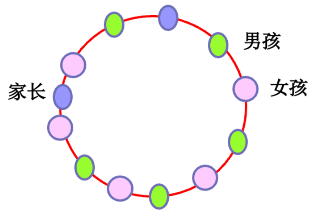


共有 $2 \times 5! \times 5!$种方法。

(2) 两名家长：先排男孩，再排女孩，最后排家长。



$4! \times 5! \times 10 \times 11$种方法



$4! \times \binom{5}{2} \times \frac{5!}{(5-4)!} \times 2 \times 2$种方法

共有 $30 \times 5! \times 5!$种方法。

2. 确定下面的多重集合的 11 排列的数目:

$$S = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$$

解：11 排列数为 S 中分别去掉一个 a, b 和 c 时的全排列数目的和。

(1) $\{2 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$的全排列个数为 $\frac{11!}{2!4!5!}$

(2) $\{3 \cdot a, 3 \cdot b, 5 \cdot c\}$的全排列个数为 $\frac{11!}{3!3!5!}$

(3) $\{3 \cdot a, 4 \cdot b, 4 \cdot c\}$的全排列个数为 $\frac{11!}{3!4!4!}$

得 S 的 11 排列的数目为 $\frac{11!}{2!4!5!} + \frac{11!}{3!3!5!} + \frac{11!}{3!4!4!}$

3. 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ 有多少 $x_1 \geq 2, x_2 \geq 0, x_3 \geq -5, x_4 \geq 8$ 的整数解。

解：令 $y_1 = x_1 - 2, y_2 = x_2, y_3 = x_3 + 5, y_4 = x_4 - 8$，则方程变换为:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 25, y_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4$$

且与原方程的整数解个数相等。

因此，原方程的整数解个数为$\binom{25+4-1}{25} = \binom{28}{3}$。

4. 有 n 根棍子列成一行，并将从中选出 k 根。

(a) 有多少种选择?

(b) 如果所选出的棍中没有两根是相邻的，那么又有多少种选择？

(c) 如果在每一对所选的棍子之间必须至少有 $\boldsymbol{l}$ 根棍子，有多少种选择？

解题思想：

(a) $\binom{n}{k}$种选择。

(b) 记选出的 k 根棍子为 $l_1, \cdots, l_k$。

相当于用 $l_1, \cdots, l_k$ 分隔剩下的 $n-k$ 根棍子，使得 l_i 与 l_{i+1} 之间至少有一根棍子，i=1, $\cdots$, $k-1$。

设 l_1 左边的棍子数为 x_0, l_i 与 l_{i+1} 之间的棍子数为 x_i, $i=1, \ldots, k-1$，l_k 右边的棍子数为 x_k，

则选择个数为以下方程的解的个数：$x_0 + x_1 + \cdots + x_k = n-k$，其中 $x_0 \geq 0$, $x_i \geq 1$ (i =1, $\cdots$, $k-1$), $x_k \geq 0$。（下略）

(c) 记选出的 k 根棍子为 $l_1, \cdots, l_k$。

相当于用 $l_1, \cdots, l_k$ 分隔剩下的 $n-k$ 根棍子，使得 l_i 与 l_{i+1} 之间至少有 l 根棍子，i=1, $\cdots$, $k-1$。

设 l_1 左边的棍子数为 x_0, l_i 与 l_{i+1} 之间的棍子数为 x_i, $i=1, \cdots, k-1$，l_k 右边的棍子数为 x_k，则选择个数为以下方程的解的个数：$x_0 + x_1 + \cdots + x_k = n-k$，其中 $x_0 \geq 0$, $x_i \geq l$ (i =1, $\cdots$, $k-1$), $x_k \geq 0$。（下略）

5. 有 2$\boldsymbol{n}$+1 本相同的书要放入带有 3 层搁板的书柜中，如果每一对搁板放置的书总是多于另一层搁板上放置的书，那么有多少种方法可把书放入书柜中？

解：（减法原理）设 x_1, x_2, x_3 表示放入三层的书的数目，则 $x_1 + x_2 + x_3 = 2n+1$。

因此，放法的总数为方程 $x_1 + x_2 + x_3 = 2n+1$ 的解的个数，其中 $x_1, x_2, x_3 \geq 0$。

即是多重集$\{\infty\cdot a, \infty\cdot b, \infty\cdot c\}$的 $2n+1$ 组合的个数，为

$$\binom{2n+1+3-1}{2n+1} = \binom{2n+3}{2} = 2n^2+5n+3。$$

不满足条件的放法中，肯定有一层且只有一层放入书的数目至少为 $n+1$。

因此不满足条件的放法数目为

$$3\sum_{i=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1-i+2-1}{2n+1-i} = \frac{1}{2}\left(3(n+1)(n+2)\right)$$

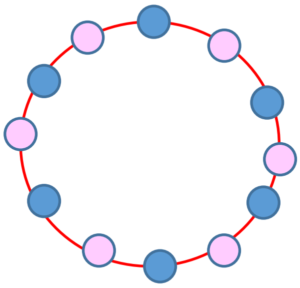
得满足条件的放法数目为

$$2n^2+5n+3-\frac{1}{2}\left(3(n+1)(n+2)\right) = \frac{n(n+1)}{2}$$

第 3 次作业

1. 6 名男士和 6 名女士围着一张圆桌就座，如果男士和女士交替就座，一共有多少种就座方法？

解题思想：首先确定一位男士作为固定点，则 6 名男士共有 5!种座法。剩下的 6 位女士的座法为 6!。因此一共有 $5! \times 6!$种就座方法。



2. 从拥有 10 名男会员和 12 名女会员的一个俱乐部选出一个 5 人委员会。

(1) 如果至少要包含 2 位女士，能够有多少种方法形成这个委员会？

(2) 此外，如果俱乐部里某位男士和某位女士拒绝进入该委员会一起工作，形成委员会的方式又有多少？

解：

(1) 设满足条件的方法数为 a，则

$$a = \binom{12}{2}\binom{10}{3} + \binom{12}{3}\binom{10}{2} + \binom{12}{4}\binom{10}{1} + \binom{12}{5} = \binom{22}{5} - \binom{10}{5} - \binom{12}{1}\binom{10}{4}$$

(2) 满足条件的方法数为 $a - \binom{11}{1}\binom{9}{2} - \binom{11}{2}\binom{9}{1} - \binom{11}{3}$

3. 1 到 20 之间没有两个连续整数的 3 整数集合有多少个？

解：

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**

所有 3 整数集合个数：

只有两个连续整数的 3 整数集合个数：

(1) 两个连续整数为 1, 2，此时 3 整数集合的第 3 个数可以为 4, ⋯, 20，一共为 17 个集合；

(2) 两个连续整数为 19, 20，此时 3 整数集合的第 3 个数可以为 1, ⋯, 17，一共为 17 个集合；

(3) 两个连续整数为 $i, i+1, 2 \le i \le 18$, 此时 3 整数集合的第 3 个数可以为除 $i-1, i, i+1, i+2$ 以外的任意 16 个数，一共为 17×16 个集合。

三个连续整数的 3 整数集合个数：18。

因此，满足题意的 3 整数集合有$\binom{20}{3} - (17 + 17 + 16 \times 17) - 18$ 个。

第 4 次作业

1. 证明从{1, 2, …, 3*n*}中选择 *n*+1 个整数，那么总存在两个整数，它们之间最多差 2。

证明：把{1, 2, …, 3*n*}划分为 *n* 个子集 $S_1, S_2, \ldots, S_n$，其中，$S_i = \{3i - 2, 3i - 1, 3i\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$。

则由鸽巢原理知，从{1, 2, ⋯, 3*n*}中选择 $n + 1$ 个整数，一定会有两个整数落到一个子集中，假设该子集为 S_i。显然，S_i 中任意两个数之间最多差 2。

2. 有 100 人的聚会，每个人都有偶数个（有可能是 0 个）熟人。证明：在这次聚会上有 3 个人，其熟人数量相同。

证明：（反证法）假设不存在 3 个人，其熟人数量相同，即熟人数量相同的最多只有 2 人。

由于每个人认识的熟人数为从 0 到 99 的偶数，一共有 50 个偶数：0, 2, 4, ⋯, 98。

因此，由假设知，一定有：

这 100 个人分成 50 组，每组两人，且每组的熟人数量恰好为以上 50 个偶数中的一个，且任意两组的熟人数量不相同。

因此存在两人均只认识 0 个人，另外两人都认识 98 人，显然存在矛盾。因此，假设不成立。

3. 设 *A* 为由 10 个不同的两位十进制正整数组成的集合。证明：必有 *A* 的两个非空的不相交的子集 *B* 和 *C*，使得 *B* 中所有元素之和等于 *C* 中所有元素之和。

证明：*A* 的非空真子集个数共有 $2^{10}-2=1022$ 个（因为 *B*, *C* 为空集或全集时，显然不满足题意，所以取非空真子集）。

设 *X* 为 *A* 的任意一个非空真子集，*X* 中元素和记为 *s*，则有

$$10 \le s \le 99 + 98 + \cdots + 91 = 855$$

即，*A* 的任意非空真子集的元素和不小于{10}的元素之和，且不大于集合{91, 92,…, 99}的元素之和。此时，可考虑的 *A* 的非空真子集个数为 $855 - 9 = 846$ 个。

再考虑集合{10}, {11}, ⋯, {19}, {20}。当 *B* 取以上集合时，肯定不存在 *A* 的非空真子集 *C* 使得 *B* 与 *C* 的元素和相等。

因此，可考虑的 *A* 的非空真子集个数为 $846 - 11 = 835$ 个。

而 *A* 的非空真子集数为 1022 个，由鸽巢原理知，必存在两个 *A* 的不相交的两个真子集，且这两个子集的元素的和相同。

4. 一间房屋内有 10 个人，他们当中没有人超过 60 岁（年龄只能以整数给出），但又至少不低于 1 岁。

证明：总能找出两组人（两组人中不含相同的人），使得年龄和相同。题中的 10 能换成更小的数吗？

证明：

(1) 10 个人构成的子集一共是 $2^{10} = 1024$ 个，

去除掉空集与全集，一共 1022 个子集可以是找出的两组人中的一组。
由于这些子集的年龄和最小为 1 岁，且不超过 $60 \times 9 = 540$ 岁。
因此，由鸽巢原理知，至少有两组人的年龄和相同，
去除这两组人的相同人后，所得的两组人满足题目要求。

(2) 当考虑 9 个人时，9 个人构成的子集一共是 $2^9 = 512$ 个，去除掉空集与全集，一共 510 个子集可以是找出的两组人中的一组。
又这些子集的年龄和最小为 1，最大为 $60 \times 8 = 480$。
因此，由鸽巢原理知，至少有两组人的年龄和相同，去除这两组人的相同人后，所得的两组人满足题目要求。

第 5 次作业

1. 设 S 是平面上 6 个点的集合，其中没有 3 个点共线。给由 S 的点所确定的 15 条线段着色，将它们或者着成红色，或者着成蓝色。证明：至少存在两个由 S 的点所确定的三角形或者是红色三角形或者是蓝色三角形（或者两者都是红色三角形，或者两者都是蓝色三角形，或者一个是红色三角形而另一个是蓝色三角形）。

证明：考虑到 $r(3,3)=6$，即在 K_6 当中至少存在一个红色或者蓝色的三角形。不妨设为红色的三角形 A。

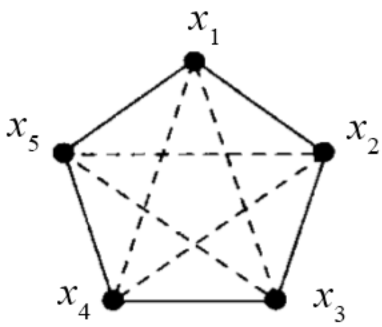
（反证法）假设 K_6 当中不存在其他的纯色（红色或蓝色）三角形。

令 x 为 A 的一个顶点，x_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$为 K_6 当中除了 x 的剩下五个顶点。

现在考虑由 x_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$构成的 K_5。

根据假设，在这个 K_5 当中，没有一个纯色三角形。

唯一满足这个假设的 K_5 如下图所示：



其中，实线边着成红色，虚线边着成蓝色。

不妨让 x, x_1 和 x_2 构成 K_6 当中的红色三角形 A，根据假设，K_6 当中不存在其他的纯色三角形。

若 x 和 x_3 之间着成红色，则 x, x_2 和 x_3 构成另一个红色三角形，矛盾。所以 x 和 x_3 之间着成蓝色。

同理 x 和 x_5 之间也着成蓝色。

则可以得到 x, x_3 和 x_5 构成一个蓝色三角形，矛盾。

所以至少存在两个纯色三角形。

2. 确定{1, 2, ..., 8}的下列排列的逆序列。

(a) 35168274

(b) 63581724

解：

(a) 24040010

(b) 45141010

3. 构造{1, 2, ..., 8}的排列，其逆序列是

(a) 30222010

(b) 13543210

解：

(a) 26813457

(b) 81762543

4. {1, 2, 3, 4, 5, 6}有多少个排列？

(1) 正好有 15 个逆序。

(2) 正好有 14 个逆序。

(3) 正好有 13 个逆序。

解：

(1) 对于{1, 2, 3, 4, 5, 6}的排列的逆序列$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$，其中 $0 \le b_i \le 6 - i, 1 \le i \le 6$。所有的逆序和为$\sum_{i=1}^{6} b_i$，这个数最大为 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 15，当且仅当 $b_i = 6 - i$。所以正好有 15 个逆序的排列数为 1。

(2) 正好有 14 个逆序的排列数与下面的方程的整数解的个数相同

$$\begin{cases} 0 \le b_i \le 6 - i \ (1 \le i \le 6) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{6} b_i = 14 \end{cases}$$

每个解$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$都是从(5, 4, 3, 2, 1, 0)中的前五个位置中选一个位置减 1 得到的，所以一共有 5 种方案。

(3) 正好有 13 个逆序的排列数与下面的方程的整数解的个数相同

$$\begin{cases} 0 \le b_i \le 6 - i \ (1 \le i \le 6) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{6} b_i = 13 \end{cases}$$

每个解$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6)$都是从(5, 4, 3, 2, 1, 0)中的前五个位置中选两个位置减 1 或者的前四个位置中选一个位置减 2 得到的，所以有$\binom{5}{2} + 4 = 14$种方案。

5. 确定下列 9 阶反射 Gray 码中 9 元组的直接后继。

(a) 010100110

(b) 110001000

解：

(a) 对 010100110 每一位求和得到的结果是 4，是偶数，直接后继只需要改变 a_0，得到的结果为 010100111。

(b) 对 110001000 每一位求和得到的结果是 3，是奇数，找到右边开始的第一个 i 使得 a_i=1，改变 a_{i+1}，得到的结果是 110011000。

第 6 次作业

1. 在字典序之下，确定{1, 2, ..., 10}的直接跟在 2, 3, 4, 6, 9, 10 之后的 6 子集。再确定直接位于 2, 3, 4, 6, 9, 10 之前的 6 子集。

解：{1, 2, ..., 10}的直接跟在 2, 3, 4, 6, 9, 10 之后的 6 子集为 2, 3, 4, 7, 8, 9；
直接位于 2, 3, 4, 6, 9, 10 之前的 6 子集为 2, 3, 4, 6, 8, 10。

2. 设 n 和 k 是正整数，给出恒等式

$$n(n+1)2^{n-2} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}, n \geq 1$$

的一个组合推理证明。

证明思想：假设从 n 个同学中选出一只队伍，该队伍至少包含 1 个队员，其中有 1 个队长和 1 个教练，可由一名同学兼任。

(1) 先选队伍，再从队伍中选出队长和教练，得等号右边式子。

(2) 增加一个虚拟同学，共 $n+1$ 个同学，先选队长，再选教练，然后从剩下的 $n-2$ 个人选剩下的队员。若队长和教练中一个为虚拟同学，则表示队长和教练为同一名同学，否则为两名同学。以上过程得到选择方法式为等式左边式子。

3. 寻找并证明下面这个数的公式：

$$\sum_{\substack{r,s,t \geq 0 \\ r+s+t=n}} \binom{m_1}{r}\binom{m_2}{s}\binom{m_3}{t}$$

其中，上式的求和是对所有满足 $r+s+t=n$ 的非负整数 r, s, t 进行的。

解题思想：（组合推理）设一个袋子里有 m_1 个红球，m_2 个蓝球，m_3 个黄球，从袋中选出 n 个球，则有$\binom{m_1+m_2+m_3}{n}$种方法。

4. 在$(3x-2y)^{18}$的展开式当中，x^5y^{13} 的系数是什么？x^8y^9 的系数是什么？

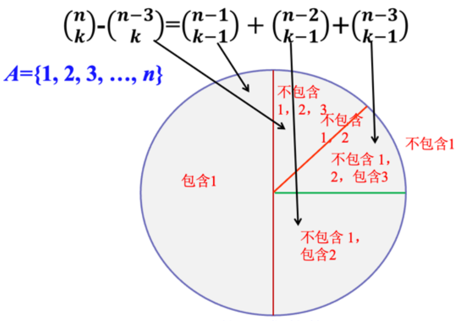
解：x^5y^{13} 的系数是$3^5(-2)^{13}\binom{18}{5}$；$x^8y^9$ 的系数是 0，因为 $8+9 \neq 18$。

5. 使用组合推理证明（以下面形式给出的）恒等式

$$\binom{n}{k} - \binom{n-3}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-3}{k-1}$$

（提示：设 S 是有三个互不相同的元素 a, b 和 c 的集合，计数 S 的特定 k 子集的个数。）

解题思想：如下图所示。


$\binom{n}{k}-\binom{n-3}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}$
$A=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$
包含1
不包含1，2，3
不包含1，2
不包含1，2，包含3
不包含1
不包含1，包含2

***A*的*k*子集的数目**

第 7 次作业

Problem 1

寻找并证明下面这个数的公式：

$$\sum_{\substack{r,s,t\geq 0\\ r+s+t=n}} \binom{m_1}{r}\binom{m_2}{s}\binom{m_3}{t}$$

其中，上式的求和是对所有满足 $r+s+t=n$ 的非负整数 r,s,t 进行的。

Solution

解题思想：（组合推理）

设一个袋子里有 m_1 个红球，m_2 个蓝球，m_3 个黄球，从袋中选出 n 个球，则有 $\binom{m_1+m_2+m_3}{n}$ 种方法。

Problem 2

在

$$(x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4)^9$$

的展开式当中，$x_1^3x_2^3x_3x_4^2$ 的系数是什么？

Solution

答案：

$$\binom{9}{3\ 3\ 1\ 2} \times 1^3 \times (-1)^3 \times 2 \times (-2)^2$$

Problem 3

构造 $\{1,2,3,4,5\}$ 的所有子集的集合的对称链划分。

Solution

解：一种可能的情况如下所示：

$\varnothing \subset \{1\} \subset \{1,2\} \subset \{1,2,3\} \subset \{1,2,3,4\} \subset \{1,2,3,4,5\}$
$\{5\} \subset \{1,5\} \subset \{1,2,5\} \subset \{1,2,3,5\}$
$\{4\} \subset \{1,4\} \subset \{1,2,4\} \subset \{1,2,4,5\}$
$\{4,5\} \subset \{1,4,5\}$
$\{2\} \subset \{2,3\} \subset \{2,3,4\} \subset \{2,3,4,5\}$
$\{2,5\} \subset \{2,3,5\}$
$\{2,4\} \subset \{2,4,5\}$
$\{3\} \subset \{1,3\} \subset \{1,3,4\} \subset \{1,3,4,5\}$
$\{3,5\} \subset \{1,3,5\}$
$\{3,4\} \subset \{3,4,5\}$

Problem 4

证明

$$\sum_{n_1+n_2+n_3+n_4=n} \binom{n}{n_1\ n_2\ n_3\ n_4} (-1)^{n_2+n_4} = 0$$

其中，求和是对所有的 $n_1+n_2+n_3+n_4=n$ 非负整数解进行的。

Solution

证明：由多项式定理知：

$$\begin{aligned}
0 &= (1-1+1-1)^n \\
&= \sum_{n_1+n_2+n_3+n_4=n} \binom{n}{n_1\ n_2\ n_3\ n_4} (1)^{n_1}(-1)^{n_2}(1)^{n_3}(-1)^{n_4} \\
&= \sum_{n_1+n_2+n_3+n_4=n} \binom{n}{n_1\ n_2\ n_3\ n_4} (-1)^{n_2}(-1)^{n_4} \\
&= \sum_{n_1+n_2+n_3+n_4=n} \binom{n}{n_1\ n_2\ n_3\ n_4} (-1)^{n_2+n_4}
\end{aligned}$$

证毕。

Problem 5

利用定理 5.6.1 证明，如果 m 和 n 是正整数，那么 $mn+1$ 个元素的偏序集有一个大小为 $m+1$ 的链或大小为 $n+1$ 的反链。

Solution

证明：（反证法）假设 $mn+1$ 个元素的偏序集当中所有的链大小都小于等于 m，所有的反链大小都小于等于 n。设 r 是这个偏序集当中最长链，则 $r \le m$。
根据定理 5.6.1，这个偏序集当中的元素可以被划分成 r 个反链 $A_1, A_2, \cdots, A_r$，则有 $|A_i| \le n(1 \le i \le n)$。则

$$mn+1 = \sum_{i=1}^{r} |A_i| \le r_n \le m_n$$

矛盾，所以得证。

第 8 次作业

Problem 1

求出从 1 到 10 000 中既不是完全平方数也不是完全立方数的整数个数。

Solution

解：设 $S=\{1,2,\cdots,10000\}$, A 是 S 中的完全平方数构成的子集，B 是 S 中的完全立方数够成的子集。
则，题意所求整数个数为 $|\overline{A}\cap\overline{B}|$。
由于 $100^2=1000$，因此，$|A|=100$。
由于 $21^3=9261$，$22^4=10648$，因此，$|B|=21$。
由于 $4^6=4096$, $5^6=15625$，因此 $|A\cap B|=4$。
由容斥原理可得

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|-|A|-|B|+|A\cap B|=10000-100-21+4=9883$$

Problem 2

确定多重集合

$$S=\{\infty\cdot a,4\cdot b,5\cdot c,7\cdot d\}$$

的 10 组合的数目。

Solution

解：令 $S^*=\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,\infty\cdot c,\infty\cdot d\}$，$T$ 为 S^* 的 10 组合的集合。
则 $|T|=\binom{10+4-1}{10}=\binom{13}{10}$
设 B 为 S^* 的 10 组合中至少包含 5 个 b 的组合数，C 为 S^* 的 10 组合中至少包含 6 个 c 的组合数，D 为 S^* 的 10 组合中至少包含 8 个 d 的组合数。
则 $S=\{\infty\cdot a,4\cdot b,5\cdot c,7\cdot d\}$ 的 10 组合的数目为 $|\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}|$。
$|B|$ 为 $S^*=\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,\infty\cdot c,\infty\cdot d\}$ 的 5 组合数目，即 $|B|=\binom{5+4-1}{5}=\binom{8}{5}$。
$|C|$ 为 S^* 的 4 组合数目，即 $|C|=\binom{4+4-1}{4}=\binom{7}{4}$。
$|D|$ 为 S^* 的 2 组合数目，即 $|D|=\binom{2+4-1}{2}=\binom{5}{2}$。
由于 $5+6,5+8,6+8$ 都大于 10，因此 $|B\cap C|=|C\cap D|=|B\cap D|=0$；同理，$|B\cap C\cap D|=0$。
由容斥原理可得

$$|\overline{B}\cap\overline{C}\cap\overline{D}|=\binom{13}{10}-\binom{8}{5}-\binom{7}{4}-\binom{5}{2}=185$$

Problem 3

确定方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=20$$

满足

$$1 \le x_1 \le 6, 0 \le x_2 \le 7, 4 \le x_3 \le 8, 2 \le x_4 \le 6$$

的整数解的数目。

Solution

解题思路:
令 $y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2, y_3 = x_3 - 4, y_4 = x_4 - 2$，则满足题意的整数解的个数等于方程

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13$$

满足

$$0 \le y_1 \le 5, 0 \le y_2 \le 7, 0 \le y_3 \le 4, 0 \le y_4 \le 4$$

的整数解的数目。
令 A, B, C, D 分别表示 $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 13$ 满足 $y_1 \ge 6, y_2 \ge 8, y_3 \ge 5, y_4 \ge 5$ 的整数解的个数，则满足题意的整数解个数为 $|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}|$。
(下略。)

Problem 4

确定计数集合 $1, 2, \cdots, n$ 的排列中恰有 k 个整数在它们的自然位置上的排列数的一般公式。

Solution

答案:

$$\binom{n}{k} D_{n-k}$$

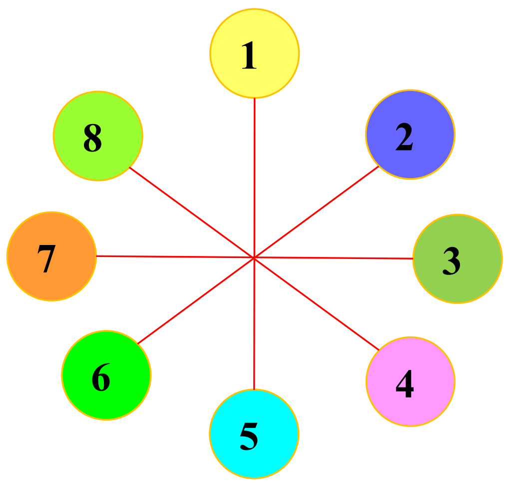
第 9 次作业

Problem 1

旋转木马有 8 个座位，每个座位都代表一种不同的动物。8 个男孩脸朝里围坐在旋转木马上，使得每一个男孩都面对到另一个男孩（每个男孩看到另一个男孩的前面）。他们能够有多少种方法改变座位使得每人面对的男孩都不同？如果所有的座位都是一样的，那么该问题又如何变化？

Solution

解题思想：



设用数字 $1, 2, \cdots, 8$ 分别表示 8 位男孩，第 i 个男孩一开始坐在第 i 号座位，改变座位后坐在第 s_i 号座位。

假设 A_i 表示 s_i 和 s_{i+4} 面对面的坐法的集合 $(1 \le i \le 4)$，则使得每人面对的男孩都与原先的不同的坐法的数目为 $\left|\bigcap_{i-1}^{4} \overline{A_i}\right|$。

计算 $|A_1|$：因为每个座位都代表一种不同的动物，先排 s_1 有 8 种情况，s_5 随之确定位置；剩下 6 个男孩排列一共有 $6!$ 种情况。因此 $|A_1| = 8 \times 6!$。

显然，由于对称性，$|A_i| = 8 \times 6! (1 \le i \le 4)$。

计算 $|A_1 \cap A_2|$：先排 s_1 有 8 种情况，s_5 随之确定位置；再排 s_2 有 6 种情况，s_6 随之确定位置；剩下 4 个男孩排列一共有 $4!$ 种情况。因此 $|A_1| = 8 \times 6 \times 4!$。

同样的由于对称性，$|A_i \cap A_j| = 8 \times 6 \times 4! (1 \le i, j \le 4, i \ne j)$。

类似可计算 $|A_i \cap A_j \cap A_k| (1 \le i, j, k \le 4, i \ne j \ne k)$ 和 $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$。

根据容斥原理可得满足条件的坐法数为 23040。

如果所有的座位都是一样的，坐法数为 $\dfrac{23040}{8} = 2880$。

Problem 2

设 n 和 k 是正整数且 $k \le n$。设 $a(n, k)$ 应是 k 个非攻击车放入 $n \times n$ 棋盘，且放入“禁止位置”的方法数。棋盘上的位置 $(1,1), (2,2), \cdots, (n,n)$ 和 $(1,2), (2,3), \cdots, (n-1,n), (n,1)$ 为“禁止位置”。例如，如果 $n = 6$，则棋盘为

$\times$	$\times$				
	$\times$	$\times$			
		$\times$	$\times$		
			$\times$	$\times$	
				$\times$	$\times$
$\times$					$\times$

证明：

$$a(n,k)=\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

提示，$a(n,k)$ 是从围成一圈的 $2n$ 个孩子中选择 k 个孩子并使得没有两个相邻的孩子同时被选中的方法数。

Solution

证明：将所有的“禁止位置”F 进行如下表所示的循环排列：

n	1	2	3	4	$\cdots$	$2n-2$	$2n-1$	$2n$
第 n 个位置	(1,1)	(1,2)	(2,2)	(2,3)	$\cdots$	$(n-1,n)$	(n,n)	$(n,1)$

同时第一个位置在最后一个位置之后。

给定 F 中的两个位置，当且仅当它们在棋盘的同一行或同一列时，它们在循环排序中是相邻的。因此 $a(n,k)$ 表示集合 F 的没有两个元素在循环排序中相邻的 k-子集的数量。用 $\{a_i\}(i=1,\cdots,k)$ 表示这样一个 k-子集，其中 $1\leq a_1<a_2<\cdots<a_k\leq 2n$ 且 $a_{i+1}-a_i>1(1\leq i\leq k-1)$（不相邻）。考虑到需要对 k-子集进行计数，可以将原问题转化成为方程的非负整数解的个数的问题。定义

$$x_1=a_1-1,x_2=a_2-a_1-2,\cdots,x_k=a_k-a_{k-1}-2,x_{k+1}=2n-a_k$$

则可以得到

$$x_i\geq 0(1\leq i\leq k+1),\sum_{i=1}^{k+1}x_i=2n-2k+1$$

并且，x_1 和 x_{k+1} 不会同时为 0。

先不考虑 x_1 和 x_{k+1} 不会同时为 0 的约束关系，那么上面方程的正整数解的数量是 $\binom{2n-k+1}{k}$。然后考虑使得 $x_1=0$ 并且 $x_{k+1}=0$ 的解，数目为 $\binom{2n-k+1}{k-2}$。所以

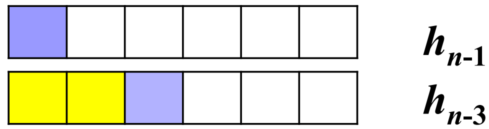
$$a(n,k)=\binom{2n-k+1}{k}-\binom{2n-k+1}{k-2}=\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}$$

Problem 3

设 h_n 表示用单牌和多米诺骨牌以下述方式完美覆盖 $1\times n$ 棋盘的方法数：任何两张多米诺骨牌都不相邻。找出 h_n 满足的递推关系和初始条件，但不对其求解。

Solution

解：

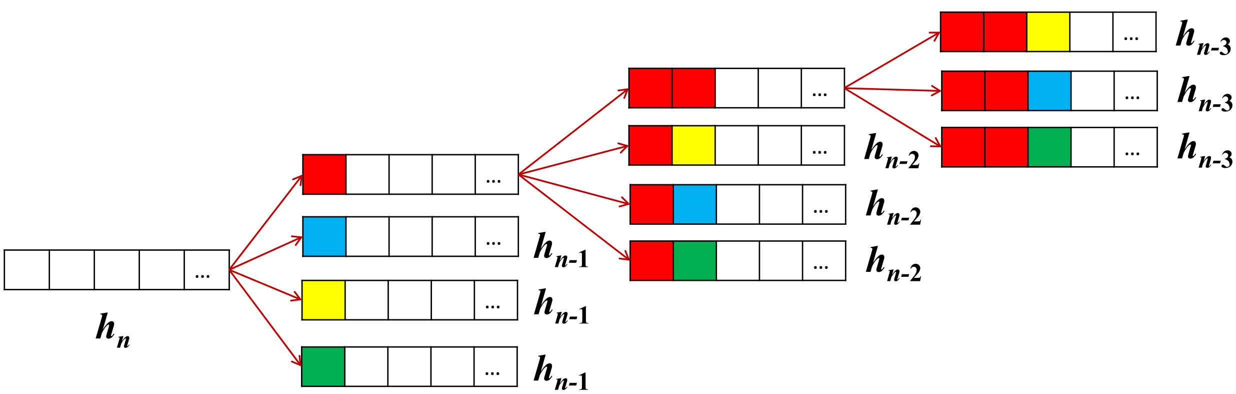


显然，$h_0 = 1, h_1 = 1$（一张单牌），$h_2 = 2$（两张单牌或者一张多米诺骨牌）。
当 $n \geq 3$ 时，若首先用单牌进行覆盖，则 $h_n = h_{n-1}$。
若首先用多米诺骨牌进行覆盖，则它占两个棋格，此时第 3 个格子只能是单牌，有 $h_n = h_{n-3}$。
因此，h_n 满足的递推关系为 $h_n = h_{n-1} + h_{n-3}, n \geq 3$，初始条件为 $h_0 = 1, h_1 = 1, h_2 = 2$。

Problem 4

设 h_n 是把 1 行 n 列的棋盘的方格用红、黄、蓝、绿四种颜色着色，使得没有 3 个着成红色的方格相邻的着色方法数，求出 h_n 满足的递推式。

Solution



显然着色的格子不超过 2 个时，可以任意着色，即 $h_0 = 1, h_1 = 4, h_2 = 16$。当 $n \geq 3$ 时，考虑下面的情况：

1. 第一个方格着成蓝色、黄色或者绿色，则第二个方格可以着成红、黄、蓝、绿任意一个颜色，此时，$h_n = 3h_{n-1}$。
2. 若第一个方格着成红色，第二个方格着成蓝色、黄色或者绿色，则第三个方格可以着成红、黄、蓝、绿任意一个颜色，此时，$h_n = 3h_{n-2}$。
3. 若连续两个方格着成红色，则第三个方格只能着成黄色、蓝色或者绿色，第四个方格可以着成红、黄、蓝、绿任意一个颜色，此时，$h_n = 3h_{n-3}$。

因此递推关系为 $h_n = 3h_{n-1} + 3h_{n-2} + 3h_{n-3}, h_0 = 1, h_1 = 4, h_2 = 16$。

第 10 次作业

Problem 1

确定下面方程的非负整数解的个数 h_n 的生成函数:

$$2e_1 + 5e_2 + e_3 + 7e_4 = n$$

Solution

令 $f_1 = 2e_1, f_2 = 5e_2, f_3 = e_3, f_4 = 7e_4$，则原方程转化为

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = n$$

其中，f_1 是偶数，f_2 是 5 的倍数，f_4 是 7 的倍数。因此 h_n 的生成函数为

$$\begin{aligned} g(x) &= (1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^5 + x^{10} + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^7 + x14 + \cdots) \\ &= \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^7} \end{aligned}$$

Problem 2

设 h_n 表示在满足下面条件之下给 $1 \times n$ 棋盘着色的方法数：用红色、白色、蓝色和绿色着色，其中红格数为偶数，白格数为奇数。确定这个数列 $h_0, h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$ 的指数生成函数，然后求出 h_n 的一个简单的公式。

Solution

解：问题等价于多重集 $\{\infty \cdot R, \infty \cdot Y, \infty \cdot B, \infty \cdot G\}$ 的 n 排列个数，其中 R 出现偶数个，Y 出现奇数个。数列 $h_0, h_1, h_2, \cdots, h_n, \cdots$ 的指数生成函数为:

$$\begin{aligned} g^{(e)}(x) &= \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right) \\ &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \cdot e^x \cdot e^x \\ &= \frac{e^{4x} - 1}{4} \\ &= x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{4^2x^3}{3!} + \cdots + \frac{4^{n-1}x^n}{n!} + \cdots \end{aligned}$$

可得，$h_0 = 0$；当 $n \geq 1$ 时，$h_n = 4^{n-1}$。

Problem 3

求解初始值为 $h_0 = -1$ 和 $h_1 = 0$ 的递推关系 $h_n = 8h_{n-1} - 16h_{n-2} (n \geq 2)$。

Solution

解：特征方程为

$$r^2 - 8r + 16 = 0$$

解得 $r_1 = r_2 = 4$，令 $h_n = (C_1 + C_2 n)4^n$，将初始条件代入，得

$$\begin{cases} C_1 = -1 \\ 4(C_1 + C_2) = 0 \end{cases}$$

解出 $C_1 = -1, C_2 = 1$，可得原方程的解为

$$h_n = (n-1)4^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Problem 4

利用生成函数求解下面的递推关系

$$\begin{aligned} &h_n = 3h_{n-1} - 4n (n \geq 1) \\ &h_0 = 2 \end{aligned}$$

Solution

解：令

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$$

则

$$xg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} h_{n-1} x^n$$

利用原来的递推关系和 $h_0 = 2$，得

$$\begin{aligned} g(x) - 3xg(x) &= h_0 + (h_1 - 3h_0)x + (h_2 - 3h_1)x^2 + \cdots \\ &= 2 - (4x + 4 \times 2x^2 + \cdots) \\ &= 2 - 4\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \\ &= 2 - 4x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \\ &= 2 - 4x\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\ &= 2 - \frac{4x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2}{1-3x} - \frac{4x}{(1-3x)(1-x)^2} \\ &= -\frac{1}{1-3x} + \frac{3-x}{(1-x)^2} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 3 - 3^n)x^n \end{aligned}$$

所以

$$h_n = 2n + 3 - 3^n, n = 0, 1, 2, \cdots$$

第 11 次作业

Problem 1

求解非齐次递推关系

$$\begin{aligned}&h_n = 6h_{n-1} - 9h_{n-2} + 2n(n \geq 2)\\&h_0 = 1\\&h_1 = 0\end{aligned}$$

Solution

解：先解对应的齐次方程

$$h_n = 6h_{n-1} - 9h_{n-2}$$

其特征方程为

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

解得 $r_1 = r_2 = 3$，从而给出下面的通解

$$h_n = (C_1 + C_2 n)3^n$$

下面我们要求原来的非齐次递推关系的一个特殊的解

$$h_n = 6h_{n-1} - 9h_{n-2} + 2n$$

对于适当的 r, s，我们尝试寻找下面的形式的一个解

$$h_n = rn + s$$

则必须有

$$rn + s = 6(r(n-1) + s) - 9(r(n-2) + s) + 2n$$

或者等价地有

$$rn + s = (-3r + 2)n + (12r - 3s)$$

令 n 的系数相等且等式两边的常数项相等，我们得到

$$\begin{cases} r = -3r + 2 \\ s = 12r - 3s \end{cases}$$

解得

$$r = \frac{1}{2}, s = \frac{3}{2}$$

则令原方程的通解为

$$h_n = (C_1 + C_2 n)3^n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$$

将初始条件代入并求解, 解出 $C_1 = -\dfrac{1}{2}, C_2 = -\dfrac{1}{6}$，可得原方程的解为

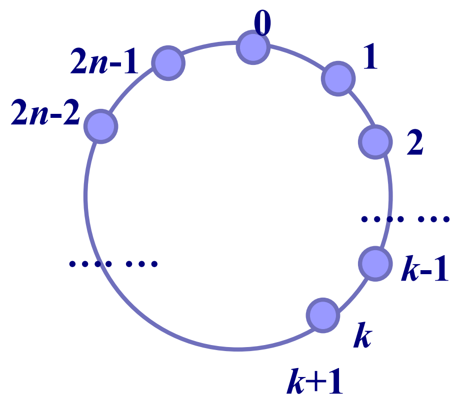
$$h_n = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}n\right)3^n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

Problem 2

设在圆面上选择 $2n$ 个（等间隔的）点。证明将这些点成对连接起来得到 n 条不相交线段的方法数等于第 n 个 Catalan 数 C_n。

Solution

证明：设 h_n 为将圆上 $2n$ 个点成对连接起来得到 n 条不相交线段的方法数。下面证明序列 $h_0, h_1, h_2, \cdots$ 满足 Catalan 序列的递推关系与初始条件。



设圆上的 $2n$ 个点顺时针依次排列为 $0, 1, \cdots, 2n-1$。假设顶点 0 与 k 连接，则对任意两个点 i, j，$i = k+1, \cdots, 2n-1, j = 1, \cdots, k-1$，$i$ 不能与 j 连接，否则会与边 $(0, k)$ 相交。
下面证明 k 只能为奇数。假设 k 为偶数，则连接 $(0, k)$ 右边为奇数个点，此时无法成对连接，因此 k 只能为奇数。
假设 $(0, k)$ 右边的点数为 $2i = k-1$, 则 $(0, k)$ 左边的点数为 $2n-2i-2 = 2(n-i-1)$。此时 $h_n = h_i h_{n-i-1}$。
因此，当 k 从 1 到 $2n-1$ 时，i 从 0 到 $n-1$。得 $h_n = h_0 h_{n-1} + h_1 h_{n-2} + \cdots + h_{n-1} h_0$。
下面考虑初始情况：
当 $n = 0$ 时，令 $h_n = 1$；
当 $n = 1$ 时，圆上选择 2 个点，显然只有一种连接方法。
综上所述，h_n 第 n 个 Catalan 数 C_n。

Problem 3

证明：由 $1, 2, \cdots, 2n$ 构成且满足

$$x_{11} < x_{12} < \cdots < x_{1n}$$

$$x_{21} < x_{22} < \cdots < x_{2n}$$

以及

$$x_{11} < x_{21}, x_{12} < x_{22}, \cdots, x_{1n} < x_{2n}$$

的 2 行 n 列数组

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \end{bmatrix}$$

的个数等于第 n 个 Catalan 数 C_n。

Solution

设

(1) S 为包含所有满足题目要求的数组的集合

(2) I 为包含所有由 n 个 1，n 个 -1 构成的序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 的集合，满足对任意的 $k \in [1, 2n]$，$a_1 + \cdots + a_k \geq 0$。

如下定义一个从 I 到 S 的的映射 f：对于任意一个 I 中序列 $\eta = a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$，$f(\eta)$ 是一个如下定义数组。
令 $A_1 = \{j | a_j = 1, 1 \leq j \leq 2n\}, A_2 = \{j | a_j = -1, 1 \leq j \leq 2n\}$。
则 A_1 中的元素从小到大排列构成 $f(\eta)$ 的第 1 行，A_2 中的元素从小到大排列构成 $f(\eta)$ 的第 2 行。
显然 f 是单射（对任意的两个序列 $\eta_1 = a_1 \cdots a_{2n}$ 与 $\eta_2 = b_1 \cdots b_{2n}$，假设 i 是最小的使得 $a_i \neq b_i$ 的数，则 i 位于 $f(\eta_1)$ 与 $f(\eta_2)$ 的不同行）。
下面证明 f 是满射。假设 P 是 S 中任意一个满足条件的数组, 如下构造序列 $a_1 \cdots a_{2n}$：若 i 在上排，则 $a_i = 1$, 否则 $a_i = -1$。
下面证明 $a_1 + \cdots + a_k \geq 0, k = 1, \cdots, 2n$。
对 k 进行数学归纳。

(1) 当 $k = 1$ 时，因为 P 是满足条件的数组，因此 1 只能在第一排第一个，则 $a_1 = 1 \geq 0$。

(2) 假设当 k 时成立，即 $a_1 + \cdots + a_k \geq 0$，下面证明 $a_1 + \cdots + a_{k+1} \geq 0$。

    (a) 若 $a_1 + \cdots + a_k \geq 0$，显然 $a_1 + \cdots + a_{k+1} \geq 0$。

    (b) 若 $a_1 + \cdots + a_k = 0$，则 k 一定为偶数，有 $1, 2, \cdots, k$ 一定排满两排的前 $\dfrac{k}{2}$ 列。此时，$k+1$ 只能排在第一排的第 $\dfrac{k}{2} + 1$ 个，即 $a_{k+1} = +1$。得 $a_1 + \cdots + a_{k+1} \geq 0$。

由数学归纳法得，$a_1 + \cdots + a_k \geq 0, k = 1, \cdots, 2n$。
因此满足条件的排列方式的种类是第 n 个 Catalan 数。

第 12 次作业

Problem 1

把 n 元素集合划分成可区分的 k 个盒子（其中一些可能是空盒）的划分的个数是 k^n。通过用不同的方式计数来证明

$$k^n = \binom{k}{1}1!S(n,1) + \binom{k}{2}2!S(n,2) + \cdots + \binom{k}{n}n!S(n,n)$$

（如果 $k > n$，定义 $S(n,k)$ 为 0。）

Solution

设 S 是把 n 元素集合划分成可区分的 k 个盒子（其中一些可能是空盒）的划分的集合，则 $|S| = k^n$。
又设 S_i 为把 n 元素集合划分成可区分的 i 个盒子,且盒子都不为空的划分的集合, 则 $|S_i| = \binom{k}{i}i!S(n,i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$。
显然，$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$，且对任意的 $i, j, i \neq j$，$S_i \cap S_j = \varnothing$。因此 $|S| = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_n|$。得

$$k^n = \binom{k}{1}1!S(n,1) + \binom{k}{2}2!S(n,2) + \cdots + \binom{k}{n}n!S(n,n)$$

Problem 2

证明第二类 Stirling 数满足以下关系：

(a) $S(n,1) = 1 (n \geq 1)$

(b) $S(n,2) = 2^{n-1} - 1 (n \geq 2)$

(c) $S(n,n-1) = \binom{n}{2} (n \geq 1)$

(d) $S(n,n-2) = \binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} (n \geq 2)$

Solution

(a) $S(n,1)$ 为把 n 个可区分的元素划分到一个盒子，且盒子非空的方法数，显然只有一种方法：把所有元素放到一个盒子里。因此 $S(n,1) = 1$。

(b) 对 n 用数学归纳法证明 $S(n,2) = 2^{n-1} - 1 (n \geq 2)$

  (1) $n = 2$ 时，$S(2,2) = 1 = 2^{2-1} - 1$，结论成立。

  (2) 当 $n > 2$ 时，假设 $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$ 成立。
  由递推式 $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$ 得 $S(n+1,2) = S(n,1) + 2S(n,2) = 1 + 2(2^{n-1} - 1) = 2^n - 1$。
  因此，结论成立。

(c)(d) 同样可由数学归纳法可证。

Problem 3

序列 h_n 的一般项是 n 的一个 3 次多项式。如果其差分表的第 0 行的前 4 个数是 $1, -1, 3, 10$，确定 h_n 和 $\sum_{k=0}^{n} h_k$ 的公式。

Solution

差分表如下：

$$
\begin{array}{cccc}
1 & -1 & 3 & 10 \\
 & -2 & 4 & 7 \\
 & & 6 & 3 \\
 & & & -3
\end{array}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
h_n &= \binom{n}{0} - 2\binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} - 3\binom{n}{3} \\
\sum_{k=0}^{n} h_k &= \binom{n+1}{1} - 2\binom{n+1}{2} + 6\binom{n+1}{3} - 3\binom{n+1}{4}
\end{aligned}
$$