北京航空航天大学

2020－2021 学年 第二学期期末

离散数学3

《组 合 数 学》

班 级________________学 号 ______________

姓 名________________成 绩 ______________

2021 年 6 月 15 日

班号__________ 学号_________ 姓名________ 成绩________

离散数学 3《组 合 数 学》期末考试卷

注意事项：1、考试时间 120 分钟、闭卷。

2、第一题的答案直接填写在题目留出的空白，第二至六题，答题写在试卷后面的空白页上，请标明**题号**。

一、填空题（每空 5 分，共 50 分）

(1) 5 颗有标记的红球，6 颗有标记的蓝球，排成一行，满足相邻两个球不是相同颜色，共有 86400 种方案，若排成一圆圈，共有 17280 种方案。

(2) 1−99999 之间的整数中各位数字之和等于 6 的数共有 210 个。（例如 2130 的各位数字之和为 6）。

(3) 设 3n 个物品中只有 n 个物品是相同的，从中取 n+1 个物品进行排列的排列数为 $\sum_1^{n+1} C(2n,k) * \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}$。

(4) 大学生运动会共有 10 个项目，学生可以任意参赛。一个学校至少派出 21 名学生参赛才能保证至少有 3 名学生参加同一个项目。

(5) 已知{1, 2, …, 9}的一个排列的逆序列为 4 3 6 2 2 1 0 1 0，则该排列为 7,6,4,2,1,5,9,8,3 。

(6) 序列 h_n 的一般项是 n 的一个 2 次多项式。如果其差分表的第 0 行的前 3 个数是 −2，1，2, 则 h_n 为 $-2\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}$，$\sum_{k=0}^{n} h_k$ 等于 $-2\binom{n+1}{1}+3\binom{n+1}{2}-2\binom{n+1}{3}$。

(7) {1, 2, …., 9}的排列中恰有 1 个奇数和 2 个偶数在它们的自然位置上的排列数为_ $30D_6$ 。

(8) 设 h_n 是 n 位三进制数中相邻 3 位不出现 111 的数的个数，则 h_n 满足的递归关系为_ $2h_{n-1}+2h_{n-2}+2h_{n-3}\ \ h0=1\ \ h1=3\ \ h2=9\ h3=26$_。

二、令 $b_1, b_2, \ldots, b_{101}$ 为 101 个长度不超过 9 的二进制串。证明存在两个二进制串 b_i 和 b_j ($i\neq j$)，包含同样数目的 0 和 1。（如, 001001 和 101000 包含同样数目的 0 和 1) （10 分）

1 位二进制串范围[0,1]，可容纳 2 种不同数目的 0-1 组合

2 位二进制串范围[0,2]，可容纳 3 种不同数目的 0-1 组合

3 位二进制串范围[0,3]，可容纳 4 种不同数目的 0-1 组合

4 位二进制串范围[0,4]，可容纳 5 种不同数目的 0-1 组合

5 位二进制串范围[0,5]，可容纳 6 种不同数目的 0-1 组合

6 位二进制串范围[0,6]，可容纳 7 种不同数目的 0-1 组合

7 位二进制串范围[0,7]，可容纳 8 种不同数目的 0-1 组合

8 位二进制串范围[0,8]，可容纳 9 种不同数目的 0-1 组合

9 位二进制串范围[0,9]，可容纳 10 种不同数目的 0-1 组合

$$2+3+4+5+6+7+8+9+10=54$$

因此 101 个二进制串必然出现两个相同数目 0 和 1 的串。

三、对 12 个不同的元素 $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4$ 进行全排列，求每一对 a_i 和 b_i（i=1, 2, 3, 4）都不相邻的全排列数。 （10 分）

总排列数有$12!$

一对a_i, b_i相邻的排列数有$11! \cdot 2$

两对a_i, b_i相邻的排列数有$10! \cdot 2^2$

三对a_i, b_i相邻的排列数有$9! \cdot 2^3$

四对a_i, b_i相邻的排列数有$8! \cdot 2^4$

根据容斥原理有 $12! - C(4,1)11! \cdot 2 + C(4,2)10! \cdot 2^2 - C(4,3)9! \cdot 2^3 + C(4,4)8! \cdot 2^4$

四、设 10 个有区别的球放进 5 个有标记的盒子，要求第 1、4 个盒子有奇数个球，第 2、3 个盒子有偶数个球，第 5 个盒子至少有 1 个球，一共有多少种放法？（10 分）

根据题目要求，生成函数为

$$g(x)=\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)$$

$$g(x)=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2\cdot(e^x-1)$$

$$g(x)=\frac{1}{16}(e^{2x}-2+e^{-2x})(e^{2x}+2+e^{-2x})(e^x-1)$$

$$g(x)=\frac{1}{16}[(e^{2x}+e^{-2x})^2-4](e^x-1)$$

$$g(x)=\frac{1}{16}(e^{5x}-2e^x+e^{-3x}-e^{4x}+2-e^{-4x})$$

$$\mathrm{g}(x)=\frac{1}{16}\left(\sum_{n=0}^{\infty}5^n\frac{x^n}{n!}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}4^n\frac{x^n}{n!}+2-\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n\frac{x^n}{n!}\right)$$

$$g(x)=\frac{1}{16}\left(\sum_{n=0}^{\infty}5^n\frac{x^n}{n!}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-3)^n\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}4^n\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n\frac{x^n}{n!}\right)+\frac{1}{8}$$

$$g(x)=\frac{1}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(5^n-2+(-3)^n-4^n-(-4)^n)\frac{x^n}{n!}+\frac{1}{8}$$

$$h_n=5^n-2+(-3)^n-4^n-(-4)^n$$

$$h_{10}=5^{10}-2+(-3)^{10}-4^{10}-(-4)^{10}=7727520$$

五、求解非齐次线性递推关系 $h_n = 6h_{n-1} - 9\, h_{n-2} + 2n$，其中 $h_0=1$，$h_1=0$。（10 分）

齐次方程组为 $h_n = 6h_{n-1} - 9h_{n-2}$

特征方程为 $x^2 - 6x + 9 = 0$

解为 $x_1 = 3, x_2 = 3$

一般解为 $h_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n$

设 $h_n = C_1 n + C_2$

$C_1 n + C_2 = 6(C_1(n-1) + C_2) - 9(C_1(n-2) + C_2) + 2n$

$C_1 n + C_2 = (2 - 3C_1)n + 12C_1 - 3C_2$

$C_1 = 2 - 3C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$

$C_2 = 12C_1 - 3C_2$

$4C_2 = 12 \cdot \frac{1}{2}$

$C_2 = \frac{3}{2}$

因此，特解为 $h_n = \frac{1}{2} \cdot n + \frac{3}{2}$

结合一般解和特解，得 $h_n = c_1 3^n + c_2 n 3^n + \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$

$h_0 = 1$，$1 = c_1 + \frac{3}{2} \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}$

$h_1 = 0$，$0 = 3c_1 + 3c_2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2} + 3c_2 + 2 = 0$

$c_2 = -\frac{1}{6}$

递推式为$h_n = -\frac{1}{2} \cdot 3^n - \frac{1}{6} n 3^n + \frac{1}{2} n + \frac{3}{2}$

六、用 20 颗不同颜色的珠子穿成一条项链，问有多少种方法？　（10 分）

假设为 20 种不同的颜色在正 20 边形的顶点进行着色。

由于 20 颗不同颜色的珠子，所以无论怎么旋转和翻转都会出现不同的组合

显然 G 的恒等变换ρ_n^0保持 C 种所有 20!种着色不变。

再根据项链的对称性，所以，根据 Burnside 定理得

$$N(G,C)=\frac{1}{2(20)}(20!+0+\cdots+0)=\frac{1}{2}(20-1)!=\frac{1}{2}19!$$

种方法。