TD N° 6

Exercice 1 (6.10)

soit X le diamètre inférieur.

$$X \sim \mathcal{N}(\mu = 12, \ \sigma^2 = 0.02^2)$$

a.) On cherche $\mathbb{P}(X > 12.05)$

$$\mathbb{P}(X > 12.05) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 12.05)$$

$$\mathbb{P}(X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{12.05 - 12}{0.02}\right) = 1 - \Phi(2.5)$$

Table

$$\simeq 1 - 0.99379 = 0.00621$$

$$\mathbb{P}(X > 12.05) \simeq 0.621\,\%$$

b.) On cherche c tel que $\mathbb{P}(X > c) = 90\%$

$$\mathbb{P}(X > c) = 1 - \mathbb{P}(X \leq c) = \underbrace{1 - \Phi\left(\frac{c - 12}{0.02}\right)}_{\Phi\left(\frac{12 - c}{0.02}\right)} = 0.9$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{12 - c}{0.02}\right) = 0.9$$

on cherche dans la table z tel que $\Phi(z) = 0.9$

$$z \simeq 1.28 \Rightarrow \frac{12 - c}{0.02} = 1.28 \Rightarrow c = 11.9744$$

$\Phi(a) = \Phi(b) \Rightarrow \underline{\underline{a=b}}$ (injectivité)

car Φ est bijective donc injective.

Φ comme f° de répartition du $\mathcal{N}(0,1)$

c') on recherche $\mathbb{P}(11.95 \leq X \leq 12.05)$

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}(11.95 \leq X \leq 12.05) = \Phi\left(\frac{12.05-12}{0.02}\right) - \Phi\left(\frac{11.95-12}{0.02}\right)$$

$$= \Phi(2.5) - \Phi(-2.5)$$

$$= \Phi(2.5) - [1 - \Phi(2.5)]$$

$$= 2\,\Phi(2.5) - 1$$

$$\underset{\text{Table}}{\simeq} 98.758\%$$

<u>Exercice 4</u>

X = demande journalière ; $X \sim \mathcal{N}(\mu = 8, \sigma^2 = 4)$
Capacité = 12 = c

a) On cherche $\mathbb{P}(X > 12) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 12)$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{12-8}{2}\right)$$

$$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.97725$$

$\mathbb{P}(X > 12) \simeq 2.275\%$

b) (1) (2) - - - - - (7) (question c.)

succès = "demande excède la capacité"
soit Y le nombre de journées parmi 2 où la demande excède la capacité (où $X > c$)

$Y \sim Bin(n = 2, p = \mathbb{P}(\text{succès}) = \mathbb{P}(X > 12) = 2.275\%)$
on cherche $\mathbb{P}(Y = 2) = C_2^2 \, p^2 (1-p)^0$

$$= p^2 \simeq 0.00051756$$

c.) V le nombre de journées parmi 7 (une semaine) où $X > c$.

$V \sim Bin(n = 7, p = \mathbb{P}(X > 12) = 2.275\%)$
on cherche $\mathbb{P}(V \leq 2) = \mathbb{P}(V = 0) + \mathbb{P}(V = 1) + \mathbb{P}(V = 2) \simeq 99.96\%$

d) on cherche c tel que $\mathbb{P}(X \leq c) = 0.99$

(demande satisfaite si demande journalière $\leq$ capacité).

$$\underbrace{\mathbb{P}(X \leq c) = \Phi\left(\frac{c-8}{2}\right) = 0.99}_{}$$

$$z \text{ ? tq } \Phi(z) = 0.99$$

on prend le 1er z de la table tel que

$\Phi(z) \geqslant 0.99$ on a $z \geqslant 2.33$

$$\Rightarrow \frac{c-8}{2} \geqslant 2.33 \Rightarrow c \geqslant 12.66$$

EXERCICE 5

Q_i ⫫ , $Q_D = \sum_{i=1}^{n=10000} Q_i$, $Q_T = Q_D + U_1 + U_2$
et ⫫ U_i

$Q_i \sim \mathcal{N}(\mu = 250, \sigma^2 = 50^2)$

$U_1 \sim \mathcal{N}(\mu_{U_1} = 45000, \sigma^2_{U_1} = 5000^2)$

$U_2 \sim \mathcal{N}(\mu_{U_2} = 115\,000, \sigma^2_{U_2} = 20.000^2)$

a) Moyenne et écart-type de Q_D et Q_T :

$Q_D \sim \mathcal{N}(\mu_D, \sigma^2_D)$

* $\mu_D = \mathbb{E}(Q_D) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Q_i)$

$= 250 \times n = 2.500.000$

* $\sigma^2_D = Var(Q_D) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right) \overset{⫫}{=} \sum_{i=1}^{n} Var(Q_i)$

$= 50^2 \times n = 25.000.000$

$\Rightarrow \sigma_D = 5000$

* $Q_T \sim \mathcal{N}(\mu_T, \sigma^2_T)$

$\mu_T = \mathbb{E}(Q_T) = \mathbb{E}(Q_D + U_1 + U_2)$

$= \mathbb{E}(Q_D) + \mathbb{E}(U_1) + \mathbb{E}(U_2)$

$= \mu_D + 45000 + 115000 = 2.660.000$

$* \ \sigma_T^2 = Var(Q_T) = Var(Q_D + U_1 + U_2)$

$$\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} Var(Q_D) + Var(U_1) + Var(U_2)$$

$$= \sigma_D^2 + 5000^2 + 20.000^2 = 45.10^7$$

$\Rightarrow \sigma_T = 21213.20344$

b.) x_p = quantile d'ordre p pour la loi de X vérifie $\mathbb{P}(X \leq x_p) = p$. où $0 < p < 1$.

On rcherche a tel que $\mathbb{P}(Q_D < a) = 0.95$ ou 0.99

$$\mathbb{P}(Q_D \leq a) = \Phi\left(\frac{a - \mu_D}{\sigma_D}\right) = \Phi\left(\frac{a - 25.10^5}{5000}\right)$$

Table $\Rightarrow$ $* \ \Phi(z) = 0.95$ pour $z \simeq 1.645$

$$\frac{\alpha_{0.95} - 25.10^5}{5000} = 1.645$$

$$\Rightarrow \alpha_{0.95} \simeq 2508225$$

$* \ \Phi(z) = 0.99$ pour $z = 2.33$

$$\frac{\alpha_{0.99} - 25\,10^5}{5000} = 2.33$$

$$\Rightarrow \alpha_{0.99} \simeq 2511650$$

c.) Capacité c telle que la demande totale soit satisfaite avec proba 0.999

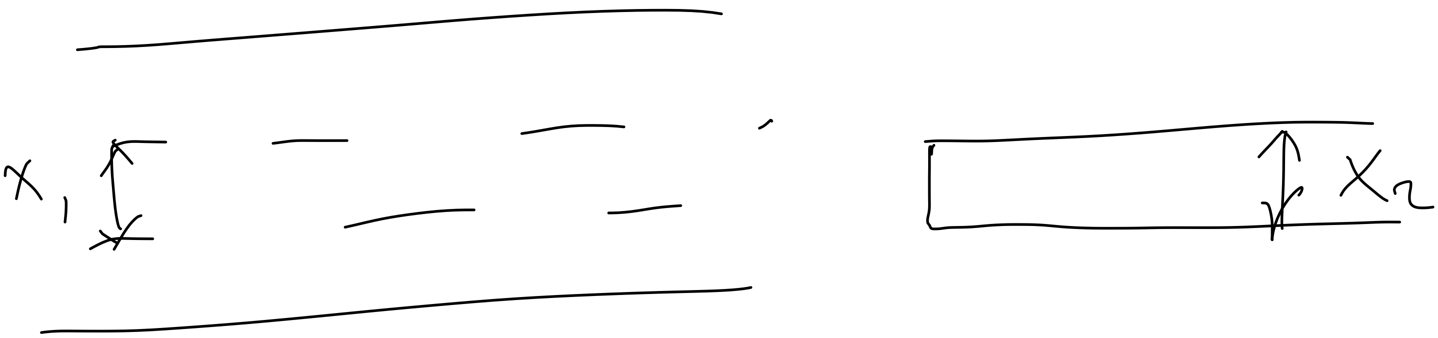
on cherche c tq $\mathbb{P}(Q_T < c) = 0.999$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Phi\left(\dfrac{c - \mu_T}{\sigma_T}\right) = 0.999 \\ \\ \Phi(z) \overset{?}{=} 0.999 \quad \text{(table)} \end{cases}$$

$$z = 3.09$$

$$\Rightarrow \frac{c - 2660000}{\sqrt{45 \cdot 10^7}} = 3.09$$

$$\Rightarrow c \simeq 2725549$$



$$\mathbb{P}(X_2 > X_1) = \mathbb{P}(Y < 0)$$

$$Y = X_1 - X_2$$

Exercice 6.21

i-ème erreur d'arrondi ; $E_i \sim \mathcal{U}(-0.5, 0.5)$ $\forall i = 1, 2, \dots, 50$

Posons $X = \sum_{i=1}^{50} E_i$, $E_i \perp\!\!\!\perp$

On cherche $\mathbb{P}(|X| > 5) = 1 - \mathbb{P}(|X| \leq 5)$

$n = 50$ (supposé assez grand) $= 1 - \mathbb{P}(-5 \leq X \leq 5)$

E_i sont indépendantes

$\Rightarrow$ Par le T.C.L $X = \sum_{i=1}^{n=50} E_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$

où $\mu = \mathbb{E}(E_i)$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(E_i)$

on a que $\mu = 0$ $\sigma^2 = \frac{1}{12}$

$$X \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{25}{6}\right)$$

$$\mathbb{P}(|X| > 5) = 1 - \Phi\left(\frac{5-0}{\sqrt{25/6}}\right) - \Phi\left(\frac{-5-0}{\sqrt{25/6}}\right)$$

$$= 2\left[1 - \Phi(\sqrt{6})\right]$$

$$\underset{\simeq}{\text{Table}} \quad 0.014286$$

$X_1 \quad X_2 \quad - - - \quad X_n \quad$ i.i.d

$$\mu = \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = - - - = \mathbb{E}(X_n)$$

$$\sigma^2 = Var(X_1) = - - - - = Var(X_n)$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} X_i}_{Y} \quad \underbrace{\qquad}_{}^{T.C.L} \quad \mathcal{N}\Big(\overbrace{n \times \mu}^{\mu_Y}, \underbrace{n \times \sigma^2}_{\sigma_Y^2}\Big)$$