Question n° 1 : (3 points)

On considère que deux types de défauts, notés A et B, sont susceptibles d'être observés sur les pièces d'une production.

Une analyse de cette production montre que 15% des pièces ont le défaut A, 20% des pièces ont le défaut B et 5% des pièces ont les deux défauts A et B.

On considère une pièce prise au hasard dans la production.

a) (1 point) Quelle est la probabilité que la pièce ait uniquement le défaut A ?

b) (1 point) Quelle est la probabilité que la pièce n'ait aucun des deux défauts ?

c) (1 point) Si la pièce n'a qu'un seul des deux défauts, quelle est alors la probabilité qu'elle ait le défaut B ?

Question n° 2 : (3 points)

Une boîte (boîte 1) contient 5 composants parmi lesquels un seul est défectueux. Une deuxième boîte (boîte 2) contient 4 composants parmi lesquels deux sont défectueux. Deux composants sont pris au hasard et sans remise de la boîte 1 et placés dans la boîte 2. Un composant est ensuite choisi au hasard de la boîte 2.

a) *(1,5 point)* Calculer la probabilité que le composant choisi de la boîte 2 soit défectueux.

b) *(1,5 point)* Si le composant choisi de la boîte 2 n'est pas défectueux, quelle est alors la probabilité qu'aucun composant défectueux n'ait été pris de la boîte 1 ?

Question n° 3 : (3 points)

Une distributrice automatique de jus de fruit frais a une capacité maximale de 75 litres. L'opérateur de maintenance estime que la demande quotidienne X en litres est décrite par la fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} 0{,}0008x & \text{si } 0 \leq x < 25 \\ 0{,}01 & \text{si } 25 \leq x \leq 100 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) (1 point) Quelle est la probabilité que la demande quotidienne dépasse la capacité de la distributrice ?

b) (1 point) Déterminer la demande quotidienne moyenne.

c) (1 point) Déterminer la quantité moyenne de jus vendu au cours d'une journée après que la distributrice soit remplie à pleine capacité.

Indication : exprimer d'abord la quantité de jus vendu Y comme une fonction $H(X)$ définie par morceaux.

Question n° 4 : (4 points)

Une boîte contient six jetons ayant des valeurs réparties de la façon suivante : un jeton a la valeur 0, trois jetons ont la valeur 1, et deux jetons ont la valeur 2. On extrait au hasard, successivement et sans remise, deux jetons de la boîte. Soit X la valeur du premier jeton, et Y celle du deuxième jeton.

a) (2 points) Déterminer, sous forme de tableau, la fonction de masse conjointe du vecteur $[X, Y]$. Prenez soin d'y inclure les distributions marginales de X et de Y.

Laisser les probabilités sous forme fractionnaire.

Supposons qu'un joueur paye 2$ et tire au hasard deux jetons de la boîte, sans remise. Il reçoit alors un montant en dollars égal à la somme des valeurs des deux jetons.

b) (0,5 point) Calculer la probabilité que le joueur gagne de l'argent.

c) (1,5 point) Soit T le gain net du joueur.

1.c) (0,5 point) Exprimer T en fonction de X et Y.

2.c) (1 point) Calculer l'écart type de T.

Question n° 5 : (4 points)

La roulette américaine est un jeu de hasard où les participants peuvent miser sur les nombres de 1 à 36, comprenant 18 nombres «rouges» et 18 nombres «noirs» ainsi que sur deux nombres spéciaux, le 0 et le 00. À chaque tour de roulette, un numéro gagnant est déterminé au hasard avec équiprobabilité et ce, indépendamment d'un tour à l'autre. Il est possible de miser sur un seul numéro, ou sur plusieurs numéros à la fois. Par exemple, une mise sur les nombres rouges est gagnante si le résultat de la roulette est un nombre rouge.

a) ***(2 points)*** *Quelle est la probabilité qu'un joueur qui mise toujours sur les nombres noirs gagne au moins cinq fois en six tours de roulette ?*

b) ***(2 points)*** *Supposons qu'un joueur ait gagné exactement quatre fois avec les nombres rouges en six tours de roulette. Quelle est la probabilité que ces gains soient survenus lors de quatre tours consécutifs ?*

Question n° 6 : (3 points)

Un logiciel change de version (mise à niveau) selon un processus de Poisson avec en moyenne 3 mises à niveau par année.

a) **(1 point)** Quelle est la probabilité que le logiciel soit mis à niveau au moins une fois au cours d'une année ?

b) **(1 point)** Soit T le temps qui s'écoule entre deux mises à niveau consécutives. Déterminer la moyenne et l'écart-type de T.

c) **(1 point)** Les versions numéros $4, 8, 12, 16, \ldots$ sont toujours des mises à niveau majeures (les autres sont mineures). Quelle est la probabilité que plus d'un an s'écoule entre deux mises à niveau majeures ?