Question n° 1 : (3 points)

On considère deux événements A et B tels que

$$P\left(A \cup \overline{B}\right) = 0{,}75; \quad P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0{,}85; \quad P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}10.$$

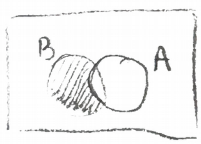
a) **(1 point)** Calculer la probabilité $P(A)$.

b) **(2 points)** Calculer la probabilité $P(A \mid B)$.

Réponse :

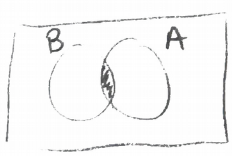
a) ① $P(A \cup \overline{B})$

$= 1 - P(\overline{A} \cap B)$



$P(\overline{A} \cap B) = 0.25.$

②

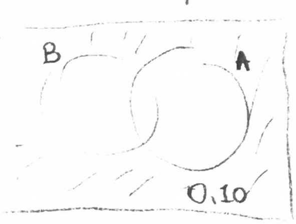


$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 0{,}15.$

0,15.

3



$P(A) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) - P(\overline{A} \cap B) = 1 - 0{,}1 - 0{,}25$

$= 0{,}65$ ✓

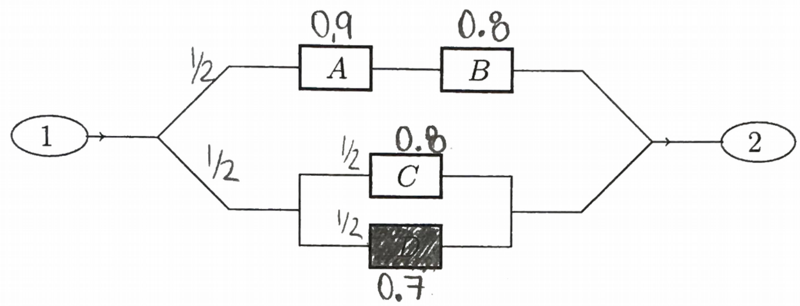
b) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}4} = 0{,}375$ ✓

$P(B) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) = 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}4$ ✓

Question n° 2 : (3 points)

2

On considère un système (voir schéma ci-dessous) constitué de quatre composants A, B, C et D qui opèrent indépendamment les uns des autres. Le système ne fonctionne que s'il y a au moins un chemin, liant les points 1 et 2, constitué de composants qui fonctionnent.



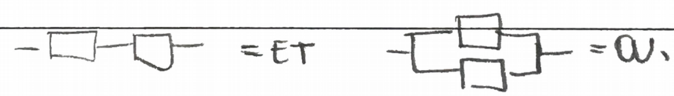
Les probabilités de fonctionnement sans panne des composantes pour une période donnée (fiabilité) sont :

$$P(A) = 0{,}90;\ \ P(B) = P(C) = 0{,}80;\ \ P(D) = 0{,}70.$$

a) (1 point) Calculer la fiabilité (i.e., la probabilité de fonctionnement sans panne) de ce système.

b) (2 points) Si le système fonctionne, quelle est la probabilité que le composant D ne fonctionne pas ? $P(\bar{D})$ $\bar{D} \cap$ syst fct

---



Réponse :

a) $P(\text{sys}) = \frac{1}{2} P(A)P(B) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})P(C) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})P(D)$

$= \frac{1}{2}(0.9)(0.8) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})0.8 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})(0.7) =$

$= 0.36 + 0.2 + 0.175 = 0.735.$

b) $P(\text{Syst fct sans D} \mid \text{sys fct}) \cancel{=} \dfrac{P(\text{syst fct. sans D} \cap \text{syst fct})}{P(\text{syst. fct})} = \dfrac{P(\text{syst. fct sans D})}{P(\text{syst fct})}$

1

$P(\text{syst. fct sans D}) = \frac{1}{2}P(A)P(B) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})P(C) = 0.56.$

$= \dfrac{0.56}{0.735}$

$P(\bar{D}) = 0.3$ $P(\text{D fonctionne pas}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})P(\bar{D}) = 0.075$

$= 0.76$

Il y a donc 76% des chances que le syst fct sans D.

alors $1 - 0.76 = 0.24$. Il y a 24% des chances que D ne fonctionne pas.

Question nº 3 : (4 points)

Soit X une variable aléatoire de fonction de densité

$$f_X(x) = \begin{cases} k\,x^3 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où k est une constante réelle.

a) **(1 point)** Déterminer la valeur de la constante k et calculer $P(X \geq 1/2)$.

b) **(3 points)** On considère une deuxième variable Y définie en fonction de X par

$$Y = 1 - X^2.$$

1.b) (1 point) Calculer la moyenne de Y, c'est-à-dire $E(Y)$.

2.b) (2 points) Déterminer la fonction de répartition de Y, c'est-à-dire $F_Y(y)$, en précisant son domaine.

Réponse :

a) $\int_0^1 Kx^3 dx = 1 \qquad K\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 1 \qquad K\left[\frac{1}{4}\right] = 1$

$\boxed{K=4}$

1

Fct de répartition:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^4 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

$\int_0^x 4x^3 dx = \left[\frac{4}{4}x^4\right]_0^x = x^4 - 0$

pas besoin

donc $P(X \geq 1/2) = 1 - F_X(1/2) = 1 - (\frac{1}{2})^4 = 0,9375$

b) 1) $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx = 4\int_0^1 (1-x^2)x^3 dx = 4\int_0^1 x^3 - x^5 dx = 4\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1$

$= 4\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right] = 1/3$

1

Réponse (suite)

2) $F_Y(y)$

domaine de y : à $x=0 \rightarrow y = 1-0 = 1$

à $x=1 \rightarrow y = 1-1^2 = 0$

donc $y \in [0,1]$.

$$f_Y(y) \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } y \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\int_0^x (1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^x = x - \frac{x^3}{3}$$

$$F_Y(y) \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x - x^3/3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x<1. \end{cases}$$

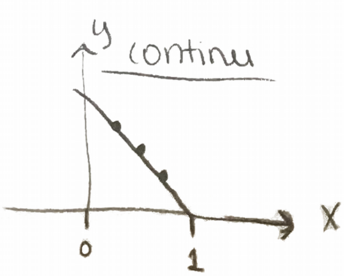
Trouver $f_Y(y)$: bijectivité ?

$y = 1-x^2$

$y-1 = x^2$

$1-y = x^2$

$x = \sqrt{1-y} = g^{-1}(y)$.



0,5/3

Question nº 4 : (4 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que

x	0	1
$P(X=x)$	0,6	?

y	0	1	2
$P(Y=y)$	0,2	?	0,3

y	0	1	2
$P(Y=y \mid X=1)$	0,3	0,4	?

a) **(2 points)** Déterminer la fonction de masse conjointe du vecteur $[X, Y]$ sous la forme d'un tableau. Calculer $P(X=1 \mid Y=0)$.

b) **(2 points)** Soit la variable aléatoire T définie par $T = 3 + 2X - 3Y$. Calculer la moyenne et l'écart-type de T.

Réponse :

a)

$y \backslash x$	0	1	$P_y(y)$
0	0.08	0.12	0.2
1	0.34	0.16	0.5
2	0.18	0.12	0.3
$P_x(x)$	0.6	0.4	1

① $P(y=0 \mid x=1) = \dfrac{P(y=0 \cap x=1)}{P(x=1)}$

$(0.3)(0.4) = P(y=0 \cap x=1) = 0.12$

② $P(y=1 \mid x=1) = \dfrac{P(y=1 \cap x=1)}{P(x=1)}$

$P(y=1 \cap x=1) = (0.4)(0.4) = 0.16$

③ $P(X=1 \mid y=0) = \dfrac{P(X=1 \cap y=0)}{P(y=0)} = \dfrac{0.12}{0.2} = 0.6$

b) $E(T) = 3 + 2E(X) - 3E(Y)$

$E(X) = \sum x P_x(x) = 0(0.6) + 1(0.4) = 0.4$

$E(y) = \sum y P_y(y) = 0(0.2) + 1(0.5) + 2(0.3) = 1.1$

$E(T) = 3 + 2(0.4) - 3(1.1) = 0.5$

Réponse (suite)

variance de T:

$V(T) = 2^2 V(X) + (-3)^2 V(y)$

$V(x) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad \rightarrow \quad E(X^2) = \sum x^2 p_x(x)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0{,}4$

$= 0{,}4 - (0.4)^2$

$= 0{,}24$ ✓ +0,2✓

$V(y) = a_i V(X) + 2 \sum a_i a_j \operatorname{cov}(x, y)$

$= 2(0.24) + 2(2)(-3) \operatorname{cov}(x, y)$

$= 0.48 - 12(E(xy) - 0.44)$

$\operatorname{cov}(x,y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$= E(xy) - (0.4)(1.1)$

$= E(xy) - 0{,}44.$

$\downarrow$

il me manque la formule de $E(XY)$ ...

donc

$V(T) = 4(0.24) + 9\left(0.48 - 12(E(xy) - 0.44)\right)$

$= 0{,}96 + 9(5.76 - 12E(xy))$

$= 52.8 - 108E(xy)$

$E(XY) = \sum_x \sum_y xy P_x(x,y)$

$=$

Question nº 5 : (3 points) 2

À un poste de péage autoroutier, il arrive en moyenne 6 automobiles par minute selon un processus de Poisson.

a) (1 point) Quelle est la probabilité qu'au moins 2 automobiles se présentent au poste de péage durant un intervalle donné de 10 secondes ?

b) (1 point) Quelle est la probabilité qu'on attende plus de 20 secondes pour l'arrivée d'une première automobile au poste sachant qu'il n'y a eu aucune arrivée durant les premières cinq secondes ?

c) (1 point) On observe les écarts de temps entre deux arrivées successives d'automobiles au poste. En moyenne, combien d'observations doit-on faire pour obtenir un premier écart qui dépasse 20 secondes ?

20 secondes

Réponse :

a) X : nb auto arrivé par minute

$X \sim P(6)$

$c = \lambda t = \frac{6}{60s} \cdot 10s = 1$

0.75

$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2)$

$= 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - (e^{-1} + e^{-1}) = 1 - 2e^{-1}$

$= \cancel{1 - e^{-2}}$

$P(X=0) = \frac{e^{-1} 1^0}{0!} = e^{-1}$

$P(X=1) = \frac{e^{-1} 1^1}{1!} = e^{-1}$

b) 0.5

$5s$ $20s$

Y : temps jusqu'à ce qu'une auto arrive.

$Y \sim Exp(0.1)$ $P(Y>20 \mid Y>5) \Rightarrow$ propriété sans mémoire!

$\hookrightarrow P(Y>15) = 1 - e^{-\lambda x} = 1 - e^{-0.1(15)}$

$= 1 - e^{-1.5}$

$= 0{,}777$

$\lambda = 0.1 = \frac{6 \text{ voitures}}{60s}$

$= \frac{0.1 \text{ voiture}}{\text{seconde}}$

Réponse (suite)

c) W: nb observations avant d'obtenir un écart de 20s

$W \sim G(p)$ p: prob écart >20s

0.75

$P(|Y| > 20) = e^{-0.1(20)} = e^{-2}$

$W \sim G(e^{-2})$

P(W

Question nº 6 : (3 points)

Pour un usage particulier, on peut utiliser une pile de type A ou une pile de type B. On considère que la durée de fonctionnement jusqu'à l'épuisement (en heures) d'une pile suit une loi normale. Le tableau suivant donne les paramètres de cette loi pour chaque type de pile.

Type de pile	Moyenne	Variance σ^2
A	50	9
B	55	16

a) (1,5 point) Calculer la probabilité qu'une pile de type A fonctionne pendant plus de 54 heures en tout étant donné qu'elle a fonctionné pendant 10 heures.

b) (1,5 point) Calculer la probabilité qu'une pile de type A fonctionne pendant au moins 15 heures de plus qu'une pile de type B.

A B B+15

Rappel : la table de la loi normale est en annexe.

Réponse :

b) $P(A > B+15)$

puisque A et B sont indep. on peut utiliser l'additivité de la loi normale.

$P(A - B > 15)$

$D = A - B$

$D \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

$\mu_y = \mu_A - \mu_B = 50 - 55 =$

$\sigma_y^2 = \sigma_A^2 - \sigma_B^2 = 9 - 16 = \cancel{-7}$ ← impossible de faire la racine d'un nombre négatif... il doit y avoir une erreur!

sinon on additionne..

Non

$D \sim N(-5, -7)$

0/1.5

$P(D > 15) = 1 - P(D \leq 15)$

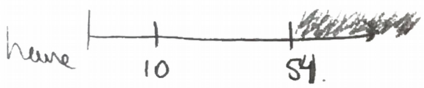
$= 1 - P\left(Z \leq \frac{15 - \mu_y}{\sigma_y}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{15 - -7}{\sigma_y}\right)$

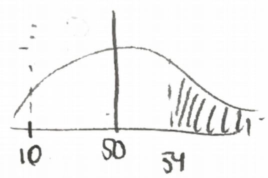
$= 1 - \Phi(\ldots)$

Table...

Réponse (suite)

a) $P(A>54 \mid A \geq 10) = \dfrac{P(A>54 \cap A \geq 10)}{P(A \geq 10)} = \dfrac{P(A>54)}{P(A \geq 10)}$ = 1?





0,75 / 115

$P(A>54) = 1 - P(A \leq 54)$

$= 1 - P\left(Z \leq \dfrac{54-50}{3}\right)$

$= 1 - \underset{\text{Table}}{\Phi}(1.33) = 1 - 0{,}90824 = 0{,}09176$ des chances qu'elle fct plus de 54h.

Si elle fonctionne plus de 54h, c'est qu'elle a nécessairement fonctionné déjà 10hrs.