Examen intra MTH2302D, automne 2012

Sigle et titre du cours	Groupe	Trimestre
MTH2302D – Proba. et statistique	Tous	A2012

Professeur	Local	Téléphone
Sébastien Le Digabel	A-520.7	4291

Date	Heures	Durée
Mercredi 17 octobre 2012	12h45-14h45	2h00

Toute documentation est permise. Seules les calculatrices portant l'autocollant de l'AEP sont autorisées.
Agendas électroniques et téléphones sont interdits.
Cet examen contient 6 questions sur un total de 18 pages (excluant celle-ci).
Vous devez répondre sur le questionnaire et le remettre.
Justifiez vos réponses sauf si indiqué.

Total : 20 points

Exercice 1 (3 points)

Un examen à choix multiples comprend trente questions indépendantes. Pour chaque question, cinq réponses sont proposées. Toute bonne réponse donne deux points et toute mauvaise réponse fait perdre un demi-point. Supposons qu'une étudiante a déjà répondu à vingt questions. Ensuite, elle décide de choisir une réponse au hasard pour chacune des dix questions restantes, sans même les lire. Si les bonnes réponses sont distribuées au hasard parmi les cinq choix, quelle est la note (sur soixante) à laquelle elle peut s'attendre, en supposant qu'elle a quatre chances sur cinq d'avoir réussi n'importe laquelle des 20 premières questions ?

Solution 1 :

Soit Y le nombre de points obtenus à l'examen. On a $Y = \sum_{i=1}^{30} X_i$ où Xi est le nombre de points obtenus à la ième question.

On a pour $i \in \{1,2, \dots, 20\}$: $E(X_i) = -\frac{1}{2} * \frac{1}{5} + 2 * \frac{4}{5} = \frac{3}{2}$

et pour tout $i \in \{21, 22, \dots ,30\}$: $E(X_i) = -\frac{1}{2} * \frac{4}{5} + 2 * \frac{1}{5} = 0$

On a donc $E(Y) = 20 * \frac{3}{2} + 10 * 0 = 30$ (note attendue de 30 sur 60)

Exercice 2 (4 points)

Les tests utilisés pour diagnostiquer la présence d'un certain virus dans le sang sont souvent imparfaits. Ils peuvent donner des résultats appelés *faux positifs* (la personne n'a pas le virus mais le test le détecte à tort) ou *faux négatifs* (la personne a le virus mais le test ne le détecte pas). Dans le cas de ce virus, les tests utilisés ont un taux de faux positifs de 0.55% et un taux de faux négatifs de 1.90%. On suppose que 0.03% des gens sont infectés par ce virus. Trouvez la probabilité qu'une personne dont le test est positif soit réellement infectée par le virus.

Solution 2:

Soit A : « Le test détecte le virus » et B : « une personne est infectée par le virus ». En utilisant le théorème de Bayes et la formule des probabilités totales, on a

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{0.9810 * 0.0003}{0.9810 * 0.0003 + 0.0055 * 0.9997} \approx 0.0508$$

Exercice 3 (3 points)

Soit [X, Y] un vecteur aléatoire discret dont la fonction de masse conjointe est donnée par le tableau suivant :

$y \backslash x$	0	1
0	0.2	0.5
1	0	0.3

a) **(2 points)** Calculer $\rho(X, Y)$.

b) **(1 point)** Calculer $V(X - Y)$.

Solution 3 :

a) Puisque les valeurs possibles de X et de Y sont 0 et 1, elles suivent les lois de Bernoulli (non indépendantes). On a donc

$$E(X) = p_1 = P(X = 1) = 0.8 .$$

$$V(X) = p_1(1 - p_1) = 0.8 \text{ X } 0.2 = 0.16 .$$

$$E(Y) = p_2 = P(Y = 1) = 0.4 .$$

$$V(Y) = p_2(1 - p_2) = 0.3 \text{ X } 0.7 = 0.21 .$$

Le seul couple (x,y) de produit non nul est (1,1); on a donc

$$E(XY) = 1 \text{ X } 1 \text{ X } P(X = 1, Y = 1) = 0.3 .$$

$$COV(X,Y) = 0.3 - 0.8 \text{ X } 0.3 = 0.06 .$$

$$\rho(X, Y) = \frac{0.06}{\sqrt{0.16}\sqrt{0.21}} \approx 0.3273 .$$

b) On a

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2 \text{ X } COV(X,Y)$$

$$= 0.16 + 0.21 - 2 \text{ X } 0.06 = 0.25$$

Exercice 4 (3 points)

Un scientifique effectue deux expériences de durées aléatoires indépendantes (mesurées en heures). La durée de la première expérience est une variable aléatoire X ~ Exp(λ) dont la médiane est 7. La durée de la deuxième expérience est une variable aléatoire Y qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [0; b] avec b > 0. Le scientifique a démontré que $E(Y^4) = 5$.

a) **(1 point)** Trouvez les valeurs des paramètres λ et b des deux expériences.

b) **(2 points)** Soit A l'événement « La première expérience dure moins de trois heures » et soit B l'événement « La deuxième expérience dure moins d'une heure ». Calculez P(A ∪ B)

Solution 4 :

a) Loi exponentielle : $\tilde{x} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = 7, alors\ \lambda = \frac{\ln(2)}{7} \approx 0.099$.

Loi uniforme : $E(Y^4) = \int_0^b y^4 \frac{1}{b} dy = \left.\frac{y^5}{5b}\right|_0^b = \frac{b^4}{5} = 5, alors\ b = \sqrt{5} \approx 2.236$.

b) On a P(A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B) = P(A) + P(B) – P(A)P(B) par indépendance de X et Y. On calcule

$$P(A) = P(X < 3) = F_X(3) = 1 - e^{-\left(\frac{3\ln(2)}{7}\right)} \approx 0.2570 .$$

$$P(B) = P(Y < 1) = F_Y(1) = \frac{1-0}{\sqrt{5}-0} \approx 0.4472 .$$

$$P(A \cup B) \approx 0.2570 + 0.4472 - 0.2570\ X\ 0.4472 \approx 0.5893 .$$

Exercice 5 (4 points)

À 6h30 du matin, la station de radio POLY-FM annonce un concours : « Les deuxième, quatrième et sixième appels gagneront une paire de billets pour le spectacle de Madame X! » Les auditeurs appellent alors selon un processus de Poisson de taux λ = 3 appels par minute.

a) **(1 point)** Calculez la probabilité qu'il y ait exactement quatre appels dans la première minute du concours.

b) **(3 points)** En moyenne, combien y aura-t-il d'appels gagnants dans les trente premières seconds du concours ?

Solution 5 :

a) Le nombre d'appels dans la première minute est une v.a. N qui suit une loi Poi(c = λt) avec *λ = 3* et *t = 1*. On a donc $P(N = 4) = \frac{e^{-3}3^4}{4!} \approx 0.1680$.

b) Le nombre d'appels dans les 30 premières secondes est une v.a. X qui suit une loi Poi(c = λt) avec *λ = 3* et *t = 0.5*. Le nombre d'appels gagnants dans cette même période est une variable aléatoire Y = H(X) définie comme suit :

$$Y = \begin{cases} 0\ si\ X{=}0\ ou\ 1 \\ 1\ si\ X{=}2\ ou\ 3 \\ 2\ si\ X{=}4\ ou\ 5 \\ 3\ si\ X{=}6\ ou\ plus \end{cases}$$

En utilisant la table de la loi de Poisson pour *c = 1.5*, on trouve :

$$P(Y = 0) = P(X \leq 1) \approx 0.557.$$

$$P(Y = 1) = P(X \leq 3) - P(X \leq 1) \approx 0.934 - 0.557 = 0.377$$

$$P(Y = 2) = P(X \leq 5) - P(X \leq 3) \approx 0.995 - 0.934 = 0.061$$

$$P(Y = 3) = P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) \approx 1 - 0.995 = 0.005$$

(On peut aussi faire les calculs avec la fonction de masse $p_x(x) = \frac{e^{-1.5}1.5^x}{x!}$ et se passer de la table).

On a au final $E(Y) \approx 1 * 0.377 + 2 * 0.061 + 3 * 0.005 = 0.514$.

Exercice 6 (3 points)

Le propriétaire d'une petite entreprise organise un 5 à 7 pour ses vingt employés. Ce dernier a remarqué que tous les employés ont échangé entre eux une poignée de main exactement une fois au cours de la soirée.

a) **(1 point)** Déterminez le nombre de poignées de main qui ont été échangées entre les employés au cours de la soirée.

b) **(2 points)** Un serveur (entré à plusieurs reprises et de façon aléatoire dans la salle de réception) a vu exactement cinq poignées de main d'employés. Calculez la probabilité que, parmi ces cinq poignées de main, il y en ait eu exactement deux qui impliquaient l'ingénieure en chef de l'entreprise.

Solution 6 :

a) Puisque deux employés participent à chaque poignée de main, et que chaque paire de d'employés ne se serre la main qu'une seule fois, il y a eu $\binom{20}{2} = 190$ poignées de main au cours de la soirée.

b) On peut modéliser la situation ainsi : il y a N = 190 poignées de main, dont D = 19 impliquant l'ingénieur en chef (elle a serré la main des 19 autres employés). Les cinq poignées de main vues par le serveur (n = 5) sont choisies au hasard et sans remise parmi les 190 possibles. Le nombre X de poignées de main impliquant l'ingénieure en chef parmi les cinq vues par le serveur suit donc une loi hypergéométrique avec N = 190, D = 19, et n = 5. On a donc

$$P(X = 2) = \frac{\binom{19}{2}\binom{171}{3}}{\binom{190}{5}} = \frac{171 * 818\,805}{1\,956\,800\,538} \approx 0.0716$$