TD N° 4

EX 4.5

a) Proba que ce plan engendre une interruption de la production :

soit X le nombre de pièces défectueuses parmi les 50

on cherche $\mathbb{P}(X > 2)$. Loi de X ?

① ② ...... ㊿

soit succès = " pièce défectueuse "

X est donc le nombre de succès parmi 50.

$\Rightarrow X \sim Bin(n = 50, p = \mathbb{P}(\text{succès}))$, $p = ?$

soit $\hat{p}$ la proportion de succès, on a que

$\hat{p} = \frac{X}{n}$ or $\mathbb{E}(\hat{p}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \times X\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X)$

$= p = 2\%$.

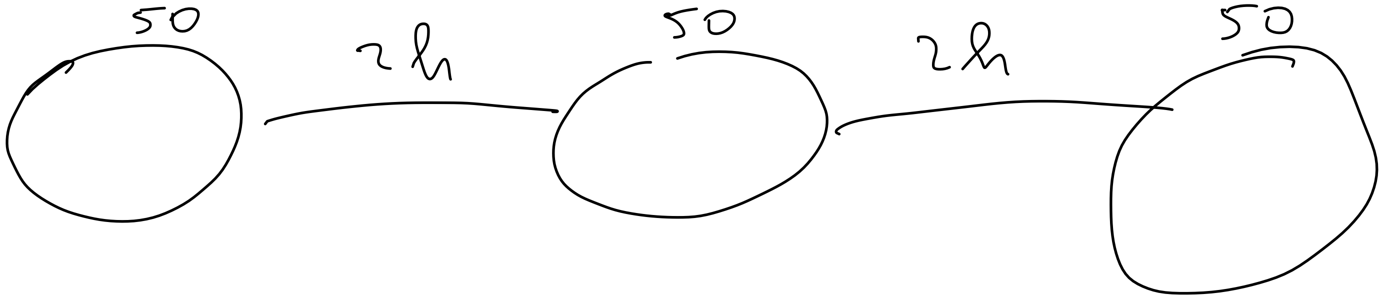
d'où $X \sim Bin(n = 50, p = 0.02)$

$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - [\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)]$

où $\mathbb{P}(X = k) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$

$\mathbb{P}(X > 2) \simeq 7.84\%$

b.)



Soit Y le nombre d'essais sans défauts parmi 3 (consécutifs).

On cherche $\mathbb{P}(Y=3)$, Loi de Y ?

$Y \sim Bin(n'=3, p' = \mathbb{P}(\text{succès}))$

succès = " Avoir un lot sans Défectueux "

$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{succès}) = \mathbb{P}(X=0) = C_0^n \, 0.2^0 (1-0.02)^{n-0}$

$= (1-p)^n = 0.98^{50}$

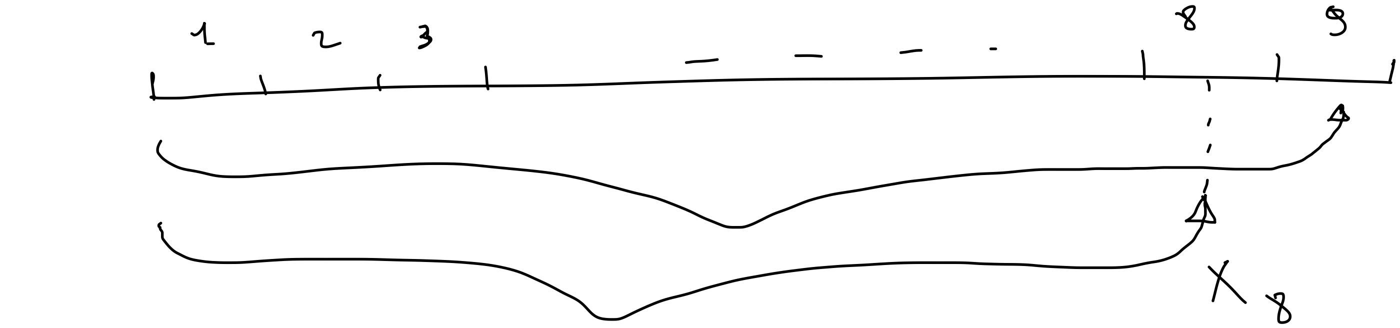
$Y \sim Bin(n'=3, p' = 0.98^{50}$

$\mathbb{P}(Y=3) = C_3^3 \, p'^3 (1-p')^{3-3} = p'^3 = (0.98)^{150}$

$\simeq 4.83\%$.

Exercice 3

$$(X_t)_t$$



Proba que durant les 9 prochaines semaines, la production cesse pendant une semaine ou plus à cause d'un manque de pièces de rechange.

soit X_t le nombre de pannes (liées à une pièce) en t semaines.

$$\underbrace{X_{t_1}} \quad \perp \quad \underbrace{X_{t_2}}$$

$$X_t \sim \mathcal{P}(c = \lambda t)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{t}$$

Alors $X_t \sim \mathcal{P}(c = \lambda t)$.

or $\mathbb{E}(X_5) = 1$ (énoncé).

Par le cours, $\mathbb{E}(X_t) = c = \lambda t$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X_5) = 5\lambda$$

$$\Rightarrow 5\lambda = 1 \text{ d'où } \lambda = \frac{1}{5}.$$

$$\Rightarrow X_t \sim \mathcal{P}\left(c = \frac{1}{5} t\right)$$

On recherche la proba d'observer plus de 2 pannes durant les 8 1eres semaines : dans ce cas la production cesse pour une semaine ou plus.

$$\mathbb{P}(X_8 > 2) = ? \qquad X_8 \sim \mathcal{P}\left(c = \frac{8}{5}\right)$$

$$\mathbb{P}(X_8 > 2) = 1 - \mathbb{P}(X_8 \leq 2)$$

$$= 1 - \left[\mathbb{P}(X_8 = 0) + \mathbb{P}(X_8 = 1) + \mathbb{P}(X_8 = 2)\right]$$

où $\forall\, k = 0, 1, 2, \ldots \quad \mathbb{P}(X_8 = k) = \dfrac{e^{-c}\, c^k}{k!}$

$$\mathbb{P}(X_8 > 2) = 1 - \left(e^{-1.6} + e^{-1.6} \times 1.6 + e^{-1.6}\frac{(1.6)^2}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{97}{25}\, e^{-8/5} \simeq 21.66\,\%.$$

Exercice 4

Soit X_t le nombre d'imperfections sur t m^2.

$X_t \sim \mathcal{P}(c = \lambda t)$

X_1 est donc le nombre d'imperf. / m^2.

$\mathbb{E}(X_1) = 0.1$ or $\mathbb{E}(X_t) = \lambda t \Rightarrow \mathbb{E}(X_1) = \lambda$

d'où $\underline{\lambda = 0.1}$

$$X_t \sim \mathcal{P}(c = 0.1 t)$$

* 500 \$ si ≥ 3 imperfect.
* Profit brut = 1000 \$

a) Profit net moyen ; soit $Y \equiv$ Profit net.

on cherche $\mathbb{E}(Y)$.

On sait que X_{10} = nombre d'imperf. sur la surface totale de la voiture.

$R_Y = \{500, 1000\}$

$Y = 500 \iff \{X_{10} \geq 3\}$

$Y = 1000 \iff \{X_{10} \leq 2\}$

où $X_{10} \sim \mathcal{P}(c = 1)$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in R_Y} y\,\mathbb{P}(Y = y) = 500 \times \mathbb{P}(Y = 500) + 1000\,\mathbb{P}(Y = 1000) = 500 \times \mathbb{P}(X_{10} \geq 3) + 1000 \times \mathbb{P}(X_{10} \leq 2)$$

$$\mathbb{P}(X_{10} \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X_{10} \leq 2)$$

$$= 1 - [\mathbb{P}(X_{10} = 0) + \dots + \mathbb{P}(X_{10} = 2)]$$

$$= 1 - \frac{5}{2e}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(Y) = 500\left(1 + \frac{5}{2e}\right) \simeq 959.85 \$$$

b') On prend ici $\lambda' = 0.05$

$$\Rightarrow X'_t \sim \mathcal{P}(c = \lambda' t) = \mathcal{P}(c = 0.05t)$$

donc $X'_{10} \sim \mathcal{P}(c = 0.5)$

Y_c = Profit net avec le nouveau procédé.

$$Y_c = 500 - c \iff \{X'_{10} \geq 3\}$$

$$Y_c = 1000 - c \iff \{X'_{10} \leq 2\}$$

$$\mathbb{E}(Y_c) = (500 - c)\mathbb{P}(X'_{10} \geq 3) + (1000 - c)\mathbb{P}(X'_{10} \leq 2)$$

$$\mathbb{P}(X'_{10} \leq 2) = \frac{13}{8\sqrt{e}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(Y_c) = 500\left(1 + \frac{13}{8\sqrt{e}}\right) - c$$

Le nouveau procédé est plus rentable si

$$\mathbb{E}(Y_c) > \mathbb{E}(Y) \iff 500\left(1 + \frac{13}{8\sqrt{e}}\right) - c > 500\left(1 + \frac{5}{2e}\right)$$

$$\iff c < 500\left(\frac{13}{8\sqrt{e}} - \frac{5}{2e}\right) \simeq 32.95685955$$

Exercice 5

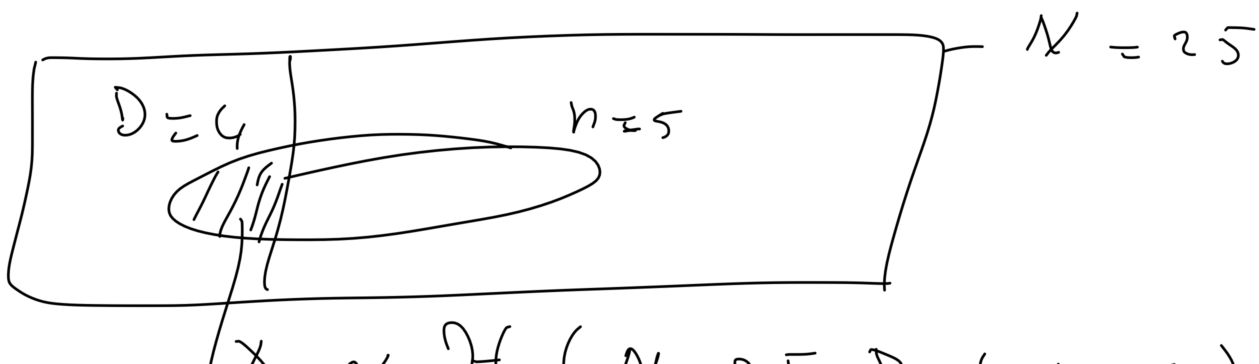
$N = 25 \qquad D = 4 \qquad \underbrace{n = 5}$

a) Proba que le lot soit accepté :

Soit X le nombre d'appareils déf (parmi les 5 choisi)

$X \in R_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

on recherche $\mathbb{P}(X < 3)$.



$X \sim \mathcal{H}(N = 25, D = 4, n = 5)$.

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_k^D \, C_{n-k}^{N-D}}{C_n^N} \quad \text{(Loi Hypergéom)}$$

$$\mathbb{P}(X < 3) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$$

$$= \frac{2489}{2530} \simeq 98.38\%$$

b) Taille moyenne des Lots accepté :

soit T = taille du lot accepté. $\mathbb{E}(T)$?

$T \in R_T = \{23, 24, 25\}$

$\{T = 23\} \iff \{X = 2\}$ conditionnellement à $X \leq 2$

$\{T = 24\} \iff \{X = 1\}$ - - - "

$\{T = 25\} \iff \{X = 0\}$ - - - "

$$\mathbb{P}(T = 23) = \mathbb{P}(X = 2 \mid X \leq 2) = \frac{\mathbb{P}(X = 2)}{\mathbb{P}(X \leq 2)}$$

$$\mathbb{P}(T = 24) = \mathbb{P}(X = 1 \mid X \leq 2) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, X \leq 2)}{\mathbb{P}(X \leq 2)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X = 1)}{\mathbb{P}(X \leq 2)}$$

$$\mathbb{P}(T = 25) = \frac{\mathbb{P}(X = 0)}{\mathbb{P}(X \leq 2)}$$

$$\mathbb{E}(T) = \frac{3175}{131} \simeq 24.24$$

c) Approx d'une Hypergéom par une Binomiale.

$$X \sim \mathrm{Bin}\left(n = 5, \ p = \frac{D}{N} = \frac{4}{25}\right)$$

$$\mathbb{P}(X < 3) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)$$

où $\mathbb{P}(X = k) = C_k^n \, p^k (1-p)^{n-k}$

$\mathbb{P}(X < 3) \simeq 0.9682$ (au lieu de 0.9838, soit une erreur de 1.56%).