Chapitres 1 à 6/ Notions importantes

1-Événements/Probabilités

- $\overline{A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \dots \cup \overline{A_n}$ et $\overline{A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}$ (lois de Morgan).
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ (voir le diagramme de VENN).
- Si A et B incompatibles (disjoints), $A \cap B = \emptyset$, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ avec $(P(B) \neq 0)$ (Probabilité conditionnelle).
- A et B indépendants $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A|\bar{B}) = P(A)$ ou $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$, mais $P(A|\bar{B}) \neq 1 - P(A|B)$.
- Loi des probabilités totales : $P(B) = \sum_k P(B|A_k)P(A_k)$ où les $\{A_k\}$ forment une partition.
- Loi de Bayes : $P(A_j|B) = P(B|A_j)P(A_j)/\sum_k P(B|A_k)P(A_k)$ où les $\{A_k\}$ forment une partition.
- Dénombrement : tirage de k éléments parmi n.
  - Tirages successifs (1 à 1) avec remise : n^k possibilités.
  - Tirages successifs (1 à 1) sans remise : $A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$ possibilités.
  - Tirage simultané : $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ possibilités.
  - Permutation d'objets semblables : $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ possibilités.

2-a-Variables aléatoires

Type de variable	Fonction de masse/ Fonction de densité	Répartition $F_X(x) = P(X \leq x)$	Espérance $E(X)$	Variance $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
Discrète	Masse $p_X(x)$ $\sum P_X(x) = 1$	$\sum_{y \leq x} P_X(y)$	$\sum_x xP_X(x)$	$E(X^2) = \sum_x x^2 P_X(x)$
Continue	Densité $f_X(x)$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$	$\int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$	$\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$	$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$

$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$. $f_X(x) = \frac{d(F_X(x))}{dx}$

2-b-Fonctions d'une variable aléatoire $Y = g(X)$

- X, Y discrètes : $P_Y(y) = \sum_D P_X(x)$ avec $D = \{x: y = g(x)\}$.
- X continue, Y discrètes : $P_Y(y) = \int_D f_X(x)dx$ avec $D = \{x: y = g(x)\}$.
- X, Y continues : Si $g(X)$ bijective (monotone) de D_X vers D_Y alors $f_Y(y) = \left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| * f_X(g^{-1}(y))$
- $E(g(X)) = \sum_x g(x)P_X(x)$ (X discrète) ou $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$ (X continue).
- $V(g(X)) = E\left((g(x))^2\right) - (E(g(x)))^2$

- $E(aX+b) = aE(X) + b$ et $V(aX+b) = a^2V(X)$.
- $E(X^k)$: Moment d'ordre k de X. Ici $g(X) = X^k$.

3-Vecteurs aléatoires (X, Y)

3-a) Vecteurs discrets $P_{X,Y}(x,y)$: fonction de masse conjointe

- Masse marginale : $P_X(x) = \sum_y P_{X,Y}(x,y)$. $P_Y(y) = \sum_x P_{X,Y}(x,y)$.
- Masse conditionnelle : $P_{Y|X=x}(y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_X(x)}$ et $P_{X|Y=y}(x) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}$.
- Espérance conditionnelle : $E(Y|X=x) = \sum_y y\, P_{Y|X=x}(y)$.
- Indépendance entre X et Y: ssi $P_{X,Y}(x,y) = P_X(x)P_Y(y)$ pour tout couple (x,y). Donc $P_{Y|X=x}(y) = P_Y(y)$.

3-b) Covariance/corrélation

- $\rho = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \in [-1,1]$ où $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- $\boldsymbol{E(XY)} = \sum_x \sum_y \boldsymbol{xy}\, P_{X,Y}(x,y)$ (vecteur discret) ou $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x,y)dxdy$ (vecteur continu).
- $Y = aX + b$ donc $\rho = 1$ si $a > 0$, $\rho = -1$ si $a < 0$.
- X, Y indépendantes $\Rightarrow \rho = 0$. Dans ce cas, $cov(X,Y) = 0$, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.
  - **Combinaison linéaire** $Y = a_0 + a_1X_1 + \cdots a_nX_n$
    - $E(Y) = a_0 + a_1E(X_1) + \cdots a_nE(X_n)$.
    - $V(Y) = a_1^2V(X_1) + \cdots + a_n^2V(X_n) + 2\sum_{tous\ les\ couples} a_ia_jcov(X_i, X_j)$.

4-Lois discrètes usuelles :

Loi	**Moyenne** $\boldsymbol{E(X)}$	**Variance** $\boldsymbol{V(X)}$	**Masse** $\boldsymbol{P_X(x)}$	**Répartition** $\boldsymbol{F_X(x) = P(X \le x)}$
Bernoulli $B(p)$	p	$p(1-p)$	$P_X(0) = 1-p$ $P_X(1) = p$	
Binomiale $B(n,p)$	np	$np(1-p)$	$C_x^n p^x (1-p)^{n-x}$ $x = 0, 1, 2, \dots, n$	Table
Géométrique $G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$p(1-p)^{x-1}$ $x = 1, 2, 3, \dots$	$1-(1-p)^x$ $x = 1, 2, 3, \dots$
Poisson $P(\lambda)$	λ	λ	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ $x = 0, 1, 2, \dots$	Table
Hypergéométrique $H(N,n,D)$			$\frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$	

Approximation de la binomiale par la poisson et de l'hypergéométrique par binomiale :

$X \sim B(n,p)$ où n grand (≥ 100), p petit ($\leq 0{,}1$) alors $X \approx P(\lambda = np)$.

$X \sim H(N,n,D)$ $n/N \leq 0{,}1$, alors $X \approx B(n,\ p = D/N)$.

5-Lois continues usuelles/ Loi normale :

Loi	Moyenne	Variance	Densité $f_X(x)$	Répartition $F_X(x) = P(X \leq x)$
Uniforme $U[a,b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{b-a}$ $x \in [a,b]$ (0 sinon)	0 si $x < a$ $\frac{x-a}{b-a}$ si $x \in [a,b]$ 1 si $x > b$
Exponentielle $Exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda e^{-\lambda x}$ $x \geq 0$ (0 sinon)	0 si $x < 0$ $1 - e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$
Normale $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $x \in]-\infty, +\infty[$	$\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ Lire da la table N(0,1)
Lognormale $X \sim LgN(\mu_X, \sigma_X^2) \Leftrightarrow$ $Y = LnX \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$	$\mu_X = e^{\mu_Y + \frac{\sigma_Y^2}{2}}$	$\sigma_X^2 = \mu_X^2(e^{\sigma_Y^2} - 1)$		$\Phi(\frac{Lnx - \mu_Y}{\sigma_Y})$ Lire da la table N(0,1)

Loi Gamma : $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes où $X_i \sim Exp(\lambda)$.

$Y = X_1 + \cdots X_n \sim \Gamma(n,\lambda)$. $E(Y) = \frac{n}{\lambda}$ et $V(Y) = \frac{n}{\lambda^2}$

$P(Y \leq y) = 1 - P(T \leq n-1)$ où $T \sim P(\lambda y)$.

Additivité de la loi normale :

$X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes où $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$.

$Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \ \sim \ N(\mu_Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i,\ \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2)$.

Théorème Central Limite (TCL) :

$X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes. Si n est grand (≥ 30), alors :

$Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \ \approx \ N(\mu_Y = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i,\ \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2)$.

Approximation de la binomiale par la normale :$X \sim B(n,p)$ où n grand, p moyen tq $np > 5$ pour $p \leq \frac{1}{2}$ $ou\ np((1-p) > 5$ pour $p > \frac{1}{2}$, alors :$X \approx N(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$. $P(X = x) \approx P(x - \frac{1}{2} \leq X \leq x + \frac{1}{2})$ avec la loi normale.