

**Question n° 1 : (3 points)**

Soit  $A$  et  $B$  deux événements tels que :

$$P(A) = 0,25, \quad P(\overline{A} \cap B) = 0,20, \text{ et } P(B | A) = 0,40.$$

- a) (1 point) Calculer  $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ .
  - b) (2 points) Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse.
- 

**Réponse :**

**Question n° 2 : (3 points)**

Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On choisit au hasard (sans remise) deux boules de l'urne et on examine leurs numéros.

- a) (1 point) Quelle est la probabilité que les deux numéros obtenus soient impairs ?
  - b) (2 points) Quelle est la probabilité que les deux numéros obtenus soient impairs si leur somme est paire ?
- 

**Réponse :**

---

Question n° 3 : (3 points)

Soit  $X$  une variable aléatoire dont la fonction de densité est définie par

$$f_x(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $k$  est une constante réelle.

a) (1 point) Déterminer les deux valeurs suivantes :

- a.1) (0,5 point) la valeur de la constante  $k$  ;
- a.2) (0,5 point) l'espérance mathématique  $E(X)$ .

b) (2 points) On considère une deuxième variable aléatoire  $Y$  dont les valeurs possibles dépendent de celles de  $X$  comme suit :

$$Y = \begin{cases} -10 & \text{si } X < -1/2 \\ 40 & \text{si } -1/2 \leq X < 1/2 \\ 10 & \text{si } X \geq 1/2. \end{cases}$$

b.1) (1 point) Donner la fonction de répartition de la variable  $Y$ .

b.2) (1 point) Calculer l'espérance mathématique de la variable  $Y$ .

---

Réponse :

**Réponse (suite)**

### Question n° 4 : (4 points)

Une boîte contient 3 jetons dont les valeurs sont différentes. Un jeton a la valeur 0, un jeton a la valeur 1, et un jeton a la valeur 2. On choisit au hasard et sans remise deux jetons de la boîte. Soit  $X$  la valeur du premier jeton obtenu, et  $Y$  la somme des valeurs des deux jetons obtenus.

- a) (2 points) Déterminer, sous forme de tableau, la fonction de masse conjointe du vecteur  $[X, Y]$ , en y incluant les valeurs possibles et les distributions marginales de  $X$  et de  $Y$ .  
Laisser les probabilités sous forme fractionnaire.
- b) (1 point) Calculer  $P(Y \leq 2 | X = 1)$ .
- c) (1 point) Calculer la covariance  $Cov(X, Y)$ .
- 

Réponse :

### **Question n° 5 : (3 points)**

On suppose que la durée fonctionnement d'un certain type de composant est une variable aléatoire distribuée selon une loi exponentielle avec une moyenne de 100 heures.

- a) (1 point) Quelle est la probabilité qu'un composant de ce type fonctionne pendant plus de 230 heures ?
  - b) (1 point) Supposons que les composants sont testés indépendamment l'un à la suite de l'autre. Quelle est la probabilité que l'on teste plus de trois composants pour en avoir un premier qui dure plus de 230 heures ?
  - c) (1 point) Cinq composants seront testés indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité qu'au moins 2 des cinq composants fonctionnent pendant plus de 230 heures ?
- 

**Réponse :**

---

### Question n° 6 : (4 points)

Au courant d'une journée, les ventes à un comptoir alimentaire atteignent un montant  $X$  qui suit approximativement une loi normale de moyenne  $\mu = 2500$  dollars et d'écart-type  $\sigma = 250$  dollars. On suppose que les ventes sont indépendantes d'une journée à l'autre.

- a) (1 point) Quelle est la probabilité que les ventes d'une journée atteignent un montant compris entre 2000 et 3000 dollars ?
- b) (1 point) La probabilité que les ventes d'une journée atteignent au moins  $d$  dollars est 0,119. Déterminer la valeur de  $d$ .
- c) (2 points) Quelle est la probabilité que le montant total des ventes d'une période de quatre jours dépasse 11250 dollars ?

**Indication :** voir la table de la loi normale en annexe.

---

**Réponse :**

**Réponse (suite)**

**ANNEXE :** La fonction de répartition d'une loi  $N(0, 1)$  :  $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-u^2/2\} du$ .

<b><i>z</i></b>	<b>0,00</b>	<b>0,01</b>	<b>0,02</b>	<b>0,03</b>	<b>0,04</b>	<b>0,05</b>	<b>0,06</b>	<b>0,07</b>	<b>0,08</b>	<b>0,09</b>
<b>0,0</b>	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
<b>0,1</b>	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
<b>0,2</b>	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
<b>0,3</b>	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
<b>0,4</b>	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
<b>0,5</b>	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
<b>0,6</b>	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
<b>0,7</b>	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
<b>0,8</b>	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
<b>0,9</b>	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
<b>1,0</b>	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
<b>1,1</b>	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
<b>1,2</b>	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
<b>1,3</b>	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
<b>1,4</b>	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
<b>1,5</b>	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
<b>1,6</b>	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
<b>1,7</b>	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
<b>1,8</b>	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
<b>1,9</b>	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
<b>2,0</b>	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
<b>2,1</b>	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
<b>2,2</b>	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
<b>2,3</b>	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
<b>2,4</b>	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
<b>2,5</b>	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
<b>2,6</b>	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
<b>2,7</b>	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
<b>2,8</b>	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
<b>2,9</b>	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
<b>3,0</b>	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
<b>3,1</b>	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
<b>3,2</b>	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
<b>3,3</b>	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
<b>3,4</b>	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
<b>3,5</b>	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
<b>3,6</b>	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
<b>3,7</b>	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
<b>3,8</b>	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
<b>3,9</b>	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	0,99997