TD N° 5

Exercice 1 (5.4)

Soit X le montant de vente de l'immeuble.

$X \sim \mathcal{U}(200.000, 600.000)$

Total des honoraires : $Y = 500 + 0.04 X$

On cherche $\mathbb{E}(Y)$ et $Var(X)$.

Rappel : $X \sim \mathcal{U}(a, b) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \dfrac{a+b}{2}$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(500 + 0.04 X) = 500 + 0.04\, \mathbb{E}(X)$$

$$= 500 + 0.04 \times \frac{200.000 + 600.000}{2}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 16\,500 \,\$}$$

$$Var(Y) = Var(500 + 0.04 X)$$

$$Var(ax + b) = a^2 Var(X)$$

$$Var(Y) = 0.04^2\, Var(X) = 0.04^2 \times \frac{(600.000 - 20.000)^2}{12}$$

$$= 21\,333\,333{,}333\ldots$$

Exercice 2 (5.5)

$X \sim \mathcal{U}(\alpha, \beta)$ avec $\alpha = -\beta$, et $\beta > 0$.

$Var(X) = 1$.

on sait que $X \sim \mathcal{U}(-\beta, \beta)$

$$Var(X) = \frac{[\beta - (-\beta)]^2}{12} = \frac{\beta^2}{3} = 1 \Rightarrow \beta = \sqrt{3}$$

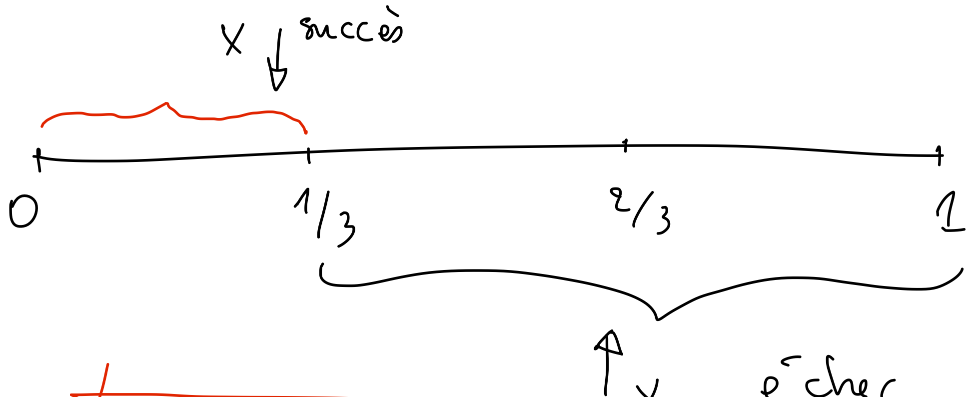
$\alpha = -\beta = -\sqrt{3}$ et $X \sim \mathcal{U}(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

EXERCICE 5

$$X \sim \mathcal{U}(0, 1) \Longrightarrow f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a.) $Y \sim \mathcal{B}(p = \frac{1}{3})$. Comment générer Y ?

$Y \in R_Y \in \{0, 1\}$ où $\left.\begin{array}{l} 1 \rightsquigarrow \text{succès} \\ 0 \rightsquigarrow \text{échec.} \\ P = \mathbb{P}(\text{succès}) \end{array}\right\}$ Rappel.



on pose $\boxed{Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X \in [0, \frac{1}{3}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$

on a que $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X \in [0, \frac{1}{3}]) = \int_0^{\frac{1}{3}} 1 \, dx = \frac{1}{3}$

$= P = \mathbb{P}(\text{succès})$.

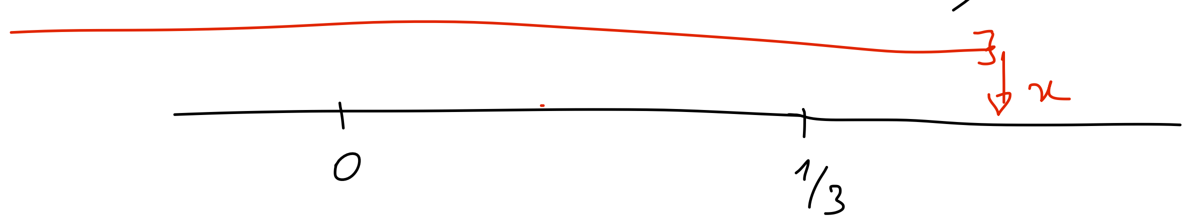
b) On cherche $F_{X|Y=1}(x)$

On sait que (d'après a)) $Y=1$ ssi $X \in [0, \frac{1}{3}]$.

$$F_{X|Y=1}(x) := \mathbb{P}(X \leq x \mid Y=1)$$

$$= \mathbb{P}(\{X \leq x\} \mid \{X \in [0, \tfrac{1}{3}]\})$$

$$= \frac{\mathbb{P}(\{X \in]-\infty, x]\} \cap \{X \in [0, 1/3]\}) \leftarrow N(x)}{\mathbb{P}(X \in [0, \frac{1}{3}]) \leftarrow \frac{1}{3}}$$



$*$ si $x < 0$

$$]-\infty, x] \cap [0, \tfrac{1}{3}] = \emptyset \Rightarrow N(x) = 0$$

$*$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ alors

$$]-\infty, x] \cap [0, \tfrac{1}{3}] = [0, x]$$

$$\Rightarrow N(x) = \mathbb{P}(X \in [0, x]) = \int_0^x 1 \, dx = x$$

$*$ si $x > \frac{1}{3}$,

$$]-\infty, x] \cap [0, \tfrac{1}{3}] = [0, \tfrac{1}{3}]$$

$$\Rightarrow N(x) = \mathbb{P}(X \in [0, \tfrac{1}{3}]) = \frac{1}{3}$$

$$F_{X|Y=1}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 3x \text{ si } x \in [0, \frac{1}{3}] \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

c.) $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \; - - - - \; x_{25}$

$0 \qquad\qquad 1 \qquad > 0.995$ Arrêt } exemple.

X prend la valeur 25.

soit Z le nombre de nombres indépendants générés avant d'obtenir une première valeur > 0.995.

Alors $Z \sim \mathcal{G}(p = \mathbb{P}(\text{succès}))$

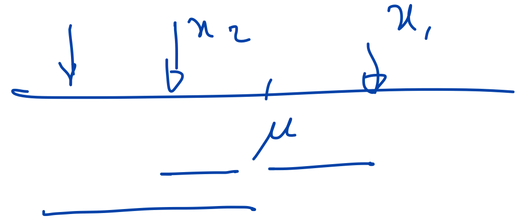
où $\mathbb{P}(\text{succès}) = \mathbb{P}(Z > 0.995)$

$$= \int_{0.995}^{1} 1 \, dx = 0.005$$

$$Z \sim \mathcal{G}(p = 0.005) \equiv \text{Géom}(p = 0.005)$$

On cherche $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{p} = 200$

$$\text{Var}(Z) = \frac{1-p}{p^2}$$



d.) $x_1 \quad x_2 \; - - - \; x_{15}$

$> 0.7 \rightsquigarrow$ succès

$\leq 0.7 \rightsquigarrow$ échec

$\mathbb{P}(W = k) = C_k^n \, p'^k (1 - p')^{n-k}$

soit W le nombre de nombres strictement > 0.7 parmi 15.

$W \sim \text{Bin}(n = 15, p' = \mathbb{P}(\text{succès}) = \mathbb{P}(X > 0.7) = 0.3)$

On cherche $\mathbb{P}(W \geq 8) = 1 - \mathbb{P}(W \leq 7)$

$$= 1 - [\mathbb{P}(W=0) + \dots + \mathbb{P}(W=7)] \simeq 0.05$$

Exercice 3 (5.8)

soit X : durée de vie en unité d'année.

$\mathbb{E}(X) = 3$, $X \sim \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{3}}$$

a) on cherche $\mathbb{P}(X < 0.5) \overset{\text{Loi Continue.}}{=} \mathbb{P}(X \leq 0.5)$

$= F_X(0.5)$

où $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

donc $\mathbb{P}(X < 0.5) = 1 - e^{-\frac{1}{3} \times 0.5}$

$= 1 - e^{-1/6} \simeq 0.1535$

b) Bénéfice moyen par véhicule ;

soit Y le bénéfice par véhicule. on cherche $\mathbb{E}(Y)$.

$Y \in R_Y = \{750, 1000\}$.

y	$\mathbb{P}(Y = y)$
750	$\mathbb{P}(X \leq 1) = F_X(1) = 1 - e^{-1/3}$
1000	$\mathbb{P}(X > 1) = 1 - F_X(1) = e^{-1/3}$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in R_Y} y\,\mathbb{P}(Y = y) = 750 \times (1 - e^{-1/3}) + 1000 \times e^{-1/3}$$

$\simeq 929.1328$ \$

Exercice 4 (5.14)

$T \equiv$ temps de traitement d'appel ; $T \sim \mathcal{E}(\lambda)$
(unité de temps = min).

a) $\mathbb{P}(T \leq 5) = 0.9 = F_T(5)$

où $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

On a que $F_T(5) = 1 - e^{-5\lambda} = 0.9$

$$\Rightarrow e^{-5\lambda} = \frac{1}{10} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln(10)}{5} \simeq 0.46$$

Temps moyen ; $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{5}{\ln(10)} \simeq 2.17$ (min)
$\simeq 2$ min 10s.

b) $\mathbb{P}(T \leq t) = 50\%$. $t = ?$ $(\tilde{x})$

$$\mathbb{P}(T \leq t) = F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 0.5$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{5 \ln 2}{\ln(10)} \simeq 1.505 \text{ min}$$
$\simeq 1$ min 30s.

c) $\mathbb{P}(T > 3+3 \mid T > 3) = \mathbb{P}(T > 3) = e^{-\lambda \times 3}$
(Propriété de non Vieillissement ou Absence de mémoire).

$$\mathbb{P}(T > 3) = 1 - \mathbb{P}(T \leq 3) = 1 - [1 - e^{-3\lambda}] = e^{-3\lambda}$$
$\simeq 25.12\%$.

$$\mathbb{P}(X > s+t \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s)$$