

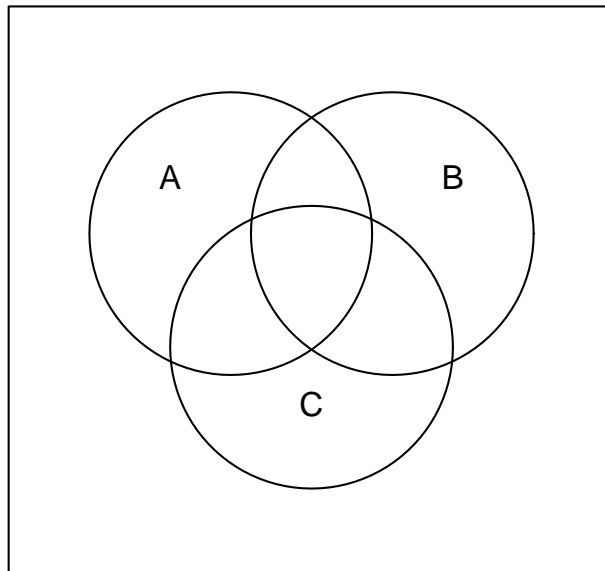
Exercice n°1: (20 points)

Une firme d'ingénieur soumissionne pour trois différents projets A, B et C. On donne les probabilités d'obtenir les différents projets suivantes:

$$P(A) = 0,4; \quad P(B) = 0,5; \quad P(C) = 0,6; \quad P(A \cup B \cup C) = 0,9$$

$$P(B|A) = 0,375; \quad P(C|B) = 0,5; \quad P(A|\overline{C}) = 0,5.$$

a) (8 pts) Remplir le diagramme de Venn;



Réponse: $P(A \cap B) = 0.15$, $P(B \cap C) = 0.25$, $P(A \cap C) = 0.2$, $P(A \cap B \cap C) = 0.05$, 0.15 , 0.1 ,
 0.2 , 0 , 0.25 ,
 0.15

b) (**12 pts**) Déterminer les probabilités suivantes:

i) $P[(A \cup B) \cap \overline{C}] = 0.05 + 0.15 + 0.1$

ii) $P[(A \cap B) \cap (A \cap C)] = 0$

$$\text{iii) } P[A \cap (B \cup C)] = 0.15 + 0 + 0.2$$

$$\text{iv) } P[(A \cup B) \cap (C \cap \overline{B})] = 0.2$$

$$\text{v) } P[B \cap (\overline{B \cap \overline{A}})] = 0.15 + 0$$

$$\text{vi) } P[(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{B \cap \overline{C}})] = 0.25$$

Exercice n°2: (10 points)

Geoffroy et Mahroo jouent aux dés. Ils lancent tour à tour 2 dés et observent les chiffres sortis. Quand la somme est sept ou le produit est quatre, Geoffroy marque un point. Quand la somme est six ou le produit est quatre, Mahroo marque un point. Qui a plus de chance de gagner?

Réponse: Geoffroy : $\frac{9}{36}$, Mahroo : $\frac{8}{36}$, alors Geoffroy a plus de chance.

Exercice n°3: (15 points)

Un électricien achète des composants par paquet de 10. Il pige un échantillon de trois composants sans remise du paquet. Si l'échantillon contient un composant défectueux, alors il rejette le paquet.

- a) **(6 pts)** Si chaque paquet contient quatre composants défectueux quelle est la probabilité que l'électricien rejette le paquet?

$$X \sim HG(N = 10, D = 4, n = 3)$$
$$1 - P(X = 0)$$

- b) (**9 pts**) Si 30% des paquets contiennent quatre composants défectueux tandis que les 70% restant n'en contiennent qu'un, quelle proportion de paquets l'électricien rejettera-t-il?

Réponse: $0.3 \times p_1 + 0.7 \times p_2$

p_1 : partie a)

p_2 : $P(Y = 1), Y \sim HG(N = 10, D = 1, n = 3)$

Exercice n°4: (20 points)

Le temps (en heures) nécessaire pour réparer une machine est une variable aléatoire distribuée selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$.

- a) (**5pts**) Quelle est la probabilité que le temps de réparation d'une machine excède deux heures?

Réponse : e^{-1}

- b) (**5pts**) Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne au moins 10 heures, étant donné que sa durée de réparation a déjà dépassé neuf heures?

Réponse : $e^{-0.5}$

- c) (**5pts**) On a 20 machines de ce type à réparer, quelle est la probabilité qu'au moins une de ces machines soit réparée en plus de deux heures?

Réponse : $Y \sim \text{Bin}(10, e^{-1}), 1 - P(Y = 0)$

- d) (**5pts**) En moyenne, combien de machines doit-on réparer pour avoir une première dont le temps de réparation excède deux heures?

Réponse : e

Exercice n°5: (15 points)

Soit la variable aléatoire X qui a la fonction de densité suivante:

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & 0 < x < 1; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a et b sont deux constantes réelles et $\mathbb{E}(X) = 0,6$.

a) **(10 pts)** Déterminer les valeurs de a et b ;

Réponse : $a = 3.6, b = -2.4$

b) (**5 pts**) Calculer $\mathbb{V}(X)$.

Réponse : $\mathbb{E}(X^2) = 3.6/4 - 2.4/5 = 0.42$ $\mathbb{V}(X) = 0.42 - 0.36 = 0.06$

Exercice n°6: (20 points)

Prince of Persia est une série de jeux vidéo de UbiSoft. Dans l'épisode de Sables du temps, le Vezir donne au Prince deux urnes, quatre boules blanches et quatre boules noires. Il demande au prince de répartir les boules dans les urnes (au moins une boule par urne). Le prince doit choisir une de deux urnes, et ensuite en tirer une boule.

Il aura la vie sauve si la boule tirée soit blanche.

- a) (4 pts) Quelle est la probabilité que le Prince ait la vie sauve s'il place les quatre boules blanches dans la première urne et les quatre noires dans la deuxième?

Réponse : $\frac{1}{2}$

- b) (4 pts) Que devient cette probabilité s'il met deux blanches et deux noires dans chaque urne?

Réponse : $\frac{1}{2}$

- c) (4 pts) Que devient cette probabilité s'il met trois blanches dans la première urne, une blanche et quatre noires dans la deuxième?

Réponse : $\frac{3}{5}$

- d) (4 pts) Comment le prince maximise-t-il ses chances?

Réponse : 1 boule blanche dans 1er urne et toutes les autres dans la 2e.

- e) (4 pts) Si le prince dispose de 10 vies, combien de vies en moyenne perdra-t-il dans cet épisode s'il utilise le scénario maximal?

Réponse : $10 \times \frac{5}{7}$

