TD N° 11

Exercice 1

$n_1 = n_2 = 500$, $x_1 = 32$; $x_2 = 21$

$\alpha = 0.05$

Il s'agit d'un test d'égalité de proportions.

$H_0 : P_1 = P_2$

$H_1 : P_1 \neq P_2$

$$Z_0 = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\sqrt{\hat{P}(1-\hat{P})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \quad \text{où } \hat{P} = \frac{n_1 \hat{P}_1 + n_2 \hat{P}_2}{n_1 + n_2}$$

H_0 rejeté si $|Z_0| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$.

$\hat{P}_1 = \frac{x_1}{n_1}$ et $\hat{P}_2 = \frac{x_2}{n_2}$

$Z_0 \simeq 1.55 \ngtr Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

$\Rightarrow$ H_0 n'est pas rejetée. Il est raisonnable de conclure que les deux machines ... —

$c = 2 =$ catégories.

	Défect	Conforme
transistors	40	60
Ampoules		

$r = 2$ pop

Exercice 2

a-)

Catégories / Population	# Pièces non-défect	# pièces Défect	Total
machine 1	$468 = O_{11}$ $473.5 = E_{11}$	$32 = O_{12}$ $26.5 = E_{12}$	500
machine 2	$479 = O_{21}$ $473.5 = E_{21}$	$21 = O_{22}$ $26.5 = E_{22}$	500
Total	947	53	1000

b-) * L'hypothèse testée ici est l'homogénéité. En effet, on désire tester si les proportions dans toutes les catégories (Défect. ou non-Déf.) sont les mêmes pour toutes les populations (machine 1 et machine 2).

* Règle de rejet ;

H_0 rejetée si $U_0 > \chi^2_{\alpha;(r-1)(c-1)}$

où $\alpha = 0.05$, $r = 2 = c$, $U_0 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$

$U_0 \simeq 2.4108$

$\chi^2_{\alpha;(r-1)(c-1)} = \chi^2_{0.05;1} \simeq 3.84$

$u_0 \not> \chi^2_{\alpha;(r-1)(c-1)} \Rightarrow H_0$ n'est pas rejetée.

Donc la distribution des pièces est homogène selon la machine.

(Prop (déf machine 1) = Prop (Déf mach 2)

et Prop (Conf machine 1) = Prop (Conf mach 2))

c) $\begin{cases} \text{En } 10.28 \\ |z_0| = 1.55 \not> z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \end{cases}$

$\begin{cases} \text{En } 10.87 \\ u_0 = 2.4108 \not> \chi_{\alpha;1} = 3.84 \end{cases}$

on observe que $u_0 = z_0^2$ et $\chi^2_{\alpha;1} = z_{\frac{\alpha}{2}}^2$

donc $u_0 \not> \chi^2_{\alpha;1} \iff |z_0|^2 \not> z_{\frac{\alpha}{2}}^2$

$$z_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$u_0 \sim \chi^2_{(r-1)(c-1)} \equiv \chi^2_1$$

Exercice 3 (10.30)

$\bar{x} = 25$ et $s = 9$

$$P_i^{(0)} = \mathbb{P}(X \in V_i \mid H_0 \text{ vraie})$$

H_0 : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(\mu = 25, \sigma^2 = 9^2)$

H_1 : $X \not\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(\mu = 25, \sigma^2 = 9^2)$

$\mu = ?$ $\quad \sigma^2 = ?$

Estimation : $\mu \simeq 25 = \bar{x}$ $\quad \sigma^2 \simeq s^2 = 9^2$

et $R_X = \mathbb{R}$

$X \sim \mathcal{N} \Rightarrow X$ est continue. or il y a des trous au niveau des classe. On s'arrange alors de la façon suivante :

$0 - 10 \longrightarrow]-\infty, 10.5]$

$11 - 15 \longrightarrow]10.5, 15.5]$

$16 - 20 \longrightarrow]15.5, 20.5]$

$\vdots$

$41 - 45 \longrightarrow]40.5, +\infty[$

* Vérifier que $P_1^{(0)} = \mathbb{P}(X \in]-\infty, 10.5])$ où $(X \sim \mathcal{N}(25, 81))$

$= 0.054$.

i	# d'unités Déf. par jour	O_i	$P_i^{(0)}$	$E_i = nP_i^{(0)}$	$\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}$
6	31 - 35	19	0.149	17.42	0.143
7	36 - 40	11	0.079	9.26	0.326

$$P_6^{(0)} = \mathbb{P}(X \in V_6 \mid X \sim \mathcal{N}(25, 81))$$

$$= \mathbb{P}(30.5 \leq X \leq 35.5) \quad \text{où } X \sim \mathcal{N}(25, 81)$$

$$= \Phi\left(\frac{35.5 - 25}{9}\right) - \Phi\left(\frac{30.5-25}{9}\right)$$

$$\overset{\text{Table}}{\simeq} 0.149$$

$$\left(n = \underbrace{\sum O_i}_{=117}\right)$$

$$E_6 = 117 \times P_6^{(0)} = 17.42$$

b.) $$U_0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_{k-p-1}$$

(lorsque H_0 vraie).

d.d.l $= k-p-1 = 8-2-1 = 5$

c.) H_0 rejetée si $U_0 > \chi^2_{\alpha; k-p-1}$

k = nombre de classes (retenues) $= 8$

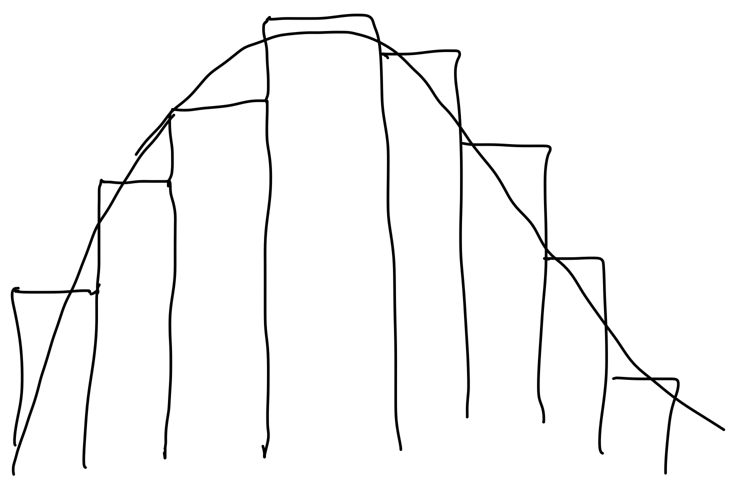
p = nombre de paramètres estimés $= 2$

d.) on calcule $u_0 = 1.741$

et $\chi^2_{\alpha;\, k-p-1} = \chi^2_{0.05;\, 5} = 11.07$

$u_0 \not> \chi^2_{\alpha;\, k-p-1} \Rightarrow$ H_0 n'est pas rejetée.
(conclusion faible).

L'hypothèse d'une distribution normale est plausible.



Exercice 5

$\left(\frac{1}{5} \sum_{i=1}^{5} \delta_i \qquad \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{2}{3}\delta_5 \right)$

Si ce générateur fonctionne correctement alors les nombres 1 à 5 devraient être générés selon une loi uniforme discrète.
(chaque entier devrait apparaître environ 200 fois, autrement dit, la fréquence espérée $= \underline{\underline{200 = E_i}}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, 5$.

H_0: La loi unif discrète est un bon modèle

H_1: " " n'est pas un bon modèle.

soit X la v.a. de support $R_X = \{1, 2, \ldots, 5\}$

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=2) = \cdots = \mathbb{P}(X=5) = \frac{1}{5}$$

H_0: X a pour fonct° de masse $\mathbb{P}(X=i) = \frac{1}{5}$ $\forall i = 1, \ldots, 5$

H_1: X n'a pas pour fonct° de masse ...

$E_1 = n P_1^{(0)} = 1000 \times \frac{1}{5} = 200$

où $P_1^{(0)} = \mathbb{P}(X=1)$ où X est de masse

$= \frac{1}{5}$

	1	2	3	4	5	n
O_i	220	180	205	180	205	1000
E_i	200	200	200	200	200	1000

Ho est rejetée si $U_0 > \chi^2_{\alpha;k-p-1}$

Ici $k = 5$, $p = 0$

$$U_0 = \sum_{i=1}^{5} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 4.75$$

$$\chi^2_{\alpha;k-p-1} = \chi^2_{0.05;4} = 9.49$$

$U_0 \not> 9.49 \Rightarrow$ Ho est acceptée.

$\Rightarrow$ L'hypothèse selon laquelle les nombres sont générés aléatoirement est plausible.

Exercice 4

a) Ho : Le nombre de pannes est indépendant de l'équipe en place

H₁ : - - - dépendant.

b) $\alpha = 1\ \%$

$$U_o = \sum_{i=1}^{r=3} \sum_{j=1}^{c=4} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

Règle de rejet :

Ho rejetée si $U_o > \chi^2_{\alpha;(r-1)(c-1)}$

$= \chi^2_{0.01;6} \simeq 16.81$

c) si Ho est vraie, on sait que

$U_o \sim \chi^2_{(r-1)(c-1)}$ (cours)

$\Rightarrow \mathbb{E}(U_o) = (r-1)(c-1) = 6$

$Var(U_o) = 2(r-1)(c-1) = 12$

d) soit $U_o = 11.649$

on a $U_o \not> \chi^2_{0.01;6} \simeq 16.81 \Rightarrow$

Ho n'est pas rejetée

$\Rightarrow$ nombre de panne $\perp\!\!\!\perp$ de l'équipe en place (Conclusion faible).