# TD N° 8

## Exercice 2

(1) (2) - - - - (100)

$X_1 = 1$ succès
$X_1 = 0$ échec.

succès = " Plaquette défectueuse "

$\mathbb{P}(\text{succès}) = \theta.$

$X_i \sim \mathrm{Bern}(p = \theta) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, 100 = n$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \overline{X} = \frac{Y}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

a) Loi exacte de $Y$ :

$Y$ est une somme de $n$ v.a. ⫫ de Bernoulli de même paramètre $p = \theta$ d'où

$$Y \sim \mathrm{Bin}(n = 100, \ p = \theta)$$

b) soit $\theta = 0.03$.

$$\mathbb{P}(1 \leq Y \leq 5) = \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 2) + \cdots + \mathbb{P}(Y = 5)$$

où $\mathbb{P}(Y = k) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k}$

$\mathbb{P}(1 \leq Y \leq 5) \simeq 87.16\%$

c) Loi approximative de $Y$ (T.C.L)

On suppose $n = 100$ assez grand.

On sait que les $X_i$ sont $\perp\!\!\!\perp$, et

$$\mu = \mathbb{E}(X_i) = p = \theta$$

$$\sigma^2 = Var(X_i) = p(1-p) = \theta(1-\theta)$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i .$$

$$T.C.L \Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

i.e., $Y \sim \mathcal{N}(n\theta, n\theta(1-\theta))$ approximativement.

d) Loi approximative de $\overline{X}$ :

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$T.C.L \Rightarrow \overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

i.e., $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\theta, \frac{\theta(1-\theta)}{n}\right)$ approximativement.

$\overline{X} = \frac{1}{n} Y$ )))

$$\mu + \sigma \mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

e.) $\mathbb{P}(0.01 \leq \overline{X} \leq 0.05)$ pour $\theta = 0.03$ :

$$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\theta, \frac{\theta(1-\theta)}{n}\right)$$ (sans correction)

$$\mathbb{P}(0.01 \leq \overline{X} \leq 0.05) = \Phi\left(\frac{0.05 - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{0.01 - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}}\right)$$

$$= \Phi(1.172) - \Phi(-1.172)$$

$$\simeq 75.8\%$$

f.) en b.) $\left\{ \mathbb{P}(1 \leq Y \leq 5) \simeq 87.16\% \right.$ Loi exacte.

en e.) $\mathbb{P}(0.01 \leq \overline{X} \leq 0.05)$

$$\simeq \mathbb{P}\left(0.01 \leq \frac{Y}{100} \leq 0.05\right)$$

$$= \mathbb{P}(1 \leq Y \leq 5) \simeq 75.8\%$$

Loi approximative sans correction.

Erreur sans correction $= |75.8 - 87.16|\% \simeq 13\%$

Avec Correction :

$$\underset{\text{Bin}}{\mathbb{P}(1 \leq Y \leq 5)} = \underset{\text{Norm}}{\mathbb{P}(1 \leq Y \leq 5)}$$

$$= \mathbb{P}\left(1 - \frac{1}{2} \leq Y \leq 5 + \frac{1}{2}\right) \text{ (corrigé)}$$

$$\text{où } Y \sim \mathcal{N}(n\theta, n\theta(1-\theta))$$

$$= \Phi\left(\frac{5 + \frac{1}{2} - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right) - \Phi\left(\frac{1 - \frac{1}{2} - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}\right)$$

$$\simeq 2\,\Phi(1.47) - 1 \simeq 85.86\,\%.$$

avec correction.

$$\text{Erreur} = |85.86 - 87.16|\,\% \simeq 1.51\,\%.$$

## Exercice 3

$$\left.\begin{array}{l} Z_i \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{et sont } \perp\!\!\!\perp \\ U_i \sim \chi^2_1 \end{array}\right\} \forall i = 1,2,3,4.$$

a) $T_1 = \sum_{i=1}^{4} Z_i$ (Combinaison linéaire de v.a. normales $\perp\!\!\!\perp$).

$$T_1 \sim \mathcal{N}(0+0+0+0,\ 1+1+1+1)$$

$$\boxed{T_1 \sim \mathcal{N}(0,4)}$$

b) $T_2 = \sum_{i=1}^{3} U_i = \chi^2_1 + \chi^2_1 + \chi^2_1$
$= \chi^2_3$

Th
$$\chi^2_{k_1} + \chi^2_{k_2} + \dots + \chi^2_{k_p}$$
$$\chi^2_{k_1+k_2+\dots+k_p}$$

$$\boxed{T_2 \sim \chi^2_3}$$

c) $T_3 = \dfrac{2U_1}{U_2 + U_3}$ $\qquad \dfrac{\chi^2_u / u}{\chi^2_v / v}$

On sait que :

$U_1 \sim \chi^2_1$ et $U_2 + U_3 = \chi^2_1 + \chi^2_1 = \chi^2_2$

$$T_3 = \frac{2\chi^2_1}{\chi^2_2} = \frac{\chi^2_1 / 1}{\chi^2_2 / 2}$$

$$\Rightarrow T_3 \sim F_{1,2}$$

d) $$T_4 = \frac{\sum_{i=1}^{4} Z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4} U_i}}$$

Rappel : $\dfrac{\mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{\chi^2_k / k}} = t_k$

$\sum_{i=1}^{4} Z_i \sim \mathcal{N}(0,4)$ , $\sum_{i=1}^{4} U_i = \chi^2_1 + \chi^2_1 + \chi^2_1 + \chi^2_1 = \chi^2_4$

$$T_4 = \frac{\mathcal{N}(0,4)}{\sqrt{\chi^2_4}}$$

Rappel : $\sqrt{2}\,\mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}(0,2)$

$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\mu + \sigma Z = X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

$$\boxed{\mu + \sigma\,\mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}$$

$$\begin{cases} \mu = 0 \\ \sigma = 2 \end{cases} \Rightarrow 2\,\mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}(0,4)$$

$$T_4 = \frac{2\,\mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{\chi^2_4}} = \frac{\mathcal{N}(0,1)}{\sqrt{\chi^2_4/4}}$$

$$\Rightarrow T_4 \sim t_4$$

e.) $T_5 = \dfrac{u_1 + u_2}{2} = \dfrac{\chi^2_2}{2}$

on sait que $\chi^2_k = \Gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (Cours)

$$\Rightarrow \chi^2_2 = \Gamma\left(1, \tfrac{1}{2}\right)$$

on toute loi $\Gamma(1,\lambda)$ est une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

$$\Rightarrow \boxed{\chi^2_2 \equiv \Gamma\left(1, \tfrac{1}{2}\right) \equiv \mathcal{E}\left(\lambda = \tfrac{1}{2}\right)}$$

$$T_5 = \frac{1}{2}\,\mathcal{E}\left(\lambda = \frac{1}{2}\right).$$

e.g. soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Loi de $kX$ :

$$F_{kX}(x) = \mathbb{P}(kX \leq x) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{x}{k}\right)$$

$$= F_X\left(\frac{x}{k}\right)$$

où $$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$F_{kX}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{\lambda}{k} x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{kX \sim \mathcal{E}(\lambda/k)}$$

$$T_5 \sim \mathcal{E}\left(\frac{1/2}{1/2} = 1\right)$$

## Exercice 4

$$\mathbb{P}\left(\overset{\chi^2_k}{F_{u,v}} > \overset{\chi^2_{\alpha;k}}{F_{\alpha;u,v}}\right) = \alpha$$

a) $$\mathbb{P}\left(\frac{u_1}{u_2} \geq a\right) = 0.1$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\chi^2_1/1}{\chi^2_1/1} \geq a\right) = 0.1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(F_{1,1} \geq a = F_{\alpha;1,1}\right) = \underbrace{0.1}_{\alpha}$$

$$a = F_{0.1;1,1} = 39.86$$

b) $$\mathbb{P}\left(\frac{u_1}{1+u_1} \geq b\right) = 0.01$$

$$\frac{u_1}{1+u_1} \geq b \iff u_1 \geq b(1+u_1)$$

$$\iff (1-b)u_1 \geq b$$

$$\iff u_1 \geq \frac{b}{1-b}$$

$u_1 \geq b + bu_1$

$u_1 - bu_1 \geq b$

$b$ tq $$\mathbb{P}\left(u_1 \geq \frac{b}{1-b}\right) = 0.01$$

i.e $$\mathbb{P}\left(\chi^2_1 \geq \frac{b}{1-b} = \chi^2_{0.01,1}\right) = 0.01$$

Table : $\frac{b}{1-b} = \chi^2_{0.01, 1} = 6.63$

$\Rightarrow b \simeq 0.8689$

c) $\mathbb{P}\left( \frac{(Z_1 + Z_2)^2}{Z_3^2 + Z_4^2} \geq c \right) = 0.05$

$Z_3^2 + Z_4^2 = \mathcal{N}(0,1)^2 + \mathcal{N}(0,1)^2$

$= \chi^2_2$

$(Z_1 + Z_2)^2 = \left[ \mathcal{N}(0,1) + \mathcal{N}(0,1) \right]^2$

$= \left[ \mathcal{N}(0,2) \right]^2$

$= \left[ \sqrt{2}\, \mathcal{N}(0,1) \right]^2 = 2\, \mathcal{N}(0,1)^2$

$= 2\chi^2_1$

$\mathbb{P}\left( \frac{2\chi^2_1}{\chi^2_2} \geq c \right) = 0.05$

i.e $\mathbb{P}\left( \frac{\chi^2_1/1}{\chi^2_2/2} = F_{1,2} \geq c = F_{0.05,1,2} \right) = 0.05$

Table $c = F_{0.05,1,2} = 18.51$

Exercice 5

$X \sim \mathcal{U}(0,\theta)$ , $\theta > 0$.

$X_1, \dots, X_n$ échant. al. de $X$.

$M = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

les $X_i$ sont $\perp\!\!\!\perp$ et de même loi.

a) $F_M(x) = \mathbb{P}(M \leq x)$

$$= \mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq x)$$

$$= \mathbb{P}(\{X_1 \leq x\} \cap \{X_2 \leq x\} \cap \dots \cap \{X_n \leq x\})$$

$$\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{P}(X_1 \leq x) \times \mathbb{P}(X_2 \leq x) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n \leq x)$$

où $X_i \sim \mathcal{U}(0,\theta) \Rightarrow$

$$\mathbb{P}(X_i \leq x) = F_{X_i}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} & \text{si } x \in [0,\theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$F_M(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{\theta^n} & \text{si } x \in [0,\theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = \mathbb{P}(M \leq x)$$

$F_X(x)$

b) Posons $Y = \dfrac{M}{\theta}$

$$\begin{cases} 0 \leq M \leq \theta \iff 0 \leq \dfrac{M}{\theta} = Y \leq 1 \\ \quad \Rightarrow R_Y = [0,1] \\ \quad (Y = y \quad \text{tq} \quad y \in [0,1]) \\ M > \theta \iff \dfrac{M}{\theta} = Y > 1. \end{cases}$$

$$F_{\frac{M}{\theta}}(y) = F_Y(y) = \mathbb{P}\left(\frac{M}{\theta} \leq y\right)$$

$$= \mathbb{P}(M \leq \theta y) = F_M(\theta y)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(\theta y)^n}{\theta^n} & \text{si } y \in [0,1] \\ 1 & \text{si } y > 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_{M/\theta}(y) = \begin{cases} y^n & \text{si } y \in [0,1] \\ 1 & \text{si } y > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(ne dépend pas de $\theta$).

c') $c_{0,05}$ tel que $\mathbb{P}(Y > c_{0,05}) = \underline{\underline{0,05}}$

où $Y = \frac{M}{\theta}$ ; et $F_Y(y) = y^n$ si $y \in [0,1]$.

On a :

$$\mathbb{P}(Y > c_{0.05}) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq c_{0.05})$$
$$= 1 - F_Y(c_{0.05}) =$$
$$= 1 - (c_{0.05})^n = \underline{\underline{0.05}}$$

donc $c_{0.05}^n = 0.95 \Rightarrow c_{0.05} = (0.95)^{1/n}$,

Pour $n = 20$, on trouve $\boxed{c_{0.05} \simeq 0.997.}$