Question nº 1 : (6 points)

Soit $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8, V_9$ un échantillon aléatoire d'une variable U distribuée selon une loi Khi-carré à 1 degré de liberté, c'est-à-dire $V \sim \chi_1^2$.

a) **(1,5 point)** Donner le nom de la loi de probabilité de $Y = \sum_{i=1}^{6} V_i$ en précisant la valeur de son (ou ses) paramètre(s).

b) **(1,5 point)** Donner le nom de la loi de probabilité de $W = \dfrac{V_1 + V_2}{2}$ en précisant la valeur de son (ou ses) paramètre(s).

Question nº 1 : (suite)

c) **(1,5 point)** Calculer la probabilité $P\left(\dfrac{V_1 + V_2 + V_3}{V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8 + V_9} \leq 3{,}3\right)$.

d) **(1,5 point)** Pour quelle valeur de c trouve-t-on que $P\left(\dfrac{V_1}{V_1 + V_2} < c\right) = 0{,}25$?

Question nº 2 : (8 points)

On s'intéresse au temps X (en minutes) nécessaire pour effectuer une certaine tâche sur une chaine de production. Le tableau suivant présente la distribution des fréquences d'un échantillon de taille $n = 120$ de la variable X.

	Classes des valeurs de X			
	$[0,\ 1)$	$[1,\ 2)$	$[2,\ 3)$	$[3,\ 4]$
Nombre d'observations	32	37	23	28

a) **(2 points)** Calculer approximativement la moyenne et la médiane de cet échantillon en utilisant le point milieu des classes.

b) (2 points) Soit p le paramètre désignant la probabilité d'effectuer la tâche en moins de 2 minutes. Donner une estimation ponctuelle et un intervalle de confiance de niveau 95% pour p.

Question n° 2 : (suite)

On veut tester l'hypothèse selon laquelle la variable X est distribuée selon une loi uniforme dans l'intervalle $[0,\ 4]$, en utilisant le test d'ajustement du Khi-deux.

c) **(1 point)** Formuler les hypothèses H_0 et H_1 du test à effectuer.

d) **(3 points)** Effectuer le test et conclure au seuil $\alpha = 5\%$.

Rappel : si $X \sim U(\alpha,\ \beta)$, alors $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \text{si } \alpha \le x \le \beta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Question n° 3 : (6 points)

Le tableau suivant présente la répartition du nombre de pannes, observées pour 180 composants d'une production, selon le modèle (X) du composant et le type de panne (Y). Trois modèles de composant (M_1, M_2, M_3) et trois types de panne (T_1, T_2, T_3) sont considérés.

Type (Y)	Modèle (X)		
	M_1	M_2	M_3
T_1	32	18	10
T_2	12	28	20
T_3	16	14	30

On désire effectuer un test d'hypothèses afin de déterminer si le type de panne dépend du modèle du composant

a) (1 point) Écrire l'hypothèse nulle H_0 ainsi que la contre-hypothèse H_1 du test.

b) (4 points) Compléter le tableau ci-dessous des effectifs théoriques lorsque H_0 est vraie. Effectuer le test et conclure au seuil $\alpha = 5\%$.

Type (Y)	Modèle (X)		
	M_1	M_2	M_3
T_1			
T_2			
T_3			

Question n° 3 : (suite)

c) (1 point) A-t-on la même conclusion avec un seuil $\alpha = 1\%$?

Question n° 4 : (12 points)

Lors d'une étude sur la résistance (en MPa) de deux types de béton A et B, deux échantillons de spécimens de béton indépendants (un par type de béton) furent prélevés. Les mesures de résistance obtenues ainsi que quelques statistiques sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Type	Mesures de résistance							Taille (n)	Moyenne ($\bar{x}$)	Écart type (s)
A	44	41	39	45	46			5	43,00	2,92
B	42	41	36	42	37	39	42	7	39,86	2,54

On suppose que les deux échantillons sont indépendants et que les résistances des bétons de types A et B suivent respectivement des lois normales $N(\mu_A, \sigma_A^2)$ et $N(\mu_B, \sigma_B^2)$

Important : *formuler les hypothèses H_0 et H_1 pour chaque test.*

a) **(2 points)** Calculer un intervalle de confiance pour la variance de la résistance du béton de type A au niveau de confiance 95%.

b) **(2 points)** On compte effectuer une sixième mesure avec un nouveau spécimen du béton de type A. Calculer un intervalle de prévision pour cette mesure à un niveau de confiance 95 %; interpréter brièvement le résultat.

Question n° 4 : (suite)

c) **(2 points)** À un seuil $\alpha = 5\%$, peut-on conclure que le béton de type A présente en moyenne une résistance supérieure à 41 MPa ?

Question n° 4 : (suite)

d) **(3 points)** Au seuil $\alpha = 5\%$, peut-on dire que les variances des résistances sont différentes pour les deux types de béton A et B ?

Question nº 4 : (suite)

e) **(3 points)** Au seuil $\alpha = 5\%$, peut-on conclure que le béton de type A présente en moyenne une résistance supérieure à celle du béton de type B ?

Question n° 5 : (14 points)

On cherche à établir un lien entre le niveau des précipitations (X en mm) et le niveau de polluants (Y en ppm) en utilisant un échantillon de 20 observations obtenues lors d'une étude sur la pollution de l'air. Pour ce faire, on envisage un modèle de régression linéaire simple, d'équation

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon,$$

où β_0 et β_1 sont des paramètres, et ε une erreur aléatoire. On suppose que $\varepsilon \sim N(0,\ \sigma^2)$.

L'ajustement du modèle aux 20 observations recueillies $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, 20$ a donné les résultats partiels suivants :

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 846{,}20\ ; \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 51\,532{,}38\ ; \quad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 1\,910{,}98;$$
$$\sum_{i=1}^{20} y_i = 194{,}20\ ; \quad \sum_{i=1}^{20} x_i y_i = 7\,656{,}19.$$

a) **(4 points)** Calculer $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_1$. Donner l'équation de la droite des moindres carrés.

Question n° 5 : (suite)

b) **(3 points)** Compléter le tableau d'analyse de la variance ci-dessous, en laissant les cases inutiles vides. Quelle conclusion peut-on en tirer au seuil $\alpha = 0{,}05$?

Source de variation	Somme des carrés	Nombre de degrés d.l.	Moyenne des carrés	F_0
Régression				
Erreur				
Total	25,298			

c) **(2 points)** Donner un intervalle de confiance de niveau 95% pour le paramètre β_1.

Question nº 5 : (suite)

d) **(3 points)** On veut prédire le niveau de polluant Y_0 lorsque le niveau de précipitations est de 40 mm. Donner un intervalle de prévision pour Y_0 au niveau de confiance 95 %.

e) **(2 points)** Calculer le coefficient de détermination R^2 et interpréter ce résultat.

Question n° 6 : (4 points)

Cette question est constituée de deux parties indépendantes l'une de l'autre.

a) **(2 points)** Un ingénieur dispose n composants pour former un système en parallèle (redondance active) qui doit avoir une fiabilité d'au moins 99,9% pour une période de 1 an.

Quel nombre minimal de composants l'ingénieur doit-il utiliser si les composants fonctionnent indépendamment les uns des autres et s'ils ont chacun une fiabilité de 65 % pour une période de 1 an ?

b) **(2 points)** Vous vous présentez à un comptoir de service modélisé par une file d'attente $M/M/1$ (avec $\lambda = 9$ et $\mu = 10$) alors qu'il y a exactement six clients déjà en attente (et un en train d'être servi).

Soit T votre temps de séjour dans le système. Calculer $E(T)$ et $V(T)$.

Question n° 6 : (suite)