Parier & diverses lois

TD-5 en partie simplifié;
certains items traité en classe ET au TD-5

Dernière partie (5 points) nouvelle, i.e. non demandée au TD-5, mais expliquée en classe, et traitée numériquement

Moyenne: 5,2 / 20

1. **(a, b, c, d, e : 3 points ; f : 5 points)** Antoine Gombaud, Chevalier de Méré, ne pensait pas que son pari « réussir au moins un double-six en 24 jets de deux dés » était perdant, lorsqu'il pariait à du un contre un. Notons ce pari par B, comme dans le travail dirigé.

   (a) Quelle est la probabilité de gagner, p_B, du pari de Gombaud ?

   Réponse: $p_B = 1 - (35/36)^{24} \doteq 0{,}491\,4$.

   (b) Qu'entend-on par un pari perdant, lorsqu'on parie à du un contre un ? Vous définierez la fonction de gain d'un pari à du un contre un, justifierez votre assertion à partir de là.

   Réponse: L'espérance de la fonction de gain doit être négative. Ici, lorsque x est la somme pariée : $E(G) = x(2p - 1) < 0 \iff p < 1/2$.

   (c) À partir de combien de lancers de paires de dés aurait-il eu un pari gagnant avec une probabilité $p \geq 0{,}6$, toujours en misant sur le double-six ?

   Réponse: Soit N ce nombre : $1 - (35/36)^N \geq 0{,}6 \iff N \geq 32{,}52$. Le plus petit $N = 33$.

   (d) Supposons qu'un parieur ait exactement la probabilité $p = 0{,}6$ de gagner un certain pari. Quelle est la somme minimale que le parieur doit engager pour que son espérance du gain soit au moins de 100\$ chaque fois qu'il réussit à trouver un contre-parieur à du un contre un ?

   Réponse: L'espérance du gain avec l'enchère S est alors $S \times 0{,}6 - S \times 0{,}4 \geq 100\$ \iff S \geq 500\$$.

   (e) Après avoir parié 20 fois sur le pari défini à l'item précédent, quelle est la probabilité que le parieur soit perdant avec la même somme S engagée chaque fois ?

   Indice. Vous définierez la valeur de la réalisation de $X_{20} \sim \mathcal{B}(\,n = 20\,;\, p = 0{,}6\,)$ qui ne doit pas être dépassée pour que le parieur n'ait rien perdu. Le mieux ici est d'utiliser une approximation correctement justifiée de la binomiale.

Réponse: Le nombre de fois où le parieur gagne est une binomiale $X_{20} \sim \mathcal{B}(n = 20\,; p = 0{,}6) \approx X_N \sim \mathcal{N}(\mu = 12\,, \sigma \doteq 2{,}191)$. Et $\mathrm{P}\big(X_{20} \geq 10\big) \approx \mathrm{P}\big(X_N \geq 9{,}5\big) \doteq \mathrm{P}\big(Z \geq -1{,}14\big) \doteq 0{,}873$.

(f) Supposez maintenant que p soit aux environs de 0,6 pour le pari de Gombaud à du un contre un avec le bon nombre de lancers de paires de dés.

Notons $X_n \sim \mathcal{B}(n\,; p)$, la binomiale dont la transformation X_n/n est une approximation de p. X_n est ainsi le nombre de fois en n essais indépendnants où le pari aurait été gagnant. Combien faudrait-il d'essais pour que la valeur de X/n soit à une *distance* de moins de 0,05 de p, avec une probabilité dépassant 99% ?

Réponse: On a $X_n/n \approx \mathcal{N}(p\,, \sigma \doteq \sqrt{pq/n})$. On doit effectuer en détails le calcul suivant :

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\big(|\frac{X}{n} - p| < 0{,}05\big) \geq 0{,}99 \\ \iff &2\Phi(\frac{0{,}05\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}) - 1 \geq 0{,}99 \\ \iff &n \geq [\,20 \times \Phi^{-1}(1{,}99/\ 2)\sqrt{pq}\,]^2 \doteq 636{,}95 \end{aligned}$$

Donc au moins 637 fois.

TD-6, + TCL (traitée en classe sur un exemple aussi simple; les formules données en classe et dans le manuel)

Moyenne: 1,3 / 5

Transformer

2. **(a : 2 points ; b : 3 points)** À cause de la variabilité des diamètres des moules, on sait que les volumes des billes métalliques de roulements à bille sont variables. Les diamètres des moules ont été mesurés sur de grandes quantités de billes, et on a déterminé qu'ils suivaient une loi gaussienne de moyenne 3mm et d'écart type 0,02mm. Admettons que ces quantités soient exactes.

   (a) Quelles sont les moyenne et variance approximatives qu'on peut attendre des volumes des billes ?

   (b) Supposons que l'entreprise produise 1 million (exactement) de telles billes par jour. Donner une approximation du volume de matière première requise chaque jour qui ne sera dépassée que 1% des jours où l'usine est en opération.

   Indice : vous pouvez utiliser les formules d'approximation vues en classe pour les moyenne et variance des transformations de variables aléatoires. On a aussi que le volume d'une sphère en fonction du diamètre est : $V(D) = \pi D^3/6$.

   Réponse: (a) Une formule donne $\mu_V \approx V(\mu_D) + \pi\mu_D\sigma_D^2/2$, et $\sigma_V^2 \approx [\pi\mu/2]^2\,\sigma_D^2$, ce qui donne $\mu_V \approx 14{,}14$ mm^3, et $\sigma_V^2 \approx 8{,}8 \times 10^{-3}$mm^6, et $\sigma_V \approx 9{,}425 \times 10^{-3}$mm^3.
   (b)Par le TCL, $V^Q = \sum V_i \sim \mathcal{N}(\,10^6\mu_V\,,\, \sigma = 10^3\sigma_V\,)$. Et le calcul suivant donne pour, $V^Q_{0,99}$, le quantile 0,99 de V^Q :

$$\begin{aligned} V^Q_{0,99} &\doteq 10^6\mu_V + 10^3\sigma_V\Phi^{-1}(0{,}99) \\ &\doteq 10^6 \times 14{,}11 + 10^3 \times 9{,}425 \times 10^{-3} \times 2{,}326) \\ &\doteq 14{,}139\ 721 \times 10^6\text{mm}^3. \end{aligned}$$

TD-6, *nombreux* exemples faits en classe, + TCL

Moyenne : 5,5 / 10

Respecter des normes

3. **($2\frac{1}{2}$ chaque item)** La ligne de fabrication de résistances de 300Ω (la valeur nominale) doit garantir qu'*au plus* 2 700 résistances par million aient une valeur hors de l'intervalle de spécification qui est $[\,285\,;\,315\,]$.

   (a) Supposons que pour une journée quelconque la production s'effectue selon la loi gaussienne $R \sim \mathcal{N}(\,\mu = 300\,,\,\sigma\,)$. Déterminez la valeur maximale de σ qui assure la contrainte pour l'intervalle de spécification, soit moins de 2 700 résistances hors spécification par million produites.

   (b) Supposons qu'une certaine journée la production s'effectue selon la loi $R \sim \mathcal{N}(\,\mu = 299\,,\,\sigma = 4{,}91\,)$. La production de cette journée-là est-elle conforme aux spécifications ?

   (c) On compte fabriquer 8 millions de résistances cette journée-là. Combien attend-on de résistances hors spécification ? Spécifiez vos hypothèses, et la loi sous-jacente.

   (d) Quelle est la probabilité qu'on en trouve plus de 21 600, soit $8 \times 2\ 700$?

   Note : Aux fins du calcul dans les tables fournies, vous arrondirez les quantiles à deux décimales dans les deux derniers items.

Réponse: (a) $\sigma < 5$; (b) la probabilité de non conformité est $1 - (\,\Phi(3{,}26) - \Phi(2{,}85)\,) \doteq 2\ 743 \times 10^{-6}$. Et la production n'est pas conforme ; (c)la loi est une binomiale $X \sim \mathcal{B}(\,8 \times 10^6\,;\,2\ 743 \times 10^{-6}\,)$, lorsqu'on admet l'indépendance de la conformité pour chaque produit non conforme, dont la moyenne est $2\ 743 \times 8 = 21\ 944$; on peut approcher le nombre de défectueux (binomiale) par une gaussienne $X_N \sim \mathcal{N}(\,\mu = 21\ 944\,,\,\sigma = 147{,}93\,)$, et $\mathrm{P}\big(\,X \geq 21\ 600\,\big) \approx \mathrm{P}\big(\,X_N \geq 21600\,\big) \approx \Phi(2{,}32) \doteq 0{,}989\ 8$.

Attendre

Fait en classe, avec des temps un peu différents (prob. totales: plusieurs exemples faits en classe)

Moyenne: 0,8 / 5

4. **(5 points)** Vous savez qu'aux heures de pointe les rames de métro arrivent en station aux deux minutes, et qu'elles y restent pour débarquer et prendre des passagers exactement 20 secondes.

   Supposez que l'attente pour une rame aux heures de pointe suit une loi uniforme $\mathcal{U}(\,0\,;\,2\,)$ les unités sont en minutes, et que vous arrivez n'importe quand dans l'intervalle de 140 secondes qui comprend l'attente d'une rame quand elle n'est pas là et l'arrêt en station d'une rame.

   Quelle est la probabilité que votre attente séjour en station dépasse 10 secondes ?

   Réponse: Par le théorème des probabilités totales, et le fait que les attentes suivent des lois uniformes :

$$p = 1\frac{120}{140} + \frac{1}{2}\frac{20}{140} = \frac{12}{14} + \frac{1}{14} = \frac{13}{14}\,.$$

Formules élémentaires (prob. totales), calculs de surface de triangle; plusieurs exemples faits en classe

Moyenne: 0,9 / 10

5. **(a, b, c : 2 points ; d : 4 points)** Modélisation légèrement différente. Supposons maintenant que le temps d'attente, T, soit une somme de deux lois uniformes indépendantes : $T_i \sim \mathcal{U}(\,0\,;\,2\,)$, $i = 1, 2$, soit $\mathrm{T} = T_1 + T_2$.

   (a) Quel est le temps d'attente maximum, M, les moyenne et variance de votre temps d'attente, μ_T et σ_T^2 ?

   (b) Un calcul donne que la loi du temps T possède la densité illustrée à la Fig. 1.

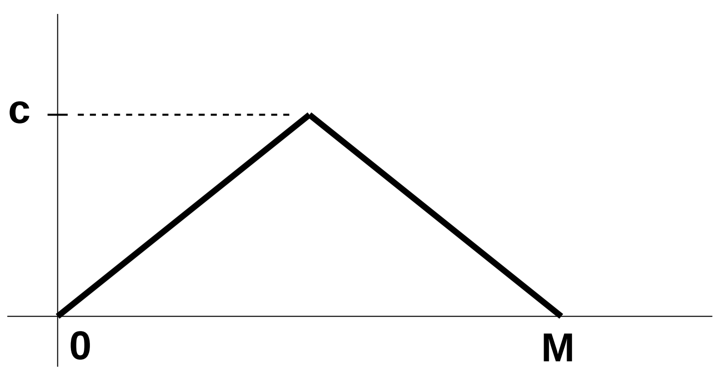

FIG. 1 – La densité de la loi de T de l'exercice 5.

(c) Quelle est la valeur de c ?

(d) Quelle est la valeur de la probabilité $\mathrm{P}\big(\,T < 3\,\big)$?

(e) L'inégalité de Camp-Meidel donne, par symétrie de la densité, que la probabilité $\mathrm{P}\big(\,T > \mu_T + 2\sigma\,\big) \leq 1/18$. Calculez-en la valeur exacte.

<u>*Réponse*</u>: (a) $M = 4\,, \mu_T \equiv E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 2\,, \sigma_T^2 \equiv V(T) = V(T_1) + V(T_2) = 2/3$ (par indépendance) ; la surface totale est la probabilité totale et vaut 1 : $(4 \times c)/2 = 1 \Rightarrow c = 1/2$; (c) $\mathrm{P}\big(\,T < 3\,\big) = 1 - 1/8 = 7/8$, puisque la droite à partir de 2 vaut $y = 1 - x/4$; Le calcul explicite sur la densité elle-même donne : la surface sous la courbe de $2 + 2\sqrt{2/3}$ jusquà 4 est la surface d'un triangle, on trouve $(1 - \sqrt{2/3})^2/4 = 0{,}008\,42$, qu'on peut comparer à $1/18 \doteq 0{,}055\,6$ obtenu de Camp-Meidel.

Formules de base (cumulative, somme de VA)
+ TCL
Indication en classe de *noter sur votre formulaire* les formules:
ESPÉRANCE D'UNE SOMME DE VA; DE SA VARIANCE DANS LE CAS D'INDÉPENDANCE
Calculs de quantiles de lois gaussiennes (nombreux exemples en classe, & TD-6)
Moyenne: 1 / 10

6. **(a, b, c : 2 points ; d : 4 points)** Supposons qu'il y ait constamment des requêtes en attente à un serveur informatique, que le temps de service d'une requête suive une loi exponentielle de moyenne un centième de seconde, et que ces temps de traitement soient indépendants les uns des autres.

   (a) Donner l'expression, en termes des T_i pour le temps total, T, de service de 3 requêtes ?

   On sait qu'une somme de k exponentielles indépendantes de mêmes paramètres λ suit une loi d'Erlang dont la cumulative est :

$$F(t; k, \lambda) = 1 - \sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} .$$

   (b) Quelles sont la moyenne et l'écart type de la loi T que vous avez définie à l'item précédent ?

   (c) Quelle est la probabilité que cette attente dépasse 0,03 secondes ?

   (d) Supposez que le théorème central de la limite (TCL) s'applique pour le temps de traitement de 50 requêtes. Calculez le temps de traitement cumulatif de 50 requêtes qui ne sera dépassé que 1 % des fois.

Réponse: (a) $T = T_1 + T_2 + T_3$; (b) $\mu_T = 0{,}03\text{sec}$; $\sigma_T = \sqrt{3 \times 0{,}01^2} \doteq 0{,}017\,32\text{sec}$; (c) $\mathrm{P}\big(T > 0{,}03\big) = 1 - F(0{,}03; k = 3, \lambda = 100) \doteq 0{,}423\,2$; (d) par le TCL, on a $T \equiv \sum_1^{50} T_i \sim \mathcal{N}(\,\mu = 50 \times 0{,}01\,,\ \sigma = \sqrt{50} \times 0{,}01 \doteq 0{,}070\,71\,)$ et $t_{0{,}99} = \mu + \sigma\Phi^{-1}(0{,}99) \doteq 0{,}664\,5$.