DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET DE GÉNIE INDUSTRIEL

MTH2302D - PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

TD n° 8

Exercice 1 : 8.2 a) page 239. *[9.2 a) dans la 2ème édition]*

Exercice 2 : 8.4 page 239 (modifié) : *[9.4 dans la 2ème édition]*

On choisit au hasard un échantillon de 100 plaquettes semi-conductrices et on vérifie si elles sont défectueuses ou non. Elles proviennent d'un procédé de fabrication qui génère une proportion θ de plaquettes défectueuses avec $0 < \theta < 1$. On pose $X_i = 1$ si la i-ème plaquette est défectueuse (et $X_i = 0$ sinon), avec $i \in \{1, 2, \ldots, 100\}$, $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ le nombre de plaquettes défectueuses dans l'échantillon, et $\overline{X} = Y/100$ la proportion de plaquettes défectueuses dans l'échantillon.

a) Déterminer la loi exacte de Y et ses paramètres.

b) Calculer $P(1 \leq Y \leq 5)$ si $\theta = 0{,}03$.

c) Déterminer une loi approximative de Y basée sur le théorème central-limite.

d) Déterminer une loi approximative de $\overline{X}$.

e) Utiliser cette approximation pour calculer $P(0{,}01 \leq \overline{X} \leq 0{,}05)$ si $\theta = 0{,}03$, sans la correction pour la continuité.

f) Comparer les réponses obtenues en **b)** et en **e)** (donner les erreurs). Utiliser cette fois la correction pour la continuité et donner la nouvelle erreur.

Exercice 3 :

Soient les variables aléatoires indépendantes $Z_i \sim \mathrm{N}(0,1)$ et $U_i \sim \chi^2_1$ avec $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ Déterminer la loi de probabilité de chacune des variables aléatoires suivantes ainsi que leurs paramètres.

a) $T_1 = \sum_{i=1}^{4} Z_i$.

b) $T_2 = \sum_{i=1}^{3} U_i$.

c) $T_3 = \dfrac{2U_1}{U_2 + U_3}$.

d) $T_4 = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} Z_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{4} U_i}}$.

e) $T_5 = (U_1 + U_2)/2$.

Exercice 4 :

Avec les mêmes variables que dans l'exercice précédent :

a) Trouver a tel que $P(U_1/U_2 \geq a) = 0{,}1$.

b) Trouver b tel que $P\left(\dfrac{U_1}{1+U_1} \geq b\right) = 0{,}01$.

c) Trouver c tel que $P\left(\dfrac{(Z_1+Z_2)^2}{Z_3^2+Z_4^2} \geq c\right) = 0{,}05$.

Exercice 5 :

Soit une population X qui suit une loi uniforme $\mathrm{U}(0,\theta)$ avec $\theta > 0$ et soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un échantillon aléatoire de X. On pose $M = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ la valeur maximale observée dans l'échantillon.

a) Utiliser le fait que que $P(M \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \ldots, X_n \leq x)$ pour déterminer la distribution d'échantillonnage de M.

b) Vérifier que la distribution d'échantillonnage de $Y = M/\theta$ ne dépend pas de θ.

c) Déterminer la valeur $c_{0,05}$ qui satisfait $P(Y > c_{0,05}) = 0{,}05$ et calculer-la pour un échantillon de taille $n = 20$.