TD N° 10

Exercice 1

$X \equiv$ diamètre $\quad X \sim \mathcal{N}(\mu = ?, \sigma^2 = 0.01^2)$

$\bar{x} = 0.26$, $n = 10$

a) $H_0 : \mu = \mu_0 = 0.25$ $\qquad \alpha = 0.05$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

* Population normale
* Variance σ^2 connue
* Test bilatéral

$$\Rightarrow Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

on rejette H_0 si $|Z_0| > z_{\frac{\alpha}{2}}$.

on a ; $Z_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{0.26 - 0.25}{0.01 / \sqrt{10}} \simeq 3.16$

$\alpha = 0.05 \Rightarrow \underbrace{\left\{ \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \right\}}_{} = 0.975$

Table $\Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

Comme $|Z_0| > 1.96$ alors H_0 est rejetée.

on a alors une preuve forte que μ diffère significativement de 0.25.

6.) $H_0 : \mu = \mu_0 = 0.25$

$H_1 : \mu \neq 0.25$

$$\mathbb{P}(\text{Rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ fausse}) = \frac{9}{10} = 1-\beta$$

(Puissance du test)

on cherche n tel que $\underbrace{1-\beta} = 0.9$.

$$n = \left\lceil \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}} + z_\beta)^2 \sigma^2}{(\mu - \mu_0)^2} \right\rceil \quad \text{où} \quad \underbrace{\mu - \mu_0}_{\text{écart}} = 0.01$$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$, $\Phi(z_\beta) = 1-\beta = 0.9$

$\xrightarrow{\text{Table}}$ $z_\beta \cong 1.28$

$$\Rightarrow n = \lceil 10.4976 \rceil = 11$$

Exercice 2

$\sigma = 10.$ $\quad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 10^2)$

$H_0 : \mu = \mu_0 = 1000$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$n = \left\lceil \frac{(z_{\frac{\alpha}{2}} + z_\beta)^2 \sigma^2}{\Delta^2} \right\rceil$$

$\alpha = 0.05 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ $\quad \Phi(z_\beta) = 1 - \beta$

	β \ Δ	5	10	15	20
$z_\beta = 1.28$	0.1	42	11	5	3
$z_\beta = 1.64$	0.05	52	13	6	4
$z_\beta = 2.33$	0.01	74	19	9	5

Pour analyser les valeurs du tableau,

* fixer β et observer sur chaque ligne les variations de n en fonction de Δ.
* Faire pareil pour Δ.

On remarque que Δ semble plus influent que β sur la valeur de n.

Exercice 3

① ⇝ actuelle dév (avant)

② ⇝ nouvelle dév (après remplacement).

$n_1 = 12, \quad \bar{x}_1 = 8.1, \quad S_1 = 1.4$

$n_2 = 10, \quad \bar{x}_2 = 7.3, \quad S_2 = 0.9$.

on a l'hypothèse de normalité.

$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \overset{?}{\sigma_1^2}) \qquad X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \overset{?}{\sigma_2^2})$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

a.) $\alpha = 0.05$

$H_0 ; \mu_1 = \mu_2$

$H_1 ; \mu_1 > \mu_2$

Variances inconnues égales, Pop normales, test unilatéral à droite.

$$\Rightarrow T_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad \text{où} \quad S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$\Downarrow$$

$$S_p = 1.2010412$$

on a $t_0 = 1.556$

Ho rejetée si $t_0 > t_{\alpha; n_1+n_2-2} = t_{0.05; 20} = 1.725$

Ce qui n'est pas le cas $\Rightarrow H_0$ est acceptée (conclusion) : on a donc pas de preuve d'une différence significative entre les moyennes des deux développeuses.

b) on achète si on peut montrer que

$\mu_1 - \mu_2 > 2$

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 2$

$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 2$

H_0 sera t-elle rejetée au profit de H_1 ?

Non car on n'est pas en mesure de prouver que $\mu_1 > \mu_2$ i.e $\mu_1 - \mu_2 > 0$.

on ne peut donc pas prouver que $\mu_1 - \mu_2 > 2$.

H_0 sera donc toujours acceptée !

Exercice 4 :

$\bar{x} = 9.7$, $s^2 = 14.62$ $\quad X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

a) $\alpha = 0.05$

$H_0 : \mu = \mu_0 = 8$

$H_1 : \mu > \mu_0 = 8$

si H_0 est rejetée, alors on aurait une preuve forte que $\mu > 8$ au seuil $\alpha = 5\%$.

$\left.\begin{array}{l} * \text{ Pop. normale} \\ * \ \sigma^2 \text{ inconnue} \\ * \text{ Test unilatéral à droite.} \end{array}\right\} \Rightarrow T_0 = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

on rejette H_0 si $T_0 > t_{\alpha ; n-1}$ où $n = 11$

• $t_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \simeq 1.475$

$t_{\alpha ; n-1} = t_{0.05 ; 10} = 1.812$

$t_0 \not> 1.812 \Longrightarrow H_0$ n'est pas rejetée.

Il n'y a donc pas de preuve (forte) que le nombre d'heures perdues par jour > 8.

(car l'acceptation d'une hypothèse nulle est une conclusion faible).

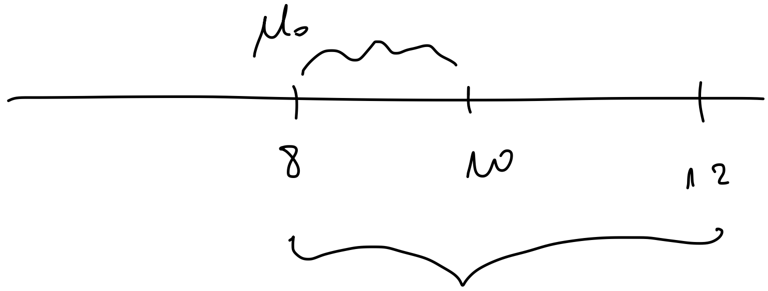
b.) i.) Quand n augmente, β diminue (P. 295)

Non !

ii.) Quand α diminue, β augmente (P 295)

Oui !

iii.)



Quand on augmente l'écart avec μ_0, β diminue (P. 294).

$\Rightarrow$ β est plus grand avec un plus petit écart.

donc Pour $\mu_1 = 10$, β est plus grand.

Exercice 5

$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1 = ?\,,\ \sigma_1^2 = 0.015^2)$

$X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2 = ?\,,\ \sigma_2^2 = 0.018^2)$

$n = n_1 = n_2 = 10$, $\bar{x}_1 = 16.015$, $\bar{x}_2 = 16.005$

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\Big(\underbrace{\mu}_{\mathbb{E}(X)}, \overbrace{\frac{\sigma^2}{n}}^{Var(X)}\Big)$$

a) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$

$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \overset{?}{\sim} \text{Loi}$$

$\{X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1}\} \perp\!\!\!\perp \{X_{2,1}, \ldots, X_{2,n_2}\}$

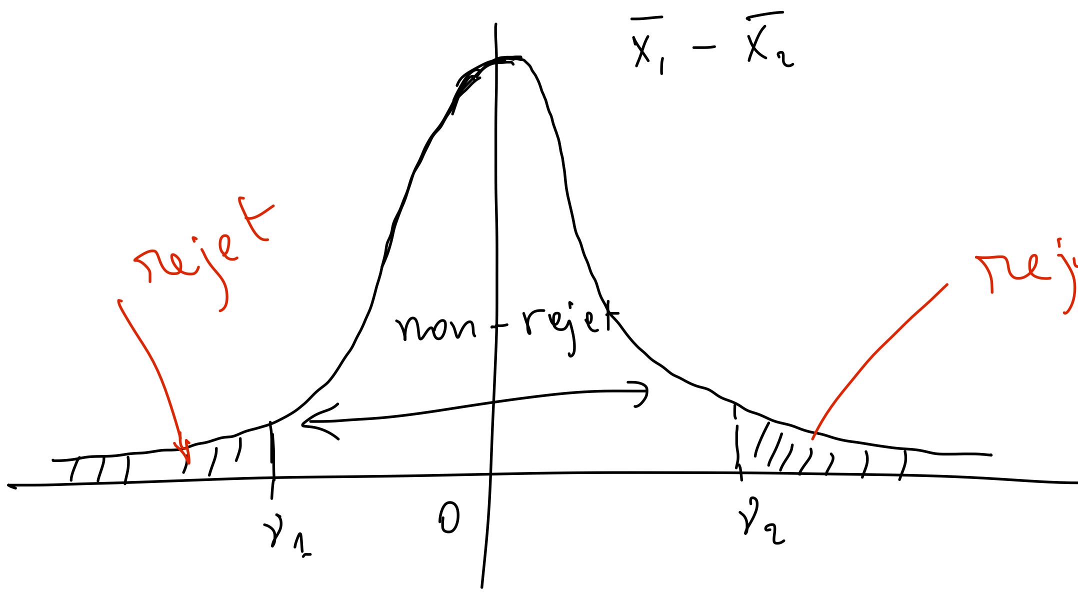
$$\bar{X}_1 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_{1,i} \qquad \bar{X}_2 = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} X_{2,j}$$

$$\bar{X}_1 \sim \mathcal{N}\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n}\right) \qquad \bar{X}_2 \sim \mathcal{N}\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n}\right)$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}\right)$$

Sous H_0, $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow \bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}\right)$

$$= \mathcal{N}(0, 0.007409453^2)$$



Zone de rejet ;

Test bilatéral, 2 moyennes,

Distr normales, σ_i^2 connues.

$$\Rightarrow \quad z_0 = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}}$$

on sait que H_0 acceptée si

$|z_0| \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$ i.e. si

$$-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq z_0 \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad -z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}}} \leq z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad -z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}} =: \nu_1 \leq \overline{X_1} - \overline{X_2} \leq z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{n}} =: \nu_2$$

b) $\alpha = 0.05$, $z_0 \simeq 1.35$, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

Comme $|z_0| \not> 1.96$ alors H_0 n'est pas rejetée. $\Rightarrow$ le service de Contrôle n'a pas raison.

c) Puissance du test : $\Delta = 0.01 = \mu_1 - \mu_2$

$$1 - \beta = P(\text{rejeter } H_0 \mid H_0 \text{ fausse})$$

$$\beta(\mu_1, \mu_2) = \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right) - \Phi\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} - \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right)$$

$$= \Phi(0.61) - \Phi(-3.31)$$

$$= 0.7286$$

$$\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975$$

$$\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$\Rightarrow \boxed{1 - \beta \simeq 0.2714}$$