Question nº 1 : (3 points)

Soit A et B deux événements d'un espace échantillon tels que

$$P(A) = 3/4,\ P(\overline{A} \cap B) = 1/5,\ \text{et } P(A \mid B) = 5/9.$$

Calculer :

a) **(1 point)** $P(B \mid \overline{A})$.

b) **(1 point)** $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

c) **(1 point)** $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

Réponse :

Question 2 Missing

Question n° 3 : (4 points)

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est définie par

$$f_X(x) = \begin{cases} a\,x\,(2-x) & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où a est une constante réelle.

a) (1 point) Déterminer la valeur de a.

b) (3 points) On considère Y la variable définie par $Y = 5 - X$.

b.1) (2 points) Déterminer la fonction de densité $f_Y(y)$ de la variable Y.

b.2) (1 point) Calculer l'espérance mathématique de Y.

Question n° 4 : (4 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que

x	-1	0	1
$P(X=x)$	?	0,2	?

y	0	1	2
$P(Y=y)$	0,5	?	0,2

y	0	1	2
$P(Y=y \mid X=0)$	0,3	0,5	?

On donne aussi

$$P(X=-1, Y=0) = 0{,}14 \; ; \quad P(X=1 \mid Y=1) = P(X=-1 \mid Y=2) = 0{,}4.$$

a) (1 point) Déterminer la fonction de masse conjointe du vecteur $[X, Y]$.

b) (1 point) Calculer $P(X=1 \mid Y=0)$ et $P(Y=1 \mid X=1)$.

c) (2 points) Soit la variable T définie par $T = 10 + 2X - 3Y$. Déterminer l'écart-type de T.

Question nº 5 : (2 points)

On suppose que la durée de fonctionnement (en années) d'un certain type de composant est une variable aléatoire distribuée selon une loi exponentielle de paramètre λ. On veut construire un système, constitué de n composants de ce type montés en parallèle, dont la fiabilité pour un an (la probabilité que le système fonctionne pendant plus d'un an) est supérieure à 0,9999. On suppose que les n composants opèrent indépendamment les uns des autres.

a) (1 point) Supposons que $n = 4$. Déterminer la plus petite valeur de λ.

b) (1 point) Supposons à présent que la durée moyenne de fonctionnement d'un composant de ce type est de deux ans. Quelle devrait être la plus petite valeur de n ?

Question nº 6 : (4 points)

On suppose que le poids X d'un adolescent (16 ans) est distribué selon une loi normale de moyenne μ =58 kg et d'écart-type σ =6 kg. On considère que le poids d'un adolescent est « hors-norme » si celui-ci est en dehors de l'intervalle $[\mu - 2\sigma;\ \mu + 2\sigma]$.

a) (1 point) Quelle est la probabilité que le poids d'un adolescent soit hors-norme ?

b) (1 point) Sachant qu'un adolescent pèse plus de 50kg, quelle est alors la probabilité que son poids soit hors-norme ?

c) (1 point) Supposons qu'on choisit un adolescent au hasard et qu'on mesure son poids. L'expérience est répétée jusqu'à ce qu'on en trouve un avec un poids hors-norme. En moyenne, combien de fois l'expérience sera-t-elle effectuée ?

d) (1 point) Considérons à présent une école de 235 adolescents. En utilisant une approximation basée sur la loi normale, quelle est la probabilité qu'au moins 5% des adolescents de l'école aient un poids hors-norme ?

Réponse :