CAHIER D'EXAMEN

ÉCOLE POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

le génie sans frontières

Matricule

[redacted]

CONTRÔLE PÉRIODIQUE 1

Nom: [redacted]
(lettres moulées)

Prénom: [redacted]
(lettres moulées)

No du cours: **MTH2302D** Section: [redacted]

Titre du cours: **Probabilités et statistique**

DIRECTIVES:

1. Remplissez la partie ci-dessus et signez immédiatement le cahier.
2. Donnez une réponse complète à chaque question et cette réponse doit être **expliquée et justifiée.**
3. Chaque question vaut 1,5 point. L'examen sera compté sur 10.
4. Servez-vous du verso pour vos calculs.
5. Vérifiez que ce cahier compte **17** feuilles (en excluant cette feuille).
6. Ne détachez aucune feuille de ce cahier.
7. Documentation permise : **une** feuille 8,5'' X 11'' (recto verso).
8. Calculatrices **non programmables** seulement.

Réservé

1.	0 / 1,5
2.	1 / 1,5
3.	1,5 / 1,5
4.	1 / 1,5
5.	0 / 1,5
6.	0,5 / 1,5
7.	0,5 / 1,5
Total:	4,5 / 10

Le plagiat, la participation au plagiat, la tentative de plagiat entraînent automatiquement l'attribution de la note F dans tous les cours suivis par l'étudiant durant le trimestre. L'École est libre d'imposer toute autre sanction jugée opportune, y compris l'exclusion.

[redacted]

Date: lundi 14 février 2011
De: 12 h 45 à 14 h

Question n° 1

La probabilité qu'un certain logiciel mathématique comporte exactement k bogues est donnée par $(1/2)^{k+1}$, pour $k = 0, 1, \ldots$ De plus, la probabilité que ce logiciel puisse effectuer une certaine tâche, étant donné qu'il comporte exactement k bogues, est donnée par $(2/3)^k$, pour $k = 0, 1, \ldots$

(a) Quelle est la probabilité p_1 que le logiciel considéré effectue la tâche en question correctement?

(b) Sachant que le logiciel a réussi à effectuer la tâche correctement, quelle est la probabilité p_2 qu'il comporte exactement deux bogues?

a| $P_1[A] = (2/3)^K$ A: Fonctionne

B: effectue 2 bogues $P[B] = [1/2]^3 = 0,125$

b) $P[B \mid A] = \dfrac{P[B \cap A]}{P[A]} = \dfrac{0,125}{[2/3]^2}$

$= 0,28125$

0

Question n° 1 (suite)

Solution B_K : K bogues

A : tâche correcte

a) $$P[A] = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{K} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{K+1}$$

$$= \underbrace{\tfrac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^{K}}_{\text{série géo}} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 3/4$$

b) $$P[B_2|A] = \frac{P[A|B_2]\,P[B_2]}{P[A]} = \frac{(2/3)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2+1}}{3/4}$$

$$= 2/27$$

Réponse: (a) $p_1 = \cancel{[2/3]^K}$ $3/4$

(b) $p_2 = \cancel{0{,}\ldots 15}$ $2/27$

Question n° 2

Un groupe d'étudiants est constitué de 30 étudiants en génie industriel, 15 étudiants en génie informatique et 5 étudiants en génie logiciel. Deux étudiants sont pris au hasard et sans remise parmi ceux de ce groupe. Quelle est la probabilité qu'ils proviennent (a) de génie industriel? (b) de deux départements différents?

$P[A^*] =$

A: étudiant en génie industriel $P[A] = 30/50$

B: " " en logiciel $P[B] = 5/50$ $P[B^*] = \frac{4}{49}$

C: " " en informatique $P[C] = 15/50$

$P[\text{Génie industriel}] = P[A] \cdot P[A'] = \frac{3}{5} \times \frac{29}{49} = \frac{87}{245}$ ✓

~~P[départements différents] = 1 - P[m̂ départements]~~

$$\cancel{= 1 - P[A]P[A^*] - P[B][B^*] - P[C]P[C^*]}$$

$$\cancel{= 1 - \frac{3}{5} \times \frac{29}{49} - \frac{5}{50} \times \frac{4}{49} - \frac{15}{50} \times \frac{14}{49}}$$

$$\cancel{= 1 - \frac{64}{245} = \frac{181}{245} = 0,7387}$$

X

1

solutions b)

$$\frac{30 \cdot 15 + 30 \cdot 5 + 15 \cdot 5}{\binom{50}{2}} = 27/49$$

Question n° 3

Une entreprise a acheté un lot de 400 nouveaux écrans pour ses ordinateurs. La personne responsable du contrôle de la qualité décide de procéder comme suit: elle prend 20 écrans, au hasard et sans remise, parmi les 400, et elle décide d'accepter le lot si et seulement si elle ne trouve pas plus d'un écran défectueux parmi les 20 pris au hasard. Si l'on suppose que le lot contient en fait deux écrans défectueux, alors le nombre M d'écrans défectueux dans l'échantillon sans remise de 20 écrans présente une distribution hypergéométrique de paramètres $N = 400$, $n = 20$ et $d = 2$. Utiliser une distribution de Poisson pour calculer approximativement la probabilité que le lot soit accepté. — max = 1

Indication. Il faut procéder en deux étapes.

$$P[X \leq 1] = P[X=1] + P[X=0]$$

$$\frac{n}{N} = \frac{20}{400} = 0{,}05 < 0{,}1$$

$$X \overset{\text{approx}}{\sim} B(20, 0{,}005) \quad p = \frac{d}{N} = \frac{2}{400} = 0{,}005$$

$$\text{donc } \lambda = \overset{p\,=\,\text{constant}}{n \cdot p} = 20 \times 0{,}005 = 0{,}1$$

$$Y \sim \text{poi}(0{,}1)$$

1,5

$$P[X=1] + P[X=0] = \frac{e^{-0.1}\, 0.1^{1}}{1} + \frac{e^{-0.1} \times 1}{1}$$

$$= 0{,}9953$$

Question n° 4

Soit T la variable aléatoire qui désigne la durée de vie (en années) d'une voiture. Calculer la probabilité que cette voiture dure entre 10 et 11 ans si T présente une distribution (a) $\mathrm{N}(10, 4)$ (approximativement); (b) $\mathrm{G}(2, 1/5)$.

a) $T \overset{approx}{\sim} N(10, 4)$ μ σ^2 $\sigma = 2$

$P[10 \leq T \leq 11]$

$= P[\Phi(\frac{10-10}{2}) \leq T \leq \Phi[\frac{11-10}{2}]]$

$T = \Phi[\frac{1}{2}] - \Phi[0] = 0,6915 - 0,5000 = 0,1915$

b) Solution

$P[10 < G(2, \frac{1}{5}) < 11]$

$= F_X(11) - F_X(10) = 1 - F_Y(1) - (1 - F_Z(1))$

$= F_Z(1) - F_Y(1)$

$= e^{-2} + 2e^{-2} - e^{-11/5} - \frac{11}{5} e^{-11/5}$

$=$ ~~0,2~~ $0,0514$

Question n° 4 (suite)

α λ

b) $Y \sim G(2, \frac{1}{5})$

$P[\ Y \leq 11] = P[Y = 11]$??

$$f_x(11) = \frac{0{,}2}{\Gamma(2)} (0{,}2 \times 11)^1 e^{-0{,}2 \times 11} = 0{,}04875$$

$\Gamma(2) \to (2-1)! = 1$

$P[G(2, \frac{1}{5}) \leq 11] = P[Poi(\frac{1}{5} \times 11) \geq 2]$

Preuve

$$1 - P[\ \triangle = 1 - \frac{e^{-11/5} \frac{11}{5}^1}{1} - e^{-11/5} = 0{,}645$$

$= 0{,}594$

$0{,}051$

$\approx P$

$0{,}04915$

1

Réponse: (a) 0,1915 ✓

(b) ~~0,04915~~ ✗

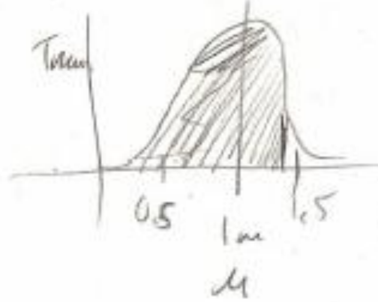
0,0514

Question n° 5

On suppose que le temps (en minutes) que des internautes passent sur un certain site Web présente une distribution lognormale de paramètres $\mu = 1$ et $\sigma^2 = 1/4$. Quel est le temps maximal que passent 99 % des internautes sur ce site Web?

$\mu = 1$

$\sigma = 0{,}5$



$P[X \leq 0{,}99]$

$$0{,}01 - 1 = \frac{X - 1}{0.5}$$

$X = 0{,}505$ minutes

Solution :

$P[X < x] = 0{,}99$

$X \sim LN(1, 1/4)$

$P[e^Y \leq x] = 0.99$

$Y \sim N(1, 1/4)$

$P[Y \leq \ln x] = 0.99$

$$\Phi\left(\frac{\ln x - 1}{1/2}\right) = 0.99$$

$$Q\left(\frac{\ln x - 1}{1/2}\right) = 0{,}01$$

$$\frac{\ln x - 1}{1/2} = Q^{-1}(0{,}01) = 2{,}326$$

$\ln x = 2{,}163$

$x = e^{-2.163} = 8{,}7$ minutes

0

Question n° 6

Soit X une variable aléatoire qui présente une distribution de Bernoulli de paramètre $p = 1/3$. Calculer (a) $\mathrm{VAR}[|X-1|]$; (b) $\mathrm{VAR}[|X-\frac{1}{2}|]$.

$X \sim B(1, 1/3) =$

a) $\mathrm{VAR}[|X-1|] = [E|X-1|^2] - (E[X-1])^2$

X ne peut être > 1 car Bernoulli

donc si $x = 1$

$\mathrm{VAR}[|X-1] = 0$

si $x = 0$

$\mathrm{VAR}[(X-1)] = 0$

$Y = X - 1$

$= 1 - X$

$\mathrm{VAR}[1-X]$

Solution X: Bernoulli (p)

a) $\mathrm{VAR}[|X-1|]$ $Y = |X-1|$

$= \mathrm{VAR}[1-X]$ $= 1-X$ car $x \geq 0$

$= \mathrm{VAR}[X] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 2/9$

Question n° 6 (suite)

B) $VAR[[X-\frac{1}{2}]] = E[|x-\frac{1}{2}|^2] - (E[x-\frac{1}{2}])^2$

Pour les m raison

si $X = 1$ ou $x=0$

$VAR[[\frac{1}{2}]] = E[\frac{1}{4}] - (E[\frac{1}{2}])^2$

$= 0$

solutions

$Y = |x - \frac{1}{2}|$

$0 \to \frac{1}{2}$, $1 \to \frac{1}{2}$

$VAR[Y] = 0$

0,5

Réponse: (a) $\text{VAR}[|X-1|] =$ $\emptyset$ 2/9

(b) $\text{VAR}[|X-\frac{1}{2}|] =$ $\cancel{0}$

Question n° 7

Supposons que la variable aléatoire X présente une distribution uniforme sur l'intervalle $(-1, 1)$. On définit $Y = X^3$. Calculer (a) le coefficient d'asymétrie de Y; (b) le coefficient d'aplatissement de Y.

a) $Y \sim U[-1, 1]$ $\quad Y = X^3$

$$[VAR] = \frac{(1--1)^2}{12} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\sigma_X = \left(\frac{1}{9}\right)$$

$$\beta_1 = \frac{(\mu_3)^2}{(\sigma_X)^6} = \frac{0^2}{\left(\frac{1}{9}\right)^6} = 0$$

$$E[X] = \mu_x = 0$$

$$E[X^3] = \sigma_3 = 0^3 = 0$$

$\beta_1 = 0$

b) $$\beta_2 = \frac{\mu_4}{(\sigma_x)^4} = \frac{E[X^4]}{(E[Y^2])^2} = \frac{E[X^{12}]}{(E[X])^2}$$

0,5

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^6 \, dx = \frac{1}{7}$$

$$\int_{-1}^{1} x^{12} \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{3}$$

$$\beta_2 = \frac{1/3}{(1/7)^2} = 3{,}77$$