Mth 2302 D

Intrasemestriel A06

Lundi 23 octobre 2006, 12h45 – 14h35

Marc Bourdeau

---

1. **(10 points)** INTELLIGENCE ARTIFICIELLE. **On dispose d'un test pour juger de la conformité d'un produit à une norme. Ce test n'est pas infaillible.**

   On note l'événement 'Être conforme' par 'C', non conforme par 'NC'; l'événement 'Être positif (*non* conforme) selon un test' par '+' et 'Négatif (*conforme*) selon ce test' par '$-$' (le signe négatif). Supposons qu'on ait les probabilités suivantes, pour ce test :

   $$\mathbf{P}[+\,|\,NC\,] = 0{,}999, \quad \mathbf{P}[-\,|\,C\,] = 0{,}992.$$

   On sait par ailleurs que $\mathbf{P}[\,NC\,] = 0,005$.

   (a) **(2 points) Si on supposait que le test était infaillible (contrairement à ce qu'on donne dans l'énoncé), en moyenne combien faudrait-il en essayer avant de trouver le premier non conforme lors d'essais indépendants successifs. Énoncez au passage la loi qui modélise cette probabilité avec ses paramètres.**

   (b) **(1 point) Si on teste 1000 produits, et qu'on examine le nombre de non conformes, énoncez la loi du nombre de produits non conformes dans ce lot. Donnez ses paramètres.**

   (c) **(1 point) Vous utiliserez une approximation appropriée de cette loi, pour déterminer la probabilité d'observer plus de 2 produits non conformes dans ce lot.**

   On a vu en classe que la probabilité *a posteriori* pour ce test faillible était non concluant, il n'apportait pas une information exploitable : $\mathbf{P}[\,NC\,|\,+\,] \doteq 0{,}38$.

   (d) **(6 points) Supposons maintenant qu'on effectue alors deux fois le test et que les résultats sont indépendants.**
   Calculez alors : $\mathbf{P}[\,NC\,|\;++\,]$.

2. (15 points) AMÉLIORATION DE LA QUALITÉ. **En amélioration de la qualité, on est constamment à la recherche de la diminution de la variabilité (variances donc) des produits. En effet, on admet en général que la qualité d'un produit est inversement proportionnelle à la variabilité des paramètres de la production. Les exercices suivants montrent qu'on cherche, d'une part à centrer la fabrication sur les moyennes des paramètres de la production, puis, d'autre part, à en diminuer les variances.**

(a) **(5 points) Montrer que pour toute loi $X \sim \mathcal{N}(\mu\,;\sigma)$, un intervalle de la droite est couvert par la plus grande probabilité (masse) lorsque la moyenne μ est au centre de l'intervalle.**

Indice **: de toute évidence, il suffit d'établir ce résultat pour $\sigma = 1$, et pour un intervalle symétrique $[-a\,;a]$.**

Rappel **: démarche standard pour trouver les points extrêmes d'une fonction continue, ici $f(\mu)$:**

- **Écrivez d'abord l'équation de la fonction à maximiser : $f(\mu) = \mathbf{P}[-a \leq X \leq a]$ en termes de la cumulative Φ de la loi gaussienne normée (dite aussi standard) ;**
- **utilisez ensuite le lien entre la cumulative, Φ, et sa densité, $\phi(t) = (1/\sqrt{2\pi})\exp(-t^2/2)$, pour donner l'équation qui permet de trouver la valeur de μ qui maximise cette équation ;**
- **Vous résolvez pour trouver enfin μ.**

Supposons maintenant que X est la loi de la résistance en ohms pour une certaine production : $X \sim \mathcal{N}(\mu = 300\,;\sigma = 5{,}6)$. Et que la conformité s'exprime par une valeur de X située à moins de 5% du nominal de 300Ω.

(b) **(3 points) Combien en moyenne trouve-t-on de produits non conformes par million de résistances produites ?**

(c) **(2 points) Combien en moyenne de défauts par million de résistances produites trouverait-on avec $\sigma = 5$.**

(d) **(5 points) Supposons que la direction de la production autorise une série d'expériences pour diminuer le $\sigma = 5{,}6$ à σ_0 qui permettrait de réduire le nombre de défauts à 1500 en moyenne par million de résistances produites.**

Déterminez le σ_0 maximal, i.e. l'objectif pour σ_0, en deçà duquel la qualité désirée serait atteinte ?