TD N° 3

Exercice 1

X : v.a. = demande d'antigel.
chaque litre vendu $\rightarrow$ 50 ¢
25 ¢ par litre de stock excédentaire conservé.

a) Fonction de perte $L(X,s)$.

Soit s le nombre de litres produits.

* Si $s < X$; on ne satisfait pas toute la demande, d'où on perd $0.5(X-s)$ \$
* Si $s \geq X$, on va stocker $s-X$ litres, ce qui fait une perte de $0.25(s-X)$ (\$).

$$L(X,s) = \begin{cases} 0.5(X-s) & \text{si } X > s \\ 0.25(s-X) & \text{si } X \leq s \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(L(X,s))$$

b) Il faut minimiser la perte moyenne (perte espérée), soit $\mathbb{E}[L(X,s)] = f(s)$

$$L(X,S) = \begin{cases} 0.5(X-S) & \text{si } X > S \\ 0.25(S-X) & \text{si } X \leq S \end{cases}$$

$$f(S) = \mathbb{E}[L(X,S)] = \int_{\mathbb{R}} L(x,S) f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{10^6}^{2\times 10^6} L(x,S) f_X(x)\,dx$$

$$= \int_{10^6}^{S} L(x,S) f_X(x)\,dx + \int_{S}^{2\times 10^6} L(x,S) f_X(x)\,dx$$

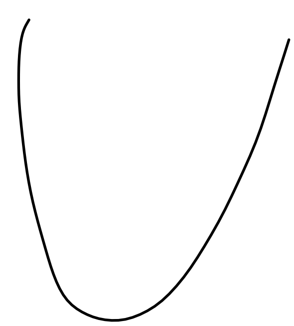
$$= \int_{10^6}^{S} 0.25(S-x)\times 10^{-6}\,dx + \int_{S}^{2\times 10^6} 0.5(x-S)\times 10^{-6}\,dx$$

$$\mathbb{E}(H(X)) = \int_{\mathbb{R}} H(x) f_X(x)\,dx$$

$$f(S) = \frac{3}{8\times 10^6} S^2 - \frac{5}{4} S + 1\,125\,000$$

c) Niveau optimal des stocks ;

$$f'(S) = 0 \iff \frac{6}{8\times 10^6} S - \frac{5}{4} = 0$$



$S^* = 1\,666\,667$ litres.

Exercice 2

$$\int u' e^{u} = e^{u}$$

a) Valeur de c : f_V densité $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}} f_V(x)\,dx = 1 \iff \int_0^{+\infty} c\,x\,e^{-x^2}\,dx = 1$$

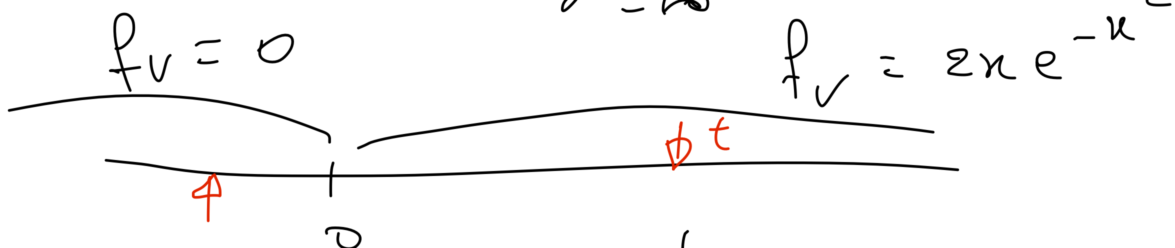
$$\iff \int_0^{+\infty} c \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \underbrace{(-2x)\,e^{-x^2}}\,dx = 1$$

$$\iff -\frac{c}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$\iff \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

b) Fonction de répartition de V :

$$F_V(t) = \mathbb{P}(V \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_V(x)\,dx$$



* si $t < 0$, $F_V(t) = \int_{-\infty}^{t} 0\,dx = 0$

* si $t \geq 0$

$$F_V(t) = -\int_0^t (-2x)\,e^{-x^2}\,dx = -\left[e^{-x^2}\right]_0^t = 1 - e^{-t^2}$$

$$F_V(t) = \begin{cases} 1 - e^{-t^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c') $E = \frac{1}{2} m V^2$, $\mathbb{P}(E < 8m)$

$$\cancel{\int_{-\infty}^{8m} f_E(x)\,dx}$$

$$\{E < 8m\} \iff \frac{1}{2} m V^2 < 8m \iff V^2 < 16$$

$$\iff \{0 \le V < 4\}$$

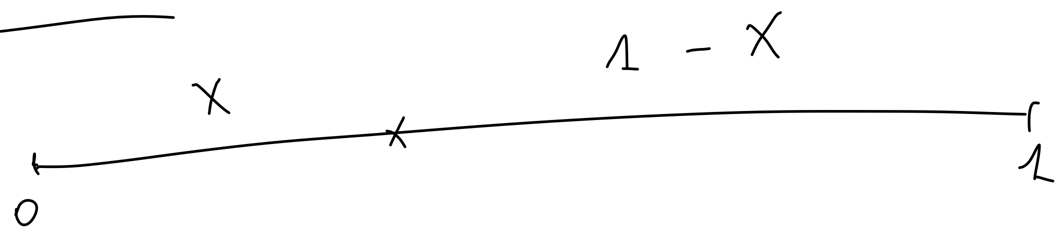
Principe des événements équivalents :

$$\mathbb{P}(E < 8m) = \mathbb{P}(0 \le V < 4) = \mathbb{P}(V \le 4)$$

$$= \int_0^4 f_V(x)\,dx \qquad = F_V(4)$$

$$= 0{,}999\,999\,887$$

Exercice 3



$$Y = H(X) = 1 - X$$

$X \rightsquigarrow$ carré

$1 - X \rightsquigarrow$ cercle.

a) Moyenne du côté du carré :

$$Y = \frac{X}{4}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{X}{4}\right) = \int_0^1 \frac{x}{4} \times 1 \, dx = \frac{1}{8}$$

b) Moyenne de l'aire du carré :

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{X}{4}\right)^2\right] = \mathbb{E}\left(\frac{X^2}{16}\right) = \int_0^1 \frac{x^2}{16} \times 1 \, dx = \frac{1}{48}$$

c) $\mathbb{E}(1 - X) = \int_0^1 (1 - x) \times 1 \, dx$ ou

$$= 1 - \mathbb{E}(X)$$

$$= 1 - \int_0^1 x \times 1 \, dx = \frac{1}{2}$$

d) Aire du cercle :

$$2\pi r = 1 - X \Rightarrow r = \frac{1 - X}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \text{Aire} = r^2 \pi = \frac{1}{4\pi} (1 - X)^2 = A$$

$$\mathbb{E}(\text{Aire}) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{4\pi}(1 - X)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi} \mathbb{E}((1 - X)^2) \quad \not\leftarrow \mathbb{E}(H(X))$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 (1 - x)^2 \times 1 \, dx = \frac{1}{12\pi} = \mathbb{E}(A)$$

e) $$Var(A) = \mathbb{E}(A^2) - [\mathbb{E}(A)]^2$$

$$= \int_0^1 \frac{(1 - x)^4}{16\pi^2} \times 1 \, dx - \left(\frac{1}{12\pi}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \times \frac{(-1)}{5} \left[(1 - x)^5\right]_0^1 - \frac{1}{144\pi^2}$$

$$= \frac{1}{180\pi^2}$$

Exercice 5 $\quad V = X + Y \;,\; W = 2X - 3Z$

a) $\mathbb{E}(V)$ et $\sigma(V) = \sqrt{Var(V)}$

* $\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 0 + 1 = 1$

* $Var(V) = Var(X+Y)$

En général :

$$Var(aX + bY + c) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2ab\, cov(X, Y)$$

si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $cov(X, Y) = 0$

$$\Rightarrow Var(aX + bY + c) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y).$$

$$Var(V) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} Var(X) + Var(Y) = 1 + 2 = 3$$

d'où $\boxed{\sigma(V) = \sqrt{3}}$

b) $\mathbb{E}(W)$ et $\sigma(W)$:

* $\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(2X - 3Z) = 2\mathbb{E}(X) - 3\mathbb{E}(Z)$

$$= 2 \times 0 - 3 \times 3 = -9.$$

$\star$ $Var(W) = Var(2X - 3Z) = Var(2X + (-3)Z)$

$$\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} 2^2 Var(X) + (-3)^2 Var(Z)$$

$$= 4 \times 1 + 9 \times 4 = 40$$

$$\boxed{\sigma(W) = \sqrt{40}} = 2\sqrt{10}$$

c) Coef de corrélation :

$$\rho(V, W) = \frac{Cov(V, W)}{\sqrt{Var(V)} \times \sqrt{Var(W)}} = \frac{Cov(V, W)}{\sigma(V) \times \sigma(W)}$$

$\star$ $Cov(V, W) = \underbrace{\mathbb{E}(VW)}_{?} - \mathbb{E}(V)\mathbb{E}(W)$

$$\mathbb{E}(VW) = \mathbb{E}\left[(X+Y)(2X - 3Z)\right]$$

$$= 2\mathbb{E}(X^2) - 3\mathbb{E}(XZ) + 2\mathbb{E}(XY) - 3\mathbb{E}(YZ)$$

- $\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z)$ car $X \perp\!\!\!\perp Z$
- $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ car - - .
- $\mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z)$ - ——

$\mathbb{E}(X^2) = ?$ on sait que

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = Var(X) + \underbrace{[\mathbb{E}(X)]^2}_{0}$$

$$= 1$$

$$\mathbb{E}(VW) = 2 \times 1 - 3 \times 0 + 2 \times 0 - 3 \times 1 \times 3 = -7$$

$$\rho(V, W) = \frac{-7 - 1 \times (-9)}{\sqrt{3} \times \sqrt{40}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$$

$$\simeq 0,18257 4185$$

Exercice 4

X = nombre de clients utilisant le guichet en 5 min. $X \in R_X = \{0, 1, 2\}$.

Y = montant total retiré en 5 min (par 2 clients au plus).

$$Y \in R_Y = \{0, 20, 40, 100, 120, 200\}$$

a)

y_i	$P(Y = y_i \mid X = 1)$	$P(Y = y_i \mid X = 2)$
0	0.1	0.01
20	0.7	0.14
40	0	0.49
100	0.2	0.04
120	0	0.28
200	0	0.04

$$P(Y = 20 \mid X = 2) = P(Y = 0 \mid X = 1) \times P(Y = 20 \mid X = 1) \times 2$$

$$= 2 \times 0.1 \times 0.7 = 0.14$$

$$P(Y = 0 \mid X = 2) = P(Y = 0 \mid X = 1) \times P(Y = 0 \mid X = 1)$$

$$= 0.1 \times 0.1$$

5')

$y \backslash x$	0	1	2	$\mathbb{P}(Y=y)$
0	0.3	0.05	* $P(2,0) = 0.002$	0.352
20	0	0.35	0.028	0.378
40	$0 = P(0,40)$	0	0.098	0.098
100	0	0.1	0.008	0.108
120	0	0	0.056	0.056
200	0	0	0.008	0.008
$\mathbb{P}(X=x)$	0.3	0.5	0.2	1

* $P(2,0)$:

$$\mathbb{P}(Y=0 \mid X=2) = \frac{P(2,0)}{\mathbb{P}(X=2)} = \frac{\mathbb{P}(\{X=2\} \cap \{Y=0\})}{\mathbb{P}(X=2)} = 0.01$$

$$P(2,0) = 0.01 \times \mathbb{P}(X=2) = 0.01 \times 0.2 = 0.002$$

* $P(0,0)$

$$\mathbb{P}(Y=0 \mid X=0) = \frac{P(0,0)}{\mathbb{P}(X=0)} = 1$$

$$\Rightarrow P(0,0) = 0.3 \times 1 = 0.3$$

c.) On sait que $X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $P(x,y) = P_X(x) P_Y(y)$ Pour tout $x \in R_X$ et $y \in R_Y$ (confère cours).

Or, $P(0,0) = 0.3 \neq P_X(0) \times P_Y(0) = 0.3 \times 0.352$, i.e qu'on a trouvé au moins un couple $(x,y) = (0,0)$ tel que $P(x,y)$ n'est pas égale à $P_X(x) \times P_Y(y)$ d'où X et Y ne sont pas indépendantes.

d.) Coefficient de corrélation :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X) \times \sigma(Y)} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$$

* $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in R_X} x \mathbb{P}(X = x) = 0.9$

* $\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in R_Y} y \mathbb{P}(Y = y) = 30.6$

* $\mathbb{E}(XY) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} xy P(x,y) = 44.2$

* $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \sum_{x \in R_X} x^2 \mathbb{P}(X = x) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 0.49$

* De même, on obtient $\mathrm{Var}(Y) = 1578.04$

Ainsi $\rho(X,Y) = 0.599126$

(Corrélation moyenne positive).