Mathématiques

Exercices incontournables

PC • PSI • PT

Julien Freslon
polytechnicien, professeur agrégé de mathématiques en classe préparatoire au lycée Dessaignes de Blois.

Jérôme Poineau
polytechnicien, agrégé de mathématiques, maître de conférences à l'université de Strasbourg.

Daniel Fredon
ancien maître de conférences à l'université de Limoges et interrogateur en classes préparatoires aux lycées Gay Lussac et Turgot de Limoges.

Claude Morin
professeur de mathématiques en PC au lycée Gay Lussac de Limoges.*

DUNOD

ISBN 978-2-1005-6032-5

Table des matières

Avant-propos

Cet ouvrage s'adresse aux élèves de deuxième année de classes préparatoires scientifiques. Il leur propose de mettre en pratique les notions abordées en cours de mathématiques par le biais d'exercices. Chacun est assorti d'une correction détaillée, dans laquelle l'accent est mis sur la méthode qui mène à la solution.

Le livre est divisé en douze chapitres, consacrés chacun à une partie du programme. Au sein d'un même chapitre, les exercices, classés par ordre croissant de difficulté, ont été choisis de façon à passer en revue les notions à connaître, mais aussi à présenter les techniques susceptibles d'être utilisées.

En ce qui concerne les corrections, nous avons choisi de séparer clairement la réflexion préliminaire, comprenant analyse du problème et tâtonnements, de la rédaction finale, rigoureuse et précise. Cette dernière étape est signalée, dans le texte, par la présence d'un liseré gris sur la gauche et d'un . Insistons sur le fait que nous ne prétendons nullement présenter l'unique cheminement permettant d'aboutir à la solution d'un exercice donné, ni la seule rédaction acceptable. Dans les deux cas, bien des possibilités existent !

Par ailleurs, lorsque nous avons souhaité mettre en lumière un point important nous l'avons rédigé sur un fond grisé et indiqué par un . De même, la présence d'un piège dont il faut se méfier est signalée par un .

Pour finir, signalons que cet ouvrage est conçu pour les étudiants des trois filières PC, PSI et PT. Certains exercices, cependant, ne sont accessibles qu'aux élèves de l'une ou l'autre des filières. De tels exercices sont rares et nous signalons ces subtilités dans leur titre.

Pour bien utiliser cet ouvrage :

Cet encadré vous indique un point important

Cet encadré met en avant un piège à éviter

Le stylo-plume vous signale l'étape de la rédaction finale.

Algèbre générale

1

Exercice 1.1 : Calcul d'un produit

Calculer : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Ce sujet est un oral sur le programme de première année.

Les sinus n'ont rien de particulier par rapport au produit. Par quoi pourrait-on les remplacer ?

Utilisons les formules d'Euler, puis une factorisation :

$$P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}}{2i} = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right)$$

Calculons d'abord :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{ik\pi}{n}} &= \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} -\frac{ik\pi}{n}\right) = \exp\left(-\frac{i\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k\right) = \exp\left(-\frac{i\pi}{n}\frac{(n-1)n}{2}\right).\\ &= e^{-i(n-1)\frac{\pi}{2}} = (-i)^{n-1}\end{aligned}$$

Reprenons le calcul de P_n.

$$P_n = \frac{(-i)^{n-1}}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

Pour continuer, il faut changer de chapitre de première année et penser aux polynomes, après avoir repéré les racines n-ièmes de l'unité.

Lee racines du polynome $X^n - 1$ sont les racines n-ièmes de l'unité. Il se décompose sous la forme :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)=\frac{X^n-1}{X-1}=X^{n-1}+X^{n-2}+\cdots+X+1\,.$$

En remplaçant X par 1, on en déduit :

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)=n\,,\quad \text{puis}\quad P_n=\frac{n}{2^{n-1}}\,.$$

Exercice 1.2 : Propriétés des applications

1. Soit f une application de E dans E telle que $f\circ f=f$. Montrer que :

$$f\ \text{injective}\iff f\ \text{surjective.}$$

2. Soit f et g des applications de E dans E telles que $f\circ g\circ f=g$ et $g\circ f\circ g=f$.
Montrer que :

$$f\ \text{injective}\iff f\ \text{et}\ g\ \text{bijectives}\iff f\ \text{surjective.}$$

Ce sujet comporte deux oraux sur le programme de première année.

1. • Supposons f injective. Pour tout $x\in E$, on a $f\big(f(x)\big)=f(x)$, ce qui entraîne alors $f(x)=x$.
f est donc l'identité de E et elle est bien surjective.

• Supposons f surjective. Pour tout $x\in E$, il existe $y\in E$ tel que $x=f(y)$, ce qui entraîne $f(x)=f\big(f(y)\big)=f(y)=x$.
f est donc l'identité de E et elle est bien injective.

2. Montrer d'abord des propriétés sur des puissances de f et de g.

• En préliminaire, on a :

$$f\circ f=(g\circ f\circ g)\circ f=g\circ(f\circ g)\circ f=g\circ g,\quad \text{soit } f^2=g^2.$$

En utilisant ce premier résultat, on a : $f^2\circ g\circ f^2=g^5$,
et par ailleurs : $f^2\circ g\circ f^2=f\circ(f\circ g\circ f)\circ f=f\circ g\circ f=g$.
On a donc : $g^5=g$. On obtient de façon analogue : $f^5=f$.

• Supposons f injective. Dans ce cas, de $f^5=f$, on déduit, comme dans la première question, que $f^4=\mathrm{Id}$. Comme $f^2=g^2$, on a $f^4=g^4$ et, par conséquent, $g^4=\mathrm{Id}$.
On déduit de ces deux égalités que f et g sont bijectives.

• Supposons f surjective. Dans ce cas, de $f^5 = f$, on déduit, comme dans la première question, que $f^4 = \mathrm{Id}$. Comme $f^2 = g^2$, on a $f^4 = g^4$ et, par conséquent, $g^4 = \mathrm{Id}$.
On déduit de ces deux égalités que f et g sont bijectives.

Exercice 1.3 : Division de polynômes

1. Calculer le reste dans la division de $A = X^{2n+1}$ par $B = X^3 - X^2 - X + 1$.

2. Exprimer le quotient Q. Calculer $Q(0)$, $Q(-1)$ et $Q(1)$.

Ce sujet est un oral sur le programme de première année.
Commencez par factoriser B.

1. L'égalité de la division euclidienne s'écrit :

$$X^{2n+1} = (X-1)^2(X+1)Q + aX^2 + bX + c\,.$$

En remplaçant X par 1 et par -1 dans cette égalité, et en remplaçant X par 1 dans l'égalité obtenue en dérivant, on a :

$$\begin{cases} 1 &= a+b+c \\ -1 &= a-b+c \\ 2n+1 &= 2a+b \end{cases} \iff \begin{cases} a &= n \\ b &= 1 \\ c &= -n \end{cases}$$

Le reste est donc :

$$R = nX^2 + X - n\,.$$

2. On peut écrire :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{X^{2n+1} - X - n(X^2-1)}{(X-1)^2(X+1)} = \frac{X(1+X^2+\cdots+X^{2n-2}) - n}{X-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{2k-1}-1}{X-1} && (\mathbf{1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{2k-2} X^j = \sum_{j=0}^{2n-2} X^j \left(\sum_{k \geqslant \frac{j}{2}+1}^{n} 1 \right) = \sum_{j=0}^{2n-2} \left(n - [\frac{j+1}{2}] \right) X^j && (\mathbf{2}) \end{aligned}$$

Application numérique
Avec l'égalité (**1**), on obtient : $Q(0) = Q(-1) = n$
et avec la première des égalités (**2**) :

$$Q(1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \sum_{j=1}^{2n} j - 2\sum_{j=1}^{n} j = \frac{(2n)(2n+1)}{2} - 2\frac{n(n+1)}{2} = n^2$$

Exercice 1.4 : : Résolution d'un système

Déterminer les triplets (x,y,z) de $\mathbb{C}^3$, solutions du système :

$$(S)\quad \begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x^2+y^2+z^2 &= 9 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z} &= 1. \end{cases}$$

Ce sujet est un oral sur le programme de première année.

Le caractère symétrique par rapport aux inconnues doit vous faire penser aux relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme.

Posons $\sigma_1 = x+y+z$, $\sigma_2 = xy+yz+zx$ et $\sigma_3 = xyz$.
Le triplet $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$ vérifie le système (S) si, et seulement si :

$$\begin{cases} \sigma_1 &= 1 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 &= 9 \\ \dfrac{\sigma_2}{\sigma_3} &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sigma_1 &= 1 \\ \sigma_2 &= -4 \\ \sigma_3 &= -4. \end{cases}$$

x, y et z sont les racines complexes du polynôme :

$$P = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3 = X^3 - X^2 - 4X + 4$$
$$= (X-1)(X-2)(X+2).$$

Les triplets solutions sont donc :

$$(1,2,-2)\ ,(1,-2,2)\ ,(2,1,-2)\ ,(2,-2,1)\ ,(-2,1,2)\ ,(-2,2,1)\ .$$

Exercice 1.5 : Configuration géométrique

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les images des racines complexes de l'équation :

$$z^3 + pz + q = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

soient les sommets d'un triangle rectangle isocèle.

Ce sujet est un oral sur le programme de première année.

Remarquons d'abord que si $p = q = 0$, le triangle serait réduit à un point. C'est donc un cas à éliminer.

Soit z_1, z_2, z_3 les racines de l'équation **(1)**. Ces notations peuvent être choisies de sorte que le triangle soit rectangle en M_1 et qu'on passe de M_2 à M_3 par la rotation de centre M_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
La condition géométrique se traduit donc par l'égalité :

$$z_3 - z_1 = \mathrm{i}(z_2 - z_1) \qquad \textbf{(A)}$$

Par ailleurs, les relations entre coefficients et racines d'un polynôme permettent d'écrire :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 & \textbf{(B)} \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = p & \textbf{(C)} \\ z_1z_2z_3 = -q & \textbf{(D)} \end{cases}$$

Les égalités **(A)** et **(B)** permettent de calculer z_2 et z_3 en fonction de z_1 :

$$\begin{cases} \mathrm{i}z_2 - z_3 = (-1+\mathrm{i})z_1 \\ z_2 + z_3 = -z_1 \end{cases} \iff \begin{cases} z_2 = \dfrac{-1+3\mathrm{i}}{2}z_1 \\ z_3 = \dfrac{-1-3\mathrm{i}}{2}z_1 \end{cases}$$

En reportant dans **(C)**, on obtient :

$$z_1(z_2 + z_3) + z_2z_3 = p = -z_1^2 + \frac{5}{2}z_1^2 = \frac{3}{2}z_1^2$$

soit $z_1^2 = \frac{2}{3}p$.

En reportant dans **(D)**, on obtient : $z_1^3 = -\frac{2}{5}q$.

Pour que les deux résultats obtenus pour z_1^2 et z_1^3 soient compatibles, il est nécessaire que $\left(\frac{2}{3}p\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}q\right)^2$, c'est-à-dire que p et q vérifie la condition :

$$50p^3 - 27q^2 = 0.$$

Réciproquement, si p et q vérifient cette condition, on choisit d'abord z_1 tel que $z_1^2 = \frac{2}{3}p$, ce qui est possible de deux façons correspondant à des nombres opposés.

La condition obtenue entraîne alors que $\left(z_1^3\right)^2 = \left(-\frac{2}{5}q\right)^2$.

Parmi les deux possibilités de choisir z_1, il y en a toujours une qui vérifie $z_1^3 = -\frac{2}{5}q$ et on retrouve alors les conditions du problème.

Exercice 1.6 : Utilisation d'une base non canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall x \in [0,n] \quad |P(x)| \leqslant 1$.

Démontrer que : $|P(-1)| \leqslant 2^{n+1} - 1$ et $|P(n+1)| \leqslant 2^{n+1} - 1$.

Ce sujet est un oral sur le programme de première année.
La solution la plus simple consiste à introduire une base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de polynômes de Lagrange.

- Considérons la base de $\mathbb{R}_n[X]$ formée par les polynômes de Lagrange $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ associés aux entiers k de 0 à n, c'est-à-dire : $L_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \left(\frac{X-j}{k-j}\right)$.

La décomposition d'un polynôme P dans cette base s'écrit :

$$P = \sum_{k=0}^{n} P(k) L_k .$$

- Avec l'hypothèse faite sur P, on a donc : $|P(-1)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |L_k(-1)|$ avec

$$\begin{aligned} L_k(-1) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \left(\frac{-1-j}{k-j}\right) \\ &= (-1)^n \times \frac{(n+1)!}{k+1} \times \frac{1}{k! \times (-1)^{n-k}(n-k)!} \\ &= (-1)^k \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

Donc : $|P(-1)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} = 2^{n+1} - 1$.

- De la même manière :

$$\begin{aligned} L_k(n+1) &= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \left(\frac{n+1-j}{k-j}\right) \\ &= \frac{(n+1)!}{n+1-k} \times \frac{1}{k! \times (-1)^{n-k}(n-k)!} \\ &= (-1)^{n-k}\binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

Donc : $|P(n+1)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} = 2^{n+1} - 1.$

Exercice 1.7 : Dés pipés et polynômes

Peut-on piper deux dés pour que les sommes S obtenues en les lançant simultanément $(2 \leqslant S \leqslant 12)$ soient équiprobables ?

Utiliser des polynômes.

Ce sujet est un oral sur le programme de première année.

La variable aléatoire X égale au résultat du premier dé prend pour valeurs les entiers de 1 à 6 avec des probabilités $p_k = P(X = k)$.

La variable aléatoire X égale au résultat du deuxième dé prend pour valeurs les entiers de 1 à 6 avec des probabilités $q_k = P(Y = k)$.

La somme $S = X + Y$ prend pour valeurs les entiers de 2 à 12 avec des probabilités

$$P(S = k) = \sum_{i=1}^{6} p_i q_{k-i}\,.$$

Si l'on suppose que la distribution de S est équiprobable, ces probabilités sont toutes égales à $\frac{1}{11}\cdot$

Considérons, dans cette hypothèse, le produit de polynômes :

$$\left(\sum_{k=1}^{6} p_k X^{k-1}\right) \times \left(\sum_{k=1}^{6} q_k X^{k-1}\right) = \frac{1}{11}\sum_{k=2}^{12} X^{k-2} = \frac{1}{11} \times \frac{X^{11}-1}{X-1}$$

Le polynôme $Q = X^{11} - 1$ a 1 comme unique racine réelle. Le polynôme du second membre n'a donc pas de racine réelle.

Le premier membre est le produit de deux polynômes de degré 5 et un polynôme de degré 5 a au moins une racine réelle.

Exercice 1.8 : Sous-groupe

Soit G un groupe noté multiplicativement et A et B deux sous-groupes de G. On définit :

$$AB = \{ab\ ;\ a \in A,\ b \in B\}\,.$$

Montrer que AB est un sous-groupe de G si, et seulement si, $AB = BA$.

Ce sujet est un oral sur le programme de première année.

Attention la condition $AB = BA$ est une égalité d'ensembles. Elle ne signifie pas que $ab = ba$. Et le groupe n'est pas supposé commutatif, sinon l'exercice n'aurait aucun intérêt.

Remarquons aussi que, comme A et B ne sont pas vides, il en est de même pour AB et BA.

• Supposons que $AB = BA$.

– Montrons la stabilité de AB pour la loi.

Soit a_1b_1 et a_2b_2 deux éléments de AB, c'est-à-dire que $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, $a_2 \in A$, $b_2 \in B$.
Comme $b_1a_2 \in BA$, il appartient aussi à AB, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $b_1a_2 = ab$. On a donc :

$$(a_1b_1)(a_2b_2) = a_1(b_1a_2)b_2 = a_1(ab)b_2 = (a_1a)(bb_2)\,.$$

On a $a_1a \in A$ et $bb_2 \in B$ puisque ce sont des sous-groupes de G.
Par conséquent, $(a_1b_1)(a_2b_2) \in AB$.

– Montrons la stabilité de AB pour le passage à l'inverse.

L'inverse ab dans G est $b^{-1}a^{-1}$.
On a $b^{-1} \in B$ et $a^{-1} \in A$ puisque ce sont des sous-goupes. Donc $(ab)^{-1} \in BA = AB$.

– Des deux stabilités établies, on déduit que AB est un sous-groupe de G.

• Supposons que AB soit un sous-groupe de G.
– Montrons que $AB \subset BA$.

Soit $ab \in AB$. Son inverse $b^{-1}a^{-1}$ appartient à AB d'après l'hypothèse. Il existe donc $a' \in A$ et $b' \in B$ tels que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a'b'$. On en déduit :

$ab = \left(b^{-1}a^{-1}\right)^{-1} = (a'b')^{-1} = b'^{-1}a'^{-1} \in BA$, ce qui démontre que $AB \subset BA$.

– Montrons que $BA \subset AB$.

Soit $ba \in BA$. Son inverse $a^{-1}b^{-1}$ appartient à AB.
Comme AB est un sous-groupe, l'inverse de $a^{-1}b^{-1}$, c'est-à-dire ba, appartient aussi à AB, ce qui démontre que $BA \subset AB$.

– Les deux inclusions établies montrent que $AB = BA$.

Exercice 1.9 : Éléments nilpotents d'un anneau

Soit A un anneau commutatif. Un élément non nul x de A est dit nilpotent s'il existe un entier $n > 0$ tel que $x^n = 0$.

1. Montrer que, si x est nilpotent, alors $1 - x$ est inversible.

2. Montrer que, si x et y sont nilpotents, alors xy et $x + y$ le sont aussi.

Ce sujet est un oral sur le programme de première année.

1. L'inversibilité de $1 - x$ est à rapprocher de $1 + x + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{1 - x^n}{1 - x}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Il n'y a aucune raison que la puissance à considérer soit la même pour x, y, xy, $x + y$.

1. D'après l'hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$.
Considérons l'élément de A : $y = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$. On a alors :

$$y(1 - x) = (1 + x + \cdots + x^{n-1})(1 - x) = 1 - x^n = 1\,.$$

Donc $1 - x$ est inversible et son inverse est y.

2. D'après l'hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $y^p = 0$.

• Comme l'anneau est commutatif, on peut écrire : $(xy)^n = x^n y^n = 0$.
L'élément xy est donc nilpotent.

Pour $x + y$, il faut un peu chercher pour introduire une puissance qui permette de conclure ; $n + p$ convient (en fait la plus petite est $n + p - 1$).

• Avec la formule du binôme (valable si $xy = yx$, donc dans un anneau commutatif), on peut écrire :

$$(x + y)^{n+p} = \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} x^k y^{n+p-k}$$

Nous allons prouver que cette somme est nulle en prouvant que tous les termes sont nuls. Il faut faire attention à ne pas introduire une puissance négative car x et y ne sont pas supposés inversibles.

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on a $n + p - k \geqslant p$, donc x^k existe et $y^{n+p-k} = 0$.
Pour $n \leqslant k \leqslant n + p$, on a $n + p - k \geqslant 0$, donc y^{n+p-k} existe et $x^k = 0$.
On obtient donc $(x + y)^{n+p} = 0$, ce qui prouve que $x + y$ est nilpotent.

2

Algèbre linéaire

Exercice 2.1 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de polynômes

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $P \in \mathbb{K}[X]$ on pose :

$$\Phi(P) = (2X + 1)P - (X^2 - 1)P'.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

2. Soit P est un vecteur propre de Φ. Montrer que $P' \neq 0$ et en déduire le degré de P.

3. Déterminer les éléments propres de Φ.

1. Ce genre de question, extrêmement courante au début d'un exercice d'algèbre linéaire, ne présente en général aucune difficulté : il s'agit simplement de vérifier que Φ est linéaire à partir de la définition même de la linéarité.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Alors :

$$\Phi(\lambda P + \mu Q) = (2X + 1)(\lambda P + \mu Q) - (X^2 - 1)(\lambda P + \mu Q)'.$$

D'une part, $(2X + 1)(\lambda P + \mu Q) = \lambda(2X + 1)P + \mu(2X + 1)Q$.
D'autre part,

$$\begin{aligned}(X^2 - 1)(\lambda P + \mu Q)' &= (X^2 - 1)(\lambda P' + \mu Q') \\ &= \lambda (X^2 - 1)P' + \mu (X^2 - 1)Q'.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda P + \mu Q) &= \lambda (2X + 1)P + \mu (2X + 1)Q - (\lambda (X^2 - 1)P' \\ &\qquad + \mu (X^2 - 1)Q') \\ &= \lambda \Phi(P) + \mu \Phi(Q)\end{aligned}$$

donc Φ est linéaire.

2. La définition d'un vecteur propre P de Φ est : $P \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\Phi(P) = \lambda P$.

Cette dernière relation s'écrit

$$(2X + 1)P - (X^2 - 1)P' = \lambda P$$

soit encore

$$(2X + 1 - \lambda)P = (X^2 - 1)P'.$$

Pour montrer que $P' \neq 0$, on peut raisonner par l'absurde en supposant $P' = 0$.

Soit P un vecteur propre de Φ. Par définition, $P \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\Phi(P) = \lambda\, P$.
Si $P' = 0$ la relation $\Phi(P) = \lambda\, P$ se réduit à $(2X + 1 - \lambda)P = 0$ et donc $P = 0$, ce qui est exclu. Ainsi, $P' \neq 0$.

Lorsque l'on doit effectuer des considérations de degré et de coefficient dominant sur des polynômes il faut traiter à part le cas du polynôme nul car son degré n'est pas un entier et il n'a pas de coefficient dominant.
De plus, ici, P' intervient dans les calculs. C'est pour cela qu'il faudrait également traiter séparément le cas $P' = 0$. Le début de la question montre que ce cas particulier n'est pas réalisé.

Soit $n = \deg(P) \in \mathbb{N}$ et notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$ avec $a_n \neq 0$.
Comme $P' \neq 0$, P n'est pas constant, donc $n \geqslant 1$ et $P' = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}\, X^k$
Le degré de $(2X + 1 - \lambda)P$ est $n + 1$ et son coefficient dominant est $2\, a_n$.
De même, $(X^2 - 1)P'$ est de degré $n + 1$ et son coefficient dominant est $n\, a_n$. Vu que ces deux polynômes sont égaux et que $a_n \neq 0$, on a $n = 2$. Ainsi :

$$\text{si } P \in \operatorname{Ker}(\Phi - \lambda\, \mathrm{Id}) \text{ et } P \neq 0 \text{ alors } \deg(P) = 2.$$

3. Puisque l'on sait que les vecteurs propres de Φ sont de degré 2, on peut les écrire $aX^2 + bX + c$ (avec $a \neq 0$) et injecter ceci dans la formule définissant Φ : on obtiendra ainsi un système d'équations vérifié par (a,b,c). Il ne restera plus qu'à résoudre ce système pour trouver les vecteurs propres. Comme λ interviendra, on sera éventuellement amené à distinguer divers cas selon la valeur de ce paramètre.

Soit λ une valeur propre de Φ et P un vecteur propre associé. Alors P est de degré 2 ; notons $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. On a alors

$$(2X + 1 - \lambda)P = 2aX^3 + (2b + (1 - \lambda)a)X^2$$
$$+(2c + (1 - \lambda)b)X + (1 - \lambda)c$$

et

$$(X^2 - 1)P' = (X^2 - 1)(2\,a\,X + b) = 2\,a\,X^3 + b\,X^2 - 2\,a\,X - b.$$

Ainsi, la relation

$$(2X + 1 - \lambda)P = (X^2 - 1)P'$$

s'écrit

$$2\,a\,X^3 + (2\,b + (1-\lambda)a)X^2 + (2\,c + (1-\lambda)b)X + (1-\lambda)c$$
$$= 2\,a\,X^3 + b\,X^2 - 2\,a\,X - b$$

soit, après simplification et regroupement des termes dans le membre de gauche :

$$(b + (1-\lambda)a)X^2 + (2(c+a) + (1-\lambda)b)X + b + (1-\lambda)c = 0.$$

Un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls. On déduit donc de l'égalité précédente le système

$$(S)\ \left\{\begin{array}{rcl} (1-\lambda)a + b & = & 0 \\ (1-\lambda)b + 2(a+c) & = & 0 \\ (1-\lambda)c + b & = & 0 \end{array}\right.$$

La présence du facteur $(1-\lambda)$ dans ces équations suggère d'étudier séparément le cas $\lambda = 1$. En effet, dans ce cas, les équations se simplifient considérablement. Dans le cas $\lambda \neq 1$, nous pourrons au besoin diviser par $1-\lambda$ pour extraire a, b et c de ces équations.

- Supposons $\lambda = 1$: le système se réduit à $b = 0$ et $c = -a$; on a donc $P = a(X^2 - 1)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id}) \subset \mathbb{K}(X^2 - 1)$.

À ce stade, nous avons simplement montré l'inclusion. Pour déterminer s'il y a égalité, remarquons que $\mathbb{K}(X^2 - 1)$ est de dimension 1. De deux choses l'une : soit $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id}) = \mathbb{K}(X^2 - 1)$, auquel cas 1 est bien valeur propre de Φ et $\mathbb{K}(X^2 - 1)$ et le sous-espace propre associé, soit $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id}) = \{0\}$ et 1 n'est pas valeur propre de Φ. Il n'y a donc plus qu'à chercher si $X^2 - 1 \in \mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id})$, i.e. $\Phi(X^2 - 1) = X^2 - 1$. Cette question est facile puisqu'il suffit de vérifier une relation en remplaçant P par $X^2 - 1$ dans la formule définissant Φ. Ce calcul est simple et montre qu'on a bien $\Phi(X^2 - 1) = X^2 - 1$.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \Phi(X^2 - 1) &= (2\,X + 1)(X^2 - 1) - (X^2 - 1)(2\,X) \\ &= X^2 - 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $X^2 - 1 \in \mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id})$ donc $\mathbb{K}(X^2 - 1) \subset \mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id})$.

En résumé, $\mathrm{Ker}(\Phi - \mathrm{Id}) = \mathbb{K}(X^2 - 1)$ qui est de dimension 1 : 1 est valeur propre de Φ et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle $\mathbb{K}(X^2 - 1)$.

Il reste à traiter le cas $\lambda \neq 1$.

• Supposons $\lambda \neq 1$: les première et troisième équations donnent $(1-\lambda)a = (1-\lambda)c$ et donc $a = c$, car $1-\lambda \neq 0$.
La deuxième équation devient alors $(1-\lambda)b = -4a$ d'où, comme $b = -(1-\lambda)a$: $(1-\lambda)^2 a = 4a$. Comme $a \neq 0$, il vient $(1-\lambda)^2 = 4$, soit $1-\lambda \in \{-2,2\}$ et enfin $\lambda \in \{-1,3\}$.

Nous avons donc, pour l'instant, restreint le nombre de cas à étudier : si λ est une valeur propre de Φ et $\lambda \neq 1$, alors λ ne peut valoir que -1 ou 3.
Il reste à voir si ces scalaires sont bien des valeurs propres de Φ et, le cas échéant, déterminer le sous-espace propre associé. Ce sera aisé car le système (S) se simplifie considérablement lorsque l'on assigne à λ une valeur particulière.

• Si $\lambda = -1$: la première équation donne $b = -2a$. Par ailleurs, on sait que $c = a$ donc $P = a(X-1)^2$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi + \mathrm{Id}) \subset \mathbb{K}(X-1)^2$.

Comme précédemment nous avons montré une inclusion : il reste à vérifier l'inclusion réciproque.

Réciproquement, on a

$$\begin{aligned}\Phi((X-1)^2) &= (2X+1)(X-1)^2 - (X^2-1)(2(X-1))\\ &= -(X-1)^2\end{aligned}$$

donc $(X-1)^2 \in \mathrm{Ker}(\Phi + \mathrm{Id})$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi + \mathrm{Id}) = \mathbb{K}(X-1)^2$; -1 est donc valeur propre de Φ et le sous-espace propre associé est $\mathbb{K}(X-1)^2$.

Il ne reste plus qu'à traiter le cas $\lambda = 3$ de manière tout à fait analogue : remplacer λ par 3 dans (S), en déduire les valeurs possibles de a, b et c, en déduire une inclusion entre $\mathrm{Ker}(\Phi - 3\,\mathrm{Id})$ et un certain sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ et, si ce sous-espace n'est pas réduit à $\{0\}$, se poser la question de l'inclusion réciproque.

• Si $\lambda = 3$: la première équation donne $b = 2a$. Par ailleurs, on sait que $c = a$ donc $P = a(X+1)^2$.
Réciproquement, on a

$$\begin{aligned}\Phi((X+1)^2) &= (2X+1)(X+1)^2 - (X^2-1)(2(X+1))\\ &= 3(X+1)^2\end{aligned}$$

donc $(X+1)^2 \in \mathrm{Ker}(\Phi - 3\,\mathrm{Id})$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi - 3\,\mathrm{Id}) = \mathbb{K}(X+1)^2$; 3 est donc valeur propre de Φ et le sous-espace propre associé est $\mathbb{K}(X+1)^2$.
En conlusion, les valeurs propres de Φ sont -1, 1 et 3. De plus :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}(\Phi + \mathrm{Id}) &= \mathbb{K}(X^2 - 1)\\
\operatorname{Ker}(\Phi - \mathrm{Id}) &= \mathbb{K}(X - 1)^2\\
\operatorname{Ker}(\Phi - 3\,\mathrm{Id}) &= \mathbb{K}(X + 1)^2
\end{aligned}$$

Exercice 2.2 : Éléments propres d'un endomorphisme d'un espace de fonctions

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$ on définit une application $T_f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $T_f(0) = f(0)$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, T_f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que, pour tout $f \in E, T_f \in E$.

2. Soit $T : E \to E, f \mapsto T_f$. Montrer que T est linéaire.

3. Déterminer les éléments propres de T.

1. Soit $f \in E$. La fonction T_f est définie séparément sur $\mathbb{R}_+^*$ et en 0. Nous allons donc vérifier séparément la continuité de T_f sur $\mathbb{R}_+^*$ et en 0. Vu la définition de T_f il est assez naturel de faire apparaître une primitive de f.

Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ nulle en 0. Alors, pour $x > 0$, $T_f(x) = \dfrac{1}{x}F(x)$, donc T_f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même en fait de classe $\mathcal{C}^1$ puisque F l'est).

Par ailleurs $F(0) = 0$ donc, pour $x > 0$, $T_f(x) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0}$. Ainsi, T_f tend vers $F'(0) = f(0)$ quand x tend vers 0, donc T_f est également continue en 0.

Ainsi, T_f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $T_f \in E$.

2. Nous devons vérifier l'égalité $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$ pour tous f et $g \in E$ et λ et $\mu \in \mathbb{K}$. Autrement dit il faut vérifier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'égalité $T_{\lambda f + \mu g}(x) = \lambda T_f(x) + \mu T_g(x)$. Comme les fonctions de la forme T_h sont définies séparément sur $\mathbb{R}_+^*$ et en 0, nous allons distinguer à nouveau ces deux cas.

Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

- pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
T_{\lambda f + \mu g}(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \lambda \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \lambda T_f(x) + \mu T_g(x)
\end{aligned}$$

- pour $x = 0$,

$$\begin{aligned} T_{\lambda f+\mu g}(0) &= (\lambda f + \mu g)(0) \\ &= \lambda f(0) + \mu g(0) \\ &= \lambda T_f(0) + \mu T_g(0) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, T_{\lambda f+\mu g}(x) = \lambda T_f(x) + \mu T_g(x)$$

i.e. $T_{\lambda f+\mu g} = \lambda T_f + \mu T_g$, soit $T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g)$: T est donc linéaire.

3. La difficulté de la question est que l'on ne connaît pas *a priori* les valeurs propres de T. Nous allons donc chercher simultanément les valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$. On a donc $T_f = \lambda f$.
Alors $f(0) = \lambda f(0)$ et, pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x)$.

Encore une fois, il y a deux conditions vérifiées par f. La seconde est une équation intégrale : une relation entre $f(x)$ et une intégrale de f avec une borne dépendant de x. Dériver cette équation par rapport à x permet de se ramener à une équation différentielle vérifiée par f et donc de trouver la forme de la fonction f.

En notant F la primitive de f nulle en 0 on a donc, pour tout réel $x > 0$:

$$F(x) = \lambda x\, f(x)$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = \lambda x\, f'(x) + \lambda f(x).$$

Comme $F' = f$ il vient enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \lambda x\, f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0.$$

Ceci est une équation différentielle vérifiée par f... si λ n'est pas nul ! En effet, pour nous ramener au cas d'une équation différentielle de la forme $y' + a(x)y = 0$, dont on connaît les solutions, il faut diviser par λx. La division par x ne pose pas de problème puisque l'équation est donnée pour $x > 0$. Il reste à distinguer le cas $\lambda = 0$.

- Supposons $\lambda = 0$. Alors la relation précédente se réduit à :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = 0.$$

Par ailleurs, $f(0) = \lambda f(0)$ d'où $f(0) = 0$. La fonction f est donc identiquement nulle.
Ainsi, $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$, ce qui montre que 0 n'est pas valeur propre de T.

Nous pouvons ensuite rapidement résoudre l'équation différentielle dans le cas $\lambda \neq 0$.

• Supposons $\lambda \neq 0$. Alors f vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{1}{x} f(x) = 0.$$

Ainsi, il existe un réel k tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = k\, x^{\frac{1}{\lambda} - 1}.$$

Maintenant que l'on connaît la forme de f sur $\mathbb{R}_+^*$ nous pouvons étudier le problème en 0. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc converge en 0 ; cependant, pour certaines valeurs de λ, l'expression $x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ peut diverger quand x tend vers 0 : il faut donc distinguer à nouveau des cas selon le comportement en 0 de cette fonction de x.
On sait que ce comportement dépend du signe de l'exposant de x, ce qui nous donne trois cas à étudier. En soit, l'étude de chaque cas est simple puisqu'il s'agit de problèmes de limites de fonctions usuelles.

Il faut être prudent pour passer du signe de $\frac{1}{\lambda} - 1$ à une inégalité sur λ : en effet, λ peut très bien être négatif et, dans ce cas, la multiplication par λ change le sens de l'inégalité.

Plus précisément :

• si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$ et $\lambda > 0$ alors $1 - \lambda < 0$ donc $\lambda > 1$;

• si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$ et $\lambda < 0$ alors $1 - \lambda > 0$ donc $\lambda < 1$. Cependant, on a déjà supposé $\lambda < 0$ donc cette nouvelle inégalité n'apporte pas de contrainte supplémentaire.

Ainsi : si $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$ alors $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$. Réciproquement, si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, on vérifie aisément que $\frac{1}{\lambda} - 1 < 0$.

De même :

• si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$ et $\lambda > 0$ alors $1 - \lambda > 0$ donc $\lambda < 1$. Comme on a supposé ici $\lambda > 0$ on a donc en fait $0 < \lambda < 1$;

• si $\frac{1}{\lambda} - 1 > 0$ et $\lambda < 0$ alors $1 - \lambda < 0$ donc $\lambda > 1$. Ceci est absurde : on ne peut avoir à la fois $\lambda < 0$ et $\lambda > 1$.

Ainsi : si $\dfrac{1}{\lambda} - 1 > 0$ alors $0 < \lambda < 1$. Réciproquement, si $0 < \lambda < 1$, on vérifie facilement que $\dfrac{1}{\lambda} - 1 > 0$.

Enfin, il ne faut pas oublier de traiter le cas $\dfrac{1}{\lambda} - 1 = 0$, i.e. simplement $\lambda = 1$.

• Si $\dfrac{1}{\lambda} - 1 < 0$, i.e. $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$: alors $x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0^+. Comme f est continue en 0, sa limite en 0 est finie, ce qui impose $k = 0$ et donc $f = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{Id}) = \{0\}$, ce qui montre que λ n'est pas valeur propre de T.

• Si $\dfrac{1}{\lambda} - 1 = 0$, i.e. $\lambda = 1$: alors $f(x) = k$ pour tout réel $k > 0$ et, f étant continue en 0, il vient $f(0) = k$: la fonction f est donc constante égale à k. Nous avons donc $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}) \subset \mathbb{R}$.
Réciproquement, il est clair que toute fonction constante c vérifie $T_c = c$; ainsi, $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}) = \mathbb{R}$. 1 est donc bien valeur propre de T et le sous-espace propre associé est $\mathbb{R}$, l'espace des fonctions constantes.

• Si $\dfrac{1}{\lambda} - 1 > 0$, i.e. $0 < \lambda < 1$: alors $x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+, donc $f(0) = 0$.

Pour alléger les notations, posons $f_\lambda(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-1}$ si $x > 0$ et $f_\lambda(0) = 0$.
Nous avons montré : si λ est une valeur propre de T telle que $0 < \lambda < 1$ et f un vecteur propre de T, alors il existe un réel k tel que $f = k\, f_\lambda$.
Autrement dit, $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}) \subset \mathbb{R}\, f_\lambda$.
Réciproquement, $T_{f_\lambda} = \lambda f_\lambda$; on a donc $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}) = \mathbb{R}\, f_\lambda$. Comme $f_\lambda \neq 0$, λ est bien valeur propre de T.
En résumé, étant donné un réel λ :

i) si $\lambda \leqslant 0$ ou $\lambda > 1$, λ n'est pas valeur propre de T ;

ii) 1 est valeur propre de T et le sous-espace propre associé est $\mathbb{R}$, l'espace des fonctions constantes ;

iii) si $0 < \lambda < 1$, λ est valeur propre de T et le sous-espace propre associé est $\mathbb{R} f_\lambda$.

Exercice 2.3 : Étude d'un endomorphisme d'un espace d'endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ on définit :

$$\Phi_f : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E), g \mapsto f \circ g.$$

1. Vérifier que, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\Phi_f \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\Phi_f) = \Phi_{P(f)}$.
3. En déduire que Φ_f est diagonalisable si, et seulement si, f l'est.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Décrire $\mathrm{Ker}(\Phi_f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})$ à l'aide de $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$.

1. La notation ne doit pas effrayer : Φ_f est par définition une application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même. Dire que $\Phi_f \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ n'est donc rien d'autre que dire que Φ_f est linéaire, i.e. que l'on a $\Phi_f(\lambda\, g + \mu\, h) = \lambda\, \Phi_f(g) + \mu\, \Phi_f(h)$ pour tous g et $h \in \mathcal{L}(E)$ et λ et μ scalaires ; cette dernière relation peut enfin s'écrire $f \circ (\lambda\, g + \mu\, h) = \lambda\, f \circ g + \mu\, f \circ h$. Finalement, comme dans presque toutes les questions demandant de vérifier qu'une application est linéaire, il suffit simplement de le vérifier à partir de la définition.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tous $(g,h) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $(\lambda,\mu) \in K^2$ on a

$$f \circ (\lambda\, g + \mu\, h) = \lambda\, f \circ g + \mu\, f \circ h$$

car f est linéaire. Ainsi :

$$\begin{aligned} \Phi_f(\lambda\, g + \mu\, h) &= f \circ (\lambda\, g + \mu\, h) \\ &= \lambda\, f \circ g + \mu\, f \circ h \\ &= \lambda\, \Phi_f(g) + \mu\, \Phi_f(h) \end{aligned}$$

et Φ_f est donc linéaire.

2. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on a, par définition d'un polynôme d'endomorphismes,

$$P(\Phi_f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_f^k.$$

Par ailleurs, pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$,

$$\Phi_{P(f)}(g) = P(f) \circ g = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k f^k \right) \circ g = \sum_{k=0}^{n} a_k f^k \circ g.$$

Pour démontrer que $P(\Phi_f) = \Phi_{P(f)}$, il suffit donc de démontrer que $\Phi_f^k(g) = f^k \circ g$ pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, i.e. $\Phi_f^k = \Phi_{f^k}$. Autrement dit, il suffit de démontrer le résultat dans le cas particulier des monômes X^k, ce qui est moins lourd à écrire et se rédigera aisément par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}$ posons H_n : « $\Phi_f^n = \Phi_{f^n}$ ».

- H_0 est vraie : en effet, $\Phi_f^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^0 = \mathrm{Id}_E$, par définition de la puissance 0 d'un endomorphisme d'un espace vectoriel.
Par ailleurs, pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, $\Phi_{\mathrm{Id}_E}(g) = \mathrm{Id}_E \circ g = g$ donc $\Phi_{\mathrm{Id}_E} = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}$. On a donc bien $\Phi_f^0 = \Phi_{f^0}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_n est vraie. On a donc $\Phi_f^n = \Phi_{f^n}$ i.e. :

$$\forall g \in \mathcal{L}(E), \Phi_f^n(g) = f^n \circ g.$$

On a alors successivement, pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$:

$$\begin{array}{rcl} \Phi_f^{n+1}(g) & = & \Phi_f(\Phi_f^n(g)) \\ & = & \Phi_f(f^n \circ g) \\ & = & f \circ (f^n \circ g) \\ & = & f^{n+1} \circ g \\ & = & \Phi_{f^{n+1}}(g) \end{array}$$

Ainsi, $\Phi_f^{n+1} = \Phi_{f^{n+1}}$, i.e. H_{n+1} est vraie.
- En conlusion, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Traitons maintenant le cas général tel que nous l'avons fait en préambule :

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On a

$$P(\Phi_f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_f^k$$

soit, pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$:

$$\begin{array}{rcl} P(\Phi_f)(g) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_f^k(g) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \Phi_{f^k}(g) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k f^k \circ g) \\ & = & \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k f^k\right) \circ g \\ & = & P(f) \circ g \\ & = & \Phi_{P(f)}(g). \end{array}$$

Ceci étant vrai pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$ nous avons donc démontré :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], P(\Phi_f) = \Phi_{P(f)}.$$

3. Nous avons un lien simple entre polynômes et diagonalisation : un endomorphisme d'une espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable si, et seulement si, il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

La question précédente nous fournit justement des renseignements sur les polynômes en f et Φ_f. Plus précisément, l'égalité $P(\Phi_f) = \Phi_{P(f)}$ entraîne que $P(\Phi_f) = 0$ si, et seulement si, $\Phi_{P(f)} = 0$. C'est ce que nous allons vérifier dans un premier temps.

Il est clair que, si $P(f) = 0$, alors $\Phi_{P(f)} = 0$ et donc $P(\Phi_f) = 0$.
Réciproquement, si $\Phi_{P(f)} = 0$ alors $P(f) \circ g = 0$ pour tout endomorphisme g de E, en particulier pour $g = \mathrm{Id}_E$, ce qui donne $P(f) = 0$.
Ainsi, f et Φ_f ont les mêmes polynômes annulateurs.
En particulier, Φ_f possède un annulateur scindé à racines simples si, et seulement si, f possède un annulateur scindé à racines simples, donc $\Phi(f)$ est diagonalisable si, et seulement si, f est diagonalisable.

4. Le fait que $g \in \mathrm{Ker}(\Phi_f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})$ signifie $\Phi_f(g) = \lambda g$, soit $f \circ g = \lambda g$ et enfin $(f - \lambda \mathrm{Id}) \circ g = 0$. Ceci est équivalent à l'inclusion $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$.

Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Alors $g \in \mathrm{Ker}(\Phi_f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)})$ si, et seulement si, $f \circ g = \lambda g$.
Cette dernière relation est équivalente à $(f - \lambda \mathrm{Id}) \circ g = 0$, elle-même équivalente à $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$. Ainsi :

$$\mathrm{Ker}(\Phi_f - \lambda \mathrm{Id}) = \{g \in \mathcal{L}(E) : \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})\}.$$

Exercice 2.4 : Diagonalisation

Soient un entier $n \geqslant 3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 1 & & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$.

Déterminer les éléments propres de A. Est-elle diagonalisable ? Que vaut son déterminant ?

Nous allons d'abord déterminer les valeurs propres en cherchant les réels λ pour lesquels le système $AX = \lambda X (X \in M_{n,1}(\mathbb{R}))$ possède au moins une solution $X \neq 0$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. Un élément $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est un vecteur propre associé à f si, et seulement si, $x \neq 0$ et $f(x) = \lambda x$. En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice de x dans la base canonique, ces conditions sont équivalentes à $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.

L'égalité $AX = \lambda X$ est équivalente au système :

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + \cdots + x_n & = & \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 & = & \lambda x_2 \\ & \vdots & \\ x_1 + x_k & = & \lambda x_k \\ & \vdots & \\ x_1 + x_n & = & \lambda x_n \end{array}\right.$$

En particulier, pour $k \in \{2, \ldots, n\}$: $x_1 = (\lambda - 1)\, x_k$. Ainsi, il est naturel de distinguer le cas $\lambda = 1$.

• Supposons $\lambda \neq 1$. Alors les équations 2 à n donnent

$$\forall k \in \{2, \ldots, n\}, x_k = \frac{1}{\lambda - 1}\, x_1$$

ce qui montre en particulier que $x_2 = \cdots = x_n$.
La première équation, compte tenu de ces égalités, se réduit alors à

$$x_1 + (n-1)\, x_2 = \lambda\, x_1.$$

Par ailleurs, nous avons vu que $x_2 = \dfrac{1}{\lambda - 1}\, x_1$ d'où enfin :

$$(n-1)\, x_1 = (\lambda - 1)^2\, x_1.$$

Peut-on diviser par x_1 afin de déterminer les valeurs possibles de λ ? Si x_1 est nul, alors pour $k \geqslant 2$: $x_k = \dfrac{1}{\lambda - 1}\, x_1 = 0$. On a donc $X = 0$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur X.

Si x_1 était nul, X serait nul, ce qui est exclu. Ainsi :

$$(n-1) = (\lambda - 1)^2$$

d'où l'on tire les valeurs possibles de λ : si λ est une valeur propre de A distincte de 1 alors $\lambda = 1 + \sqrt{n-1}$ ou $\lambda = 1 - \sqrt{n-1}$.

Remarquons que ces deux valeurs propres potentielles sont distinctes.

Il faut désormais déterminer si ce sont bien des valeurs propres de A et, si oui, déterminer le sous-espace propre associé.

Ce ne sera pas bien difficile car l'essentiel des calculs a déjà été effectué précédemment : il suffit de remplacer λ par l'une des deux valeurs possibles trouvées ci-dessus.

Soient $\lambda_1 = 1 + \sqrt{n-1}$ et $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id})$.
Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_1$ alors, d'après les calculs précédents, on a

$$\forall k \in \{2, \ldots, n\}, x_k = \frac{1}{\lambda - 1} x_1 = \frac{1}{\sqrt{n-1}} x_1.$$

Autrement dit, $x = x_2(\sqrt{n-1}, 1, \ldots, 1)$ donc $E_1 \subset \mathbb{R}(\sqrt{n-1}, 1, \ldots, 1)$.

Nous avons démontré une inclusion, il reste à regarder si l'inclusion réciproque est vraie.

Réciproquement, le vecteur $(\sqrt{n-1}, 1, \ldots, 1)$ appartient à E_1 car on vérifie aisément que ce n-uplet est bien solution du système (S) pour $\lambda = \lambda_1$.
En conclusion : $1 + \sqrt{n-1}$ est valeur propre de A et le sous-espace propre associé est la droite $\mathbb{R}(\sqrt{n-1}, 1, \ldots, 1)$.

Le cas de $1 - \sqrt{n-1}$ se traite identiquement.

Soit $\lambda_2 = 1 - \sqrt{n-1}$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{Id})$.
Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_2$ alors, d'après les calculs précédents, on a

$$\forall k \in \{2, \ldots, n\},\ x_k = \frac{1}{\lambda - 1} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{n-1}} x_1.$$

Autrement dit, $x = x_2(-\sqrt{n-1}, 1, \ldots, 1)$ donc $E_2 \subset \mathbb{R}(-\sqrt{n-1}, 1, \ldots, 1)$.
Réciproquement, le vecteur $(-\sqrt{n-1}, 1, \ldots, 1)$ appartient à E_2 car on vérifie aisément que ce n-uplet est bien solution du système (S) pour $\lambda = \lambda_2$.
En conclusion : $1 - \sqrt{n-1}$ est valeur propre de A et le sous-espace propre associé est la droite $\mathbb{R}(-\sqrt{n-1}, 1, \ldots, 1)$.

Il reste à étudier le cas $\lambda = 1$. Dans ce cas, le système (S) se simplifie considérablement.

- Supposons $\lambda = 1$: le système (S) se réduit à deux équations :

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n & = & 0 \\ x_1 & = & 0 \end{cases}$$

la première se simplifiant même en $x_2 + \cdots + x_n = 0$. Ainsi, en notant

$$E_3 = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$

on a $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = E_3$.

Nous n'avons pas encore tout à fait démontré que 1 est valeur propre de f : il pourrait en effet se faire que E_3 soit réduit à $\{0\}$. Dans les calculs précédents, les sous-espaces E_1 et E_2 ont été trouvés directement comme engendrés par un vecteur non nul, donc ils n'étaient pas réduits à $\{0\}$.

Ici, E_3 est donné par un système d'équations et nous devons donc vérifier que ces équations possèdent une solution non nulle.

D'une part, une solution de (S) vérifie nécessairement $x_1 = 0$.

D'autre part, comme $n \geqslant 3$ l'équation $x_2 + \cdots + x_n = 0$ contient au moins deux termes ; il suffit d'en prendre un égal à 1, un autre égal à -1 et tous les autres nuls pour en avoir une solution non nulle. Nous aurons ainsi bien utilisé le fait que $n \geqslant 3$.

Soit le vecteur $x = (0,1,-1,0,\ldots,0)$ (si $n > 3$) ou $x = (0,1,-1)$ (si $n = 3$). Alors $x \in E_3$ car les coordonnées de x vérifient bien $x_1 = 0$ et $x_2 + \cdots + x_n = 0$. De plus, $x \neq 0$. Ainsi, E_3 n'est pas réduit à $\{0\}$. Ceci montre que 1 est valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est E_3.
En conclusion, A possède trois valeurs propres : $1 + \sqrt{n-1}$, $1 - \sqrt{n-1}$ et 1. Les sous-espaces propres associés sont respectivement E_1, E_2 et E_3.

A est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est n.

Il est clair que $\dim(E_1) = \dim(E_2) = 1$. Reste à calculer $\dim(E_3)$, la difficulté étant que E_3 est donné par un système d'équations.

Pour déterminer cette dimension, on peut chercher une base de E_3. Cependant, on peut aussi calculer cette dimension par le théorème du rang. En effet, il est souvent assez simple de déterminer le rang d'une matrice par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Parfois, le rang est même évident sans qu'il n'y ait à faire ces opérations ; c'est le cas quand beaucoup de colonnes sont colinéaires voire égales.

Déterminons la dimension de E_3 :

$$\dim(E_3) = \dim(\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{Id}) = n - \mathrm{rg}(A - I_n)$$

La matrice

$$A - I_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 donc $\dim(E_3) = n - 2$.

Connaître le dimension de E_3 facilite la recherche d'une base de cet espace : en effet, il suffirait désormais de trouver une famille libre de $n-2$ vecteurs de E_3 pour en avoir une base. Sans l'information sur la dimension, nous ne saurions pas quelle doit être la taille d'une base et de plus, pour montrer qu'une famille est une base sans connaître la dimension de l'espace, il faut démontrer qu'elle est libre et génératrice, alors qu'en connaissant la dimension on peut se contenter d'un argument de cardinal (une famille libre de cardinal la dimension de l'espace en est une base). Cependant, cette question n'est ici pas posée.

La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est n donc A est diagonalisable.
A est donc semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

et en particulier a même déterminant, à savoir

$$\lambda_1 \lambda_2 = (1 + \sqrt{n-1})(1 - \sqrt{n-1}) = 2 - n.$$

Si $n = 2$, les équations vérifiées par les éléments $(x_1,x_2) \in E_3$ se résument à $x_1 = x_2 = 0$; ainsi, $E_3 = \{0\}$ est 1 n'est pas valeur propre de A.
En revanche, comme $\sqrt{n-1} = 1$, $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 0$ sont valeurs propres distinctes de sous-espaces propres associés respectifs $\mathbb{R}(1,1)$ et $\mathbb{R}(-1,1)$ et A est encore diagonalisable.

Exercice 2.5 : Réduction (PC-PSI)

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} b & & a \\ & \ddots & \\ a & & b \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ avec $a \neq 0$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A.

2. A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les dimensions de ses sous-espaces propres.

3. Calculer $\det(A)$.

Remarquons que le cas $a = 0$ ne présenterait aucune difficulté puisqu'alors A serait égale à $b\, I_n$.

1. Nous savons d'après le théorème de Cayley-Hamilton que le polynôme caractéristique de A en est un polynôme annulateur. Cependant, il n'est pas du tout aisé à calculer !

Pour déterminer un polynôme annulateur simple d'une matrice A, on peut essayer de calculer les premières puissances de A et chercher une relation entre elles.

L'idéal est de pouvoir écrire $A = \lambda I_n + B$ avec λ scalaire. En effet, on a alors $\lambda I_n B = B \lambda I_n$ et on peut donc utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances de A en fonction de celles de B. Ceci est intéressant quand les puissances de B sont simples à calculer, ce qui est le cas, entre autres :

i) des matrices nilpotentes ;

ii) des matrices diagonales, parfois des matrices triangulaires ;

iii) des matrices dont tous les coefficients sont égaux ;

iv) des matrices « diagonales par blocs » avec de « petits » blocs.

Ici, nous pouvons faire apparaître la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1 : plus précisément, tous les coefficients de $a J$ sont égaux à a donc les coefficients de $a J + (b - a) I_n$ sont égaux à a en dehors de la diagonale et b sur la diagonale, i.e. $a J + (b - a) I_n = A$.
Par ailleurs, comme annoncé, les puissances de J sont faciles à calculer car tous les coefficients de J^2 sont égaux à n, i.e. $J^2 = n J$.
Ainsi, lorsque nous calculerons A^2, il apparaîtra un terme en J^2 que nous pourrons exprimer en fonction de J, ce qui permettra de faire réapparaître A à l'aide de la relation $A = a J + (b - a) I_n$ et d'obtenir ainsi une relation entre A et A^2.

Soit J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Alors $A = a J + (b - a) I_n$. Par ailleurs, $J^2 = n J$.
Comme J et I_n commutent on a

$$A^2 = a^2 J^2 + (b - a)^2 I_n + 2 a (b - a) J$$

soit, comme $J^2 = n J$,

$$A^2 = (n a^2 + 2 a (b - a)) J + (b - a)^2 I_n.$$

Comme $a \neq 0$, on a $J = \frac{1}{a} A - \left(\frac{b}{a} - 1\right) I_n$. En remplaçant J par cette expression dans l'égalité ci-dessus on obtient

$$A^2 = (n a^2 + 2 a (b - a)) \left(\frac{1}{a} A - \left(\frac{b}{a} - 1\right) I_n\right) + (b - a)^2 I_n$$

soit, après simplification :

$$A^2 - (n a + 2 (b - a)) A + (n a (b - a) + (b - a)^2) I_n = 0.$$

Ainsi, le polynôme

$$P = X^2 - ((n a + 2 (b - a)) X + (n a (b - a) + (b - a)^2)$$

est un polynôme annulateur de A.

2. La question est de savoir si A possède un polynôme annulateur scindé à racines simples. Commençons donc par étudier les racines de P, ce qui est facile puisque P est de degré 2 : si le discriminant est strictement positif alors P possède deux racines réelles distinctes et est donc scindé à racines simples.

Le discriminant de P est

$$((n\,a + 2\,(b-a))^2 - 4\,(n\,a\,(b-a) + (b-a)^2) = n^2\,a^2 > 0$$

donc P possède deux racines réelles distinctes.
P est un polynôme annulateur scindé à racines simples de A donc A est diagonalisable.

Par ailleurs, les valeurs propres de A sont racines de tout polynôme annulateur de A, en particulier de P. À partir du discriminant de P calculé plus haut on obtient aisément ses racines.

Les racines de P sont $(n\,a + 2\,(b-a) \pm n\,a)/2$, i.e. $b-a$ et $b+(n-1)\,a$.
Autrement dit, $P = (X-(b-a))\,(X-(b+(n-1)\,a))$
Comme $P(A) = 0$, les valeurs propres de A sont toutes racines de P donc appartiennent à $\{b-a, b+(n-1)\,a\}$.

A priori, il pourrait se faire que l'un de ces réels ne soit pas valeur propre de A. Cependant, nous savons que A est diagonalisable et a donc au moins une valeur propre. De plus, une matrice diagonalisable qui n'a qu'une seule valeur propre λ est en fait égale à $\lambda\,I_n$, ce qui n'est pas le cas de A. A possède donc plusieurs valeurs propres, ce qui assure que $b-a$ et $b+(n-1)\,a$ sont bien valeurs propres de A. Cependant, il est ici demandé de calculer les dimensions des sous-espaces propres associés. Il va donc falloir effectuer quelques calculs. Une façon simple d'aborder une telle question est de plutôt calculer des rangs.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. Comme $A-(b-a)\,I_n = a\,J$ on a, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(f-(b-a)\,\mathrm{Id})) = n - \mathrm{rg}(f-(b-a)\,\mathrm{Id}) =$$

$$n - rg(A-(b-a)\,I_n) = n - rg(a\,J).$$

Toutes les colonnes de $a\,J$ sont colinéaires donc $\mathrm{rg}(a\,J) \leqslant 1$. Par ailleurs, comme $a \neq 0$, $a\,J$ n'est pas nulle donc son rang n'est pas nul non plus. Ainsi, $\mathrm{rg}(a\,J) = 1$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(f-(b-a)\,\mathrm{Id})) = n-1$.

Sachant que A est diagonalisable, le calcul de la dimension de l'autre sous-espace propre est rapide.

A étant diagonalisable, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est n ; la dimension du sous-espace propre associé à $b + (n-1)\,a$ est donc 1.

Le fait de savoir qu'une matrice est diagonalisable (par exemple lorsqu'on a constaté qu'elle avait un polynôme annulateur scindé à racines simples) permet d'abréger le calcul de la dimension des sous-espaces propres : la dernière dimension est imposée par le fait que la somme de toutes ces dimensions est égale à n.

Cependant, si l'on ne sait pas que la matrice est diagonalisable, il faut calculer « à la main » toutes ces dimensions et voir si leur somme est égale à n pour conclure quant à la diagonalisabilité.

3. Nous connaissons les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres associés, donc nous connaissons une matrice diagonale semblable à A sans avoir besoin de calculer des matrices de passage !

D'après les questions précédentes, A est semblable à

$$\begin{pmatrix} b-a & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & b-a & \\ 0 & & & b+(n-1)\,a \end{pmatrix}.$$

En particulier, ces deux matrices ont même déterminant. On en déduit

$$\det(A) = (b-a)^{n-1}\,(b+(n-1)\,a).$$

Remarquons qu'il n'était pas évident de calculer ce déterminant directement. De plus, on peut vérifier facilement que la trace de cette matrice est bien égale à celle de A, à savoir $n\,b$. C'est normal, car deux matrices semblables ont même trace, mais c'est aussi un moyen simple de vérifier que l'on n'a pas commis d'erreur grossière : si nous avions trouvé une autre valeur pour la trace on aurait pu affirmer qu'il y avait une erreur.

Exercice 2.6 : Réduction d'une matrice d'ordre 3 (PC-PSI)

Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice étant d'ordre 3 le calcul du polynôme caractéristique peut être un moyen rapide de trouver les valeurs propres. Qui plus est, la présence des zéros de la dernière colonne simplifie grandement le calcul et la factorisation de ce polynôme.

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ on a

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_3 - A) &= \det\begin{pmatrix}\lambda-6 & -2 & 0\\ -2 & \lambda-3 & 0\\ 10 & 5 & \lambda-2\end{pmatrix}\\ &= ((\lambda-6)(\lambda-3)-4)\,(\lambda-2)\\ &= (\lambda^2-9\lambda+14)(\lambda-2)\\ &= (\lambda-2)^2(\lambda-7).\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc 2 et 7.

Pour vérifier que A est diagonalisable nous allons calculer les dimensions des sous-espaces propres de f, l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à A, pour vérifier que leur somme est 3. Pour cela, on peut calculer les rangs de $A - 2\,I_3$ et $A - 7\,I_3$ et conclure par le théorème du rang.

Déterminons la dimension du sous-espace propre associé à 2 :

$$A - 2\,I_3 = \begin{pmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -10 & -5 & 0\end{pmatrix}.$$

Cette matrice est clairement de rang 1 car ses colonnes sont colinéaires et elle n'est pas nulle. La dimension de $\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ est donc 2.
Par ailleurs, la dimension de $\operatorname{Ker}(f - 7\,\mathrm{Id})$ est au moins 1 (par définition d'une valeur propre) et la somme des dimensions de tous les sous-espaces propres est inférieure ou égale à l'ordre de la matrice, ici 3. La dimension de $\operatorname{Ker}(f - 7\,\mathrm{Id})$ ne peut donc être que 1.
La somme des dimensions des sous-espaces propres de f est 3 donc A est bien diagonalisable.

Il faut bien voir qu'il y a deux arguments différents :

i) la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut dépasser 3, ce qui impose $\dim(\operatorname{Ker}(f - 7\,\mathrm{Id})) \leqslant 1$;

ii) on constate alors que la somme de ces dimensions est en fait égale à 3, ce qui prouve la diagonalisabilité de A.

Attention à ne pas mélanger les arguments : affirmer que la somme des dimensions des sous-espaces propres est 3 est équivalent à la diagonalisabilité. Si on commence le raisonnement par cette affirmation, on part du résultat et on ne démontre donc rien du tout !

Nous pouvons désormais déterminer des bases des sous-espaces propres.

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$ tel que $(x,y,z) \in \text{Ker}(f - 2\,\text{Id})$. Il vient, d'après l'expression de $A - 2\,I_3$, le système :

$$\begin{cases} 4\,x & + & 2\,y & = & 0 \\ 2\,x & + & y & = & 0 \\ -10\,x & - & 5\,y & = & 0 \end{cases}$$

qui se réduit en fait à une seule équation car elles sont toutes trois proportionnelles :

$$2\,x + y = 0.$$

Nous savons que $\text{Ker}(f - 2\,\text{Id})$ est de dimension 2 : il suffit donc de trouver deux vecteurs non colinéaires de cet espace pour en avoir une base.

Commençons par en chercher un avec le plus de coordonnées nulles. Il est clair que l'équation précédente admet pour solution tout triplet de la forme $(0,0,z)$. En notant (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ on a donc $e_3 \in \text{Ker}(f - 2\,\text{Id})$.

Il reste à trouver un autre vecteur de ce noyau non colinéaire à e_3. Pour cela, on doit prendre x ou y non nul. Le plus simple est de prendre $x = 1$ et il vient alors $y = -2$. Nous avons encore le choix pour z : autant prendre $z = 0$, i.e. $(x,y,z) = (1,-2,0) = e_1 - 2\,e_2$.

On vérifie aisément que, si (e_1,e_2,e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{K}^3$, les vecteurs e_3 et $e_1 - 2\,e_2$ sont propres pour f et associés à la valeur propre 2. Comme ils ne sont pas colinéaires et que $\dim(\text{Ker}(f - 2\,\text{Id}) = 2$, ils forment une base de ce sous-espace propre de f.

Enfin, le sous-espace propre associé à 7 est de dimension 1 : il suffit donc de trouver un vecteur non nul de cet espace et il en constituera automatiquement une base.

$$A - 7\,I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -10 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

donc, si $f(x,y,z) = 0$, on a

$$\begin{cases} -x & + & 2\,y & & & = & 0 \\ 2\,x & - & 4\,y & & & = & 0 \\ -10\,x & - & 5\,y & - & 5\,z & = & 0 \end{cases}$$

Les deux premières équations sont proportionnelles à l'équation $x - 2\,y = 0$. La dernière, divisée par -5, est équivalente à $2\,x + y + z = 0$. On a donc le système équivalent plus simple :

$$\begin{cases} x & - & 2\,y & & & = & 0 \\ 2\,x & + & y & + & z & = & 0 \end{cases}$$

N'oublions pas que nous cherchons seulement une solution non nulle (toutes les autres lui étant proportionnelles vu que $\dim(\mathrm{Ker}(f - 7\mathrm{Id})) = 1$). Cherchons-en une avec un maximum de 0. Si $x = 0$ la première équation impose $y = 0$ et la deuxième donne enfin $z = 0$, ce qui ne convient pas puisque nous recherchons une solution non nulle.

Prenons donc x non nul, disons $x = 2$, la première équation donnant alors $y = 1$ (on pourrait prendre $x = 1$ mais cela ferait ensuite intervenir des fractions, autant l'éviter !). La dernière se réduit alors à $z = -5$.

Nous avons ainsi une solution non nulle du système : $(x,y,z) = (2,1,-5)$. Autrement dit, le vecteur $2\,e_1 + e_2 - 5\,e_3$ appartient à $\mathrm{Ker}(f - 7\,\mathrm{Id})$.

On vérifie aisément que $2\,e_1 + e_2 - 5\,e_3 \in \mathrm{Ker}(f - 7\,\mathrm{Id})$. Comme ce sous-espace propre de f est de dimension 1, ce vecteur propre en est une base. Posons

$$\begin{cases} u_1 = e_3 \\ u_2 = e_1 - 2\,e_2 \\ u_3 = 2\,e_1 + e_2 - 5\,e_3 \end{cases}$$

Alors, d'après ce qui précède, (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{K}^3$ constituée de vecteurs propres de f.

Il reste à déterminer les matrices de passage.

La matrice de passage de (e_1,e_2,e_3) à (u_1,u_2,u_3) est

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer P^{-1}, exprimons les vecteurs e_i en fonction des vecteurs u_j. La première relation donne $e_3 = u_1$ soit, en remplaçant dans la troisième :

$$\begin{cases} (A) & u_2 = e_1 - 2\,e_2 \\ (B) & 5\,u_1 + u_3 = 2\,e_1 + e_2 \end{cases}$$

En combinant ces relations il vient

$$\begin{cases} (A) + 2\,(B) & 10\,u_1 + u_2 + 2\,u_3 = 5\,e_1 \\ (B) - 2\,(A) & 5\,u_1 - 2\,u_2 + u_3 = 5\,e_2 \end{cases}$$

soit enfin :

$$\begin{cases} e_1 = 2\,u_1 + 1/5\,u_2 + 2/5\,u_3 \\ e_2 = u_1 - 2/5\,u_2 + 1/5\,u_3 \\ e_3 = u_1 \end{cases}.$$

On a donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1/5 & -2/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a aucun calcul à faire pour déterminer $P^{-1}AP$. En effet, ce n'est autre que la matrice de f dans la base (u_1,u_2,u_3).

Comme $f(u_1) = 2u_1$, $f(u_2) = 2u_2$ et $f(u_3) = 7u_3$ nous obtenons, sans calcul supplémentaire :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Connaître a priori la dimension d'un sous-espace vectoriel est extrêmement pratique pour en déterminer une base, surtout en petite dimension, comme on vient de le voir : si la dimension est 1 il suffit de trouver un vecteur non nul, si elle est 2 il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires.
Par ailleurs la dimension d'un sous-espace propre peut se calculer aisément à l'aide du théorème du rang via le calcul du rang d'une matrice.
Enfin, ne pas oublier que parfois la dimension du dernier sous-espace propre peut se déduire des dimensions des autres sous-espaces propres, comme nous l'avons vu ici pour le sous-espace propre associé à 7.

Exercice 2.7 : Trigonalisation

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Calculer les puissances de $A - I_3$.

2. Pour $k \in \{1,2,3\}$ on pose $E_k = \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^k)$.

2.a. Démontrer que $\dim(E_k) = k$.

2.b. En déduire une base (u_1,u_2,u_3) de E_3 telle que (u_1) est une base de E_1 et (u_1,u_2) est une base de E_2.

3. Déterminer une matrice B triangulaire supérieure et semblable à A ainsi que les matrices de passage correspondantes.

1. Cette question est un simple calcul de produits matriciels.

On a successivement :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -8 & -8 & 4 \\ -8 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$(A - I_3)^3 = 0.$$

Au vu de cette dernière relation on a donc

$$(A - I_3)^n = 0 \quad \text{pour} \quad n \geqslant 3.$$

2.a. D'une manière générale, si g et h sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel, on a toujours $\mathrm{Ker}(h) \subset \mathrm{Ker}(g \circ h)$: en effet, si $h(x) = 0$, alors $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(0) = 0$.

On a les inclusions :

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^2) \subset \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^3) = \mathbb{R}^3.$$

Le théorème du rang permet de faire le lien entre la dimension de $\mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^k)$ et $\mathrm{rg}((f - \mathrm{Id})^k) = \mathrm{rg}((A - I_3)^k)$.

Pour calculer le rang, on dispose d'une méthode générale consistant à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes (car ces opérations ne changent pas le rang). Cependant, on peut aussi parfois identifier le rang immédiatement: c'est ici le cas de $(A - I_3)^3$, qui est nulle donc de rang nul, et $(A - I_3)^2$, dont toutes les colonnes sont colinéaires.

• Comme $(A - I_3)^3 = 0$, $(f - \mathrm{Id})^3 = 0$ et donc $\mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^3) = \mathbb{R}^3$. Ainsi, $\dim(E_3) = 3$.

• Les colonnes de la matrice $(A - I_3)^2$ sont colinéaires ; ainsi, $\mathrm{rg}((A - I_3)^2) \leqslant 1$.

Par ailleurs $(A - I_3)^2 \neq 0$ donc $\mathrm{rg}((A - I_3)^2) \neq 0$.

Ainsi, $\mathrm{rg}((f - \mathrm{Id})^2) = 1$ donc, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^2)) = 2$.

• La matrice $A - I_3$ n'est pas nulle et possède deux colonnes non colinéaires : son rang est donc au moins 2.

Si son rang était 3, elle serait inversible et donc toutes ses puissance également, en particulier $(A - I_3)^3$, qui est nulle. Ainsi, $A - I_3$ n'est pas inversible, donc son rang est 2. On en déduit $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})) = 1$.

Nous aurions aussi pu remarquer, pour cette dernière matrice, que la première colonne est une combinaison linéaire des deux autres (le double de leur somme).

2.b. Il est aisé de construire des bases de ce type. En effet, une base de E_1 est une famille libre de E_2 donc peut être complétée en une base de E_2, etc.

Nous connaissons les dimensions des espaces E_k, ce qui simplifie la détermination de bases. En effet :

• E_1 est de dimension 1, donc toute famille libre à un élément en est une base. Autrement dit, on peut prendre pour u_1 n'importe quel élément non nul de E_1.

• E_2 est de dimension 2. La famille (u_1,u_2) étant de cardinal $2 = \dim(E_2)$ il suffit qu'elle soit libre pour être une base de E_2. Autrement dit, si u_2 est n'importe quel vecteur de E_2 non colinéaire à u_1, (u_1,u_2) est une base de E_2.

• Enfin, $E_3 = \mathbb{R}^3$ est de dimension 3. Sachant que (u_1,u_2) est libre, il suffit donc de prendre pour u_3 n'importe quel vecteur n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$, i.e. à E_2, pour que (u_1,u_2,u_3) soit également libre, et donc une base de $\mathbb{R}^3$ puisqu'elle a $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs.

On voit en particulier qu'il y a beaucoup (en fait, une infinité) de choix possibles pour une telle base. Nous essaierons donc de faire en sorte que les vecteurs u_k choisis soient « les plus simples possibles ». En pratique, ceci signifie qu'on essaiera de faire en sorte que leurs coordonnées dans la base canonique soient de petits entiers. Ceci permettra d'avoir des matrices de passage simples.

Commençons donc par chercher un élément non nul de $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Si $(x,y,z) \in E_1$ alors

$$(A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui se traduit par le système :

$$\begin{cases} -4x - 2y = 0 \\ 6x + 2y + z = 0 \\ 4x + 2z = 0 \end{cases}$$

La première équation donne $y = -2x$ et la troisième $z = -2x$. Ainsi, $(x,y,z) = x(1,-2,-2)$. Réciproquement, $(1,-2,-2)$ est bien solution de ce système donc le vecteur $u_1 = (1,-2,-2)$ est un élément non nul de E_1.

Alternativement, les égalités $(f - \mathrm{Id})^3 = (f - \mathrm{Id}) \circ (f - \mathrm{Id})^2$ et $\mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^3) = \{0\}$ entraînent $\mathrm{Im}((f - \mathrm{Id})^2) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Il suffit donc de trouver un élément non nul de $\mathrm{Im}((f - \mathrm{Id})^2)$. Ceci est facile puisque les vecteurs colonnes de la matrice $(A - I_3)^2$ engendrent $\mathrm{Im}((f - \mathrm{Id})^2)$; comme ces colonnes sont colinéaires à $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, on retrouve le fait que $(1,-2,-2)$ est élément de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

On vérifie facilement que $u_1 = e_1 - 2e_2 - 2e_3$ est un vecteur non nul de E_1, qui est de dimension 1. La famille (u_1) est donc une base de E_1.

Cherchons à compléter (u_1) en une base de $\mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^2)$. Pour cela, il suffit de trouver un vecteur $u_2 \in \mathrm{Ker}((f - \mathrm{Id})^2)$ non colinéaire à u_1.

Si $u_2 = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$, la relation $(f - \mathrm{Id})^2(u_2) = 0$ donne $2x + 2y - z = 0$. On peut chercher u_2 convenant avec un maximum de coordonnées nulles pour faciliter les calculs ultérieurs.

Si deux des coordonnées sont nulles, la relation $2x + 2y - z = 0$ montre que la troisième est nulle et donc u_2 également, ce qui est exclu.

Si $x = 0$, alors on peut prendre $y = 1$ et $z = 2$. On obtient ainsi bien un vecteur qui n'est pas colinéaire à u_1.

Le vecteur $e_2 + 2e_3$ n'est pas colinéaire à u_1 et est bien élément de E_2 donc (u_1,u_2) est une famille libre de E_2. Comme $\dim(E_2) = 2$, c'est bien une base de E_2 telle que u_1 est une base de E_1.

On aurait aussi bien pu choisir $y = 0$ puis $x = 1$ et $z = 2$, ou $z = 0$ puis $x = 1$ et $y = -1$, ou même des coordonnées toutes non nulles, comme $x = y = 1$ et $z = 4$.

Enfin, on peut prendre pour u_3 n'importe quel vecteur qui n'est pas élément de E_2, i.e. $u_3 = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3$ avec $2x + 2y - z \neq 0$. Encore une fois, une infinité de choix se présentent mais il y en a de plus simples que d'autres : prendre deux coordonnées nulles et la troisième égale à 1. N'importe lequel des trois vecteurs e_1, e_2 et e_3 est un choix convenable pour u_3. Nous allons cependant choisir $u_3 = e_3$ afin que la matrice de passage soit triangulaire : vu qu'il faudra effectuer un calcul de changement de base, donc en particulier inverser cette matrice de passage, autant la choisir de sorte que les calculs soient les plus simples possibles !

Le vecteur $u_3 = e_3$ n'appartient pas à E_2 ; la famille (u_1,u_2,u_3) est donc une famille libre de E_3, qui est de dimension 3, et en est donc une base.

En résumé, nous avons :

$$\begin{cases} u_1 = e_1 - 2e_2 - 2e_3 \\ u_2 = e_2 + 2e_3 \\ u_3 = e_3 \end{cases}$$

Ceci donne la matrice de passage demandée.

La matrice de passage de (e_1,e_2,e_3) à (u_1,u_2,u_3) est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit désormais d'inverser le système précédent pour exprimer les e_i en fonction des u_j. Ceci est facile car la matrice est triangulaire.

La définition de (u_1,u_2,u_3) donnée précédemment permet d'obtenir aisément :

$$\begin{cases} e_1 = u_1 + 2u_2 - 2u_3 \\ e_2 = u_2 - 2u_3 \\ e_3 = u_3 \end{cases}$$

La matrice de passage de (u_1,u_2,u_3) à (e_1,e_2,e_3) est donc :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, en notant B la matrice de f dans la base (u_1,u_2,u_3), on a $P^{-1}AP = B$. On en déduit :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.8 : Réduction d'une matrice à paramètres

Pour quelles valeurs des scalaires a, b, c et d la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

Cette matrice est triangulaire : ses valeurs propres sont donc simplement ses coefficients diagonaux.

Partant des valeurs propres, il suffit de déterminer la dimension des sous-espaces propres associés pour déterminer si la matrice est ou non diagonalisable : une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice $n \times n$ soit diagonalisable est que la somme des dimensions des sous-espaces propres soit n. Un tel calcul de dimension de noyau peut se ramener à un calcul, plus simple, de rang via le théorème du même nom.

Il y a visiblement trois cas à distinguer selon que $d = 1$, $d = 2$ ou $d \notin \{1,2\}$. En effet, dans ce dernier cas, la matrice a trois valeurs propres distinctes. D'une manière générale, si une matrice $n \times n$ possède n valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable.

La matrice A étant triangulaire ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : 1, 2 et d.
Supposons $d \notin \{1,2\}$. A est alors une matrice 3×3 possédant 3 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

Dans les cas $d = 1$ et $d = 2$, les rangs de $A - I_3$ et $A - 2\,I_3$ se calculent sans peine.

Supposons $d = 2$. Les valeurs propres de A sont 1 et 2.
D'une part,

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang au moins 2, car les deuxième et troisième colonnes ne sont pas colinéaires, mais aussi de rang strictement inférieur à 3 car elle n'est pas inversible (sa première colonne est nulle). Ainsi, $\mathrm{rg}(A - I_3) = 2$ donc, en notant f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à A : $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})) = 1$.
D'autre part,

$$A - 2\,I_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $c = 0$, cette matrice est de rang 1. Sinon, elle est de rang 2. La dimension de $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ est donc 2 si $c = 0$ et 1 si $c \neq 0$.
En particulier, la somme des dimensions des sous-espaces propres est 3 si, et seulement si, $c = 0$. Ainsi : si $d = 2$ et $c = 0$, A est diagonalisable. Si $d = 2$ et $c \neq 0$, A n'est pas diagonalisable.

Traitons enfin le dernier cas.

Supposons $d = 1$. Les valeurs propres de A sont 1 et 2.
D'une part,

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 1 ou 2 selon que $a\,c = b$ ou non. $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ est donc de dimension 1 (si $a\,c \neq b$) ou 2 (si $a\,c = b$).
D'autre part,

$$A - 2\,I_3 = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 2 donc $\dim(\operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})) = 1$.
En particulier, la somme des dimensions des sous-espaces propres est 3 si, et seulement si, $ac = b$.
Ainsi : si $d = 1$ et $a\,c = b$, A est diagonalisable. Si $d = 1$ et $a\,c \neq b$, A n'est pas diagonalisable.

La condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité peut se résumer ainsi :

$$d \notin \{1,2\} \text{ ou } (c,d) = (0,2) \text{ ou } (b,d) = (a\,c,1).$$

Exercice 2.9 : Diagonalisation simultanée (PC-PSI)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ sont diagonales ;

ii) $u \circ v = v \circ u$.

2. Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathcal{L}(E)$ dont tous les éléments sont diagonalisables. On suppose que, pour tout $(f,g) \in A^2$, $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que, pour tout $f \in A$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.
On pourra raisonner par récurrence sur n en distinguant le cas où tous les éléments de A sont des homothéties.

1. Rappelons une propriété fondamentale des sous-espaces propres : si deux endomorphismes d'un espace vectoriel commutent, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

i) $\Rightarrow$ *ii)* : notons $(e_1,\dots,e_n)$ les vecteurs de $\mathcal{B}$. Il existe des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ et $\mu_1,\dots\mu_n$ tels que, pour tout i : $u(e_i) = \lambda_i\, e_i$ et $v(e_i) = \mu_i\, e_i$.
En particulier, $u(v(e_i)) = \lambda_i\,\mu_i\,e_i$ et $v(u(e_i)) = \mu_i\,\lambda_i\,e_i$; $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur la base $\mathcal{B}$ et sont donc égaux.

Alternativement, on aurait pu considérer U (resp. V) la matrice de u (resp. v) dans $\mathcal{B}$ et constater que, ces deux matrices étant diagonales, on a $U\,V = V\,U$.

L'autre implication est plus difficile. Nous savons que E possède une base de vecteurs propres pour u et aussi une base de vecteurs propres pour v. Le but de la question est de démontrer qu'il existe une base constituée de vecteurs propres pour u et v simultanément. Le problème est qu'une base de vecteurs propres pour l'un n'a a priori aucune raison d'être une base de vecteurs propres pour l'autre.

Cependant, si u est une homothétie, tout se simplifie : toute base de E est une base de vecteurs propres pour u donc n'importe quelle base de vecteurs propres pour v est aussi une base de vecteurs propres pour u.

Dans le cas général, u n'est pas forcément une homothétie mais u induit une homothétie sur chacun de ses sous-espaces propres. Si F est un sous-espace propre de u

et que F est stable par v alors l'endomorphisme v_F de F induit par v est diagonalisable (car v l'est) et l'endomorphisme u_F induit par u est une homothétie (par définition d'un sous-espace propre). On peut donc trouver une base de F constituée de vecteurs propres de v_F et qui seront automatiquement vecteurs propres de u_F. Il faudra ensuite « remonter » à l'espace E et aux endomorphismes u et v ; pour cela, on pourra utiliser le fait que E est la somme directe des sous-espaces propres de u.

Il faut donc savoir si les sous-espaces propres de u sont bien stables par v. Justement, il est supposé que u et v commutent, donc tout noyau d'un polynôme de l'un est stable par l'autre : en particulier, tout sous-espace propre de u est stable par v.

ii) $\Rightarrow$ *i)* :
u et v commutant, tout noyau ou image d'un polynôme de l'un est stable par l'autre ; en particulier, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.
De plus, tout endomorphisme induit sur un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable. Notons $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ les valeurs propres distinctes de u et $E_k = \operatorname{Ker}(u - \lambda_k \operatorname{Id})$ les sous-espaces propres associés.
Pour chaque k, E_k est stable par v car u et v commutent et E_k est le noyau d'un polynôme en u. v induit donc un endomorphisme v_k de E_k. v étant diagonalisable, v_k l'est également : il existe une base $\mathcal{B}_k$ de E_k constituée de vecteurs propres de v_k (et donc de v).
Par ailleurs, E_k est un sous-espace propre de u : tous ses éléments sont donc vecteurs propres de u. En particulier, les vecteurs de la base $\mathcal{B}_k$ sont propres pour u. Ainsi, $\mathcal{B}_k$ est une base de E_k dont tous les éléments sont vecteurs propres de u et de v.
Soit $\mathcal{B}$ la famille de vecteurs obtenue en concaténant $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_r$. Comme chaque famille $\mathcal{B}_k$ est une base de E_k et que E est la somme directe des E_k, $\mathcal{B}$ est une base de E. Dans cette base, les matrices de u et de v sont diagonales.

2. Si tous les éléments de A sont des homothéties, il n'y a rien à faire : la matrice d'une homothétie dans n'importe quelle base est diagonale et donc n'importe quelle base de E convient.

Dans le cas contraire, l'un des éléments de A n'est pas une homothétie : nous pouvons nous ramener à des espaces de dimension plus faible (pour pouvoir raisonner par récurrence sur la dimension) en considérant ses sous-espaces propres. En effet, un endomorphisme diagonalisable qui n'est pas une homothétie possède plusieurs sous-espaces propres, qui sont donc tous de dimensions strictement inférieures à celle de E.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ posons H_n : « Si E est un espace vectoriel de dimension n, A un sous-ensemble non vide de $\mathcal{L}(E)$ dont les éléments sont diagonalisables et commutent deux à deux, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que, pour tout $f \in A$, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale ».

• H_1 est vraie car toute matrice 1×1 est diagonale.

• Hérédité : supposons H_n et considérons un espace vectoriel E de dimension $n+1$ et A une partie non vide de $\mathcal{L}(E)$ dont les éléments sont diagonalisables et commutent.
Si tous les éléments de A sont des homothéties, n'importe quelle base de E convient.
Sinon, soit un élément f de A qui n'est pas une homothétie. f est diagonalisable par hypothèse et, en notant $E_1,\dots,E_r$ ses sous-espaces propres, on a donc $E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_k$.
Par ailleurs, f n'est pas une homothétie donc f a plusieurs valeurs propres. Ainsi, $r \geqslant 2$. On a donc $\dim(E_1) + \cdots + \dim(E_r) = n+1$, avec $r \geqslant 2$ et $\dim(E_k) \geqslant 1$, ce qui impose $\dim(E_k) \leqslant n$.
Pour tout élément g de A, E_k est stable par g, car f et g commutent. L'endomorphisme g_k de E_k induit par g est diagonalisable, car g l'est. Enfin, pour tous g et $h \in A$, $g_k \circ h_k = h_k \circ g_k$ car $g \circ h = h \circ g$.
Ainsi, par hypothèse de récurrence (H_p avec $p = \dim(E_k) \leqslant n$), il existe une base $\mathcal{B}_k$ de E_k telle que, pour tout $g \in A$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_k}(g_k)$ est diagonale ; autrement dit, $\mathcal{B}_k$ est une base de E_k dont tous les éléments sont vecteurs propres de tous les élements de A.
Comme $E = \bigoplus_{k=1}^{r} E_k$ la famille $\mathcal{B}$ obtenue en concaténant $\mathcal{B}_1,\dots,\mathcal{B}_r$ est une base de E.
Enfin, pour tout $k \in \{1,\dots,r\}$, les vecteurs de $\mathcal{B}_k$ sont vecteurs propres de tous les éléments de A ; ainsi, les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont vecteurs propres de tous les éléments de A, ce qui montre que la matrice de n'importe quel élément de A dans $\mathcal{B}$ est diagonale.

Exercice 2.10 : Réduction des matrices de trace nulle

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie $n \geqslant 1$ et f un endomorphisme de E. On suppose que, pour tout $x \in E$, $f(x) \in \mathbb{K}x$. Démontrer que f est une homothétie, i.e. qu'il existe un scalaire λ tel que $f = \lambda\,\mathrm{Id}$.

2. Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle de trace nulle. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que la première colonne de $P^{-1}MP$ soit nulle, sauf le deuxième coefficient qui vaut 1.

3. Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. On pourra raisonner par récurrence sur n.

1. Ce résultat n'a a priori rien d'évident. L'hypothèse est que, pour tout élément x de E, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x\, x$. La conclusion est qu'il existe un scalaire λ tel que, pour tout élément x de E, $f(x) = \lambda x$. Ces deux énoncés diffèrent par l'ordre des quantificateurs : dans le premier cas, le scalaire dépend de x, alors qu'il n'en dépend pas dans le second ! Autrement dit, il s'agit de montrer que les scalaires λ_x sont en fait tous égaux.

Tous les éléments non nuls de E sont vecteurs propres de f ; en particulier, toute base de E est une base de vecteurs propres de f (et donc f est diagonalisable).
Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Il existe des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ tels que, pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$, $f(e_k)=\lambda_k\,e_k$. Il suffit de montrer que $\lambda_1=\cdots=\lambda_n$.
Si $n=1$, il n'y a rien à faire.
Sinon, pour k et l distincts : $f(e_k+e_l)=\lambda_k\,e_k+\lambda_l\,e_l$. Mais il existe aussi un scalaire μ tel que $f(e_k+e_l)=\mu\,(e_k+e_l)$ ($\mu=\lambda_{e_k+e_l}$ avec les notations de l'énoncé). Ainsi :

$$\lambda_k\,e_k+\lambda_l\,e_l=\mu\,(e_k+e_l).$$

Comme $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E on a

$$\lambda_k=\mu=\lambda_l.$$

Ainsi, $\lambda_1=\cdots=\lambda_n$.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. Supposons que P existe et soit $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{K}^n$ telle que P est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$: alors $P^{-1}MP$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ et le fait que la première colonne de cette matrice soit $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ signifie que l'image par f du premier vecteur de $\mathcal{B}$ est le deuxième vecteur de $\mathcal{B}$. Ainsi, il s'agit de démontrer l'existence d'une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E telle que $f(e_1)=e_2$.
Il suffit pour cela de disposer d'un vecteur x tel que $(x,f(x))$ est libre : en complétant n'importe comment cette famille en une base de E nous aurons une base qui convient.

Nous devons envisager le cas où toutes les familles $(x,f(x))$ sont liées puisqu'alors l'argument précédent ne tient pas. C'est précisément ici qu'intervient le résultat de la première question : il faut distinguer deux cas selon que f est une homothétie ou non.

• Si l'endomorphisme canoniquement associé f est une homothétie : M est de la forme $\lambda\,I_n$ et sa trace est $\lambda\,n$. Ainsi, $\lambda=0$ et donc $M=0$, ce qui est exclu. Ce cas est donc impossible.

• Si f n'est pas une homothétie : il existe $x \in E$ tel que $f(x) \notin \mathbb{K}x$. Si $ax + bf(x) = 0$ alors $b = 0$ (car sinon $f(x) = -(a/b)x \in \mathbb{K}x$) d'où $ax = 0$. $x \neq 0$ (car sinon $f(x) = 0 \in \mathbb{K}x = \{0\}$) donc $a = 0$. Ainsi, $(x, f(x))$ est libre.
D'après le théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $e_1 = x$ et $e_2 = f(x)$.

Alors la première colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ car $f(e_1) = e_2$.

En notant P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, la matrice précédente n'est autre que $P^{-1}MP$, qui possède donc la propriété désirée.

3. Conformément à l'indication, commençons une démonstration par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ posons H_n : « Toute matrice de $M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls ».

• H_1 est clairement vraie puiqu'une matrice 1×1 de trace nulle est nulle.

• Hérédité : Soit $M \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ de trace nulle.

Si $M = 0$, M est semblable à elle-même dont les coefficients diagonaux sont nuls.
Si $M \neq 0$ il existe, d'après la deuxième question, une matrice $P \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$ telle que

$$P^{-1}MP = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & N \\ 0 & \end{array}\right)$$

avec $L \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ et $N \in M_n(\mathbb{K})$.

Nous n'avons à ce stade fait que reprendre les résultats précédents.

Il reste à voir comment utiliser l'hypothèse de récurrence : où y a-t-il une matrice d'ordre strictement inférieur à $n+1$ et de trace nulle ? Clairement, la matrice N convient. Nous allons utiliser l'hypothèse de récurrence pour réduire N et des produits matriciels par blocs permettront de réduire M comme demandé.

On remarque que $\mathrm{tr}(N) = \mathrm{tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{tr}(M) = 0$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, il existe une matrice $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que tous les coefficients diagonaux de $Q^{-1}NQ$ sont nuls.

Soit $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in M_{n+1}(K)$. R est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.

Par ailleurs,

$$(PR)^{-1}M(PR) = R^{-1} \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 1 & \\ 0 & \\ \vdots & N \\ 0 & \end{array}\right) R = \left(\begin{array}{c|c} 0 & ? \\ \hline ? & Q^{-1}NQ \end{array}\right).$$

Ainsi, $(PR)^{-1}M(PR)$ est une matrice semblable à M dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. La propriété est donc démontrée par récurrence.

Dans la dernière égalité, nous n'avons pas pris la peine d'expliciter tous les blocs de la matrice : en effet, seuls les blocs diagonaux nous intéressaient ici.

Exercice 2.11 : Formes linéaires et base antéduale (PC-PSI)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi_1,\ldots,\varphi_p$ des formes linéaires sur E. On considère l'application $T : E \to \mathbb{K}^p$ définie par $T(x) = (\varphi_1(x),\ldots,\varphi_p(x))$.

1. Montrer que T est linéaire.

2. On suppose que T n'est pas surjective. Montrer que $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$ est liée. On pourra pour cela montrer qu'il existe un hyperplan de $\mathbb{K}^p$ contenant $\mathrm{Im}(T)$.

3. On suppose que T est surjective. Montrer que $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$ est libre.

4. Montrer que T est bijective si, et seulement si, $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$ est une base de E^*.

5. Montrer que, si $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ est une base de E^*, il existe une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de E telle que

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

($(e_1,\ldots,e_n)$ est appelée *base antéduale* de $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$)

1. La vérification de la linéarité est souvent une question de routine.

Soient $(x,y) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. On a successivement :

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= (\varphi_1(\lambda x + \mu y),\ldots,\varphi_p(\lambda x + \mu y)) \\ &= (\lambda \varphi_1(x) + \mu \varphi_1(y),\ldots,\lambda \varphi_p(x) + \mu \varphi_p(y)) \end{aligned}$$

car les φ_k sont linéaires. On a alors :

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= \lambda (\varphi_1(x),\ldots,\varphi_p(x)) + \mu (\varphi_1(x),\ldots,\varphi_p(x)) \\ &= \lambda T(x) + \mu T(y). \end{aligned}$$

Ainsi, T est linéaire.

2. Si T n'est pas surjective son image est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension strictement inférieure à p. Pour construire un hyperplan, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p-1$, qui la contienne, on peut utiliser le théorème de la base incomplète : en complétant une base de $\mathrm{Im}(T)$ en une base de E, il suffit d'enlever le dernier vecteur de la base pour obtenir une famille qui engendre un sous-espace vectoriel de dimension $p-1$. Il reste bien sûr, pour être rigoureux, à distinguer le cas $T=0$ car alors $\mathrm{Im}(T)=\{0\}$ n'a pas de base...

Supposons que T n'est pas surjective.

• Si $T=0$ alors $\mathrm{Im}(T)=\{0\}$ et n'importe quel hyperplan de $\mathbb{K}^p$ contient $\mathrm{Im}(T)$.

• Si $T\neq 0$, $\mathrm{Im}(T)\neq\{0\}$. Soit $r=\dim(\mathrm{Im}(T))$ et $(u_1,\ldots,u_r)$ une base de $\mathrm{Im}(T)$.
$(u_1,\ldots,u_r)$ est en particulier une famille libre de $\mathbb{K}^p$. Comme $r<p$ ce n'est pas une base de $\mathbb{K}^p$ mais elle peut être complétée en une base de $\mathbb{K}^p$: il existe des vecteurs $u_{r+1},\ldots,u_p$ de $\mathbb{K}^p$ tels que $(u_1,\ldots,u_p)$ est une base de $\mathbb{K}^p$.

On ne peut dire simplement « $(u_1,\ldots,u_r)$ est une famille libre de $\mathbb{K}^p$ donc il existe des vecteurs $u_{r+1},\ldots,u_p$ de $\mathbb{K}^p$ tels que $(u_1,\ldots,u_p)$ est une base de $\mathbb{K}^p$ ». En effet, si $r=p$, de tels vecteurs n'existent pas car $(u_1,\ldots,u_r)$ serait déjà une base de $\mathbb{K}^p$. Il y a donc encore une fois un cas particulier à distinguer.

Soit $H=\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_{p-1})$. La famille $(u_1,\ldots,u_{p-1})$ engendre H par définition et est libre car c'est une sous-famille d'une base de $\mathbb{K}^p$. Ainsi, $(u_1,\ldots,u_{p-1})$ est une base de H qui est donc de dimension $p-1$: H est un hyperplan de $\mathbb{K}^p$.
Par ailleurs, comme T n'est pas surjective, $r<p$; ainsi, $u_1,\ldots,u_r$ sont des éléments de H et on a donc $\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_r)\subset H$, soit $\mathrm{Im}(T)\subset H$.

Dans ce dernier argument, nous avons bien utilisé le fait que $r<p$: si r et p était égaux, le vecteur u_p serait élément de $\mathrm{Im}(T)$ mais pas de H. L'image de T ne serait alors pas contenue dans H.

Nous pouvons maintenant introduire une équation de l'hyperplan H.

H étant un hyperplan de $\mathbb{K}^p$ il existe des scalaires $a_1,\ldots,a_p$, non tous nuls, tels que

$$H=\{(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{K}^p : a_1\,x_1+\cdots+a_p\,x_p=0\}.$$

En particulier, comme $\mathrm{Im}(T)\subset H$:

$$\forall x\in E, a_1\,\varphi_1(x)+\cdots+a_p\,\varphi_p(x)=0$$

soit

$$a_1\,\varphi_1 + \cdots + a_p\,\varphi_p = 0$$

donc, comme les scalaires a_k ne sont pas tous nuls, $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$ est liée.

3. Pour montrer que la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$ est libre il suffit d'introduire une combinaison linéaire nulle et de montrer que tous les coefficients sont nuls.
Partant de la relation $a_1\,\varphi_1 + \cdots + a_p\,\varphi_p = 0$ on voit que, pour en tirer $a_1 = 0$, il suffit de disposer d'un vecteur $x \in E$ tel que $\varphi_1(x) = 1$ mais $\varphi_k(x) = 0$ pour $k \geqslant 2$. Un tel vecteur x doit donc vérifier $T(x) = (1,0,\ldots,0)$. L'hypothèse de surjectivité de T nous assure l'existence de ce vecteur. Il suffit de faire de même pour chacun des coefficients a_k.

Supposons T surjective et considérons une combinaison linéaire nulle :

$$a_1\,\varphi_1 + \cdots + a_p\,\varphi_p = 0 \quad \text{avec} \quad (a_1,\ldots,a_p) \in \mathbb{K}^p.$$

Soit $(e_1,\ldots,e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. T étant surjective, il existe des élements $x_1,\ldots,x_p$ de E tels que, pour tout k, $T(x_k) = e_k$.
En particulier, pour tout $k \in \{1,\ldots,p\}$: $a_1\,\varphi_1(x_k) + \cdots + a_p\,\varphi_p(x_k) = 0$.
Comme $\varphi_k(x_k) = 1$ et $\varphi_k(x_l) = 0$ si $l \neq k$ il vient donc, pour tout k, $a_k = 0$.
Ainsi, $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$ est libre.

4. Cette question est à moitié traitée : nous avons précédemment étudié la surjectivité de T et ici nous devons étudier sa bijectivité. Par ailleurs, nous avons étudié la liberté de la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$ et il est ici question de savoir quand elle est une base. Il faut donc, a priori, étudier l'injectivité de T et le caractère générateur de $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$. Cependant, en dimension finie, on dispose de la notion de dimension qui permet de simplifier ce genre de démonstration. En effet, une famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie F en est une base si, et seulement si, son cardinal est $\dim(F)$. De manière analogue, une application linéaire surjective $T : F \to G$ (avec F et G de dimension finie) est bijective si, et seulement si, $\dim(F) = \dim(G)$.

Nous allons donc pouvoir traiter cette question uniquement par des considérations de dimension, i.e. presque sans aucun calcul.

Supposons que T est bijective. Alors T est en particulier surjective donc, d'après ce qui précède, $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$ est libre.
Par ailleurs, T étant un isomorphisme, $\dim(E) = \dim(\mathbb{K}^p)$, i.e. $p = n$.
Enfin, $\dim(E^*) = \dim(E) = n$. Ainsi, $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$ est une famille libre de E^* ayant $n = \dim(E^*)$ vecteurs : c'est donc une base de E^*.
Réciproquement, supposons que $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$ est une base de E^*. Alors elle est en particulier libre donc T est surjective.

Enfin, $(\varphi_1,\ldots,\varphi_p)$ est de cardinal $\dim(E^*) = \dim(E) = n$ donc $p = n$. T est donc une application linéaire surjective de E dans $\mathbb{K}^p$ et $\dim(E) = \dim(\mathbb{K}^p)$ donc T est en fait un isomorphisme.

5. On peut commencer par utiliser le résultat précédent : T est un isomorphisme.

Ici, $p = n$ et, d'après la question précédente, T est un isomorphisme car $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

Nous avons donc une base de E naturelle : l'image de la base canonique de K^n par T^{-1} qui est un isomorphisme. En effet, rappelons que l'image d'une base par un isomorphisme est une base. Nous vérifierons ensuite que cette base possède la propriété souhaitée.

Notons $(u_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par définition, $u_k = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ avec 1 en position k.
T étant bijective il existe, pour chaque entier $k \in \{1,\ldots,n\}$, un unique vecteur $e_k \in E$ tel que $T(e_k) = u_k$.
Autrement dit, la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ de E est l'image de la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ de $\mathbb{K}^n$ par T^{-1}. Or T^{-1} est un isomorphisme (car T l'est), $(u_1,\ldots,u_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et l'image d'une base par un isomorphisme est une base donc $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E.

Il reste à vérifier la propriété demandée sur les $\varphi_i(e_j)$.

Par définition de T on a, pour $j \in \{1,\ldots,n\}$ on a

$$T(e_j) = (\varphi_1(e_j),\ldots,\varphi_n(e_j)).$$

Par ailleurs, par définition de la famille $(e_1,\ldots,e_n)$, on a $T(e_j) = u_j$. Or les coordonnées de u_j sont toutes nulles sauf la j-ème qui vaut 1. Ainsi :

$$\varphi_i(e_j) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad 1 \quad \text{si} \quad i = j$$

ce qui enfin peut s'écrire, à l'aide du symbole de Kronecker :

$$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2, \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Exercice 2.12 : Formes linéaires et hyperplans (PC-PSI)

Soit E un espace vectoriel et $\varphi_1,\ldots,\varphi_r$ des formes linéaires sur E. Soit φ une forme linéaire sur E. On souhaite démontrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$;

ii) φ est combinaison linéaire des φ_k.

1. Démontrer $ii) \Rightarrow i)$.

2. Démontrer $i) \Rightarrow ii)$ dans le cas où la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$ est libre. On pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent sur la base antéduale et raisonner par contraposition.

3. Démontrer $i) \Rightarrow ii)$ dans le cas général en se ramenant au cas traité précédemment.

1. Cette implication est plus simple que la réciproque pour deux raisons classiques. Tout d'abord, pour montrer une inclusion $A \subset B$, le raisonnement est souvent du type : soit « $x \in A$, ..., donc $x \in B$ ». Nous avons un point de départ qui consiste à partir d'un élément quelconque de A et nous devons vérifier qu'il est bien élément de B.
Ensuite, l'hypothèse nous permet d'affirmer l'existence de scalaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ tels que $\varphi = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, \varphi_k$. Nous pouvons les introduire dès le début du raisonnement et nous en servir pour vérifier l'inclusion demandée.
Pour la réciproque, nous devons montrer l'existence des scalaires λ_k, tâche a priori plus difficile. D'une manière générale, il est toujours plus ardu de démontrer l'existence d'un objet (ce que demande $i) \Rightarrow ii)$) que de vérifier une propriété (ce que demande $ii) \Rightarrow i)$).

Supposons $ii)$ et considérons des scalaires $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ tels que $\varphi = \lambda_1\, \varphi_1 + \cdots + \lambda_r\, \varphi_r$.
Soit $x \in \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$. Alors $\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_r(x) = 0$ donc

$$\varphi(x) = \lambda_1\, \varphi_1(x) + \cdots + \lambda_r\, \varphi_r(x) = 0$$

soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Ainsi, $\bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$.

2. Pour raisonner par contraposition nous allons supposer que φ n'est pas combinaison linéaire des φ_k et en déduire que $\bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$, i.e. qu'il existe un vecteur x qui appartient à $\bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ mais pas à $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Autrement dit, $\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_r(x) = 0$ mais $\varphi(x) \neq 0$.
Pour utiliser la notion de base antéduale il nous faut une base de E^*. C'est « presque » le cas dans les hypothèses puisqu'on a une famille libre : nous pouvons donc utiliser le théorème de la base incomplète pour la compléter en une base de E^*.

Cependant il faut quand même penser à utiliser l'hypothèse sur φ. Comme $(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$ est libre et que φ n'est pas combinaison linéaire de cette famille, $(\varphi_1,\ldots,\varphi_r,\varphi)$ est également libre : nous allons plutôt compléter cette famille-ci en une base de E^* car elle a l'avantage de faire intervenir toutes les formes linéaires de l'énoncé.

Supposons que φ n'est pas combinaison linéaire de la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$. Comme cette famille est libre, la famille obtenue en lui ajoutant un vecteur qui n'en est pas combinaison linéaire l'est aussi : ainsi, $(\varphi_1,\ldots,\varphi_r,\varphi)$ est libre. En posant $\varphi_{r+1} = \varphi$, on peut compléter cette famille en une base $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ de E^*.

Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ sa base antéduale, i.e. la base de E telle que $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$.

Alors, en particulier, $e_{r+1} \in \displaystyle\bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ mais $e_{r+1} \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$, ce qui montre que $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$ n'est pas inclus dans $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Par contraposition : si $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ alors φ est combinaison linéaire de la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$.

3. On peut se ramener au cas précédent en considérant une sous-famille libre de $(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$.

Plus précisément, si la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$ n'est pas nulle, elle engendre un sous-espace vectoriel de E^* qui n'est pas réduit à 0 et on peut donc en extraire une base de ce sous-espace. En revanche, si tous les φ_k sont nuls, l'espace engendré est réduit à 0 mais ce cas particulier peut être étudié simplement à part.

• Si $\mathrm{Vect}(\varphi_1,\ldots,\varphi_r) = \{0\}$ alors $\varphi_1 = \cdots = \varphi_r = 0$. En particulier, $\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \cdots = \mathrm{Ker}(\varphi_r) = E$ et $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k) = E$.

On a donc

$$\bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \subset \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow E \subset \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) = E \Leftrightarrow \varphi = 0.$$

Ainsi, si $i)$ est vérifiée, on a $\varphi = 0$ qui est bien combinaison linéaire de la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$.

• Supposons $\mathrm{Vect}(\varphi_1,\ldots,\varphi_r) \neq \{0\}$.

Soit $(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_s})$ une base de $\mathrm{Vect}(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$ extraite de la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_r)$.

Alors chaque φ_k (pour $1 \leqslant k \leqslant r$) est combinaison linéaire de la famille $(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_s})$.

Nous devons montrer que φ est combinaison linéaire de la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$. Pour cela, il suffit de montrer qu'elle est combinaison linéaire de la sous-famille $(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_s})$. Comme cette dernière famille est libre, nous pourrons utiliser le résultat précédent. Cependant, pour cela, nous avons besoin de l'inclusion

$$\mathrm{Ker}(\varphi_{i_1}) \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_{i_s}) \subset \mathrm{Ker}(\varphi).$$

Il faut donc comparer $\mathrm{Ker}(\varphi_{i_1}) \cap \cdots \cap \mathrm{Ker}(\varphi_{i_s})$ et $\bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$, car c'est sur cette dernière inclusion que porte l'hypothèse.

Une inclusion est claire : si on ajoute des ensembles dans une intersection, on ne peut que réduire sa taille. Autrement dit, $\bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \subset \bigcap_{k=1}^{s} \mathrm{Ker}(\varphi_{i_k})$. Cependant, cette inclusion est inexploitable car l'hypothèse est $\bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$: il faut donc démontrer l'inclusion inverse.

Montrons que

$$\bigcap_{k=1}^{s} \mathrm{Ker}(\varphi_{i_k}) \subset \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k).$$

Considérons un vecteur $x \in \bigcap_{k=1}^{s} \mathrm{Ker}(\varphi_{i_k})$. Pour $k \in \{1, \ldots, r\}$, φ_k est combinaison linéaire des φ_{i_l}. Or $\varphi_{i_l}(x) = 0$ pour $1 \leqslant l \leqslant s$. On en déduit $\varphi_k(x) = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$, i.e. $x \in \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k)$.

Nous pouvons désormais conclure comme annoncé.

Nous avons donc

$$\bigcap_{k=1}^{s} \mathrm{Ker}(\varphi_{i_k}) \subset \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ker}(\varphi_k) \subset \mathrm{Ker}(\varphi).$$

La famille $(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_s})$ étant libre, la question précédente permet d'affirmer que φ est combinaison linéaire de $(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_s})$. A fortiori, φ est combinaison linéaire de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$.

Exercice 2.13 : Théorème de Cayley-Hamilton (PSI)

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Cayley-Hamilton. Veillez donc à ne pas l'utiliser pour répondre aux questions !

1. Lemme : soient un entier $n \geqslant 2$ et $(a_0,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice

$$A(a_0,\dots,a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et f un endomorphisme de E dont on notera P le polynôme caractéristique. On fixe un élément non nul x de E.

2.a. Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel p tel que la famille $(x, f(x),\dots, f^p(x))$ est liée ; vérifier que $p \neq 0$.

2.b. Soit $F = \text{Vect}(x, f(x),\dots, f^{p-1}(x))$. Démontrer que F est stable par f et que la famille $\mathcal{B} = (x, f(x),\dots, f^{p-1}(x))$ en est une base.

2.c. On note g l'endomorphisme de F induit par f. Quelle est la matrice de g dans $\mathcal{B}$?

3. Soit Q le polynôme caractéristique de g. Démontrer que $Q(g)(x) = 0$.

4. Montrer que Q divise P puis que $P(f)(x) = 0$. Conclure.

1. Commençons par traiter les petites valeurs de n pour voir si un schéma simple se dégage, ce qui permettrait une démonstration par récurrence.

• Si $n = 2$ soient :

$$A(a_0,a_1) = \begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}$$

et P son polynôme caractéristique. Alors, pour tout scalaire x :

$$P(x) = \det \begin{pmatrix} x & -a_0 \\ -1 & x - a_1 \end{pmatrix} = x(x - a_1) - a_0 = x^2 - a_1\, x - a_0.$$

Ainsi, $P = X^2 - a_1\, X - a_0$.

• Si $n = 3$ soient :

$$A(a_0,a_1,a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}$$

et P son polynôme caractéristique. Alors, pour tout scalaire x :

$$P(x) = \det \begin{pmatrix} x & 0 & -a_0 \\ -1 & x & -a_1 \\ 0 & -1 & x - a_2 \end{pmatrix}.$$

En développant selon la première colonne il vient

$$P(x) = x \det \begin{pmatrix} x & -a_1 \\ -1 & x - a_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ -1 & x - a_2 \end{pmatrix}$$

soit

$$P(x) = x(x(x - a_2) - a_1) - a_0$$

et enfin $P(x) = x^3 - a_2\,x^2 - a_1\,x - a_0$. Ainsi, $P = X^3 - a_2\,X^2 - a_1\,X - a_0$.

Dans le cas général de l'énoncé, il est raisonnable de supposer que le polynôme caractéristique de $A(a_0,\ldots,a_{n-1})$ est $X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1X - a_0$.

Pour tout entier $n \geqslant 2$ posons H_n : « Pour tout $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, le polynôme caractéristique de $A(a_0,\ldots,a_{n-1})$ est $X^n - a_{n-1}\,X^{n-1} - \cdots - a_1\,X - a_0$ »

- H_2 est vraie.
- Soit un entier $n \geqslant 2$ tel que H_n est vraie. Considérons $(a_0,\ldots,a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et soit P le polynôme caractéristique de $A(a_0,\ldots,a_n)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$P(x) = \det(x\,I_{n+1} - A(a_0,\ldots,a_n)) = \det \begin{pmatrix} x & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ -1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -1 & x - a_n \end{pmatrix}.$$

En supprimant la première ligne et la première colonne de $x\,I_{n+1} - A(a_0,\ldots,a_n)$ on obtient la matrice $x I_n - A(a_1,\ldots,a_n)$.

En supprimant la première ligne et la dernière colonne de $x\,I_{n+1} - A(a_0,\ldots,a_n)$ on obtient une matrice triangulaire supérieure.

Ainsi, en développant le déterminant donnant $P(x)$ par rapport à la première ligne, on obtiendra deux déterminants d'ordre n aisés à calculer : le premier est donné par l'hypothèse de récurrence et le second est un déterminant triangulaire et donc simplement le produit des termes diagonaux.

Attention aux signes : d'une manière générale, quand on développe un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne, le déterminant extrait obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j est affecté du coefficient $(-1)^{i+j}$; ici, dans le cas de la première ligne et de la dernière colonne, $i = 1$ et $j = n+1$, d'où la présence du coefficient $(-1)^{n+2}$.

En développant le déterminant selon la première ligne on obtient

$$P(x) = x\det(xI_n - A(a_1,\ldots,a_n)) + (-1)^{n+2}(-a_0)\det(T)$$

où T est la matrice obtenue en supprimant la première ligne et la dernière colonne de $x\,I_{n+1} - A(a_0,\ldots,a_{n-1})$.

- D'une part, $\det(x\,I_n - A(a_1,\ldots,a_n)) = x^n - a_n\,x^{n-1} - \cdots - a_2\,x - a_1$ par hypothèse de récurrence.
- D'autre part, T est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous égaux à -1, donc $\det(T) = (-1)^n$.

Ainsi, $P(x) = x(x^n - a_n\,x^{n-1} - \cdots - a_2\,x - a_1) - a_0 = x^{n+1} - a_n\,x^n - \cdots - a_1\,x - a_0$. Cette relation étant vraie pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P = X^{n+1} - a_n\,X^n - \cdots - a_1\,X - a_0$. Autrement dit, H_{n+1} est vraie.

2.a. Pour démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel possédant une propriété, il suffit de démontrer que l'ensemble des entiers naturels possédant cette propriété n'est pas vide : il possède alors un plus petit élément car toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum.

Dans le cas qui nous intéresse, il s'agit donc de démontrer qu'il existe au moins un entier naturel k tel que la famille $(x, f(x),\ldots, f^k(x))$ est liée. Comme E est de dimension finie n, toute famille de cardinal $n+1$ est liée, il suffit donc de prendre $k = n$.

Soit X l'ensemble des entiers naturels k tels que la famille $(x, f(x),\ldots, f^k(x))$ est liée. Comme E est de dimension finie n, toute famille de cardinal $n+1$ est liée, en particulier $(x, f(x),\ldots, f^n(x))$ est liée. Ainsi, $n \in X$, donc $X \neq \emptyset$.
X est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ donc possède un plus petit élément p. Ainsi, p est le plus petit entier naturel tel que $(x, f(x),\ldots, f^p(x))$ est liée.
Supposons $p = 0$; la famille est alors réduite à (x). Cependant, $x \neq 0$, donc la famille (x) est libre ; ainsi, $p \neq 0$.

Notons dès à présent que la définition de p entraîne que les familles $(x, f(x),\ldots, f^k(x))$, avec $k < p$, sont libres (et en particulier si $k = p-1$, ce qui servira par la suite).

2.b. La définition de la famille $\mathcal{B}$ est bien cohérente car $p \in \mathbb{N}^*$: si p était nul, $f^{p-1}(x)$ n'aurait pas de sens en général ! C'est pour cela qu'il était demandé de vérifier $p \neq 0$.

Comme F est, par définition, engendré par les vecteurs $f^k(x)$ avec $0 \leqslant k \leqslant p-1$, il suffit de démontrer que $f(f^k(x)) \in F$ pour tout ces entiers k.

Pour $0 \leqslant k \leqslant p-2$, on a $f(f^k(x)) = f^{k+1}(x) \in F$ car alors $k+1 \leqslant p-1$.

Il reste à montrer que $f(f^{p-1}(x))$, i.e. $f^p(x)$, est élément de F, i.e. est combinaison linéaire des $f^k(x)$ avec $0 \leqslant k \leqslant p-1$.

Nous avons une propriété assez voisine de celle-ci : la famille $(x, f(x), \ldots, f^p(x))$ étant liée, il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de cette famille. Il ne reste plus qu'à en déduire l'expression de $f^p(x)$ comme combinaison linéaire des autres $f^k(x)$.

Par définition de p il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, non tous nuls, tels que $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k f^k(x) = 0$. Ainsi :

$$\lambda_p f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} -\lambda_k f^k(x).$$

Il reste à diviser par λ_p... Pour peu que ce scalaire ne soit pas nul !

Supposons $\lambda_p = 0$; alors $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x) = 0$.

La famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ étant libre (par définition de p) on a donc $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{p-1} = 0$.

Ainsi, $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, p\}$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite précédemment sur ces scalaires.

Ainsi, $\lambda_p \neq 0$. On a donc :

$$f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} -\frac{\lambda_k}{\lambda_p} f^k(x) \in F.$$

En conséquence, $f(f^{p-1}(x)) \in F$: F est donc stable par f.

Enfin, par définition, $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F. De plus, nous avons vu que cette famille est libre car $p-1 < p$. C'est donc une base de F.

2.c. Pour plus de clarté notons, pour $0 \leqslant k \leqslant p-1$, $e_k = f^k(x)$.

g étant induit par f on a, par définition, $g(y) = f(y)$ pour tout élément y de F. En particulier, $g(e_k) = f(f^k(x)) = f^{k+1}(x)$. Si $k+1 \leqslant p-1$, ce dernier vecteur n'est autre que e_{k+1}. Le cas de $g(e_{p-1})$ devra être traité séparément.

Si $0 \leqslant k \leqslant p-2$, $k+1 \leqslant p-1$ et on a donc $g(e_k) = e_{k+1}$.
Pour $k = p-1$, on a $g(e_{p-1}) = f^p(x)$. Nous avons vu précédemment que $f^p(x)$ est combinaison linéaire de $\mathcal{B}$; il existe donc des scalaires $a_0,\dots,a_{p-1}$ tels que $f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k e_k$.
La matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix} = A(a_0,\dots,a_{p-1}).$$

3. Vu la forme de la matrice de g dans $\mathcal{B}$, le lemme de la première question s'applique. Le résultat en découle immédiatement.

D'après le lemme, $Q = X^p - a_{p-1} X^{p-1} - \dots - a_1 X - a_0$.
On a donc $Q(g) = g^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k g^k$ et enfin :

$$Q(g)(x) = g^p(x) - \sum_{k=0}^{p-1} a_k g^k(x).$$

Par définition des scalaires a_k on a :

$$f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x)$$

soit, vu que $g(y) = f(y)$ pour tout $y \in F$:

$$g^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k g^k(x)$$

ce qui donne enfin

$$Q(g)(x) = 0.$$

Nous pouvons remarquer que l'on a en fait $Q(g) = 0$. En effet, comme $Q(g)$ est un polynôme en g, $Q(g)$ et g commutent. On a donc

$$Q(g)(g^k(x)) = g^k(Q(g)(x)) = g^k(0) = 0$$

pour tout entier naturel k. Par ailleurs, g étant induit par f, $g^k(x) = f^k(x)$. Ainsi, $Q(g)$ est nul sur tous les vecteurs de $\mathcal{B}$ et donc sur F. Nous avons donc démontré le théorème de Cayley-Hamilton pour g, i.e. dans le cas particulier des endomorphismes dont la matrice dans une certaine base est de la forme du lemme.

4. Le calcul du polynôme caractéristique peut se faire à partir de la matrice de l'endomorphisme dans n'importe quelle base. Pour trouver une relation entre P et Q, on peut donc d'abord chercher une relation entre les matrices de g et f dans des bases de F et E bien choisies.

Afin d'exploiter le fait que F est stable par f et que g est l'endomorphisme de F induit par f, on peut considérer la matrice de f dans une base de E obtenue en complétant une base de F. En effet, dans une telle base, la matrice de f est constitué de quatre blocs et le bloc en deuxième ligne et première colonne est nul. Ceci permet de calculer les déterminants, et donc les polynômes caractéristiques, simplement.

Comme toujours, quand on veut compléter une base d'un espace vectoriel de dimension finie, il faut traiter à part un cas particulier. En effet, si F est égal à E, $\mathcal{B}$ est elle-même une base de E et il n'y a rien à compléter : dans ce cas, on a simplement $g = f$ et donc $Q = P$. De façon analogue, avant d'introduire une base d'un espace vectoriel, on doit toujours vérifier qu'il n'est pas réduit à 0.

• Supposons $p = n$: alors $F = E$ et donc, comme $g(y) = f(y)$ pour tout $y \in F$, on a $g = f$ et enfin $Q = P$, donc Q divise P.

• Supposons $p < n$.

Complétons $\mathcal{B}$ en une base $\mathcal{C}$ de E. Alors la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \in M_p(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{n-p}(\mathbb{K})$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a donc :

$$\lambda I_n - \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_p - A & -B \\ 0 & \lambda I_{n-p} - C \end{pmatrix}$$

donc $P(\lambda) = Q(\lambda)\det(\lambda I_{n-p} - C) = Q(\lambda)\, R(\lambda)$, avec R le polynôme caractéristique de C.

Ceci étant vrai pour tout scalaire λ on a l'égalité

$$P = QR$$

donc Q divise P.

Le produit des polynômes se traduit par la composition des endomorphismes. Ceci permet de faire le lien entre $P(f)$ et $Q(f)$, et donc $Q(g)$.

La relation $P = QR$ donne $P(f) = Q(f) \circ R(f) = R(f) \circ Q(f)$.
Ainsi : $P(f)(x) = Q(f)(R(f)(x)) = R(f)(Q(f)(x))$.
Comme g est induit par f on a, pour tout élément y de F, $Q(g)(y) = Q(f)(y)$; en particulier, $Q(f)(x) = Q(g)(x) = 0$.
Il vient enfin :

$$P(f)(x) = R(f)(Q(f)(x)) = R(f)(0) = 0.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que $P(f) = 0$, i.e. que l'égalité ci-dessus est vérifiée pour tous les vecteurs x de E. Ceci est presque le cas : nous l'avons vérifié pour un vecteur non nul quelconque, il reste à voir que c'est encore vrai pour $x = 0$, ce qui est clair par linéarité.

Nous avons donc démontré que, pour tout élément non nul x de E, $P(f)(x) = 0$. Par ailleurs, $P(f)$ est linéaire, donc $P(f)(0) = 0$. Ainsi, $P(f)(x) = 0$ pour tout élément x de E. Ceci montre que $P(f) = 0$, i.e. que P, le polynôme caractéristique de f, est un polynôme annulateur de f : c'est le théorème de Cayley-Hamilton.

Algèbre bilinéaire

3

Exercice 3.1 : Égalités du parallélogramme et de la médiane (PC-PT)

Soit $(E, \langle . | . \rangle)$ un espace euclidien.

1. Démontrer que, pour tous vecteurs u et v :

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2) \quad \textit{(égalité du parallélogramme)}$$

et

$$\langle u|v\rangle = \frac{1}{4}(||u+v||^2 - ||u-v||^2) \quad \textit{(identité de polarisation).}$$

2. En déduire que, pour tous vecteurs u et v :

$$||u||^2 + ||v||^2 = 2\,||(u+v)/2||^2 + \frac{1}{2}\,||u-v||^2 \quad \textit{(égalité de la médiane).}$$

Le nom de ces égalités vient de leur interprétation géométrique.

• Si on considère un parallélogramme $ABCD$ et que l'on pose $u = \overrightarrow{AD}$ et $v = \overrightarrow{AB}$, on a $u + v = \overrightarrow{AC}$ et $u - v = \overrightarrow{BD}$ et l'égalité du parallélogramme peut s'écrire $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ (car $AB = CD$ et $AD = BC$). Autrement dit, dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

• De même, si on note I le milieu de $[BD]$, l'égalité de la médiane peut s'écrire $AB^2 + AD^2 = 2\,AI^2 + \frac{1}{2}\,BD^2$. Cette relation fait intervenir les trois côtés du triangle ABD mais aussi la médiane AI, d'où son nom.

Il ne faut pas oublier que les axiomes des produits scalaires viennent de la géométrie usuelle et qu'en conséquence bien des propriétés d'origine géométrique restent vraies dans les espaces euclidiens.

1. Il suffit de développer les carrés des normes.

D'une part :

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + 2\,\langle u|v\rangle.$$

D'autre part :

$$||u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2\,\langle u|v\rangle.$$

En additionant ces deux égalités il vient

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2).$$

De même, en les soustrayant, on obtient l'identité de polarisation.

2. Le calcul est immédiat en partant de l'identité du parallélogramme.

Nous avons :

$$||u+v||^2 = ||2\,(u+v)/2||^2 = 4\,||(u+v)/2||^2.$$

En remplaçant ceci dans l'égalité du parallélogramme et en divisant par 2, on obtient l'égalité de la médiane.

Exercice 3.2 : Exemple de produit scalaire (PC-PT)

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $(f,g) \in E^2$ on pose

$$\langle f|g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 (f(t)+f'(t))(g(t)+g'(t))\mathrm{d}t.$$

Montrer que ceci définit un produit scalaire sur E.

Ce genre de vérification est routinière. Notons cependant que :
– pour montrer la bilinéarité, on montre en général la linéarité par rapport à une variable puis la symétrie, ce qui fournit automatiquement la linéarité par rapport à l'autre variable ;
– la positivité est généralement facile à obtenir, c'est le caractère défini positif qui demande un soin particulier.

- L'application $(f,g) \mapsto \langle f|g\rangle$ est bien définie sur E^2 et à valeurs réelles.
- Il est clair que, pour tout $(f,g) \in E$, $\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle$. $\langle .|.\rangle$ est donc symétrique.
- Fixons $f \in E$. Considérons $(g,h) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On a successivement :

$$\begin{aligned}
\langle f|\lambda g+\mu h\rangle &= f(0)\,(\lambda g+\mu h)(0) \\
&\quad +\int_0^1 (f(t)+f'(t))((\lambda g+\mu h)(t) \\
&\qquad\qquad +(\lambda g+\mu h)'(t))\mathrm{d}t \\
&= \lambda f(0)\,g(0)+\mu f(0)\,h(0) \\
&\quad +\int_0^1 (f(t)+f'(t))(\lambda g(t)+\lambda g'(t)+\mu h(t) \\
&\qquad\qquad +\mu h'(t))\mathrm{d}t \\
&= \lambda f(0)\,g(0)+\mu f(0)\,h(0) \\
&\quad +\int_0^1 (f(t)+f'(t))(\lambda g(t)+\lambda g'(t))\mathrm{d}t \\
&\quad +\int_0^1 (f(t)+f'(t))(\mu h(t)+\mu h'(t))\mathrm{d}t \\
&= \lambda\langle f|g\rangle+\mu\langle f|h\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\langle .|.\rangle$ est linéaire par rapport à la deuxième variable. Comme elle est symétrique, elle est donc bilinéaire.

- Soit $f \in E$. Alors $\langle f|f\rangle = f(0)^2+\int_0^1 (f(t)+f'(t))^2\mathrm{d}t$. Comme $0 \leqslant 1$ et que la fonction intégrée est positive, il vient $\langle f|f\rangle \geqslant 0$. $\langle .|.\rangle$ est donc positive.
- Soit $f \in E$ telle que $\langle f|f\rangle = 0$. D'après ce qui précède,

$$f(0)^2+\int_0^1 (f(t)+f'(t))^2\mathrm{d}t = 0.$$

C'est ici qu'il faut employer les bons arguments pour en déduire $f = 0$. Comme souvent dans ce genre de situation, nous avons une somme de nombres positifs et une intégrale de fonction positive.

Pour déduire qu'une fonction positive est nulle du fait que son intégrale est nulle, il ne faut pas oublier de vérifier qu'elle est continue !

Une somme de réels positifs n'est nulle que s'ils sont tous nuls. On a donc :

$$f(0)^2 = \int_0^1 (f(t)+f'(t))^2\mathrm{d}t = 0.$$

Ceci montre que $f(0) = 0$.

De plus, $(f+f')^2$ est positive et continue, car f est de classe $\mathcal{C}^1$. On a donc $f+f' = 0$.

Nous devons revenir à f. Ceci est aisé car nous avons désormais une équation différentielle vérifiée par f ainsi qu'une condition initiale ($f(0) = 0$).

Comme $f + f' = 0$ il existe un réel λ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = \lambda e^{-x}$. Par ailleurs, $f(0) = 0$, d'où $\lambda = 0$. Ainsi, $f = 0$. Nous avons donc démontré que $\langle . | . \rangle$ est définie positive et est donc un produit scalaire sur E.

Exercice 3.3 : Noyaux, images et adjoint (PSI)

Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E. Démontrer les égalités suivantes :

1. $\mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Im}(f)^\perp$.

2. $\mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$.

3. $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

4. $\mathrm{Im}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$.

5. $\mathrm{Ker}(f \circ f^*) = \mathrm{Im}(f)^\perp$.

6. $\mathrm{Im}(f \circ f^*) = \mathrm{Im}(f)$.

Indication : démontrer « à la main » les première et troisième propriétés et en déduire les autres sans calcul.

1. Afin de passer de f^* à f, il suffit de faire apparaître des produits scalaires et d'utiliser la définition de l'adjoint : $\langle f^*(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle$.

Si $x \in \mathrm{Ker}(f^*)$, on a $f^*(x) = 0$. Ceci peut se traduire avec un produit scalaire en écrivant que $f^*(x)$ est orthogonal à tous les vecteurs de E.

Soit $x \in E$. On a les équivalences successives :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f^*) &\iff f^*(x) = 0 \\ &\iff \forall y \in E, \langle f^*(x) | y \rangle = 0 \\ &\iff \forall y \in E, \langle x | f(y) \rangle = 0 \\ &\iff \forall z \in \mathrm{Im}(f), \langle x | z \rangle = 0 \\ &\iff x \in \mathrm{Im}(f)^\perp. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Im}(f)^\perp$.

2. Comme suggéré par l'indication, nous allons déduire cette seconde égalité de la première.

L'idée est d'échanger les rôles de f et f^*. Pour cela, il suffit d'appliquer le résultat précédent à f^* : en effet, $f^{**} = f$, ce qui échangera effectivement les rôles des deux applications. Ceci sera encore valable pour passer de $f^* \circ f$ à $f \circ f^*$ dans les questions suivantes.

Le résultat précédent appliqué à f^* donne

$$\mathrm{Ker}(f^{**}) = \mathrm{Im}(f^*)^{\perp}$$

soit, vu que $f^{**} = f$:

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f^*)^{\perp}.$$

E étant de dimension finie, on a $F^{\perp\perp} = F$ pour tout sous-espace vectoriel F de E. En particulier, si $F^{\perp} = G$, alors $G^{\perp} = F$.

E étant de dimension finie, on en déduit :

$$\mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Ker}(f)^{\perp}.$$

3. L'une des inclusions est claire.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. $f(x) = 0$ donc $(f^* \circ f)(x) = f^*(f(x)) = f^*(0) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$.

Pour l'autre inclusion, il faut partir de $f^*(f(x)) = 0$ et en déduire $f(x) = 0$. Nous allons utiliser un produit scalaire pour « passer f^* de l'autre côté ».

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^* \circ f)$: $f^*(f(x)) = 0$ donc, a fortiori, $\langle f^*(f(x))|x\rangle = 0$. Ainsi, $\langle f(x)|f(x)\rangle = 0$, donc $f(x) = 0$, soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$.
En conclusion, $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$.

Cette propriété possède également une traduction matricielle. Si on note A la matrice de f dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice de f^* dans $\mathcal{B}$ est ${}^tA$ et l'inclusion $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ se traduit ainsi : si X est une matrice colonne telle que ${}^tAAX = 0$, alors $AX = 0$.
Cette propriété se démontre alors en calculant uniquement avec les matrices : comme ${}^tAAX = 0$, on a également ${}^tX{}^tAAX = 0$, soit ${}^t(AX)AX = 0$ et enfin $AX = 0$ (car l'application $(U,V) \mapsto {}^t UV$ est un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$).

4. Ici encore, contentons-nous de suivre l'indication. Nous allons ici remplacer f par $f^* \circ f$ dans la première question pour faire apparaître le noyau demandé.

Rappelons que, d'une manière générale, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. En particulier, avec $g = f^*$, il vient $(f^* \circ f)^* = f^* \circ f^{**} = f^* \circ f$.

En remplaçant f par $f^* \circ f$ dans le résultat de la première question on obtient

$$\mathrm{Ker}((f^* \circ f)^*) = \mathrm{Im}(f^* \circ f)^{\perp}$$

soit

$$\operatorname{Ker}(f^* \circ f) = \operatorname{Im}(f^* \circ f)^{\perp}.$$

Or

$$\operatorname{Ker}(f^* \circ f) = \operatorname{Ker}(f)$$

d'où enfin

$$\operatorname{Im}(f^* \circ f) = \operatorname{Ker}(f)^{\perp}.$$

Nous aurions également obtenu le résultat en remplaçant f par $f^* \circ f$ dans le résultat de la deuxième question.

5. Il s'agit ici de remplacer f par f^* dans le résultat de la troisième question.

Du résultat de la troisième question on tire, en l'appliquant à f^* :

$$\operatorname{Ker}(f \circ f^*) = \operatorname{Ker}(f^*) = \operatorname{Im}(f)^{\perp}.$$

6. Idem à partir de la quatrième question.

En appliquant le résultat de la quatrième question à f^* il vient

$$\operatorname{Im}(f \circ f^*) = \operatorname{Ker}(f^*)^{\perp} = \operatorname{Im}(f).$$

Exercice 3.4 : Exemple de matrice définie positive (PC-PSI)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R}) (n \geqslant 2)$ telle que $a_{ij} = 1$ si $i \neq j$ et $a_{ii} > 1$. Montrer que A est définie positive. Montrer que c'est encore vrai si l'un des coefficients diagonaux vaut 1.

Nous allons utiliser la définition d'une matrice définie positive ; en écrivant ${}^tXAX$ pour une matrice colonne quelconque X nous essaierons de mettre en évidence des sommes de carrés afin d'avoir la positivité.

Pour cela, on peut développer l'expression entière en fonction des coefficients de X et A puis factoriser (à l'aide notamment d'identités remarquables), ou bien essayer de calculer astucieusement le produit pour obtenir directement une forme factorisée.

Étant donné que la quantité ${}^tXAX$ serait immédiate à calculer si A était diagonale, on peut chercher à écrire $A = D + B$ avec D diagonale et B telle que ${}^tXBX$ est facile à calculer. Ceci peut se faire aisément vu la forme particulière de A.

Avant d'affirmer qu'une matrice est (définie) positive, pensez à vérifier qu'elle est bien symétrique... ou au moins pensez à le dire si c'est clair, comme ici !

Remarquons que A est bien symétrique.
Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. En écrivant $A = D + B$, où $D = \mathrm{diag}(a_{11} - 1, \dots, a_{nn} - 1)$ et B est la matrice dont tous les coefficients valent 1, il vient

$$^tXAX = {}^tXDX + {}^tXBX.$$

D'une part, $^tXDX = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} - 1)\, x_i^2$.
D'autre part, tous les coefficients de la matrice colonne BX sont égaux à $\sum_{i=1}^{n} x_i$, d'où $^tXBX = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$.
En conséquence,

$$^tXAX = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} - 1)\, x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

Comme $a_{ii} > 1$ pour tout i, cette quantité est bien positive, ce qui démontre $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Le développement intégral de ^tXAX donne l'expression

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i x_j.$$

On peut alors effectivement reconnaître une identité remarquable, à savoir

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i\, x_j$$

qui conduit au même résultat.

Il reste à traiter le cas d'égalité $^tXAX = 0$. La démarche est classique : nous avons montré $^tXAX \geqslant 0$ en affirmant qu'une somme de réels positifs est positive, il reste à utiliser le fait qu'une telle somme est nulle si, et seulement si, tous ses termes sont nuls.

Enfin, supposons $^tXAX = 0$. Comme une somme de nombres réels positifs n'est nulle que si tous les termes sont nuls il vient

$$(a_{11} - 1)\, x_1^2 = \cdots = (a_{nn} - 1)\, x_n^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 0.$$

Comme $a_{ii} - 1 > 0$ pour tout i, on en déduit $x_1 = \cdots = x_n = 0$, soit $X = 0$. Ainsi, $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Dans le cas où l'un des coefficients diagonaux est égal à 1, le raisonnement précédent montre que $x_j = 0$ pour $j \neq i_0$ (avec i_0 tel que $a_{i_0 i_0} = 1$). Cependant, on a aussi $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = 0$ et donc $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Si tous les x_i sont nuls pour $i \neq i_0$, on a donc également $x_{i_0} = 0$. Ainsi, A est encore dans ce cas définie positive.

Si plusieurs coefficients diagonaux sont égaux à 1, la matrice A a plusieurs colonnes égales et n'est donc pas inversible, a fortiori elle n'est pas définie positive.

Exercice 3.5 : Construction de matrices positives (PC-PSI)

Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = {}^tAA$. Montrer que B est symétrique positive. Montrer que B est définie positive si, et seulement si, A est inversible.

Il ne faut pas oublier de commencer par vérifier que B est bien symétrique... Ensuite, nous envisagerons les produits ${}^tXBX$, avec X matrice colonne, et vérifierons qu'ils sont bien positifs.

B est bien symétrique : en effet,

$${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t{}^tA = {}^tAA = B.$$

Considérons désormais une matrice colonne $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$${}^tXBX = {}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX \geqslant 0$$

car l'application $(U,V) \mapsto {}^tUV$ est un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Ceci montre que B est positive.

Pour démontrer l'équivalence, traitons séparément chaque implication. Le sens direct est facile.

Si B est définie positive, elle est inversible. Or $\det(B) = \det({}^tA)\det(A) = \det(A)^2$ donc $\det(A) \neq 0$ et A est inversible.

Pour montrer le sens réciproque, nous devons montrer que ${}^tXBX = 0$ entraîne $X = 0$.

Supposons A inversible. Si X est une matrice colonne telle que ${}^tXBX = 0$ alors ${}^t(AX)AX = 0$.
L'application $(U,V) \mapsto {}^tUV$ étant un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$, on en déduit $AX = 0$.
A étant inversible il vient enfin $X = 0$. Ceci montre que B est définie positive.

Exercice 3.6 : Endormorphisme normal (PSI)

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E.

1. Démontrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $f^* \circ f = f \circ f^*$

ii) $\forall x \in E, ||f(x)|| = ||f^*(x)||$

iii) $\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x)|f(y)\rangle = \langle f^*(x)|f^*(y)\rangle$

Un tel endomorphisme est dit *normal*.

(on pourra effectuer une démonstration cyclique : *i)* $\Rightarrow$ *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* $\Rightarrow$ *i)*)

2. On suppose que f est normal. Montrer que l'orthogonal de tout sous-espace vectoriel de E stable par f est également stable par f (indication : raisonner matriciellement).

1. Suivons l'indication et démontrons successivement les trois implications.

Pour la première, nous allons plutôt considérer les produits scalaires afin d'utiliser la définition de l'adjoint. En effet, $||f(x)||^2 = \langle f(x)|f(x)\rangle$, ce qui permet d'écrire $||f(x)||^2 = \langle f^*(f(x))|x\rangle$ ou encore $||f^*(x)||^2 = \langle x|f(f^*(x))\rangle$. Nous aurons ainsi fait apparaître les composées $f^* \circ f$ et $f \circ f^*$ qui sont par hypothèses égales.

i) $\Rightarrow$ *ii)* : on suppose $f \circ f^* = f^* \circ f$.
Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} ||f(x)||^2 &= \langle f(x)|f(x)\rangle \\ &= \langle x|f^*(f(x))\rangle \\ &= \langle x|f(f^*(x))\rangle \\ &= \langle f^*(x)|f^*(x)\rangle \\ &= ||f^*(x)||^2. \end{aligned}$$

Comme les normes sont positives, ceci montre que $||f(x)|| = ||f^*(x)||$.

Pour démontrer *ii)* $\Rightarrow$ *iii)*, nous allons utiliser une méthode de « polarisation », i.e. exprimer un produit scalaire à l'aide de la norme associée. Il y a plusieurs relations de ce type, notamment $4\langle u|v\rangle = ||u+v||^2 - ||u-v||^2$ et $2\langle u|v\rangle = ||u+v||^2 - (||u||^2 + ||v||^2)$. Le choix de la relation utilisée est indifférent.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* : soit $(x,y) \in E^2$. On a successivement, en utilisant la relation $4\langle u|v\rangle = ||u+v||^2 - ||u-v||^2$:

$$\begin{aligned} 4\langle f(x)|f(y)\rangle &= ||f(x)+f(y)||^2 - ||f(x)-f(y)||^2 \\ &= ||f(x+y)||^2 - ||f(x-y)||^2 \\ &= ||f^*(x+y)||^2 - ||f^*(x-y)||^2 \\ &= ||f^*(x)+f^*(y)||^2 - ||f^*(x)-f^*(y)||^2 \\ &= 4\langle f^*(x)|f^*(y)\rangle. \end{aligned}$$

Pour démontrer la dernière implication *iii)* $\Rightarrow$ *i)*, il s'agit de faire apparaître $f \circ f^*$ et $f^* \circ f$ à partir de l'expression de *iii)* qui fait intervenir f et f^* séparément. La bonne façon de faire est d'utiliser la définition de l'adjoint : $\langle f(x)|f(y)\rangle = \langle f^*(f(x))|y\rangle$ (et nous pouvons également effectuer une manipulation analogue sur l'autre membre afin de faire apparaître $f(f^*(x))$.

iii) $\Rightarrow$ *i)* : pour tout $(x,y) \in E$ on a

$$\langle f(x)|f(y)\rangle = \langle f^*(x)|f^*(y)\rangle$$

soit, par définition de l'adjoint,

$$\langle f^*(f(x))|y\rangle = \langle f(f^*(x))|y\rangle$$

soit encore, en regroupant les termes à gauche :

$$\langle f^*(f(x)) - f(f^*(x))|y\rangle = 0.$$

Ainsi, étant donné $x \in E$, le vecteur $f^*(f(x)) - f(f^*(x))$ est orthogonal à tous les vecteurs de E et est donc nul. Autrement dit,

$$\forall x \in E, f^*(f(x)) = f(f^*(x))$$

ce qui signifie $f^* \circ f = f \circ f^*$, i.e. f est normal.

Notons que les endomorphismes orthogonaux et les endomorphismes symétriques sont clairement normaux puisque, dans le premier cas, $f^* = f^{-1}$ et, dans le second, $f^* = f$. Le résultat de la deuxième question est d'ailleurs bien connu pour ces endomorphismes.

2. Conformément à l'indication, nous allons considérer les matrices de f et f^* dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E.

Dans le contexte des espaces euclidiens, seules les bases orthonormées sont réellement intéressantes. En effet, la matrice de f^* est la transposée de la matrice de f si on considère les matrices dans une base orthonormée – c'est faux en général ! De même, la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une base non orthonormée n'est pas orthogonale, etc.

Il s'agit cependant de choisir une base orthonormée intéressante... Le but de la question est de montrer que, si F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $F^\perp$ l'est également. La stabilité se traduit matriciellement par des blocs nuls si l'on choisit judicieusement les bases. Plus précisément, en considérant une base de E dont les premiers vecteurs forment une base de F, les p premières colonnes (avec $p = \dim(F)$) auront des coefficients nuls au-delà de la p^{e} ligne.

De même, pour conclure quant à la stabilité de $F^\perp$, il est intéressant d'avoir une base de $F^\perp$.

Ainsi, nous allons simplement choisir comme base orthonormée de E la concaténation d'une base orthonormée de F et d'une base orthonormée de $F^\perp$.

Bien sûr, encore faut-il que ces deux bases existent, i.e. que ces espaces ne soient pas réduits à $\{0\}$, autrement dit que F ne soit égal ni à $\{0\}$ ni à E. Ces deux cas particuliers simples doivent donc être traités séparément au début.

Le résultat est évident si $F = \{0\}$ (car alors $F^\perp = E$) et si $F = E$ (car alors $F^\perp = \{0\}$).
Supposons désormais $F \neq \{0\}$ et $F \neq E$ (et donc $F^\perp \neq \{0\}$).
Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E obtenue en concaténant une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^\perp$. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

car F est stable par f. De plus, $F^\perp$ est stable par f si, et seulement si, $B = 0$.
$\mathcal{B}$ étant orthonormée :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ {}^tB & {}^tC \end{pmatrix}.$$

Enfin, par hypothèse, les deux matrices suivantes sont égales :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ f^*) = \begin{pmatrix} A^tA + B^tB & B^tC \\ C^tB & C^tC \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^* \circ f) = \begin{pmatrix} {}^tAA & {}^tAB \\ {}^tBA & {}^tBB + {}^tCC \end{pmatrix}.$$

Nous voyons apparaître un schéma classique pour montrer qu'une matrice est nulle. En effet, pour tout matrice réelle D, l'égalité $\mathrm{tr}({}^tDD) = 0$ entraîne $D = 0$. Il s'agit donc d'exploiter les blocs faisant intervenir B et ${}^tB$, i.e. le premier ou le dernier. Le premier nous donne ${}^tAA = A^tA + B^tB$. L'expression telle quelle ne se simplifie pas car ${}^tAA$ et A^tA n'ont a priori pas de raison d'être égales mais, en appliquant la trace, tout se simplifie.

Nous obtiendrions le même résultat avec la relation $C^tC = {}^tBB + {}^tCC$.

En particulier, ${}^tAA = A^tA + B^tB$. Comme $\mathrm{tr}({}^tAA) = \mathrm{tr}(A^tA)$ il vient $\mathrm{tr}(B^tB) = 0$ et enfin $B = 0$. Ainsi, $F^\perp$ est stable par f.

Exercice 3.7 : Une inégalité sur le déterminant d'une matrice symétrique (PC-PSI)

Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que $\det(S) \leqslant \left(\frac{\operatorname{tr}(S)}{n}\right)^n$.

On note a_{ij} les coefficients de S.

2. Montrer que, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $a_{ii} > 0$.
Soit D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $a_{11}^{-1/2},\ldots,a_{nn}^{-1/2}$.

3. Exprimer $\det(DSD)$ à l'aide de S et des a_{ii}. Que vaut $\operatorname{tr}(DSD)$?

4. En déduire $\det(S) \leqslant a_{11}\cdots a_{nn}$.

1. Le déterminant et la trace se calculent simplement quand on a affaire à une matrice diagonale. S étant symétrique réelle, elle est semblable à une matrice diagonale et, de plus, deux matrices semblables ont même déterminant et même trace. Ainsi, on peut commencer par regarder la situation dans le cas où S est diagonale.
Si $S = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ l'inégalité demandée se réduit à :

$$\lambda_1\cdots\lambda_n \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right)^n$$

ou encore, comme les λ_k sont positifs :

$$\sqrt[n]{\lambda_1\cdots\lambda_n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k.$$

On reconnaît l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique qui est un avatar de la convexité de la fonction exponentielle.
Dans le cas général, il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}SP$ est diagonale ; c'est à cette dernière matrice que nous allons appliquer le résultat précédent.

S étant symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $P^{-1}SP = D$. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de S. Comme S est définie positive, ces coefficients sont strictement positifs. Autrement dit, il existe $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $D = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.
On a alors $\det(S) = \det(D) = \lambda_1\cdots\lambda_n$ et $\operatorname{tr}(S) = \operatorname{tr}(D) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.
La fonction exponentielle étant convexe sur $\mathbb{R}$ on a :

$$\forall(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R},\exp\left(\frac{1}{n}(a_1+\cdots+a_n)\right) \leqslant \frac{1}{n}(e^{a_1}+\cdots+e^{a_n}).$$

En particulier, avec $a_k = \ln(\lambda_k)$ (ce qui a bien un sens car les λ_k sont strictement positifs) :

$$\exp\left(\frac{1}{n}(\ln(\lambda_1) + \cdots + \ln(\lambda_n))\right) \leqslant \frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n).$$

Or

$$\exp\left(\frac{1}{n}(\ln(\lambda_1) + \cdots + \ln(\lambda_n))\right) = \sqrt[n]{e^{\ln(\lambda_1)} \cdots e^{\ln(\lambda_n)}} = \sqrt[n]{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$$

d'où

$$\sqrt[n]{\lambda_1 \cdots \lambda_n} \leqslant \frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$$

soit

$$\sqrt[n]{\det(S)} \leqslant \frac{\operatorname{tr}(S)}{n}.$$

2. Nous savons, d'une manière générale, que si l'on note $(E_1, \ldots, E_n)$ les matrices colonnes élémentaires (i.e. E_i a tous ses coefficients nuls sauf celui de la i-ème ligne qui est 1) on a $a_{ij} = {}^tE_iSE_j$. Dans le cas particulier où $j = i$, on a alors une expression de la forme ${}^tXSX$ et on voit que l'on va pouvoir utiliser le fait que S est définie positive.

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ soit $E_i \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i qui vaut 1. Alors on a $a_{ii} = {}^tE_iSE_i$.
Par ailleurs, S est définie positive : pour toute matrice colonne $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle on a ${}^tXSX > 0$. En particulier, pour $X = E_i$, il vient $a_{ii} > 0$.

3. Pour ce qui est du déterminant, la situation est simple : $\det(DSD) = \det(D)^2\det(S)$ et $\det(D)$ est le produit des coefficients diagonaux de D, ce qui s'exprime en fonction des a_{ii}.

La propriété $a_{ii} > 0$ démontrée dans la question précédente était nécessaire à la définition de D, qui fait intervenir des racines carrées et des inverses.

On a $\det(DSD) = \det(D)^2\det(S)$. Par ailleurs, D étant diagonale, il vient $\det(D) = a_{11}^{-1/2} \cdots a_{nn}^{-1/2}$. Ainsi :

$$\det(DSD) = \frac{1}{a_{11} \cdots a_{nn}} \det(S).$$

Nous ne disposons pas d'une formule aussi simple pour calculer la trace d'un produit. Cependant, la multiplication d'une matrice par une matrice diagonale a un effet simple qui se traduit simplement par une opération sur les lignes ou les colonnes ; nous pouvons donc en particulier calculer simplement les coefficients diagonaux de DSD, les seuls qui nous intéressent pour déterminer sa trace.

Si M est une matrice carrée, DM est obtenue en multipliant, pour chaque i, la i-ème ligne de S par le i-ème coefficient diagonal de D. De même, MD est obtenue en multipliant, pour chaque i, la i-ème colonne de S par le i-ème coefficient diagonal de D.

Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$. La i-ème ligne de DS est la i-ème ligne de S multipliée par le i-ème coefficient diagonal de D, i.e. par $a_{ii}^{-1/2}$; en particulier, le i-ème coefficient diagonal de DS est $a_{ii}^{1/2}$.
De même, la i-ème colonne de DSD est celle de DS multipliée par le i-ème coefficient diagonal de D ; le i-ème coefficient diagonal de DSD est donc 1.
La trace de DSD étant la somme de ses coefficients diagonaux il vient $\mathrm{tr}(DSD) = n$.

4. Le temps est visiblement venu d'utiliser l'inégalité de la première question, la troisième question suggérant d'utiliser cette inégalité avec DSD à la place de S. En effet, si on replace S par DSD dans la première inégalité, on retrouvera $\det(S)$ et les a_{ii} dans le membre de gauche, le membre de droite se réduisant à 1.

Il ne s'agit pas de simplement remplacer S par DSD dans l'inégalité... Encore faut-il vérifier que DSD est symétrique définie positive !

Comme souvent, il s'agit d'une vérification de routine de la définition, l'idée étant de se ramener au fait que S elle-même est symétrique définie positive.

Vérifions que DSD est une matrice symétrique réelle définie positive.
i) DSD est à coefficients réels car D et S le sont.
ii) DSD est symétrique : en effet, ${}^t(DSD) = {}^tD\,{}^tS\,{}^tD = DSD$ car S est symétrique et D également (car D est diagonale).
iii) DSD est positive : soit X une matrice colonne.

$$\begin{aligned} {}^tX(DSD)X &= {}^tX{}^tDSDX \\ &= {}^t(DX)S(DX) \\ &= {}^tYSY \end{aligned}$$

où Y est la colonne DX. S étant positive, ${}^tYDY \geqslant 0$ i.e. ${}^tX(DSD)X \geqslant 0$: DSD est donc positive.
iv) DSD est définie positive : soit X une matrice colonne telle que ${}^tX(DSD)X = 0$. Avec $Y = DX$ on a ${}^tYSY = 0$ (calcul ci-dessus). S étant définie positive, ceci entraîne $Y = 0$, i.e. $DX = 0$. Enfin, D est inversible car elle est diagonale à coefficient diagonaux non nuls, donc $DX = 0$ entraîne $X = 0$. En résumé : si ${}^tX(DSD)X = 0$ alors $X = 0$, ce qui montre que DSD est définie positive.

On peut donc appliquer le résultat de la première question à DSD.

Ainsi, l'inégalité de la première question appliquée à DSD donne :

$$\det(DSD) \leqslant \left(\frac{\operatorname{tr}(DSD)}{n}\right)^n .$$

Comme $\operatorname{tr}(DSD) = n$ le membre de droite est égal à 1 et l'inégalité se réduit donc à

$$\frac{1}{a_{11}\cdots a_{nn}} \det(S) \leqslant 1.$$

Comme tous les a_{ii} sont strictements positifs ont peut multiplier les deux membres de l'inégalité par $a_{11}\cdots a_{nn}$ sans en modifier le sens et il vient finalement :

$$\det(S) \leqslant a_{11}\cdots a_{nn}.$$

Exercice 3.8 : Racine carrée d'une matrice positive (PC-PSI)

Soit S une matrice réelle symétrique positive d'ordre n.

1. Démontrer qu'il existe une matrice réelle symétrique positive T telle que $T^2 = S$.

2. Démontrer que cette matrice T est unique. On pourra comparer les sous-espaces propres des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à S et à T.

1. Le résultat est clair si S est diagonale : ses coefficients diagonaux sont alors ses valeurs propres, qui sont positives car S est positive, et il suffit de prendre pour T la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines carrées de ceux de S (c'est ici qu'intervient la positivité). La matrice T ainsi obtenue vérifie bien $T^2 = S$ et est également symétrique (car diagonale) et positive (car, étant diagonale, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux et ils sont ici par définition positifs).

Il reste à adapter ceci au cas général en utilisant le théorème de réduction des matrices symétriques.

S étant symétrique réelle, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $P^{-1}SP = D$.
De plus, les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de S donc sont positifs.
Soit E la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines carrées de ceux de D. On a, en posant $T = PEP^{-1}$:

$$T^2 = PE^2P^{-1} = PDP^{-1} = S.$$

Nous avons démontré l'existence d'une matrice T dont le carré est S, mais encore faut-il vérifier que T est symétrique positive !

Vérifions que T est symétrique positive.
i) T est symétrique : ${}^tT = {}^t(PEP^{-1}) = {}^tP^{-1}\,{}^tE\,{}^tP$. Or P est orthogonale donc ${}^tP = P^{-1}$ et E est symétrique car diagonale ; ainsi ${}^tT = PEP^{-1} = T$.
ii) T est positive : T est semblable à la matrice diagonale E ; les valeurs propres de T sont donc les coefficients diagonaux de E. Comme ils sont tous positifs, T est bien positive.
Ainsi, T est une matrice symétrique positive telle que $T^2 = S$.

Nous avons utilisé un peu plus que la diagonalisabilité de S : nous avons utilisé le fait que l'on pouvait choisir des matrices de passage orthogonales. Cette propriété est cruciale pour montrer que T est bien symétrique.

D'une manière générale, quand on cherche à utiliser la diagonalisabilité d'une matrice symétrique réelle, il est bon de ne pas oublier que les matrices de passage peuvent être choisies orthogonales.

2. Si T est une matrice symétrique positive de carré S, S et T commutent car $ST = T^3 = TS$. En notant s (resp. t) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à S (resp. T) on a donc $s \circ t = t \circ s$. Ainsi, tout sous-espace propre de s est stable par t et réciproquement. Ceci permet de ramener le problème à chaque sous-espace propre de s car un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable est également diagonalisable.

Soit $T \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $T^2 = S$. En notant s (resp. t) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à S (resp. T) on a $s \circ t = t^3 = t \circ s$ et donc $s \circ t = t \circ s$.
Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de S et $E_1, \ldots, E_r$ les sous-espaces propres associés.
On a donc, pour tout i, $t(E_i) \subset E_i$. Notons t_i l'endomorphisme de E_i induit par t. t étant diagonalisable, t_i l'est également. De plus, toute valeur propre de t_i est une valeur propre de t ; elles sont donc toutes positives.
Soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_i telle que la matrice de t_i dans la base $\mathcal{B}_i$ est diagonale :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(t_i) = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_{\dim(E_i)}) \in M_{\dim(E_i)}(\mathbb{R}).$$

En notant s_i l'endomorphisme de E_i induit par s, on a tout simplement $s_i = \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}$ car E_i est le sous-espace propre de s associé à la valeur propre λ_i.
Par ailleurs, comme $t^2 = s$, $t_i^2 = s_i$ et donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(t_i)^2 = \lambda_i I_{\dim(E_i)}$.

Comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(t_i)^2 = \mathrm{diag}(\mu_1^2,\dots,\mu_{\dim_{E_i}}^2)$ il vient

$$\forall k \in \{1,\dots,\dim(E_i)\}, \mu_k^2 = \lambda_i.$$

Ceci donne a priori une ou deux valeurs possibles pour chaque μ_k (seulement 0 si $\lambda_i = 0$, $\pm\sqrt{\lambda_i}$ si $\lambda_i > 0$).

Cependant, les μ_k sont des valeurs propres de t_i, donc de t, et sont donc positives par hypothèse. Ainsi, il y a une seule valeur possible pour chaque μ_k : $\mu_k = \sqrt{\lambda_i}$.

t étant positif, toutes ses valeurs propres sont positives. Les scalaires μ_k sont des valeurs propres de t_i, donc de t. Ainsi :

$$\forall k \in \{1,\dots,\dim(E_i)\},\ \mu_k = \sqrt{\lambda_i}$$

soit

$$\forall i \in \{1,\dots,r\}, t_i = \sqrt{\lambda_i}\,\mathrm{Id}_{E_i}.$$

t est donc l'endomorphisme de E vérifiant $t(x) = \sqrt{\lambda_i}\,x$ pour tout vecteur $x \in E_i$ et pour tout i. t est donc unique.

Exercice 3.9 : Décomposition polaire (PC-PSI)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. À l'aide de la notion de racine carrée d'une matrice symétrique (voir exercice précédent), montrer qu'il existe un unique couple $(\Omega, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = \Omega\, S$. Ce couple est la *décomposition polaire de A*.

1. Il s'agit d'une vérification de routine à partir de la définition.

i) ${}^tAA$ est symétrique : ${}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t{}^tA = {}^tAA$.

ii) ${}^tAA$ est positive : soit X une matrice colonne. Alors ${}^tX({}^tAA)X = {}^t(AX)AX$.

En notant $AX = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ il vient ${}^t(AX)AX = a_1^2 + \cdots + a_n^2$.

Ainsi :

$${}^tX({}^tAA)X \geqslant 0.$$

iii) ${}^tAA$ est définie positive : soit X une matrice colonne telle que ${}^tX({}^tAA)X = 0$. Alors, avec les notation précédentes, $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 0$.

Une somme de réels positifs est nulle seulement si tous les termes sont nuls, i.e. $a_1 = \cdots = a_n = 0$, soit $AX = 0$. A étant inversible on en déduit $X = 0$.

2. Considérons la question à l'envers : si Ω et S conviennent on a ${}^tAA = {}^tS\,{}^t\Omega\,\Omega\,S$. Or ${}^tS = S$ car S est symétrique et ${}^t\Omega = \Omega^{-1}$ car Ω est orthogonale. On a donc ${}^tAA = S^2$. Ainsi, S ne peut être que la racine carrée symétrique positive de ${}^tAA$.

Par ailleurs, si $S^2 = {}^tAA$ alors $\det(S)^2 = \det(A)^2$ qui n'est pas nul ; S est donc en fait définie positive.

Nous allons commencer par définir S ainsi. Ensuite, il n'y aura pas de choix pour Ω : on doit avoir $A = \Omega\,S$. Comme S est inversible, ceci impose $\Omega = AS^{-1}$.

Nous poserons donc les définitions de S et Ω ainsi et vérifierons ensuite qu'elles conviennent bien. Il ne faudra pas oublier de démontrer que Ω est bien orthogonale.

${}^tAA$ étant symétrique positive il existe une unique matrice symétrique positive S telle que $S^2 = {}^tAA$.
De plus, $\det(S)^2 = \det(A)^2 \neq 0$ donc S est inversible. Ainsi, S est en fait définie positive.
De plus, S étant inversible, on peut poser $\Omega = AS^{-1}$.
On a alors $A = \Omega S$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
Vérifions que Ω est orthogonale : on a, étant donné que ${}^tS = S$ et ${}^tAA = S^2$:

$$ {}^t\Omega\,\Omega = {}^tS^{-1}\,{}^tAAS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n. $$

Ainsi, $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$.

L'unicité est en partie prouvée plus haut : si S convient alors S ne peut être que l'unique matrice symétrique positive dont le carré est ${}^tAA$. Pour le rédiger, on peut considérer un autre couple convenant et montrer les égalités.

Soit $(\Omega_1, S_1) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = \Omega_1 S_1$.
D'une part, ${}^tAA = S_1^2$; on a donc $S_1 = S$ car S est l'unique matrice symétrique positive de carré ${}^tAA$.
On a alors $\Omega_1 S = \Omega S$. S étant inversible, il vient $\Omega_1 = \Omega$. Ainsi, le couple (Ω, S) est unique.

Espaces vectoriels normés

4

Ce chapitre n’est pas au programme de PT.

Exercice 4.1 : Réunion et intersection de boules (PC-PSI)

Dans un espace vectoriel normé E, on désigne par $B_r(a)$ et $B'_r(a)$ les boules, respectivement ouvertes et fermées, de centre a et de rayon r.

1. Déterminer $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{n+1}{n}}(a)$. Qu'en déduit-on ?

2. Déterminer $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B'_{\frac{n}{n+1}}(a)$. Qu'en déduit-on ?

On observe que les rayons tendent vers 1 quand n tend vers l'infini.

L'objectif est d'aboutir à des mises en garde sur des intersections et des réunions infinies.

1. Comme $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, on a :

$$\begin{aligned}\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{\frac{n+1}{n}}(a) &= \left\{x \in E \ ; \ \forall n \geqslant 1 \quad \|x-a\| < \frac{n+1}{n}\right\}\\ &= \left\{x \in E \ ; \ \|x-a\| \leqslant 1\right\}\\ &= B'_1(a).\end{aligned}$$

Une intersection infinie d'ouverts n'est donc pas toujours un ouvert.

2. Comme $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, on a :

$$\begin{aligned}\bigcup_{n=1}^{\infty} B'_{\frac{n}{n+1}}(a) &= \left\{x \in E \ ; \ \exists n \geqslant 1 \ \|x-a\| \leqslant \frac{n}{n+1}\right\}.\\ &= \left\{x \in E \ ; \ \|x-a\| < 1\right\}\\ &= B_1(a).\end{aligned}$$

Une réunion infinie de fermés n'est donc pas toujours un fermé.

Exercice 4.2 : Ouverts et fermés (PC-PSI)

Soit E un espace vectoriel normé, A un ouvert et B une partie de E.
Montrer que $A+B$ est un ouvert.
Qu'en est-il si A est fermé ? si A et B sont fermés ?

• Supposons A ouvert

Soit $a+b \in A+B$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Pour montrer que $A+B$ est un ouvert, nous allons montrer qu'il existe une boule ouverte de centre $a+b$ incluse dans $A+B$.

Puisque A est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_r(a) \subset A$.

Montrons que $B_r(a+b) \subset A+B$. Soit $x \in B_r(a+b)$; on a :

$\|x-(a+b)\| < r \Longrightarrow x-b \in B_r(a) \Longrightarrow x-b \in A \Longrightarrow x \in A+B$.

$A+B$ est donc un ouvert.

• L'hypothèse A fermé, et même A et B fermés, n'entraîne rien. La somme de deux fermés n'est pas toujours un fermé. Voici un contre-exemple :

Dans $E=\mathbb{R}^2$, on considère $A=\left\{(x,\frac{1}{x})\ ;\ x>0\right\}$ et $B=\mathbb{R}_+\times\{0\}$.

A et B sont bien des fermés (leurs complémentaires sont des ouverts).

$A+B=\left\{(x+x',\frac{1}{x})\ ;\ x>0 \text{ et } x'\in\mathbb{R}\right\}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$.

$A+B$ est un demi-plan ouvert, ce n'est pas un fermé.

Exercice 4.3 : Boule unité (PC-PSI)

a) Montrer que N définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$N\big[(x,y)\big]=\max\big[|x|,|y|,|x-y|\big]$$

est une norme.

b) Dessiner la boule de centre O et de rayon 1.

Pour la détermination de la boule unité, vous savez que le maximum de trois valeurs est inférieur ou égal à 1, si, et seulement si, chacune des trois valeurs vérifie cette condition.

a) N est une norme

• N est bien une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$.

• $N\big[(x,y)\big]=0 \Longleftrightarrow |x|=|y|=|x-y|=0 \Longleftrightarrow (x,y)=(0,0)$.

• $$\begin{aligned} N\big[\lambda(x,y)\big] &= \max\big[|\lambda x|,|\lambda y|,|\lambda(x-y)|\big] \\ &= |\lambda|\max\big[|x|,|y|,|x-y|\big]=|\lambda|N\big[(x,y)\big]. \end{aligned}$$

• $|x+x'| \leqslant |x|+|x'| \leqslant N\big[(x,y)\big]+N\big[(x',y')\big]$

$|y+y'| \leqslant |y|+|y'| \leqslant N\big[(x,y)\big]+N\big[(x',y')\big]$

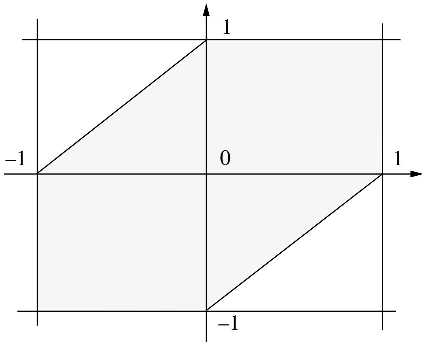
$|x+x'-y-y'| \leqslant |x-y|+|x'-y'| \leqslant N\big[(x,y)\big]+N\big[(x',y')\big]$

donc $N\big[(x,y)+(x',y')\big] \leqslant N\big[(x,y)\big]+N\big[(x',y')\big]$.

b) Boule unité

La boule de centre 0 et de rayon 1 est l'ensemble des (x,y) tels que :

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ x-1 \leqslant y \leqslant x+1 \end{cases}$$



Exercice 4.4 : Normes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (PC-PSI)

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose pour tout $A = (a_{ij})$:

$$\|A\|_1 = \frac{1}{n}\sum_{i,j} |a_{ij}| \qquad \text{et} \qquad \|A\|_\infty = \sup_{i,j} |a_{ij}| .$$

1. Trouver des relations entre ces normes.

2. Déterminer

a) le plus petit réel α tel que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \|AB\|_1 \leqslant \alpha \|A\|_1 \|B\|_1$$

b) le plus petit réel β tel que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \|AB\|_\infty \leqslant \beta \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

Inutile de démontrer que ce sont des normes; elles figurent dans le cours (à un coefficient près pour la première).

1. Comme l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Il s'agit de déterminer un exemple de nombres α et β qui figurent dans la définition de normes équivalentes.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Pour tous i et j on a : $|a_{ij}| \leqslant \|A\|_\infty$.

On en déduit : $\displaystyle\sum_{i,j} |a_{ij}| \leqslant n^2 \|A\|_\infty$, puis $\|A\|_1 \leqslant n\|A\|_\infty$.

On ne peut pas faire mieux puisqu'avec la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$,

l'inégalité devient une égalité.

• On a aussi : $\|A\|_\infty \leqslant \sum_{i,j} |a_{ij}|$, d'où : $\|A\|_\infty \leqslant n\|A\|_1$.

On ne peut pas faire mieux puisqu'avec les matrices élémentaires E_{ij}, l'inégalité devient une égalité.

2. a) Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; notons $AB = C = (c_{ij})$.

On a : $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$ d'où : $|c_{ij}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\,|b_{kj}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

On en déduit :

$$\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty \|B\|_\infty .$$

Pour démontrer que l'on ne peut pas faire mieux, c'est-à-dire que $\alpha = n$ est le plus petit réel qui convienne, il suffit de donner un exemple où l'inégalité devient une égalité.

C'est le cas en choisissant $A = B = J$.

b) On a aussi :

$$\sum_{i,j} |c_{ij}| \leqslant \sum_{i,j,k} |a_{ik}|\,|b_{kj}| \leqslant \sum_{i,j,k,l} |a_{ik}|\,|b_{lj}|$$

soit : $n\|AB\|_1 \leqslant \big(n\|A\|_1\big)\big(n\|B\|_1\big)$, ou encore :

$$\|AB\|_1 \leqslant n\|A\|_1 \|B\|_1 .$$

Pour démontrer que l'on ne peut pas faire mieux, c'est-à-dire que $\beta = n$ est le plus petit réel qui convienne, il suffit de donner un exemple où l'inégalité devient une égalité.

C'est le cas en choisissant $A = B = E_{11}$.

Exercice 4.5 : Comparaison de normes (PC-PSI)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et telles que $f(0) = 0$. Pour $f \in E$, on pose :

$$N_1(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| .$$

N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Inutile de démontrer que N_1 est une norme, elle fait partie du cours. Pour N_2, la seule remarque intéressante est que, si $N_2(f) = 0$, cela entraîne $f' = 0$, puis $f = 0$ grâce à l'hypothèse $f(0) = 0$.

D'autre part, comme E est de dimension infinie, la réponse à la question posée n'est pas connue. En général, la réponse est alors non.

Pour que deux normes soient équivalentes, il faut que deux nombres α et β existent. Dans beaucoup d'exercices de ce type, l'un des deux nombres existe et l'autre non. Nous allons démontrer que nous sommes dans cette situation.

• D'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall t \in [0,1] \qquad |f(t) - f(0)| \leqslant |t-0| \sup_{u\in[0,t]} |f'(u)| \leqslant \sup_{u\in[0,1]} |f'(u)|\,.$$

On a donc, pour tout $f \in E$:

$$N_1(f) \leqslant N_2(f)\,.$$

Cette inégalité peut aussi se démontrer en partant de $f(t) = \displaystyle\int_0^t f'(u)\mathrm{d}u$.

• Pour démontrer que $\left\{\dfrac{N_2(f)}{N_1(f)}\,;\ f \in E\right\}$ n'est pas majoré, il faut imaginer un contre-exemple, c'est-à-dire une suite (f_n) de fonctions de E dont les valeurs de f_n' croissent plus vite que les valeurs de f_n, sur $[0,1]$.

Considérons les fonctions f_n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) définies sur $[0,1]$ par $f_n(t) = t^n$.

On a bien $f_n \in E$; et le calcul donne : $N_1(f_n) = 1$ et $N_2(f_n) = n$.

L'ensemble des quotients $\dfrac{N_2(f_n)}{N_1(f_n)} = n$ n'est donc pas majoré.

Les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

Exercice 4.6 : Compacité du groupe des matrices orthogonales (PSI)

Démontrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

Il s'agit d'une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'espace vectoriel étant de dimension finie, on sait que toutes les normes sont équivalentes, donc vous pouvez choisir.

D'autre part, vous pouvez caractériser une matrice orthogonale A de plusieurs façons : par ${}^tAA = I_n$, par les vecteurs colonnes qui sont orthonormés …

Comme la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est finie, un compact est un fermé borné.

• $O_n(\mathbb{R})$ **fermé**

– *Première démonstration*

Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $O_n(\mathbb{R})$ convergeant vers un élément A de $M_n(\mathbb{R})$.

La suite de terme général ${}^tA_pA_p$ est constante égale à I_n, donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} {}^tA_pA_p = I_n$.

Par ailleurs, ${}^tA_pA_p$ tend vers ${}^tAA$, car l'application $(A,B) \mapsto {}^tAB$ est bilinéaire donc continue.

Par unicité de la limite il vient ${}^tAA = I_n$, c'est-à-dire $A \in O_n(\mathbb{R})$.

– *Deuxième démonstration*

L'application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = {}^tAA$ est continue (pour n'importe quelle norme) puisque les coefficients de $f(A)$ sont des fonctions polynomiales des coefficients de A.

$O_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par f du fermé $\{I_n\}$. Il est donc fermé.

• $O_n(\mathbb{R})$ **borné**

– *Première démonstration*

Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, en choisissant la norme $||A|| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$, on a $||A|| = \sqrt{n}$, ce qui montre que $O_n(\mathbb{R})$ est borné.

– *Deuxième démonstration*

Les coefficients d'une matrice orthogonale sont compris entre -1 et 1.

$O_n(\mathbb{R})$ est donc borné par 1 pour la norme $\|A\| = \sup\limits_{i,j} |a_{ij}|$.

Exercice 4.7 : Un fermé borné non compact (PSI)

Trouver un exemple de fermé borné non compact dans un espace vectoriel normé.

En dimension finie, c'est impossible. Il faut donc chercher un espace vectoriel normé de dimension infinie. Les exemples les plus courants sont $\mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

• **Premier exemple**

Prenons $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $N(P) = \sum\limits_i |a_i|$.

La sphère unité $S(O,1) = \{P;\ N(P) = 1\}$ est fermée et bornée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X^n \in S(O,1)$. Mais on ne peut pas extraire de la suite (X^n) une sous-suite convergente, puisque, pour m et n quelconques, on a $N(X^m - X^n) = 2$.

$S(O,1)$ n'est donc pas un compact.

• **Deuxième exemple**

Prenons $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|f\|_\infty$.

La sphère unité $S(O,1) = \{f;\ \|f\|_\infty = 1\}$ est fermée et bornée.

Considérons les fonctions $f_n \in E$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ définies par :

$$\begin{cases} f_n(x) = 0 & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n+1}\right] \\[2ex] f_n(x) = n(n+1)x - n & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right] \\[2ex] f_n(x) = 1 & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

On ne peut pas extraire de la suite (f_n) une sous-suite convergente, puisque, pour m et n quelconques avec $m \neq n$, on a $\| f_m - f_n \|_\infty = 1$. $S(O,1)$ n'est donc pas un compact.

Exercice 4.8 : Matrices semblables et normes (PC-PSI)

Si $n \geqslant 2$, montrer qu'il n'existe pas de norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \forall P \in GL_n(\mathbb{C}) \qquad N\big(PAP^{-1}\big) = N(A)\,.$$

Il faut aboutir à une contradiction en considérant des matrices semblables.

Considérons $x \in \mathbb{C}^*$ et la matrice $A = xE_{12}$. Notons f l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, soit $\mathcal{B} = (e_1,e_2,\dots,e_n)$. Considérons la nouvelle base $\mathcal{B}' = (xe_1,e_2,\dots,e_n)$. La matrice de f dans cette base est $A' = E_{12}$ qui est donc semblable à A.
S'il existait une norme vérifiant $N\big(PAP^{-1}\big) = N(A)$, on aurait $N\big(xE_{12}\big) = N\big(E_{12}\big)$, d'où $|x| = 1$ pour tout $x \in \mathbb{C}^*$.
Comme on aboutit ainsi à une contradiction, il n'esiste pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possédant la propriété de l'énoncé.

Exercice 4.9 : Comparaison de normes (PC-PSI)

Soit $E = \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ et $N(f) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que N est une norme.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$\begin{cases} f_n(x) = 1 - nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ f_n(x) = 0 & \text{si } \dfrac{1}{n} \leqslant x \end{cases}$$

Étudier la suite (f_n) dans (E,N) et dans (E,N_∞). Qu'en conclure ?

1. • Comme f est continue $N(f)$ existe ; et $N(f) \geqslant 0$ car on intègre une fonction positive sur un segment avec $0 < 1$.

• Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$N(\lambda f) = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,|\lambda f(t)|\,\mathrm{d}t = |\lambda| \int_0^1 \mathrm{e}^t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t = |\lambda|\,N(f)\,.$$

• Pour f et g appartenant à E, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{e}^t\,|f(t)+g(t)| \leqslant \mathrm{e}^t\,|f(t)| + \mathrm{e}^t\,|g(t)|\,.$$

En intégrant sur $[0,1]$, on a donc $N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$.

• Supposons $N(f) = 0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^t\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Comme la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^t\,|f(t)|$ est continue et positive , on en déduit :

$$\forall t \in [0,1] \qquad \mathrm{e}^t\,|f(t)| = 0\,,\ \text{d'où}\quad f = 0.$$

N est donc une norme sur E.

2. Considérons les fonctions f_n de l'énoncé.
Remarquons tout d'abord que f_n appartient bien à E car :

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{n}\\ x<\frac{1}{n}}} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{n}\\ x>\frac{1}{n}}} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0\,.$$

Calculons les normes.

$N_\infty(f_n) = 1$.

$$\begin{aligned} N(f_n) &= \int_0^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^x\,(1-nx)\,\mathrm{d}x = \Big[(1-nx)\,\mathrm{e}^x\Big]_0^{\frac{1}{n}} + n\int_0^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\ &= -1 + n\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right). \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$N(f_n) = -1 + n\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

On a donc $\dfrac{N_\infty(f_n)}{N(f_n)} \underset{\infty}{\sim} 2n$, ce qui montre que $\left\{\dfrac{N_\infty(f)}{N(f)}\ ;\ f \in E\right\}$ n'est pas majoré.

Par conséquent, les deux normes ne sont pas équivalentes.

On a démontré que la suite (f_n) converge vers 0 dans (E,N), mais pas dans (E,N_∞).

Exercice 4.10 : Encore une norme (PC-PSI)

Dans $\mathbb{R}^2$, on pose $N(x,y) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{1+t+t^2}$.

Montrer que N est une norme et déterminer la boule unité.

- **Norme**

Vérifier que N est une norme ne pose aucune difficulé.
Détaillons la démonstration de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} N(x+x',y+y') &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+x'+t\,(y+y')|}{1+t+t^2} \\ &\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|+|x'+ty'|}{1+t+t^2}, \\ &\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t+t^2} + \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x'+ty'|}{1+t+t^2} \end{aligned}$$

donc $N\big((x,y)+(x',y')\big) \leqslant N(x,y)+N(x',y')$.

- **Boule unité**

La boule unité est l'ensemble des (x,y) tels que :

$$\begin{aligned} N(x,y)\leqslant 1 &\iff \forall t\in\mathbb{R}\quad (x+ty)^2 \leqslant (1+t+t^2)^2 \\ &\iff \forall t\in\mathbb{R}\quad \big[t^2+(1+y)t+(1+x)\big] \\ &\qquad\qquad \big[t^2+(1-y)t+(1-x)\big]\geqslant 0 \\ &\iff \forall t\in\mathbb{R}\quad \begin{cases} P_1(t) & \geqslant & 0 \\ P_2(t) & \geqslant & 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} P_1(t) & \leqslant & 0 \\ P_2(t) & \leqslant & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où $P_1(t)=t^2+(1+y)t+(1+x)$ et $P_2(t)=t^2+(1-y)t+(1-x)$.

La condition :

$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad P_1(t)\geqslant 0 \text{ et } P_2(t)\geqslant 0$$

est équivalente à :

$\Delta_1=(1+y)^2-4(1+x)\leqslant 0$

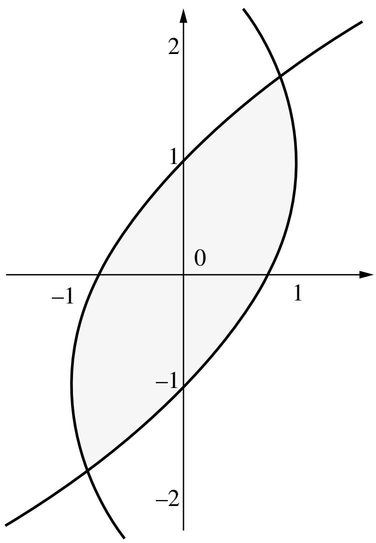
et $\Delta_2=(1-y)^2-4(1-x)\leqslant 0$

et $-1\leqslant x\leqslant 1$

La condition :

$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad P_1(t)\leqslant 0 \text{ et } P_2(t)\leqslant 0$$

est impossible puiqu'elle conduit en particulier à $1+x\leqslant 0$ et $1-x\leqslant 0$.
La boule unité est donc limitée par les droites $x=-1$ et $x=1$ et les paraboles d'équations : $(1+y)^2-4(1+x)=0$ et $(1-y)^2-4(1-x)=0$.



Exercice 4.11 : Détermination d'une fonction (PC-PSI)

Déterminer $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(2x+1) = f(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

L'égalité $y = 2x + 1$ est équivalente à l'égalité $x = \dfrac{y-1}{2}\cdot$

La condition vérifiée par f peut donc aussi s'écrire :

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad f\left(\frac{y-1}{2}\right) = f(y)$$

Introduisons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{2} \end{cases}$$

Si la suite (u_n) converge vers l, alors $l = \dfrac{l-1}{2}$ donc $l = -1$. Cette condition nécessaire conduit à penser à présenter la relation entre u_{n+1} et u_n sous la forme :

$$u_{n+1} + 1 = \frac{u_n + 1}{2}$$

ce qui entraîne par récurrence $u_n + 1 = \dfrac{u_0 + 1}{2^n}\cdot$ Par suite, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -1$.

Par ailleurs, la condition $f\left(\dfrac{y-1}{2}\right) = f(y)$ entraîne $f(u_{n+1}) = f(u_n)$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = f(u_0)$.

La fonction f étant supposée continue, on en déduit : $f(-1) = f(u_0)$.

Comme u_0 est un réel quelconque, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(-1) = f(x),$$

c'est-à-dire que f est une fonction constante.

Réciproquement, les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ vérifie la condition de l'énoncé.

– On a seulement utilisé la continuité de f au point -1.

– On peut généraliser à $f(x) = f(ax+b)$ avec $|a| \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$ et f continue en $\dfrac{b}{1-a}$.

Séries numériques

5

Exercice 5.1 : Nature de séries

Déterminer la nature des séries suivantes.

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin^n(\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$

2. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin(n)$

3. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{2^n}{n!}$

4. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{3\cos(2n\theta - 1)}{n^2}$, avec $\theta \in \mathbb{R}$

5. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{n^2 - 3n}{3n^3 + 5n + 8}$

6. $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$

7. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} - 1 + \dfrac{(-1)^n - 1}{2n}\right)$

1. On reconnaît dans cette première série une série géométrique.

La série $\sum \sin^n(\theta)$ est une série géométrique de raison $\sin(\theta)$. Elle converge donc si, et seulement si, $|\sin(\theta)| < 1$. Nous devons donc distinguer deux cas.

- Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2} \mathrm{mod}\, \pi$, $|\sin(\theta)| = 1$ et la série $\sum \sin^n(\theta)$ diverge.
- Si $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} \mathrm{mod}\, \pi$, $|\sin(\theta)| < 1$ et la série $\sum \sin^n(\theta)$ converge.

Dans ce dernier cas, nous savons même que sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^n(\theta) = \frac{1}{1 - \sin(\theta)}.$$

2. Aucun équivalent simple ne semble pouvoir permettre de conclure. À la vue de la représentation graphique de la fonction sinus, on peut deviner que la suite de terme général $\sin(n)$ ne possède pas de limite. En ce qui concerne la convergence de la série, la seule information qui nous intéresse est qu'elle ne tende pas vers 0 ; la série sera alors grossièrement divergente.

Nous allons montrer que la série $\sum \sin(n)$ diverge grossièrement, autrement dit, que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.
Supposons, par l'absurde, que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\cos(2n) = \cos^2(n) - \sin^2(n) = 1 - 2\sin^2(n).$$

Par conséquent, la suite $(\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\cos(2(n+1)) = \cos(2n+2) = \cos(2n)\cos(2) - \sin(2n)\sin(2).$$

En passant à la limite, on obtient $1 = \cos(2)$, ce qui est absurde, car $0 < 2 < 2\pi$.
Nous venons de montrer que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Par conséquent, la série $\sum \sin(n)$ diverge.

En menant ce raisonnement plus loin, il est possible de montrer que la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède pas de limite, mais c'est un peu fastidieux. Puisqu'il nous suffit de savoir qu'elle ne tend pas vers 0, nous nous en dispenserons.

3. Nous sommes ici en présence d'une série dont le terme général est présenté de façon multiplicative (c'est-à-dire que l'on obtient naturellement le terme d'indice $n+1$ comme le produit du terme d'indice n par une autre quantité). C'est un cas dans lequel le critère de d'Alembert est tout indiqué. Rappelons-le : si $\sum u_n$ est une série à termes réels ou complexes,

i) si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$, alors la série converge ;

ii) si $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} > 1$, alors la série diverge ;

iii) dans les autres cas (limite égale à 1 ou absence de limite), il faut mener une étude plus précise.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}.$$

Cette quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Le critère de d'Alembert assure alors que la série $\sum \frac{2^n}{n!}$ converge.

Si vous connaissez le développement en série entière de la fonction exponentielle, vous retrouvez cette convergence et la valeur de la somme : e^2.

4. Dans ce cas, nous ne pourrons pas exploiter le critère de d'Alembert car le quotient des termes généraux ne possède pas de limite, sauf pour quelques valeurs particulières de θ. La forme du terme général nous invite cependant à utiliser une comparaison à une série de Riemann. Rappelons que la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

La suite $(3\cos(2n\theta - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par conséquent, nous avons

$$\frac{3\cos(2n\theta - 1)}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente et à termes positifs. La comparaison ci-dessus assure que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{3\cos(2n\theta - 1)}{n^2}$ converge également.

Rappelons que ce genre de résultat ne vaut que si l'on compare à une série à termes positifs à partir d'un certain rang (ou négatifs à partir d'un certain rang). Le contre-exemple typique est le suivant : nous avons

$$\frac{1}{n} = O\left(\frac{(-1)^n}{n}\right),$$

mais la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge alors que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (par le critère spécial des séries alternées).

5. Ici le terme général de la série est une fraction rationnelle en n. Nous pouvons donc facilement comparer cette série à une série de Riemann.

Nous avons

$$\frac{n^2 - 3n}{3n^3 + 5n + 8} \sim \frac{1}{3n}.$$

La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{3n}$ est divergente et à termes positifs. L'équivalent ci-dessus assure que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{n^2 - 3n}{3n^3 + 5n + 8}$ est de même nature : elle diverge.

De nouveau, il est indispensable de s'assurer que la série à laquelle on compare est à termes positifs ! Nous avons, par exemple,

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n},$$

mais la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (par le critère pour les séries alternées) alors que la série $\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$ diverge (c'est la somme d'une série convergente et d'une série divergente).

Que l'on utilise O, o ou $\sim$, l'hypothèse de signe constant (à partir d'un certain rang) est incontournable.

6. Ici le terme général de la série n'est pas de signe constant. Nous ne pourrons donc pas utiliser les théorèmes de comparaison. En revanche, l'alternance des signes nous incite à utiliser le critère spécial des séries alternées. Rappelons-le : si $\sum u_n$ est une série à termes réels telle que :

i) la suite $((-1)^n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de signe constant (l'on dit alors que la série est alternée) ;

ii) la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ;

iii) la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 ;

alors la série $\sum u_n$ converge. Le théorème du cours fournit également des informations sur les restes de ces séries : pour tout $N \in \mathbb{N}$, le reste

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$$

est du signe de u_{N+1} et vérifie

$$|R_N| \leqslant |u_{N+1}|.$$

De plus, il suffit que les deux premiers points soient vérifiés à partir d'un certain rang pour encore avoir la convergence (on perd cependant le résultat relatif au reste).

Nous voulons ici étudier la série $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$. On vérifie immédiatement que cette série est alternée et que son terme général tend vers 0. La décroissance, en revanche, n'a rien d'évident. Une stratégie pour montrer que la suite $(\ln(n)/n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit (éventuellement à partir d'un certain rang) consiste à montrer que la fonction $x \mapsto \ln(x)/x$ décroit (éventuellement sur un intervalle de la forme $]a,+\infty[$). Nous allons donc étudier cette fonction.

Posons

$$f: \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\ln(x)}{x} \end{array} \cdot$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et nous avons

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\,x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

Par conséquent,

$$\forall x \geqslant e,\ f'(x) \leqslant 0$$

et la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[e,+\infty[$.

Puisque $e \leqslant 3$, la suite $(\ln(n)/n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante. Les théorèmes de comparaison usuels nous assurent qu'elle tend vers 0. En outre, la série $\sum_{n\geqslant 3}(-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n}$ est alternée. D'après le critère spécial des séries alternées, elle converge. Puisque la nature d'une série reste inchangée lorsque l'on modifie un nombre fini de termes, la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n}$ est également convergente.

7. Ici, le terme général est d'apparence compliquée. Nous allons calculer les premiers termes de son développement asymptotique en espérant que cela suffise à conclure.

Nous avons

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 + \frac{(-1)^n - 1}{2n} &= 1 + \frac{1}{2n} - 1 + \frac{(-1)^n - 1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

La série de terme général $(-1)^n/2n$ converge, d'après le critère spécial des séries alternées. Une série dont le terme général est dominé par $1/n^2$ converge également, car la série $\sum 1/n^2$ est à termes positifs et converge. La série de l'énoncé est donc somme de deux séries convergentes. On en déduit qu'elle converge.

Il faut pousser le développement asymptotique aussi loin que nécessaire pour connaître la nature de chacune des séries qui interviennent. Il n'aurait, par exemple, pas été suffisant d'écrire

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1+\frac{(-1)^n-1}{2n}=\frac{(-1)^n}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

En effet, une série dont le terme général est négligeable devant $1/n$ peut être convergente (c'est le cas de $\sum 1/n^2$) ou divergente (c'est le cas de $\sum 1/(n\ln(n))$, *cf.* exercice **5.7**). Cette écriture ne suffit donc pas pour conclure. En revanche, le développement plus précis où l'on remplace $o(1/n)$ par $O(1/n^2)$ fournit le résultat. Nous aurions également pu utiliser un développement à l'ordre $o(1/n^2)$, cela nous aurait simplement fourni des termes en plus qui n'auraient pas eu d'influence sur le résultat.

Exercice 5.2 : Nature de séries II (PSI)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{a^k}{k!}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\sin(2\pi e n!)$.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \sin\left(\dfrac{2\pi n!}{e}\right)$.

3.a. Montrer qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_1}$ soit alternée et tende vers 0.

3.b. Montrer qu'il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(|u_n|)_{n\geqslant n_2}$ soit décroissante. Conclure.

1. Identifions tout d'abord la suite dont on nous demande de déterminer un équivalent : il faut reconnaître immédiatement un reste de la série $\sum_{k\geqslant 0} a^k/k!$ dont la somme est e^a. En d'autres termes, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{a^k}{k!} = e^a - \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}.$$

L'énoncé nous suggère d'utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange. Rappelons qu'elle s'énonce de la façon suivante : soient $m \in \mathbb{N}$, I un intervalle, f une fonction $m+1$ fois dérivable sur I telle que $f^{(m+1)}$ soit bornée. Soient $(u,v) \in I^2$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout x compris entre u et v, nous ayons $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$. Alors nous avons

$$\left| f(v) - \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(u)}{k!} (v-u)^k \right| \leqslant \frac{M|v-u|^{m+1}}{(m+1)!}$$

Il est naturel de chercher à appliquer cette formule avec la fonction exponentielle, les points $u = 0$ et $v = a$ et l'ordre $m = n$. Pour faciliter ce raisonnement préliminaire, nous supposerons que $a > 0$. Nous traiterons le cas général dans la rédaction finale. Nous avons

$$\forall x \in [0,a],\ |\exp^{(n+1)}(x)| = |\exp(x)| \leqslant \exp(a).$$

En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, nous obtenons

$$\left| \exp(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} a^k \right| \leqslant e^a \frac{a^{n+1}}{(n+1)!},$$

c'est-à-dire

$$\left| e^a - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \right| \leqslant e^a \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Nous obtenons une majoration de la quantité à étudier, mais pas mieux. Pour en déterminer un équivalent, il nous faut être plus précis et nous allons donc écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$ au lieu de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle est également croissante et positive sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, si $a \geqslant 0$, nous avons

$$\forall x \in [0,a],\ |\exp(x)| = \exp(x) \leqslant \exp(a)$$

et, si $a \leqslant 0$,

$$\forall x \in [a,0],\ |\exp(x)| = \exp(x) \leqslant \exp(0) = 1.$$

Posons $M = \max(e^a,1)$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction exp entre les points 0 et a à l'ordre $n+1$, nous obtenons

$$\left| \exp(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leqslant M \frac{|a|^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Remarquons que la quantité $Ma^{n+2}/(n+2)!$ est négligeable devant $a^{n+1}/(n+1)!$ quand n tend vers $+\infty$. Si $a = 0$, c'est évident et, si $a \neq 0$, nous avons

$$M \frac{a^{n+2}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} = M \frac{a}{n+2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Par conséquent, nous avons montré que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = \exp(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \sim \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2. Afin d'utiliser le résultat obtenu à la question précédente, nous allons remplacer e par son développement en série. Pour $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$2\pi e n! = 2\pi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!}.$$

Remarquons que pour tout $k \geqslant n$ le nombre rationnel $n!/k!$ est en fait un entier. Nous pourrons donc enlever la quantité $2\pi n!/k!$ dans le calcul de $\sin(2\pi\, en!)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \sin(2\pi e n!) &= \sin\left(2\pi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!}\right) \\ &= \sin\left(2\pi \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} + 2\pi n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) \\ &= \sin\left(2\pi n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right), \end{aligned}$$

car $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ est un entier.
D'après la question précédente, nous avons

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sim \frac{1}{(n+1)!}$$

et donc, étant donné que $\sin(x) \sim x$ quand x tend vers 0 :

$$\sin(2\pi e n!) = \sin\left(2\pi n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}\right) \sim \frac{2\pi}{n+1}.$$

Le second terme de l'équivalent étant positif, les séries $\sum \sin(2\pi\, en!)$ et $\sum 2\pi/(n+1)$ sont de même nature. Par conséquent :

$$\text{la série} \quad \sum_{n\geqslant 0} \sin(2\pi\, en!) \quad \text{diverge.}$$

3.a. Pour commencer, nous allons utiliser la même méthode qu'à la question précédente. Attention cependant: c'est e^{-1} que nous allons remplacer par son expression et non pas e. En effet, introduire une série au dénominateur ne nous serait d'aucune utilité. Par le même raisonnement que précédemment, nous obtenons

$$\sin(2\pi n!/e) = \sin\left(2\pi n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right) \sim 2\pi \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

Puisque le second terme de l'équivalent n'est pas de signe constant, nous ne pouvons pas conclure directement quant à la nature de la série et il nous faudra procéder d'une autre façon. Ici, c'est le critère spécial des séries alternées qui est proposé par l'énoncé.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par le même raisonnement qu'à la question précédente, nous avons

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2\pi n!}{e}\right) &= \sin(2\pi e^{-1} n!) \\ &= \sin\left(2\pi n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right) \\ &= \sin\left(2\pi n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right). \end{aligned}$$

D'après la question **1**, nous avons

$$2\pi n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sim 2\pi \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

et donc, étant donné que $\sin(x) \sim x$ quand x tend vers 0 et que les termes de l'équivalence précédente tendent bien vers 0 :

$$\sin\left(\frac{2\pi n!}{e}\right) \sim 2\pi \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

Ceci montre que $\sin(2\pi n!/e)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et est du même signe que $(-1)^{n+1}/(n+1)$ à partir d'un certain rang n_1. Autrement dit, pour $n \geqslant n_1$, $(-1)^n \sin(2\pi n!/e)$ est de signe constant. La série est donc alternée à partir du rang n_1.

3.b. Les deux résultats que nous venons d'obtenir étaient assez faciles à démontrer en utilisant les méthodes de la question **2** et l'équivalent de la question **1**. La question de la décroissance de la suite (u_n) est plus subtile.

Ce n'est pas parce qu'une suite est équivalente à une suite décroissante qu'elle est elle-même décroissante ! Par exemple, nous avons

$$\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n+2(-1)^n},$$

mais la suite $(1/n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, alors que la suite $(1/(n+2(-1)^n))_{n\geqslant 1}$ ne l'est pas.

L'équivalent de $\sin(2\pi n!/e)$ que nous avons obtenu ne permet donc pas de conclure. Il nous faut rechercher des informations plus précises permettant de comparer les termes $\sin(2\pi n!/e)$ et $\sin(2\pi(n+1)!/e)$, autrement dit, les termes $\sin\left(2\pi n!\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k/k!\right)$ et $\sin\left(2\pi(n+1)!\sum_{k=n+2}^{+\infty}(-1)^k/k!\right)$. Puisque la fonction sinus est croissante au voisinage de 0, il nous suffira de comparer les arguments de la fonction sinus.

Nous allons utiliser le caractère alterné de la série $\sum(-1)^k/k!$; nous savons qu'il en découle une majoration explicite des restes. Nous cherchons à montrer que la valeur absolue du reste d'indice $n+2$ est inférieure à celle du reste d'indice $n+1$. Nous allons chercher à majorer le reste d'indice $n+2$ et à minorer celui d'indice $n+1$. Commençons par la majoration.

Soit $n \geqslant 0$. Nous avons

$$\left|2\pi(n+1)!\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right| \leqslant 2\pi(n+1)!\left|\frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!}\right| \leqslant \frac{2\pi}{n+2},$$

car la série $\sum(-1)^k/k!$ vérifie les hypothèses du critères spécial des séries alternées.

Il nous faut maintenant minorer le terme d'indice $n+1$, mais le résultat sur les séries alternées ne fournit que des majorations du reste. Nous allons utiliser la même manipulation que dans la première question en isolant le premier terme du reste et en majorant la différence.

Nous avons

$$2\pi n!\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!} = \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1} + 2\pi n!\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$$

et

$$\left|2\pi n!\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right| \leqslant 2\pi n!\left|\frac{(-1)^{n+2}}{(n+2)!}\right| \leqslant \frac{2\pi}{(n+1)(n+2)}$$

car la série $\sum(-1)^k/k!$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. On en déduit, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|2\pi n!\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right| &\geqslant \left|\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1}\right| - \left|2\pi n!\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right| \\ &\geqslant \frac{2\pi}{n+1} - \frac{2\pi}{(n+1)(n+2)} \\ &\geqslant \frac{2\pi}{n+2}.\end{aligned}$$

Finalement, nous avons montré que

$$\left|2\pi(n+1)!\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right| \leqslant \left|2\pi n!\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right|.$$

Puisque la suite (u_n) tend vers 0, il existe $n_2 \geqslant n_1$ tel que

$$\forall n \geqslant n_2,\ u_n = 2\pi n!\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!} \in]\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.$$

Remarquons que

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ |\sin(x)| = \sin(|x|)$$

et que la fonction sinus est croissante sur l'intervalle $[0,\pi/2]$. Nous avons donc, pour $n \geqslant n_2$:

$$\begin{aligned}\left|\sin\left(\frac{2\pi(n+1)!}{e}\right)\right| &= \left|\sin\left(2\pi(n+1)!\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right)\right| \\ &= \sin\left(\left|2\pi(n+1)!\sum_{k=n+2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right|\right) \\ &\leqslant \sin\left(\left|2\pi n!\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right|\right) \\ &= \left|\sin\left(2\pi n!\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\right)\right| \\ &= \left|\sin\left(\frac{2\pi n!}{e}\right)\right|\end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $(|u_n|)_{n\geqslant n_2}$ est décroissante.
Finalement, nous avons montré que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_2}$ est alternée et que la valeur absolue de son terme général tend vers 0 en décroissant. Le critère spécial des séries alternées assure alors que la série $\sum_{n\geqslant n_2} u_n$ converge. Par conséquent, nous avons montré que

$$\text{la série} \quad \sum_{n\geqslant 0} \sin\left(\frac{2\pi n!}{e}\right) \quad \text{converge.}$$

Exercice 5.3 : Quelques calculs explicites de sommes de séries

Calculer la somme de chacune des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$

2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-1}$

3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^n}$ (on pourra effectuer le changement d'indice $n = k+1$)

4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}$

Cet exercice est consacré à des calculs explicites de sommes de séries. Dans aucune des questions, il n'est difficile de démontrer la convergence de la série. Il est néanmoins indispensable de le faire ! On peut soit la démontrer *a priori*, afin de pouvoir manipuler les sommes infinies dans la suite des calculs, soit la constater *a posteriori* en démontrant que la suite des sommes partielles est convergente.

Dans les chapitres consacrés aux séries de Fourier et aux séries entières vous verrez d'autres méthodes de calcul de sommes de séries.

Signalons que le calcul explicite de la somme d'une série est parfois difficile et souvent impossible. Il ne faut l'effectuer que lorsque cela est explicitement demandé.

1. La série est clairement convergente car son terme général est équivalent à $1/n^2$. De plus, elle est la somme des valeurs aux entiers de la fraction rationnelle $1/(X(X+1))$. Nous allons commencer par utiliser l'outil classique pour l'étude des fractions rationnelles, la décomposition en éléments simples. Ici, elle est particulièrement aisée à calculer :

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1}{X+1}.$$

Nous obtenons donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Il ne faut surtout pas écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}.$$

En effet, les deux séries qui figurent dans le membre de droite divergent et cette égalité n'a même pas de sens !

Pour utiliser la décomposition obtenue, nous devrons donc revenir à la définition de la somme de la série comme limite des sommes partielles. Les sommes partielles étant des sommes finies, il sera licite de les couper en deux en séparant les termes $1/n$ et $1/(n+1)$.

Nous avons

$$\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

Remarquons que

$$\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Pour tout $N \geqslant 1$, nous avons donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} \\ &= 1 - \frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

La suite des sommes partielles tend donc vers 1. Autrement dit,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Nous pouvons aussi voir la simplification de la somme en l'écrivant

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}.$$

On voit en effet que les termes se simplifient deux à deux: c'est une somme télé-scopique.

Enfin, il n'était pas nécessaire de démontrer la convergence *a priori* : nous n'avons manipulé que des sommes finies pour aboutir à la somme de la série. Nous avons en fait redémontré la convergence en calculant la somme.

2. Dans ce deuxième exemple, il s'agit encore d'une série donnée par la somme des valeurs aux entiers d'une fraction rationnelle. Nous allons procéder comme à la question précédente. Ici encore, la décomposition en éléments simples est très facile à calculer :

$$\frac{1}{X^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X+1}\right).$$

Nous avons

$$\frac{1}{n^2-1}\sim\frac{1}{n^2}.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 2} 1/(n^2-1)$ converge.
Remarquons que

$$\forall n\geqslant 2,\ \frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Pour tout $N\geqslant 2$, nous avons donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2-1} &= \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n-1}-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}-\sum_{n=3}^{N+1}\frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right).\end{aligned}$$

La suite des sommes partielles tend donc vers $1/2(1+1/2) = 3/4$. Autrement dit,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}.$$

3. Nous allons utiliser l'indication de l'énoncé qui nous suggère d'effectuer un changement d'indice. Nous allons partir d'une série indexée par n et la transformer en une série indexée par k avec la relation $n = k+1$.

Nous avons

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^n}$ converge.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En effectuant le changement d'indice $n = k+1$ (et donc $k = n-1$), nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{2^n} = \sum_{k=-1}^{N-1} \frac{k+1}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k+1}{2^{k+1}}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}}.$$

Nous devons maintenant utiliser l'égalité obtenue. Pour ce faire, remarquons que la série de départ, $\sum n/2^n$, apparaît dans la série qui figure au second membre. Nous allons rendre cette dépendance explicite afin d'en déduire une équation vérifiée par la somme cherchée.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\frac{k+1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right).$$

Les séries de termes généraux $(k+1)/2^{k+1}$, $k/2^k$ et $1/2^k$ convergent. Par conséquent, nous avons

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\right).$$

Avant de déduire l'égalité entre les sommes de l'égalité entre les termes généraux, il faut impérativement vérifier que les séries convergent ! Si ce n'était pas le cas, l'égalité finale n'aurait aucun sens.

Nous reconnaissons une somme de série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Regroupons, à présent, les égalités obtenues. Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} + 1. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2.$$

4. Nous allons utiliser ici la même méthode que pour calculer la somme de la série précédente. Les calculs seront simplement un peu plus longs.

Nous avons

$$\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\,\frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} < 1.$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2}{2^n}$ converge.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En effectuant le changement d'indice $n = k+1$ (et donc $k = n-1$), nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2}{2^n} = \sum_{k=-1}^{N-1} \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{2^k} + \frac{2k}{2^k} + \frac{1}{2^k}\right)$$

Les séries de termes généraux $(k+1)^2/2^{k+1}$, $k^2/2^k$, $k/2^k$ et $1/2^k$ convergent. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k} + 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k} + 4 + 2\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k} + 3
\end{aligned}$$

d'après la question précédente. On en déduit que la somme cherchée est solution de l'équation $x = x/2 + 3$ et donc que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

Exercice 5.4 : Formule de Stirling

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$ et $v_n = \ln(u_n)$.

1. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de $v_{n+1} - v_n$.

2. En déduire un réel α tel que $n^\alpha u_n$ ait une limite réelle non nulle. Conclure.

1. Dans cette première question, on demande d'effectuer un calcul classique de développement asymptotique. L'idée est de faire apparaître des développements limités de fonction usuelles. Pour cela, nous allons simplifier au maximum les factorielles à l'aide des logarithmes.

Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = n\ln(n) - n - \ln(n!).$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= (n+1)\ln(n+1) - (n+1) - \ln((n+1)!) \\
&\quad -n\ln(n) + n + \ln(n!) \\
&= (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - 1 - \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right) \\
&= n\ln(n+1) - n\ln(n) - 1 \\
&= n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 \\
&= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 \\
&= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Pour obtenir un développement à deux termes il aurait été naturel d'effectuer un développement limité à l'ordre 2 du logarithme en 0. Cependant, la simplification due à la présence du terme – 1 nous aurait fait perdre un terme. Lorsque ceci se produit et que l'on ne l'avait pas prévu, il suffit de reprendre les développements limités avec un terme de plus.

2. Nous allons commencer par effectuer les mêmes calculs que dans la question précédente en remplaçant u_n par $n^\alpha u_n$ et en faisant apparaître $v_{n+1} - v_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\ln(n^\alpha u_n) = \alpha\ln(n) + v_n$$

et

$$\begin{aligned}
\ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n) &= \alpha\ln(n+1) + v_{n+1} - \alpha\ln(n) - v_n \\
&= \alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + v_{n+1} - v_n \\
&= \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{2n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{2\alpha - 1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Dans l'étude des séries on préfère souvent simplifier les développements obtenus en utilisant la notation O plutôt que o. Comme on le voit sur cet exemple, ceci allège l'expression sans pour autant faire perdre l'information essentielle : une série dont le terme général est un $O(1/n^2)$ est convergente. Tout ce qui est fait par la suite aurait pu être rédigé avec le développement plus complet de l'avant-dernière égalité.

Nous pouvons déduire de l'égalité précédente des informations sur la série de terme général $\ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n)$ en fonction de α. En particulier, elle converge si, et seulement si, $\alpha = 1/2$. Il nous faut maintenant en déduire des informations sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les résultats que nous connaissons pour les séries permettent également d'étudier les suites. On procède généralement de la façon suivante : pour étudier une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on considère la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$. On constate que la suite converge si, et seulement si, la série converge.

Nous allons utiliser cette remarque en redémontrant l'implication qui nous intéresse ici.

Posons

$$\alpha = \frac{1}{2}.$$

D'après le calcul précédent, nous avons alors

$$\ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(\ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n))$ converge.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\sum_{n=1}^{N}(\ln((n+1)^\alpha u_{n+1}) - \ln(n^\alpha u_n)) = \ln((N+1)^\alpha u_{N+1}) - \ln(u_1).$$

Nous venons de démontrer que le membre de gauche converge. On en déduit que la suite $(\ln(n^\alpha u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Notons $l \in \mathbb{R}$ sa limite. Nous avons alors

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n = e^l > 0.$$

Finalement, nous avons montré que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(e^l n^{-\alpha})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont équivalentes. En d'autres termes,

$$n! \sim e^{-l}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

On peut démontrer que $e^{-l} = \sqrt{2\pi}$, par exemple avec les intégrales de Wallis.

Exercice 5.5 : Séparation des termes pairs et impairs

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série absolument convergente. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

1. Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ sont absolument convergentes. Que dire de leurs sommes ?

2. Montrer que, si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente mais n'est pas absolument convergente, il peut arriver que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ divergent.

3. Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

1. Traduisons l'énoncé : nous devons démontrer que les séries $\sum_{n\geqslant 0} |v_n|$ et $\sum_{n\geqslant 0} |w_n|$ convergent, sachant que la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge. Puisque ces deux séries sont à termes positifs, il suffit de montrer que leurs sommes partielles sont majorées. Pour cela, nous allons les comparer aux sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$.

Par hypothèse, la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est absolument convergente. Cela signifie que la série $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge. Nous noterons S sa somme. Quel que soit $N \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} |v_n| &= \sum_{n=0}^{N} |u_{2n}| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{2N} |u_n| \\ &\leqslant S\end{aligned}$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0} |v_n|$ converge et la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est absolument convergente.
On montre de même que la série $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ est absolument convergente.

Nous nous intéressons, à présent, à la somme de ces séries. Intuitivement, le résultat suivant s'impose :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n + \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démontrons-le.

Les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ sont absolument convergentes et donc convergentes. Quel que soit $N \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} v_n + \sum_{n=0}^{N} w_n &= \sum_{n=0}^{N} u_{2n} + \sum_{n=0}^{N} u_{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{2N+1} u_n.\end{aligned}$$

En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n + \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

2. On nous demande ici de trouver un exemple de série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ vérifiant certaines propriétés. Tout d'abord, il faut qu'elle soit convergente, mais pas absolument convergente. L'exemple classique de série vérifiant ces conditions est $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n/n$. Cet exemple est à retenir ! Nous allons montrer qu'il satisfait toutes les conditions requises. Pour coller à l'énoncé de l'exercice et avoir une série qui possède un terme d'ordre 0, nous allons décaler les indices.

Posons

$$(u_n)_{n\geqslant 0} = \left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}.$$

La série $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n/(n+1)$ est alternée et la valeur absolue $1/(n+1)$ de son terme général tend vers 0 en décroissant. D'après le critère spécial des séries alternées, cette série converge. En revanche, la série

$$\sum_{n\geqslant 0} |u_n| = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}$$

diverge et la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ ne converge donc pas absolument.

En reprenant les notations de la question précédente, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$v_n = u_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

et

$$w_n = u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = -\frac{1}{2n+2}.$$

Par conséquent, les séries $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} w_n$ divergent.

3. Il ne s'agit ici que de simples applications des résultats obtenus aux deux questions précédentes. Dans chaque exemple, nous chercherons à faire intervenir une série absolument convergente, la série de ses termes pairs et celle de ses termes impairs. Pour la première série, c'est immédiat.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est absolument convergente. D'après la question **1**, les séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ sont absolument convergentes et donc convergentes. En outre, d'après la question **2**, elles satisfont l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Nous commettons un léger abus ici puisque nous utilisons les résultats qui ont été obtenus pour une série de la forme $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ avec une série de la forme $\sum_{n\geqslant 1} u_n$. Cela ne change pas le fond du problème, mais il faut prendre garde aux indices : la série qui contient les termes d'ordre impair doit encore commencer à l'indice 0 ! Remarquons que si l'on souhaite se ramener au cas étudié, il suffit de poser $u_0 = 0$.

Pour connaître la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, il nous suffit, à présent, de connaître celle de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, que l'énoncé nous donne, et celle de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$, qui s'en déduit.

Nous avons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Par conséquent, nous avons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Considérons maintenant la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Elle est absolument convergente et nous allons l'étudier en séparant ses termes d'ordre pair et impair.

La série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente. D'après les questions **1** et **2** et le résultat précédent nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} \\ &= -\frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Exercice 5.6 : Convergence et développement asymptotique

Soit un réel $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$.

On pourra commencer par déterminer un développement asymptotique à deux termes du terme général de cette série.

Notons que si α était strictement négatif la série serait grossièrement divergente ; si α était nul, elle ne serait même pas définie !

Les termes de la série à étudier n'étant pas de signe constant, le calcul d'un équivalent du terme général, autrement dit d'un développement à un terme, ne permettra pas de conclure. Nous allons donc rechercher plus de précision et déterminer, ainsi que l'énoncé nous le suggère, un développement à deux termes.

On pourrait vouloir essayer d'utiliser le critère spécial des séries alternées. Cependant, la série proposée ici ne vérifie pas toujours ses hypothèses.
Plus précisément, il est clair que le terme général est alterné et tend vers 0. Cependant, la décroissance de sa valeur absolue est équivalente à la croissance de $n^\alpha + (-1)^n$. Clairement, cette suite n'est pas croissante si $0 < \alpha < 1$. En effet, dans ce cas, on a

$$((n+1)^\alpha + (-1)^{n+1}) - (n^\alpha + (-1)^n) = n^\alpha((1+1/n)^\alpha - 1) + 2\,(-1)^{n+1}.$$

Or

$$n^\alpha((1+1/n)^\alpha - 1) \sim \alpha\, n^{\alpha-1}$$

qui tend vers 0, donc

$$((n+1)^\alpha + (-1)^{n+1}) - (n^\alpha + (-1)^n) \sim 2\,(-1)^n$$

qui n'est pas de signe constant.

Effectuons un développement asymptotique à deux termes du terme général de la série en utilisant le développement limité au voisinage de 0 : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$.

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(\frac{1}{1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)
\end{aligned}$$

Nous sommes parvenus à décomposer le terme général comme somme de termes dont nous connaissons la nature, d'après les théorèmes du cours.

La série de terme général $(-1)^n/n^\alpha$ est alternée et la valeur absolue de son terme général tend vers 0 en décroissant. Par conséquent, la série de terme général $(-1)^n/n^\alpha$ converge.
Posons

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n^\alpha}.$$

Nous avons montré que

$$v_n = -\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \sim -\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

qui est de signe constant. Par conséquent les séries de terme général v_n et $1/n^{2\alpha}$ sont de même nature, i.e. convergentes si $\alpha > 1/2$ et divergentes si $\alpha \leqslant 1/2$.

Remarquons ici un point important : nous n'avons pas traité isolément le cas du terme $o(1/n^{2\alpha})$. La raison en est qu'il n'est pas possible de déterminer sa nature en général. Lorsque $\alpha > 1/2$, nous savons que cette série converge, mais, lorsque $\alpha \leqslant 1/2$, on ne peut rien dire. Considérons par exemple le cas où $\alpha = 1/4$ et intéressons-nous aux séries de terme général $1/n$ et $1/n^2$. Ces deux quantités sont bien négligeables devant $1/n^{2\alpha} = 1/\sqrt{n}$, mais la première série diverge alors que la seconde converge.
Pour cette raison, nous avons laissé ensemble les deux termes $-1/n^{2\alpha}$ et $o(1/n^{2\alpha})$ afin de faire apparaître un équivalent.

Finalement, deux cas se présentent :

(1) si $\alpha > 1/2$, la série étudiée est somme de deux séries convergentes : elle est convergente ;

(2) si $\alpha \leqslant 1/2$, la série étudiée est somme d'une série convergente et d'une série divergente : elle est divergente.

L'équivalent

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}\right| \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

montre que la série converge absolument si, et seulement si, $\alpha > 1$. Ceci ne permet cependant pas d'étudier le cas $0 < \alpha \leqslant 1$.

Exercice 5.7 : Un critère de convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive décroissante.
Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = 2^n u_{2^n}$.

1. Démontrer que les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

2. Applications :

2.a. Soit un réel $\alpha > 0$. Retrouver le critère de Riemann pour la convergence de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$.

2.b. Soient deux réels strictements positifs α et β. À l'aide des deux questions précédentes, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que la série $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ (*série de Bertrand*) soit convergente.

1. Les séries considérées ici sont à termes positifs ; pour de telles séries, il suffit de majorer les sommes partielles par une constante pour montrer la convergence. Nous allons essayer d'obtenir ces majorations en exploitant la décroissance de la suite de terme général u_n.

Nous pouvons faire apparaître v_n en regroupant les termes de la série u_n par paquets de 2^n. En effet, la somme $u_{2^n} + \cdots + u_{2^{n+1}-1}$ compte 2^n termes qui sont tous inférieurs ou égaux au plus grand d'entre eux, qui est u_{2^n}. Ceci permet de majorer les sommes partielles de la série de terme général u_n.

• Supposons que la série $\sum v_n$ converge.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k \leqslant 2^n u_{2^n} = v_n,$$

car la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2^{n_0+1} - 1 \geqslant n$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &\leqslant \sum_{k=0}^{2^{n_0+1}-1} u_k \\
&\leqslant u_0 + \sum_{n=0}^{n_0} \left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k \right) \\
&\leqslant u_0 + \sum_{n=0}^{n_0} v_n \\
&\leqslant u_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.
\end{aligned}$$

La série $\sum u_k$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées par une constante ; elle est donc convergente.

Pour démontrer l'autre implication, nous allons utiliser la même technique. Il faut cependant prendre garde à ne pas majorer trop naïvement les termes v_n. En effet, en procédant comme précédemment, nous obtenons

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n u_{2^n} \leqslant \sum_{k=1}^{2^n} u_k$$

et nous n'aboutirons à rien d'intéressant en sommant ces inégalités. Nous devons donc regrouper moins de termes. Pour obtenir une expression proche de celle que nous avons utilisée précédemment, nous allons en regrouper 2^{n-1}. Cela revient à majorer non plus v_n, mais $v_n/2$. Puisque les séries $\sum v_n$ et $\sum v_n/2$ sont de même nature, cela n'aura pas d'incidence sur le résultat final.

• Supposons que la série $\sum u_n$ converge.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\frac{1}{2}\, v_n = 2^{n-1} u_{2^n} \leqslant \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} u_k,$$

car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} v_n &= \frac{1}{2}\, v_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}\, v_n \\
&\leqslant \frac{1}{2}\, v_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} u_k \right) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\, v_0 + \sum_{k=2}^{2^N} u_k \\
&\leqslant \frac{1}{2}\, v_0 + \sum_{k=2}^{+\infty} u_k
\end{aligned}$$

La série $\sum v_n/2$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées par une constante ; elle est donc convergente. On en déduit que la série $\sum v_n$ converge également.

2.a. Nous considérons ici la série $\sum 1/n^\alpha$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous posons donc $u_n = 1/n^\alpha$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et décroissante, car $\alpha > 0$.

L'énoncé de la première question concerne des séries définies à partir du rang $n = 0$. Cependant, nous ne nous intéressons ici qu'à la convergence des séries et non à la valeur exacte de leur somme ; nous pouvons donc prolonger la définition de u_n

pour $n = 0$ en restant conforme aux hypothèses de la première question, par exemple en posant $u_0 = 1$ afin que la suite de terme général u_n soit toujours positive et décroissante. Il ne reste plus alors qu'à appliquer le résultat de la question précédente.

Définissons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1\,; \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\, u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}. \end{cases}$$

Cette suite est positive et décroissante, puisque $\alpha > 0$. Remarquons que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum 1/n^\alpha$ converge.
Avec les notations de la question précédente, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N},\, v_n = 2^n u_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = 2^{(1-\alpha)n} = \left(2^{1-\alpha}\right)^n.$$

La série $\sum v_n$ est géométrique de raison $2^{1-\alpha}$. Elle converge si, et seulement si, cette raison appartient à l'intervalle $]-1,1[$, autrement dit si, et seulement si, $\alpha > 1$.
En utilisant le résultat de la question **1**, on en déduit que la série $\sum 1/n^\alpha$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2.b. Nous allons procéder ici de la même façon que précédemment. Le raisonnement n'est pas plus compliqué. Il faut néanmoins rester vigilant car il y aura plusieurs cas à distinguer.

Définissons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1\,; \\ \forall n \geqslant 2,\, u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}. \end{cases}$$

Cette suite est positive et décroissante, puisque $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Remarquons que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum 1/(n^\alpha \ln^\beta(n))$ converge.
Pour tout $n \geqslant 1$ nous avons

$$v_n = 2^n u_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha \ln^\beta(2^n)} = \frac{2^{(1-\alpha)n}}{\ln^\beta(2) n^\beta}.$$

Nous allons distinguer trois cas selon la position de α par rapport à 1.

• Supposons $\alpha < 1$.
Nous avons alors $1-\alpha > 0$ et la suite v_n tend vers $+\infty$. Par conséquent, la série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge grossièrement.

• Supposons $\alpha > 1$.
Nous avons

$$v_n = o\left(2^{(1-\alpha)n}\right).$$

Or $2^{(1-\alpha)n}$ est le terme général d'une série géométrique de raison $2^{1-\alpha}$. Puisque $\alpha > 1$, nous avons $2^{1-\alpha} \in]0,1[$ et cette série est convergente. La série $\sum v_n$ converge donc également.

• Supposons $\alpha = 1$.
Pour tout $n \geqslant 1$ nous avons alors

$$v_n = \frac{1}{\ln^{\beta}(2)n^{\beta}}.$$

D'après la question **2.a**, la série $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\beta > 1$.
Pour résumer, nous avons montré que la série

$$\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta}(n)}$$

converge si, et seulement si, nous nous trouvons dans l'un des deux cas suivants :
i) $\alpha > 1$;
ii) $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 5.8 : Convergence et monotonie

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive décroissante telle que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente. Montrer que $u_n = o(1/n)$.
Indication : on pourra chercher à majorer la quantité $\frac{n}{2} u_n$.

2. Donner un contre-exemple dans le cas où l'on ne suppose pas la suite décroissante.

Remarquons que l'hypothèse de positivité est redondante. La série étant convergente, son terme général tend vers 0. La suite étant décroissante, cette limite est sa borne inférieure, le terme général est donc nécessairement positif.

1. Nous souhaitons montrer que le terme général de la série est négligeable devant $1/n$. Nous allons donc chercher à majorer u_n et même $n\,u_n$ en utilisant les hypothèses : la décroissance de la suite (u_n) et la convergence de la série $\sum u_n$.

La décroissance de la suite se traduit par

$$u_n \leqslant u_{n-1} \leqslant u_{n-2} \leqslant \cdots .$$

Puisque $n\,u_n$ est une somme de n termes, nous allons chercher à le majorer en fonction d'une somme partielle de la série. En utilisant la décroissance de la suite, nous obtenons

$$\begin{aligned} n\,u_n &= u_n + \cdots + u_n (n \text{ fois}) \\ &\leqslant u_1 + \cdots + u_n \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} u_k . \end{aligned}$$

De ce calcul, nous déduisons déjà que la suite $(n\,u_n)$ est bornée et donc que

$$u_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

L'énoncé demande une information plus précise. Nous allons utiliser la méthode précédente pour majorer la quantité $\dfrac{n}{2}u_n$, ainsi que l'indication nous y invite. La présence de $n/2$ plutôt que de n en facteur nous suggère de considérer une somme de seulement $n/2$ termes. Nous allons donc garder les $n/2$ plus petits termes de la somme précédente. Pour couvrir le cas où n est impair, la somme ira de $E(n/2)+1$ à n. Ainsi, elle aura bien $n/2$ termes si n est pair et $(n+1)/2$ si n est impair.

Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{n}{2}\,u_n &\leqslant \sum_{k=E(n/2)+1}^{n} u_k \\ &\leqslant \sum_{k=E(n/2)+1}^{+\infty} u_k . \end{aligned}$$

Puisque la série de terme général u_n est convergente, nous avons

$$\sum_{k=E(n/2)+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $E(n/2)+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$

On en déduit que $\frac{n}{2} u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et donc que

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. Pour trouver un contre-exemple, nous cherchons une série $\sum v_n$ convergente à termes positifs dont le terme général n'est pas négligeable devant $1/n$. Pour que cette dernière condition soit remplie, il nous suffit d'imposer que l'on puisse trouver des indices n aussi grands que l'on veut pour lesquels $v_n \geqslant 1/n$. Autrement dit, nous voulons qu'il existe un sous-ensemble infini E de $\mathbb{N}$ tel que, pour tout élément n de E, $v_n \geqslant 1/n$. En dehors de l'ensemble E, nous n'avons rien imposé et pouvons par exemple demander que, pour $n \notin E$, $v_n = 0$. Nous pouvons choisir l'ensemble E comme nous le voulons tant qu'il est infini. Nous pouvons espérer que si ses éléments sont très espacés, la série $\sum v_n$ converge.
En résumé, la stratégie est la suivante. Nous allons choisir un ensemble $E \subset \mathbb{N}$ infini et considérer la série dont le terme général v_n vaut $1/n$ pour $n \in E$ et 0 pour $n \notin E$. Sa somme vaut donc

$$\sum_{n \in E} \frac{1}{n}.$$

Il ne nous reste plus qu'à choisir E de façon qu'elle soit finie. L'ensemble des puissances de 2 convient. Nous pourrions également choisir l'ensemble des puissances de 3, des carrés, etc.

Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est une puissance de 2 ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ est à termes positifs.
Quel que soit $N \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N} v_n &= \sum_{n=0}^{E(\log_2(N))} \frac{1}{2^n} \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \\ &\leqslant 2. \end{aligned}$$

Par conséquent, comme son terme général est positif et la suite de ses sommes partielles majorée, la série $\sum_{n \geqslant 0} v_n$ est convergente (et de somme inférieure à 2). Pourtant la suite de terme général $n\, v_n$ ne tend pas vers 0 car elle prend une infinité de fois la valeur 1.

Sans l'hypothèse de positivité, on pouvait trouver un contre-exemple plus simple, par exemple $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 5.9 : Equivalents et restes de séries

1.a. Soit un réel $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1.b. Soit un réel $\alpha \in]0,1]$. Déterminer un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives équivalentes. On suppose que les séries convergent. Montrer que, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

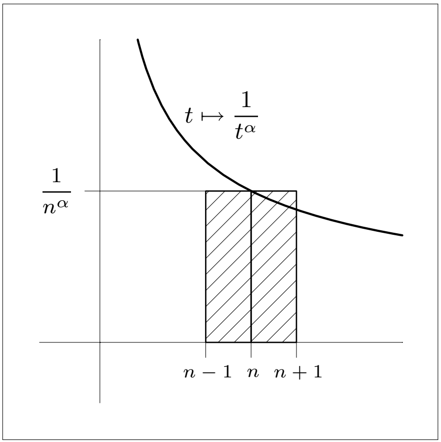
3. On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Démontrer qu'il existe un réel γ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Indication : On pourra chercher à exprimer la quantité $\ln(n+1)$ comme une somme partielle de série.

4. À l'aide des questions précédentes, montrer que $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

1.a. D'après le cours, nous savons que la série $\sum 1/n^\alpha$ converge, car $\alpha > 1$. L'exercice nous demande de calculer un équivalent du reste de cette série. La démonstration de convergence du cours repose sur la comparaison entre la série et l'intégrale de la fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$. Nous allons reprendre ici cette méthode.

Rappelons comment elle fonctionne. Dans un premier temps, il faut parvenir à lire la quantité $1/n^\alpha$ sur le graphe de la fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$. Nous pouvons l'interpréter comme l'aire du rectangle de base $[n,n+1]$ et de hauteur $1/n^\alpha$, et l'on en déduit qu'elle est minorée par $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha}$, ou bien, si $n \geqslant 2$, comme l'aire du rectangle de base $[n-1,n]$ et de hauteur $1/n^\alpha$, et l'on en déduit qu'elle est majorée par $\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha}$. On somme ensuite ces inégalités afin d'obtenir un encadrement des sommes partielles ou du reste.



L'intégrale sur $[n-1,n]$ n'a de sens que pour $n \geqslant 2$!

Soit $n \geqslant 1$. La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent,

$$\forall t \in [n,n+1],\ \frac{1}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$$

et

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha}.$$

De même, si $n \geqslant 2$, nous avons

$$\forall t \in [n-1,n],\ \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$$

et

$$\frac{1}{n^\alpha} = \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Pour obtenir un équivalent du reste $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, nous allons commencer par encadrer $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$ puis faire tendre N vers l'infini.

Soit $n \geqslant 0$. Quel que soit $N \geqslant n+1$, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} &\geqslant \sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \\
&\geqslant \int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \\
&\geqslant \left[\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_{n+1}^{N+1} \\
&\geqslant \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons l'inégalité

$$R_n \geqslant \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = m_n.$$

En effet, $\lim\limits_{N\to+\infty} (N+1)^{\alpha-1} = +\infty$ car $\alpha > 1$.
Pour $n \geqslant 1$ le même raisonnement montre que

$$R_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}} = M_n.$$

Nous sommes parvenus à encadrer le reste R_n pour $n \geqslant 1$. Comme le minorant et le majorant sont équivalents, nous avons résolu la question.

Comme $\alpha - 1$ est une constante, $m_n \sim M_n$. Puisque R_n est encadré entre deux quantités équivalentes, il est lui-même équivalent à chacune de ces deux quantités. Par conséquent, nous avons

$$R_n \sim \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

1.b. Pour résoudre cette question, nous allons procéder de la même manière que précédemment et encadrer la somme S_n entre deux intégrales. Il faudra bien sûr traiter à part le cas $\alpha = 1$ dans le calcul de l'intégrale puisqu'alors interviendra la fonction logarithme.

Enfin, nous prendrons garde à ce que l'indice de départ des sommes partielles soit 2 afin que les intégrales écrites ne concernent bien que des fonctions définies et continues sur un segment.

Supposons, tout d'abord, que $\alpha \in]0,1[$. La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ étant encore décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, le même raisonnement qu'à la question précédente montre que

$$\forall n \geqslant 2, \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

Quel que soit $n \geqslant 2$, nous avons donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} &\geqslant \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \\
&\geqslant \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \\
&\geqslant \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{t^{\alpha-1}} \right]_2^{n+1} \\
&\geqslant \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{2^{\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

Étant donné que le premier terme de la série est 1 on en déduit :

$$\forall n \geqslant 1,\ S_n \geqslant 1 + \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{2^{\alpha-1}} = u_n.$$

De même, on montre que

$$\forall n \geqslant 1,\ S_n \leqslant 1 + \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} = v_n.$$

En raisonnant comme dans la question précédente et en utilisant le fait que $\lim_{n \to +\infty} n^{\alpha-1} = 0$, on montre que

$$u_n \sim v_n \sim \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

On en déduit que

$$S_n \sim \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Supposons enfin $\alpha = 1$. En raisonnant comme précédemment, on montre que

$$\forall n \geqslant 2, \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

puis que

$$\forall n \geqslant 1,\ 1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

et finalement que

$$S_n \sim \ln(n).$$

Dans le cas $\alpha \leqslant 0$, le même raisonnement permet de trouver un équivalent de la suite des sommes partielles, à ceci près que la fonction $t \mapsto 1/t^{\alpha}$ est croissante. Ainsi, les inégalités sont inversées :

$$\forall n \geqslant 2, \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha}} \leqslant \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}$$

$$\forall n \geqslant 2, \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \leqslant \int_{2}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}$$

mais l'équivalent final est le même :

$$S_n \sim \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

2. Dans un premier temps, traduisons les hypothèses. Comme il s'agit d'un exercice théorique, nous allons revenir ici à la définition véritable de l'équivalence de suites : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la somme de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'une suite négligeable devant cette dernière.

Il ne faut pas traduire l'hypothèse sous la forme $u_n/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. En effet, rien ne nous assure que l'expression u_n/v_n ait un sens ! Il est parfaitement possible que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posséde des termes nuls.
En outre, nous allons manipuler des sommes de séries et il est donc plus logique de traduire l'hypothèse sous une forme additive et non multiplicative.

Puisque les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes, il existe une suite réelle $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + w_n\ ; \\ w_n = o(v_n). \end{cases}$$

En sommant les inégalités précédentes, nous obtenons

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k.$$

(Remarquons que la série $\sum w_n$ converge puisque la série $\sum v_n$ est positive et convergente et que $w_n = o(v_n)$.)
Nous aurons donc résolu le problème si nous parvenons à montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

Pour cela, nous allons revenir à la définition de suite négligeable. Rappelons qu'une suite réelle ou complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant une suite réelle ou complexe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |b_n| \leqslant \varepsilon |a_n|.$$

Ici encore, il est essentiel de revenir à la véritable définition d'une suite négligeable et ne pas se contenter d'écrire qu'un certain quotient (dont on ne sait même pas s'il existe) tend vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ |w_n| \leqslant \varepsilon |v_n| \leqslant \varepsilon\, v_n,$$

car la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive.
Soit $n \geqslant N$. En sommant les inégalités précédentes, nous obtenons

$$\forall M \geqslant n+1,\ \left|\sum_{k=n+1}^{M} w_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{M} |w_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{M} v_k.$$

La série de terme général w_n converge (par comparaison avec la série convergente de terme général positif v_n). Nous obtenons alors, lorsque M tend vers $+\infty$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

En d'autres termes, nous avons montré que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

Revenons, à présent, à la série $\sum u_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\forall k \geqslant n+1,\ u_n = v_n + w_n$$

et donc

$$\forall M \geqslant n+1,\ \sum_{k=n+1}^{M} u_k = \sum_{k=n+1}^{M} v_k + \sum_{k=n+1}^{M} w_k.$$

Puisque les séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes, nous pouvons faire tendre M vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente. Nous obtenons

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k.$$

Or, nous avons montré que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

On en déduit

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

3. L'énoncé nous suggère d'écrire la quantité $\ln(n+1)$ sous la forme d'une somme partielle de série. On peut relier le terme général d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à une somme partielle de série télescopique de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_0 = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k).$$

Nous allons utiliser ici cette méthode. Elle nous permettra de ramener la quantité $H_n - \ln(n)$ à une somme partielle de série.

Remarquons que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln(n+1) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)).$$

Par conséquent, quel que soit $n \geqslant 1$, nous avons

$$\begin{aligned} H_n - \ln(n) &= H_n - \ln(n+1) + \ln(n+1) - \ln(n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

L'énoncé demande de montrer que la suite de terme général $H_n - \ln(n)$ converge. La suite de terme général $\ln(1 + 1/n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par conséquent, il nous suffit de montrer que la série de terme général $1/k - \ln(k+1) + \ln(k)$ converge. Pour l'étudier, nous allons chercher dans un premier temps à la comparer à une série de Riemann. Pour cela, nous allons effectuer un développement asymptotique de son terme général à partir d'un développement limité de la fonction logarithme.

Lorsque le terme général d'une série est donné par une formule faisant intervenir des fonctions usuelles, il est souvent profitable d'essayer de le comparer à une série de Riemann en utilisant les développements limités usuels. Bien sûr, cette méthode ne fonctionne pas toujours, mais lorsque c'est le cas elle est la plus simple et la plus rapide pour conclure (mis à part les cas particuliers où le critère de d'Alembert s'applique de manière évidente, par exemple lorsque l'on est en présence d'exponentielles et de factorielles.). À défaut, on peut aussi essayer le critère spécial des séries alternées si l'on est en présence d'un facteur $(-1)^n$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) &= \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\ &= O\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned}$$

D'après le critère de comparaison aux séries de Riemann, la série de terme général $1/k - \ln(k+1) + \ln(k)$ est convergente. Notons γ sa somme. Nous avons

$$\begin{aligned} H_n - \ln(n) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma + 0 = \gamma. \end{aligned}$$

En d'autres termes,

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1),$$

avec

$$\gamma = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right).$$

4. Nous avons vu précédemment que $H_n - \ln(n)$ peut s'exprimer à l'aide d'une somme partielle de série dont la somme est γ. En conséquence, leur différence est le reste d'une série: ceci nous permettra d'utiliser les résultats précédents.

Reprenons les calculs effectués à la question précédente. Quel que soit $n \geqslant 1$, nous avons

$$\begin{aligned}
H_n - \ln(n) - \gamma &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \gamma \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right) \\
&= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right).
\end{aligned}$$

Nous allons, à présent, chercher un développement asymptotique en $o(1/n)$ de chacun des termes de la somme. Le premier ne présente aucune difficulté ; pour le second, nous utiliserons le résultat de la question **2.** afin de nous ramener à une série dont le terme général est plus sympathique.

Nous avons

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Nous avons également

$$\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) = \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \sim \frac{1}{2k^2}.$$

D'après la question **2.**, nous avons donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right) \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$$

et, d'après la question **1.a** (avec $\alpha = 2 > 1$),

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right) \sim \frac{1}{2n},$$

autrement dit,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln(k+1)+\ln(k)\right)=\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Finalement, nous obtenons

$$H_n-\ln(n)-\gamma=\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 5.10 : Transformation d'Abel (PSI)

1. On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que :

i) il existe un réel positif M tel que, pour tout $N\in\mathbb{N}$, $\left|\sum_{n=0}^{N}a_n\right|\leqslant M$;

ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}a_nb_n$ est convergente.

2. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{\cos(n\theta)}{n+1}$.

1. Remarquons tout d'abord que l'exercice proposé est théorique, sans information numérique, ce qui rend inutilisables les critères de convergence classiques. Nous allons donc nous rabattre sur le critère de Cauchy.

Pour essayer de vérifier les hypothèses de ce critère, nous allons calculer des différences de sommes partielles en tâchant de faire intervenir les données de l'énoncé et notamment les sommes partielles de la série $\sum a_n$. Nous pouvons les faire apparaître en écrivant

$$a_N=\sum_{n=0}^{N}a_n-\sum_{n=0}^{N-1}a_n.$$

En remplaçant a_n par ces sommes dans l'expression des sommes $\sum a_nb_n$ nous ferons apparaître les sommes partielles de la série de terme général a_n, sommes pour lesquelles nous disposons d'une hypothèse de majoration. Cette manipulation est la *transformation d'Abel.*

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, posons

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_k\quad\text{et}\quad A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k.$$

Remarquons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = A_n - A_{n-1}.$$

Pour appliquer le critère de Cauchy, nous devons démontrer :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*,\ n \geqslant N \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| \leqslant \varepsilon.$$

Une autre façon de le formuler est : majorer $|S_{n+p} - S_n|$ par une suite indépendante de p et tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Nous avons

$$\begin{aligned}
S_{n+p} - S_n &= \sum_{k=0}^{n+p} a_k b_k - \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} (A_k - A_{k-1}) b_k \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{k-1} b_k \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} A_k b_{k+1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_{k+1} \\
&\quad + A_{n+p} b_{n+p+1} - A_n b_{n+1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_{n+p} b_{n+p+1} - A_n b_{n+1}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
|S_{n+p} - S_n| &\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |A_k||b_k - b_{k+1}| + |A_n b_{n+1}| + |A_{n+p} b_{n+p+1}| \\
&\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} M(b_k - b_{k+1}) + M\, b_{n+1} + M\, b_{n+p+1}.
\end{aligned}$$

En effet :
• d'une part, pour tout entier naturel k, $|b_k - b_{k+1}| = b_k - b_{k+1}$, la suite $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant décroissante ;
• d'autre part, $|b_{n+1}| = b_{n+1}$ et $|b_{n+p+1}| = b_{n+p+1}$ car cette suite est à termes positifs.
Par conséquent nous avons

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &\leqslant M\left(\sum_{k=n+1}^{n+p} (b_k - b_{k+1}) + b_{n+1} + b_{n+p+1}\right) \\ &\leqslant M(b_{n+1} - b_{n+p+1} + b_{n+1} + b_{n+p+1}) \\ &\leqslant 2\,M\,b_{n+1}. \end{aligned}$$

Nous avons bien majoré $|S_{n+p} - S_n|$ indépendamment de p par une suite tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il ne reste plus qu'à le formaliser.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\, b_n \leqslant \varepsilon.$$

Soient $n \geqslant N$ et $p \geqslant 1$. D'après les inégalités précédentes, nous avons

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &\leqslant 2Mb_{n+1} \\ &\leqslant 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit que la série $\sum a_n b_n$ satisfait l'hypothèse du critère de Cauchy et donc qu'elle converge.

2. Nous allons chercher à utiliser le résultat obtenu à la question précédente. Pour cela, il nous faut écrire

$$\frac{\cos(n\theta)}{n} = a_n b_n,$$

où a_n est le terme général d'une série dont les sommes partielles sont bornées et b_n est le terme général d'une suite réelle positive, décroissante et de limite nulle. Un choix s'impose tout naturellement :

$$a_n = \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{n+1}.$$

La suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait alors les conditions requises. Il nous reste à les vérifier pour la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$: nous devons trouver un moyen de majorer la valeur absolue de la somme

$$\sum_{n=0}^{N} \cos(n\theta)$$

indépendamment de l'entier N. La somme de cosinus peut être simplifiée à l'aide des complexes en écrivant $\cos(n\theta) = \mathcal{R}\mathrm{e}(e^{in\theta})$. Ceci fera apparaître une somme partielle de série géométrique que nous savons calculer explicitement. Comme d'habitude, il faut traiter séparément le cas où la raison, ici $\exp(i\theta)$, vaut 1.

• Supposons, tout d'abord, que $\theta = 0 \bmod 2\pi$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $n\theta = 0 \bmod 2\pi$ et donc $\cos(n\theta) = 1$. Par conséquent, nous avons

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}.$$

Cette série diverge.

• Supposons, à présent, que $\theta \neq 0 \bmod 2\pi$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$a_n = \cos(n\theta) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\theta \neq 0 \bmod 2\pi$, nous avons $e^{i\theta} \neq 1$. Par conséquent, quel que soit $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{N} a_n\right| &= \left|\sum_{n=0}^{N} \cos(n\theta)\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{N} \mathcal{R}\mathrm{e}\left(e^{in\theta}\right)\right| \\
&= \left|\mathcal{R}\mathrm{e}\left(\sum_{n=0}^{N} \left(e^{i\theta}\right)^n\right)\right| \\
&= \left|\mathcal{R}\mathrm{e}\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)\right| \\
&\leqslant \left|\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| \\
&\leqslant \frac{2}{|1-e^{i\theta}|}.
\end{aligned}$$

Ce majorant est indépendant de N. En outre, la suite $(b_n)_{n\geqslant 0} = (1/(n+1))_{n\geqslant 0}$ est positive, décroissante et de limite nulle. On déduit alors du résultat obtenu à la question **1** que la série

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos(n\theta)}{n+1}$$

converge.

Suites et séries de fonctions

6

Ce chapitre n'est pas au programme de PT.

Exercice 6.1 : Convergence uniforme d'une suite de fonctions I (PSI)

On définit deux suites de fonctions sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = x^n \sin(\pi x)$. Démontrer que ces suites convergent uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

L'étude des fonctions f_n est aisée. Nous allons pouvoir déterminer leurs extrema, ce qui permettra de conclure quant à leur convergence uniforme.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée de f_n est

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n-(n+1)x).$$

On en déduit que la fonction f_n est croissante sur $[0,n/(n+1)]$ et décroissante sur $[n/(n+1),1]$. De plus, elle vaut 0 en 0 et 1. Ainsi :

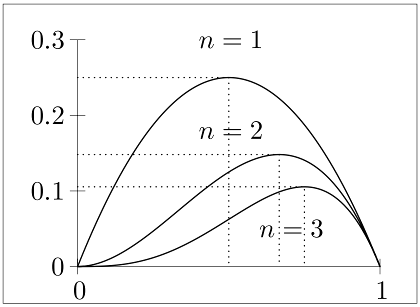
$$\forall x \in [0,1], 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(n/n+1)$$

ce qui montre que $|f_n|$ atteint son maximum en $n/(n+1)$, i.e. $||f_n||_\infty = f_n(n/(n+1))$.
Par ailleurs,

$$\begin{aligned} f_n(n/n+1) &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \frac{1}{n+1} \\ &\sim \frac{1}{en}. \end{aligned}$$

En conséquence, $||f_n||_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui montre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

La représentation graphique des fonctions f_n permet de visualiser les calculs précédents : on constate que l'abscisse du maximum de $|f_n|$ (en fait de f_n, car cette fonction est positive) tend vers 1 mais que la valeur de ce maximum tend bien vers 0.

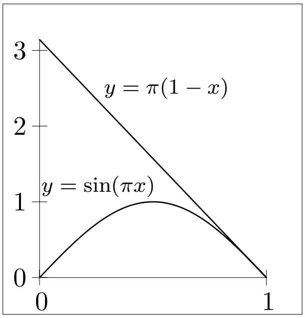


Pour la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le calcul de la dérivée n'est pas aussi concluant. En effet, pour tout $x \in [0,1]$:

$$g_n'(x) = nx^{n-1}\sin(\pi x) + x^n\pi\cos(\pi x) = x^{n-1}(n\sin(\pi x) + \pi x\cos(\pi x)).$$

Il n'est pas évident de déterminer les points d'annulation de cette dérivée pour étudier la fonction g_n.

Cependant, il est assez simple de majorer $\sin(\pi x)$ par une fonction affine de x pour se ramener aux fonctions f_n précédemment étudiées. Plus précisément, on a la majoration $\sin(\pi x) \leqslant \pi(1-x)$ pour $x \in [0,1]$, majoration que l'on peut aisément visualiser graphiquement :



Elle peut être établie de plusieurs façons, par exemple par une inégalité de convexité ou par l'inégalité des accroissements finis.

La fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ est concave sur $[0,1]$ car sa dérivée seconde est négative. En particulier, le graphe de la fonction est situé sous ses tangentes. Sa tangente au point d'abscisse 1 ayant pour équation $y = \pi(1-x)$ on a donc :

$$\forall x \in [0,1], \sin(\pi x) \leqslant \pi(1-x).$$

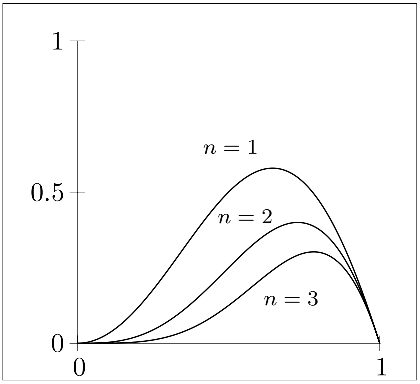
Par ailleurs, $\sin(\pi x) \geqslant 0$ pour $x \in [0,1]$. En conséquence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], 0 \leqslant g_n(x) \leqslant \pi f_n(x).$$

On a donc $||g_n||_\infty \leqslant \pi ||f_n||_\infty$, ce qui entraîne $\lim_{n\to\infty} ||g_n||_\infty = 0$ d'après l'étude de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ précédemment effectuée. Ainsi, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

Alternativement, nous aurions pu utiliser l'inégalité des accroissements finis. En effet, la dérivée de $x \mapsto \sin(\pi x)$ est la fonction $x \mapsto \pi\cos(\pi x)$, qui est majorée en valeur absolue par π. On a donc, pour $x \in [0,1]$, $|\sin(\pi x) - \sin(\pi)| \leqslant \pi |x-1|$, soit encore $0 \leqslant \sin(\pi x) \leqslant \pi(1-x)$ car $\sin(\pi x) \geqslant 0$ et $x \leqslant 1$. Nous retrouvons donc bien la même majoration.

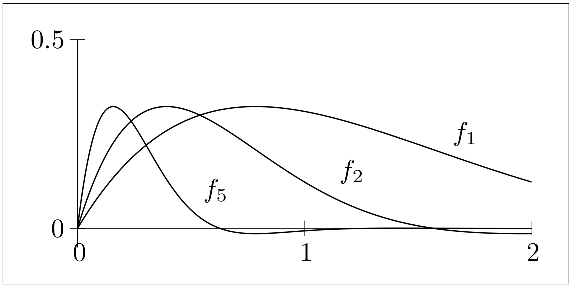
Enfin, le tracé des premières fonctions g_n confirme visuellement la convergence uniforme vers 0 :



Exercice 6.2 : Convergence uniforme d'une suite de fonctions II (PSI)

Démontrer que la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, que la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ $(a > 0)$ mais qu'elle n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Le tracé à la calculatrice des fonctions f_n montre ce qui se produit : le graphe présente une « bosse » qui se tasse près de 0 et empêche ainsi la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$. Cependant, cette bosse sort de tout intervalle $[a,+\infty[$ pour $a > 0$ donné, ce qui explique que l'on ait néanmoins la convergence uniforme sur chacun de ces intervalles.



Comme souvent, la convergence simple ne pose pas de difficulté. C'est la convergence uniforme qui risque d'être plus technique.

Pour $x > 0$ on a $f_n(x) = (e^{-x})^n \sin(nx)$ et donc $|f_n(x)| \leqslant (e^{-x})^n$. Comme $e^{-x} \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
Par ailleurs, $f_n(0) = 0$. Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

Si la suite convergeait uniformément sur $\mathbb{R}_+$, sa limite serait nécessairement sa limite simple, à savoir 0. Il suffit donc de démontrer que $||f_n||_{\infty,\mathbb{R}_+}$ ne tend pas vers 0 pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
La première méthode qui vient à l'esprit est d'étudier la fonction f_n pour déterminer le maximum de $|f_n|$. Cependant, la dérivée de cette fonction est

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -ne^{-nx}\sin(nx) + e^{-nx} n\cos(nx) \\ &= ne^{-nx}(\cos(nx) - \sin(nx)) \\ &= ne^{-nx}\sqrt{2}\cos(nx + \pi/4), \end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue à l'aide de la formule de trigonométrie :

$$\cos(a) - \sin(a) = \sqrt{2}(\cos(a)\cos(\pi/4) - \sin(a)\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}\cos(a + \pi/4).$$

Il n'est pas tout à fait évident d'exploiter cette formule pour étudier f_n, même si c'est possible en théorie. Nous avons un renseignement bien plus simple sur f_n, à savoir la majoration grossière $|f_n(x)| \leqslant e^{-nx}$ (car $|\sin(nx)| \leqslant 1$). Cette majoration nous permet de conclure simplement quant à la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$.

Pour tout réel positif x et tout entier naturel n, $|f_n(x)| \leqslant e^{-nx}$. On en déduit que, si a est un réel strictement positif et $x \geqslant a$, $|f_n(x)| \leqslant e^{-nx} \leqslant e^{-na}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, ||f_n||_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant e^{-na}.$$

Comme $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-na} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n||_{\infty,[a,+\infty[} = 0$. Ainsi, pour tout réel $a > 0$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[a,+\infty[$.

Pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$, ce n'est pas une majoration dont nous avons besoin mais plutôt d'une minoration de $|f_n|$. Ceci n'est a priori pas évident. Nous pouvons conclure en raisonnant par l'absurde grâce au théorème suivant, dit de la *double limite* : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur un intervalle I et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I convergeant vers $\ell \in I$ alors $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n(x_n)) = f(\ell)$. Nous savons que ce résultat est vrai avec $f = 0$ et $\ell > 0$ puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle de la forme

$[a,+\infty[$, $a > 0$. Pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$, nous allons donc prendre $\ell = 0$ et exhiber une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ qui converge vers 0 mais telle que $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0. Ainsi, nous aurons bien démontré qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Vu la définition de f_n, nous devons choisir x_n de sorte à neutraliser le facteur n. Nous pouvons prendre $x_n = 1/n$.

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément sur $\mathbb{R}_+$, sa limite uniforme serait sa limite simple, à savoir la fonction nulle. De plus, pour toute suite convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$, on aurait $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0$.

Cependant, $f_n(1/n) = e^{-1}\sin(1)$, qui est constant et non nul. Ainsi, $f_n(1/n)$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ceci montre que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Une étude rigoureuse des fonctions f_n permet de voir que leur maximum, en valeur absolue, est atteint en $x_n = \pi/(4n)$ et donc que $||f_n||_\infty = e^{-\pi/4}\sqrt{2}/2$. Ceci montre également que cette suite ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$. Notons que ce maximum est indépendant de n : c'est ce qu'on peut deviner à la vue de la figure présentée au début de la correction.

Exercice 6.3 : Convergence uniforme d'une série de fonctions (PSI)

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x}{n^2+x^2}$.

1. Démontrer que cette série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ bien qu'elle ne soit pas normalement convergente. Quelle est la limite de sa somme en $+\infty$?

2. Démontrer que sa somme est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Le plus simple est de commencer par étudier la convergence normale. En l'occurence, les fonctions f_n sont aisées à étudier et nous déterminerons sans problème les maxima de leur valeur absolue.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $|f_n(x)| = \dfrac{x}{n^2+x^2}$. Cette fonction est dérivable et $|f_n|'(x) = \dfrac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$. Ainsi, $|f_n|$ est croissante sur $[0,n]$ et décroissante sur $[n,+\infty[$. De plus, $|f_n(0)| = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} |f_n(x)| = 0$. Ainsi, $|f_n|$ possède sur $\mathbb{R}_+$ un maximum atteint en n. On a donc $||f_n||_\infty = |f_n(n)| = 1/(2n)$.

Ainsi, la série $\sum ||f_n||_\infty$ est une série de Riemann divergente. En conséquence, la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Ce résultat est problématique car la convergence normale est le moyen le plus simple pour montrer qu'une série de fonctions est uniformément convergente. Il va donc falloir raisonner autrement pour conclure. Nous allons commencer par exposer la manière générale de procéder.

Nous devons déterminer une fonction f telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k - f\right|\right|_{\infty} = 0$. Notons que, nécessairement, f est la limite simple de la série $\sum f_k$. Nous allons commencer par démontrer que la série converge simplement. En notant f sa somme, nous aurons $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k - f = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$, que nous noterons R_n : c'est le reste d'ordre n de $\sum f_k$. Il suffira alors de démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} ||R_n||_\infty = 0$, autrement dit que le reste de la série converge uniformément vers 0.

Il nous faudra donc obtenir une majoration de la valeur absolue du reste. C'est ici que l'on va pouvoir exploiter la forme particulière de la série $\sum f_k$: à x donné, il s'agit d'une série numérique alternée. Le critère spécial des séries alternées nous donnera à la fois la convergence simple et une majoration du reste, ce qui permettra de conclure.

Fixons $x \in \mathbb{R}_+$. La série numérique $\sum f_k(x)$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées : en effet, son terme général est alterné et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant quand n tend vers $+\infty$.

Ceci montre que la série $\sum f_k$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. De plus, en notant $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$, nous avons la majoration

$$|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)|.$$

Nous savons, d'après les calculs précédents, que $|f_{n+1}(x)| \leqslant 1/(2(n+1))$. Ainsi,

$$||R_n||_\infty \leqslant 1/(2n+2).$$

La suite des restes de la série $\sum f_k$ converge donc uniformément vers 0. On en déduit que la série $\sum f_k$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$.

Ce raisonnement s'adapte à une situation bien plus générale: si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions convergeant uniformément vers 0 sur un intervalle I et telle que, pour tout $x \in I$, $\sum f_n(x)$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Enfin, la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ permet d'intervertir $\sum$ et limite en $+\infty$.

> Fixons $n \in \mathbb{N}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$. La série $\sum f_n$ étant uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ on a donc
>
> $$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

2. Nous avons le résultat suivant : si les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, si $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment et si $\sum f_n$ converge simplement, alors $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on peut intervertir $\sum$ et dérivation.
La convergence simple de $\sum f_n$ est d'ores et déjà acquise. Pour la convergence uniforme sur tout segment de $\sum f_n'$, nous allons d'abord étudier la convergence normale : si cette série converge normalement sur tout segment, elle sera *a fortiori* uniformément convergente, comme nous l'avons remarqué plus haut.

> Les fonctions f_n sont bien toutes de classe $\mathcal{C}^1$ et la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, nous avons vu que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n'(x) = (-1)^n \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}.$$
>
> En particulier, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$:
>
> $$|f_n'(x)| \leqslant \frac{n^2 + x^2}{(n^2 + x^2)^2} = \frac{1}{n^2 + x^2} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
>
> Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n' est bornée sur $\mathbb{R}_+$. De plus, la série $\sum ||f_n'||_\infty$ est convergente.
> La série de fonction $\sum f_n'$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$. *A fortiori*, elle est uniformément convergente sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, f est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et :
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2 - x^2}{(n^2 + x^2)^2}.$$

Il faut retenir que la convergence normale est le moyen le plus efficace de prouver une convergence uniforme. Il faut toujours commencer par étudier la convergence normale d'une série de fonctions et n'envisager de démontrer directement la convergence uniforme qu'en cas d'échec (cf. exercice **6.7**).

Exercice 6.4 : Fonction ζ de Riemann (PC-PSI)

Pour $x \in]1,+\infty[$ on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1.a. Montrer que la fonction ζ est bien définie et continue sur $]1,+\infty[$.

1.b. Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et exprimer ses dérivées sous forme de sommes de séries.

1.c. Préciser les variations de la fonction ζ et étudier sa convexité.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x)$.

3. Déterminer un équivalent simple de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1. On pourra encadrer le terme général de la série définissant ζ à l'aide d'intégrales.

4. Représenter graphiquement la fonction ζ.

1.a. Commençons par montrer que la fonction ζ est bien définie, autrement dit, que la série de fonctions qui la définit est simplement convergente.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$f_n : \begin{array}{rcl}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{n^x} \end{array}.$$

Soit $x \in]1,+\infty[$. La série

$$\sum_{n\geqslant 1} f_n(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$$

est alors une série de Riemann convergente.
Par conséquent, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$ et la fonction ζ est bien définie.

Nous nous intéressons, à présent, à la continuité de la fonction ζ. Commençons par remarquer que chacune des fonctions f_n, avec $n \geqslant 1$, est continue. La façon de faire la plus expéditive est d'étudier la convergence normale sur $]1,+\infty[$. Or, pour tout $n \geqslant 1$, le meilleur majorant de $|f_n|$ sur $]1,+\infty[$ est $1/n$ et nous savons que la série $\sum 1/n$ diverge. Nous devrons donc nous contenter de la convergence normale sur tout segment.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur $]1,+\infty[$.
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $1 < a < b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\forall x \in [a,b],\ |f_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^a}$$

et donc $||f_n||_{\infty,[a,b]} \leqslant 1/n^a$. La série $\sum 1/n^a$ converge car $a > 1$. On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment contenu dans $]1,+\infty[$.
Par conséquent, la fonction ζ est continue sur $]1,+\infty[$.

1.b. Nous devons, à présent, montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$. Au programme figure seulement un énoncé pour montrer qu'une série de fonctions est de classe $\mathcal{C}^1$. Nous allons donc procéder par récurrence. Notons qu'il est facile de déterminer la forme des dérivées successives : on vérifie que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]1,+\infty[,\ f_n^{(p)}(x) = \frac{(-\ln(n))^p}{n^x}.$$

En effet, en écrivant $f_n(x) = e^{-x\ln(n)}$, on voit que la dérivée de cette fonction est $-\ln(n)e^{-x\ln(n)} = -\ln(n)/n^x$ soit $f_n'(x) = -\ln(n) f_n(x)$. Le facteur $-\ln(n)$ étant indépendant de x on en tire $f_n''(x) = -\ln(n) f_n'(x) = (-\ln(n))^2 f_n(x)$, etc. Ainsi, on voit qu'un facteur $-\ln(n)$ apparaît à chaque dérivation.

Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la proposition H_p suivante est vraie : la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^p$ et

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^p}{n^x}.$$

- Initialisation

La proposition H_0 est vraie d'après la question précédente.

- Étape de récurrence

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que la proposition H_p est vraie. La fonction ζ est alors de classe $\mathcal{C}^p$ et nous avons

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^p}{n^x}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$g_n : \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{(-\ln(n))^p}{n^x} \end{array}.$$

Nous savons déjà, d'après H_p, que la série $\sum g_n$ converge simplement sur $]1,+\infty[$.
Pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et nous avons

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ g_n'(x) = \frac{(-\ln(n))^{p+1}}{n^x}.$$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $1 < a < b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\forall x \in [a,b],\ |g_n'(x)| \leqslant \frac{\ln(n)^{p+1}}{n^a}.$$

Soit $a' \in]1,a[$. Nous avons

$$\frac{(-\ln(n))^{p+1}}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^{a'}}\right).$$

Comme $a' > 1$, ceci entraîne la convergence de la série $\sum \ln(n)^{p+1}/n^a$ (critère de Riemann). On en déduit que la série de fonctions $\sum g_n'$ converge normalement sur tout segment contenu dans $]1,+\infty[$.
Par conséquent, la série de fonctions $\sum g_n$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par la somme de la série de fonctions $\sum g_n'$.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^p$ et sa dérivée $p^{\text{ème}}$ est la somme de la série $\sum g_n$. On en déduit que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ et que

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ \zeta^{(p+1)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^{p+1}}{n^x}.$$

La proposition H_{p+1} est donc vérifiée.
En particulier, nous avons montré que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, autrement dit que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1.c. Cette question est une simple application de la précédente : nous lirons le sens de variation de la fonction ζ sur sa dérivée et sa convexité sur sa dérivée seconde.

D'après la question précédente, nous avons

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ \zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}.$$

Soit $x \in]1,+\infty[$. Pour tout $n \geqslant 2$, nous avons $\ln(n)/n^x > 0$. De plus, le premier terme de la série est nul. Ainsi, $\zeta'(x) < 0$.
Par conséquent, la fonction ζ est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

Nous aurions également pu utiliser le fait que chacune des fonctions $x \mapsto 1/n^x$ est strictement décroissante. Cela assure que leur somme ζ l'est également.

D'après la question précédente, nous avons

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ \zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)^2}{n^x}.$$

Soit $x \in]1,+\infty[$. Pour tout $n \geqslant 1$, nous avons $\ln(n)^2/n^x \geqslant 0$ et donc $\zeta''(x) \geqslant 0$.
Par conséquent, la fonction ζ est convexe sur $]1,+\infty[$.

Nous aurions également pu utiliser le fait que chacune des fonctions $x \mapsto -\ln(n)/n^x$ est croissante. Cela assure que leur somme ζ' est croissante et donc que la fonction ζ est convexe.

2. Nous voulons ici montrer que la fonction ζ possède une limite quand x tend vers $+\infty$ et la calculer. Il s'agit donc visiblement d'intervertir une limite et une série. Rappelons l'énoncé du théorème permettant cette opération.
Soit $\sum g_n$ une série de fonctions qui converge simplement sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit a un point de I ou une extrémité de I. Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n possède une limite finie ℓ_n en a. Supposons, enfin, que la série $\sum g_n$ converge normalement sur I. Alors la série numérique $\sum \ell_n$ converge absolument, la fonction $g = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ possède une limite finie en a et nous avons

$$\lim_{x\to a} g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

De plus, l'hypothèse de convergence normale sur I peut être remplacée par la convergence normale sur un voisinage de a. Par exemple, pour une limite en $+\infty$, on peut se contenter de la convergence normale sur un sous-intervalle non majoré de I quelconque.
Comme nous l'avons vu au début de l'exercice, la série de fonctions définissant ζ n'est pas normalement convergente sur $]1,+\infty[$ mais l'est sur tout segment. Par un raisonnement analogue, nous pouvons voir qu'elle est normalement convergente sur $[2,+\infty[$, ce qui assurera la possibilité d'intervertir limite en $+\infty$ et somme.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n possède une limite finie en $+\infty$. Précisément, nous avons

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$$

et

$$\forall n \geqslant 2,\ \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

En outre, pour tout réel $x \geqslant 2$, $|f_n(x)| \leqslant 1/n^2$. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, $||f_n||_{\infty,[2,+\infty[} \leqslant 1/n^2$. Ceci montre que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[2,+\infty[$.
On en déduit

$$\lim_{x \to +\infty} \zeta(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1.$$

3. L'énoncé nous indique ici la méthode à utiliser. Rappelons que l'encadrement par des intégrales permet, par exemple, de déterminer la nature des séries de Riemann. Nous allons encadrer le terme général de la série par des intégrales pour en déduire un encadrement de ζ.

• Commençons par déterminer un minorant des sommes partielles de la série $\sum f_n$. Fixons $x \in]1,+\infty[$.
Soit $n \geqslant 1$. Nous avons

$$\forall t \in [n,n+1],\ \frac{1}{n^x} \geqslant \frac{1}{t^x}$$

et donc, en intégrant sur le segment $[n,n+1]$,

$$\frac{1}{n^x} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant de $n = 1$ à $n = N$, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = \int_1^{N+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t.$$

Calculons cette dernière intégrale :

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^{N+1} = \frac{(N+1)^{1-x}-1}{1-x}.$$

• Déterminons, à présent, un majorant de ces sommes partielles. Soit $x \in]1,+\infty[$. Pour tout entier $n \geqslant 2$ nous avons

$$\forall t \in [n-1,n],\ \frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{t^x}$$

et donc, en intégrant sur le segment $[n-1,n]$,

$$\frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $N \geqslant 2$. En sommant de $n = 2$ à $n = N$, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \int_1^N \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t.$$

Le même calcul que précédemment montre que

$$1 + \int_1^N \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = 1 + \frac{N^{1-x} - 1}{1-x}.$$

• Résumons : pour tout réel $x \in]1, +\infty[$ et tout entier $N \geqslant 2$, nous avons obtenu l'encadrement

$$\frac{(N+1)^{1-x} - 1}{1-x} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leqslant 1 + \frac{N^{1-x} - 1}{1-x}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

La technique d'encadrement par des intégrales nous fournit donc un résultat assez précis. À partir de celui-ci, nous pouvons deviner un équivalent de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1 : ce sera $1/(x-1)$.

En multipliant cette inégalité par $x - 1 > 0$ nous obtenons

$$1 \leqslant (x-1)\zeta(x) \leqslant x.$$

On en déduit

$$\lim_{x \to 1} (x-1)\zeta(x) = 1$$

et donc

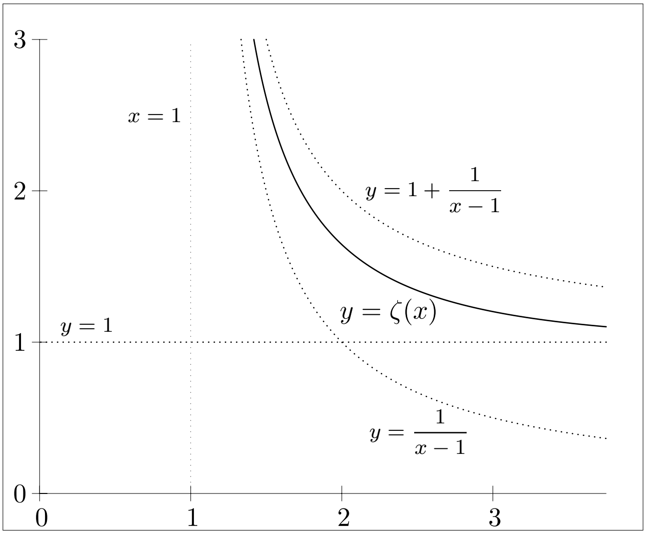
$$\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1} \quad \text{quand} \quad x \quad \text{tend vers} \quad 1.$$

4. Les questions qui précèdent nous permettent de nous faire une idée assez fidèle du graphe de la fonction ζ. Récapitulons : nous savons que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, strictement décroissante et convexe, d'après la question **1**. Nous savons également, d'après la question **2**, qu'elle tend vers 1 en $+\infty$ et donc que sa courbe possède une asymptote horizontale d'équation $y = 1$. Pour finir, nous savons, d'après la question **3**, qu'elle tend vers $+\infty$ en 1. Sa courbe possède donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Ceci suffit pour tracer l'allure du graphe de ζ. Cependant, nous avons un résultat plus précis sur son comportement au voisinage de 1. En effet, pour tout réel $x > 1$:

$$\frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Nous pouvons donc tracer les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto 1/(x-1)$ et $x \mapsto 1 + 1/(x-1)$: la représentation graphique de ζ doit se trouver entre ces deux courbes. Elles sont représentées en pointillés sur la figure suivante, ainsi que l'asymptote horizontale d'équation $y = 1$. Une fois tous ces éléments connus, on voit qu'il n'y a presque plus de choix pour tracer la courbe !



Pour améliorer le tracé, nous pouvons utiliser des points particuliers. Les valeurs prises par la fonction ζ ne sont pas aisées à calculer mais certaines sont néanmoins connues et classiques (elles peuvent être calculées à l'aide des séries de Fourier, cf. l'exercice **8.1**). Par exemple, nous avons

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \simeq 1{,}64 \quad \text{et} \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \simeq 1{,}08.$$

Exercice 6.5 : Régularité d'une série de fonctions (PC-PSI)

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Montrer que la fonction S est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer que S n'est pas dérivable en 0. On pourra commencer par montrer que $S(x)/x$ possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ quand x tend vers 0.

1. Pour démontrer la continuité de la somme de la série nous allons utiliser la convergence normale de la série sur $\mathbb{R}_+$ ou, à défaut, sur tout segment. Rappelons que la convergence normale (éventuellement sur tout segment) entraîne la convergence simple et que ceci permet de montrer d'un seul coup que la fonction est bien définie et continue.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{n(1+nx^2)} \end{array}.$$

La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = \frac{1}{n}\,\frac{1+nx^2-x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}.$$

On en déduit que la fonction f_n est croissante sur $[0,1/\sqrt{n}]$ et décroissante sur $[1/\sqrt{n},+\infty[$. De plus, $f_n(0) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$. On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Par conséquent, nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f_n(x)| \leqslant f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}}.$$

La série $\sum 1/(n\sqrt{n})$ converge (série de Riemann). On en déduit que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$. En particulier, elle converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et sa somme, la fonction S, est bien définie.
En outre, pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$. La convergence normale sur $\mathbb{R}_+$ de la série $\sum f_n$ assure que sa somme S est également continue sur $\mathbb{R}_+$.

Ici nous sommes parvenus à majorer $|f_n|$ sur tout son intervalle de définition et avons ainsi obtenu la convergence normale sur $\mathbb{R}_+$. Nous verrons dans la suite que parfois il faut se restreindre à des majorations sur tout segment plutôt que sur tout l'intervalle.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour démontrer que la fonction S l'est aussi, étudions la convergence normale de la série $\sum f_n'$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n'(x) = \frac{1 - nx^2}{n(1+nx^2)^2}.$$

Le meilleur majorant de $|f_n'|$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $1/n$ (c'est sa limite en 0), mais la série de terme général $1/n$ diverge. Nous allons donc chercher à majorer $|f_n'|$ sur tout segment contenu dans $\mathbb{R}_+^*$ plutôt que sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ vérifiant $a < b$. Pour tout $x \in [a,b]$, nous avons

$$\begin{aligned} |f_n'(x)| &= \left|\frac{1-nx^2}{n(1+nx^2)^2}\right| \\ &\leqslant \frac{1+n\,x^2}{n(1+n\,x^2)^2} \\ &\leqslant \frac{1}{n(1+n\,x^2)} \\ &\leqslant \frac{1}{(an)^2} \end{aligned}$$

car $1 + nx^2 \geqslant na^2$. La série de terme général $1/(an)^2$ converge. Par conséquent, la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a,b]$.
Nous avons donc montré que la série $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment contenu dans $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que la fonction S l'est également.

3. Ainsi que l'énoncé le suggère, nous allons commencer par démontrer que la fonction $S(x)/x$ possède une limite en 0 dans $\overline{\mathbb{R}}$. C'est typiquement le genre de résultat que l'on peut obtenir en utilisant le théorème de la limite monotone.

La fonction $x \mapsto S(x)/x$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est somme d'une série de fonctions décroissantes ; elle est donc également décroissante. Par conséquent, elle possède une limite ℓ en 0 qui est soit sa borne supérieure, si elle est majorée, soit $+\infty$.

Nous cherchons à démontrer que la fonction S n'est pas dérivable en 0, et donc que la fonction $x \mapsto S(x)/x$ ne converge pas en 0. D'après ce qui précède, cela revient à montrer que $\ell = +\infty$. Notons que l'argument de monotonie précédent nous donne en plus le résultat suivant : ℓ, qu'il soit fini ou non, majore toutes les valeurs de $S(x)/x$.

Dans tous les cas, nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{S(x)}{x} \leqslant \ell.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n est positive. Par conséquent, nous avons

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(1+n\,x^2)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n\,x^2)} = \frac{S(x)}{x} \leqslant \ell.$$

En considérant la limite quand x tend vers 0, il vient

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leqslant \ell.$$

Or on sait que le membre de gauche est une somme partielle d'une série à termes positif qui diverge ; il tend donc vers $+\infty$ lorsque N tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\ell = +\infty.$$

Par conséquent, la quantité

$$\frac{S(x) - S(0)}{x - 0} = \frac{S(x)}{x}$$

ne possède pas de limite finie lorsque x tend vers 0. On en déduit que la fonction S n'est pas dérivable en 0. Plus précisément, le fait que $S(x)/x$ tende vers $+\infty$ en 0 nous assure que la courbe représentative de S possède une demi-tangente verticale en ce point.

Exercice 6.6 : Calcul d'intégrales à l'aide de séries de fonctions (PC-PSI)

En faisant apparaître des séries de fonctions calculer les deux intégrales suivantes :

1. $$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

2. $$J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\,\mathrm{d}x$$

On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Le calcul de la somme de la série donnée dans l'énoncé est effectué dans l'exercice **8.1**.

1. Il ne faut pas oublier de démontrer que l'intégrale I est bien définie.

La fonction

$$\begin{array}{rccc} f : &]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\ln(x)}{x-1} \end{array}$$

est continue sur l'intervalle $]0,1[$.
Au voisinage de 0, nous avons

$$\frac{\ln(x)}{x-1} \sim -\ln(x).$$

Par conséquent, la fonction f est intégrable au voisinage de 0.
Etudions l'intégrabilité de la fonction f au voisinage de 1. Posons $y = 1 - x$. Lorsque x tend vers 1, y tend vers 0. Nous avons

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(1-y)}{-y} \xrightarrow[y\to 0]{} 1.$$

Par conséquent, la fonction f est intégrable au voisinage de 1. L'intégrale I est donc bien définie.

L'énoncé suggère de faire apparaître des séries de fonctions. Nous allons utiliser le développement simple et classique de la fonction $x \mapsto 1/(1-x)$ puis essayer d'intervertir intégrale et somme. Rappelons l'énoncé du théorème d'interversion série/intégrale :
soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Supposons que

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue par morceaux et intégrable sur I ;

ii) la série $\sum g_n$ converge simplement sur I vers une fonction continue par morceaux g ;

iii) la série $\sum \int_I |g_n|$ converge.

Alors la fonction g est intégrable sur I et nous avons

$$\int_I g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $x \in]0,1[$, nous avons

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -\ln(x)x^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$\begin{array}{rccc} f_n : &]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -\ln(x)x^n \end{array}$$

est continue sur l'intervalle $]0,1[$ et intégrable (si $n \geqslant 1$ elle possède des limites finies en 0 et 1 ; si $n = 0$, c'est la fonction $-\ln$ qu'on sait être intégrable sur cet intervalle).
La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction f, qui est continue sur cet intervalle.

Nous devons maintenant calculer l'intégrale de la fonction $|f_n|$ pour tout n. Remarquons déjà que, f_n étant positive, $|f_n| = f_n$. Nous voudrions éliminer le logarithme à l'aide d'une intégration par parties. Nous ne pouvons pas l'effectuer directement sur l'intervalle $]0,1[$, mais devrons commencer par des sous-segments dont nous ferons tendre la borne inférieure vers 0 et la borne supérieure vers 1.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 < a < b < 1$. Calculons l'intégrale de $|f_n| = f_n$ sur le segment $[a,b]$ par une intégration par parties. Nous dériverons la fonction $x \mapsto -\ln(x)$ en $x \mapsto -1/x$ et intégrerons la fonction $x \mapsto x^n$ en $x \mapsto x^{n+1}/(n+1)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_a^b -\ln(x)x^n \,\mathrm{d}x &= \left[-\ln(x)\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b + \int_a^b \frac{x^n}{n+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\ln(x)\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b + \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_a^b \\ &= -\ln(b)\frac{b^{n+1}}{n+1} + \ln(a)\frac{a^{n+1}}{n+1} + \frac{b^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{a^{n+1}}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

En faisant tendre a vers 0 et b vers 1, nous obtenons

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

On en déduit que la série $\sum \int_0^1 |f_n|$ converge.

Par conséquent, la fonction f est intégrable sur $]0,1[$ et nous avons

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarquons que nous venons de redémontrer l'intégrabilité de la fonction f que nous avions prouvée au début de l'exercice. Il ne nous reste plus maintenant qu'à conclure.

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 -\ln(x)x^n\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \\
&= \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = 1 - x$ on voit que $I = -\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u$. Nous aurions pu alors utiliser le développement en série entière de $\ln(1-u)$ pour conclure par un raisonnement en tout point analogue.

2. Nous allons procéder ici de la même façon que pour la question précédente. Pour commencer, il suffit de vérifier que la fonction intégrée est bien continue par morceaux, l'intégrabilité étant une conséquence du théorème d'intervertion série/intégrale.

La fonction

$$g : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)} \end{array}$$

est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Comme pour calculer précédemment l'intégrale I, nous allons chercher à faire intervenir des séries de fonctions. Ici, la situation n'est pas aussi simple. Notons tout d'abord qu'un développement en somme de série entière est inutile si on cherche à permuter série et intégrale sur un intervalle non majoré comme $\mathbb{R}_+$: nous obtiendrions en effet une expression de la forme $\sum \int_0^{+\infty} a_n x^n \mathrm{d}x$ et les intégrales sont divergentes si $a_n \neq 0$. De toutes façons, développer g en série entière n'a rien d'évident.

Nous allons plutôt faire apparaître une série géométrique à l'aide de l'exponentielle apparaissant dans la définition du sinus hyperbolique.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{x}{\operatorname{sh}(x)} &= \frac{2x}{e^x - e^{-x}}\\ &= \frac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}}\\ &= 2xe^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nx}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2xe^{-(2n+1)x}.\end{aligned}$$

Nous avons maintenant trouvé le développement en série recherché. Il ne nous reste plus qu'à appliquer le théorème du cours (sans oublier d'en vérifier explicitement les hypothèses !) afin d'inverser somme et intégrale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction

$$\begin{array}{rccc} g_n : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2xe^{-(2n+1)x} \end{array}$$

est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et intégrable (elle se prolonge par continuité en 0 et est négligeable devant $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$).
La série $\sum g_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction g, qui est continue sur cet intervalle.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 < a < b$. Calculons l'intégrale de $|g_n| = g_n$ sur le segment $[a,b]$ par une intégration par parties. Nous dériverons la fonction $x \mapsto 2x$ en $x \mapsto 2$ et intégrerons la fonction $x \mapsto e^{-(2n+1)x}$ en $x \mapsto -e^{-(2n+1)x}/(2n+1)$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_a^b 2xe^{-(2n+1)x}\,\mathrm{d}x &= \left[-2x\,\frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}\right]_a^b + \int_a^b 2\,\frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-2x\,\frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}\right]_a^b + \left[-2\,\frac{e^{-(2n+1)x}}{(2n+1)^2}\right]_a^b\\ &= -2b\,\frac{e^{-(2n+1)b}}{2n+1} + 2a\,\frac{e^{-(2n+1)a}}{2n+1}\\ &\quad -2\,\frac{e^{-(2n+1)b}}{(2n+1)^2} + 2\,\frac{e^{-(2n+1)a}}{(2n+1)^2}.\end{aligned}$$

En faisant tendre a vers 0 et b vers $+\infty$, nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(2n+1)^2}.$$

On en déduit que la série $\sum \int_0^{+\infty} |g_n|$ converge.

Par conséquent, la fonction g est intégrable sur $]0,+\infty[$ et nous avons

$$\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Il nous reste donc à calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

L'énoncé nous fournit la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Nous allons donc nous ramener à cette dernière.

Étant donné $N \in \mathbb{N}^*$ nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

soit, quand N tend vers $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Finalement, nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 6.7 : Intégration et convergence uniforme (PSI)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante tendant vers 0. On fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on pose, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $f_n(x) = (-1)^n a_n x^{pn}$.

1. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

2. Démontrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

3. En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1}$ à l'aide d'une intégrale.

Indication : dans un premier temps, faire intervenir une intégrale entre 0 et z pour $z \in [0,1[$, puis justifier le passage à la limite $z \to 1$.

Notons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et de limite nulle, elle est à valeurs positives.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On se convainc aisément que la norme uniforme de la fonction f_n sur $[0,1]$ est a_n. Par conséquent, il suffit de trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante tendant vers 0 telle que la série $\sum a_n$ diverge. La suite $(1/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait toutes ces conditions (le décalage d'indice n'est présent que pour que la suite soit bien définie à partir du rang $n = 0$).

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$a_n = \frac{1}{n+1}.$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, décroissante et tend vers 0.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\, x^{pn}\right| \leqslant \frac{1}{n+1},$$

car $|x| \leqslant 1$. En outre, nous avons

$$|f_n(1)| = \left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

et, par conséquent,

$$\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = \frac{1}{n+1}.$$

La série

$$\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_{\infty,[0,1]} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}$$

diverge. Autrement dit, la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0,1]$.

2. Nous savons que toute série de fonctions normalement convergente est uniformément convergente, ce qui est souvent un moyen simple de montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions. Cependant, ici, la question précédente montre que nous ne pourrons pas utiliser ce procédé. Nous allons donc revenir à la définition de la convergence uniforme.

Dans un premier temps, nous allons démontrer la convergence simple de la série $\sum f_n$. Sa forme nous invite à utiliser le critère spécial des séries alternées. C'est le même argument qu'à l'exercice **6.3**.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante tendant vers 0. Par conséquent, tous ses termes sont positifs.
Soit $x \in [0,1]$. Puisque $x \geqslant 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel $f_n(x) = (-1)^n a_n x^{pn}$ est du signe de $(-1)^n$. On en déduit que la série $\sum f_n(x)$ est alternée.
Puisque $x \in [0,1]$, la suite $(x^{pn})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Par hypothèse, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également décroissante. Le produit de deux suites positives décroissantes est également décroissant donc $(a_n x^{pn})_{n\in\mathbb{N}} = (|f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Puisque $|x| \leqslant 1$, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leqslant a_n.$$

On en déduit que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
Nous pouvons en conclure, d'après le critère spécial des séries alternées, que la série $\sum f_n(x)$ converge. Nous noterons $f(x)$ sa limite.

À présent, nous allons chercher à montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction f sur $[0,1]$. Nous devons donc montrer que

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} f_n \right\|_{\infty,[0,1]} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Puisque f n'est autre que la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$, nous pouvons écrire la différence à évaluer sous une autre forme, celle d'un reste :

$$\forall x \in [0,1], \forall N \in \mathbb{N},\ f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x).$$

Nous savons que le critère spécial des séries alternées fournit justement une majoration du reste ; nous allons l'utiliser.

Soit $x \in [0,1]$. Le critère spécial des séries alternées assure que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) \right| \leqslant |f_{N+1}(x)| \leqslant a_{N+1},$$

car $a_{N+1} \geqslant 0$ et $|x| \leqslant 1$.
Par conséquent, pour tout $N \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} f_n \right\|_{\infty,[0,1]} \leqslant a_{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Nous en déduisons que la série $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

3. L'énoncé nous suggère de faire intervenir une intégrale. Nous pouvons espérer qu'ensuite, le résultat de convergence uniforme démontré à la question précédente nous permettra d'échanger somme et intégrale. En effet, lorsqu'une série converge uniformément sur un segment, on peut intervertir intégrale et somme. Nous pouvons donc commencer par écrire le terme général de la série comme une intégrale.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons

$$\frac{(-1)^n}{pn+1} = \int_0^1 (-1)^n x^{pn} \, \mathrm{d}x.$$

L'idée est ensuite de permuter somme et intégrale. Nous allons donc introduire la série de fonctions $\sum (-1)^n x^{pn}$. Nous voyons tout de suite qu'il y a un problème : cette série est bien convergente pour $x \in [0,1[$ (de somme $1/(1+x^p)$) mais diverge pour $x = 1$. Ceci explique pourquoi l'énoncé suggère de raisonner en s'écartant de 1.

Posons

$$\begin{array}{rccc} g : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^p} \end{array}$$

et, pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\begin{array}{rccc} g_n : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (-1)^n x^{pn} \end{array}.$$

Nous ne sommes pas ici dans un cas d'application directe de la question précédente. En effet, la suite de fonctions considérée ici correspond à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à 1 et cette dernière ne satisfait pas les conditions de l'énoncé (elle ne tend pas vers 0). D'ailleurs, la série ne risque pas de converger uniformément sur le segment $[0,1]$ puisque, comme nous l'avons remarqué plus haut, elle diverge en 1 !

Nous devrons donc procéder d'une manière. L'indication nous invite à intégrer d'abord sur des intervalles de la forme $[0,z]$, avec $z < 1$. Nous allons donc chercher à démontrer la convergence uniforme de la série $\sum g_n$ sur $[0,z]$.

Soit $z \in [0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\|g_n\|_{\infty,[0,z]} = z^{pn},$$

qui est le terme général d'une série convergente, car $|z| < 1$. On en déduit que la série $\sum g_n$ converge normalement vers g sur $[0,z]$.

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^z \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x &= \int_0^z \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{pn}\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^z (-1)^n x^{pn}\,\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{pn+1}}{pn+1}.\end{aligned}$$

Le cours sur les séries entières permet de rédiger ceci de manière plus concise.

Il ne nous reste plus, à présent, qu'à faire tendre z vers 1.

Le membre de gauche ne pose pas de problème : en effet, la fonction $z \mapsto \displaystyle\int_0^z \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$ n'est autre que la primitive de $x \mapsto 1/(1+x^p)$ sur $[0,1]$ nulle en 0. Cette fonction est donc continue (et même dérivable, de dérivée $x \mapsto 1/(1+x^p)$).

Pour calculer la limite du membre de droite, nous allons nous intéresser à la continuité de cette somme. C'est là qu'intervient la convergence uniforme démontrée à la question précédente. Il faut simplement faire attention en rédigeant, la puissance de z étant ici $pn+1$ et non pn.

D'après la question précédente appliquée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1/(pn+1))_{n\in\mathbb{N}}$, qui est bien décroissante et de limite nulle, la série de fonctions $\sum (-1)^n z^{pn}/(pn+1)$ converge uniformément sur $[0,1]$. En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $z \mapsto (-1)^n z^{pn}/(pn+1)$ est continue sur $[0,1]$. On en déduit que la somme de cette série l'est encore. En multipliant par z, nous voyons donc que le membre de droite de la dernière égalité est une fonction continue de z pour $z \in [0,1]$.

Par conséquent, nous avons

$$\lim_{z\to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{pn+1}}{pn+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1}.$$

En outre, la continuité de l'intégrale par rapport à sa borne supérieure assure que nous avons

$$\lim_{z\to 1} \int_0^z \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant l'égalité démontrée précédemment, nous obtenons finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^p}\,\mathrm{d}x.$$

Pour $p = 1$ ou 2 on retrouve les deux sommes classiques :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Pour de plus grandes valeurs de p, une décomposition en élements simples permet de calculer l'intégrale du second membre sans problème.

Intégration

7

Exercice 7.1 : Un calcul d'intégrale I

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Démontrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$.

2. Démontrer que, pour tout réel $h > 0$:

$$\int_h^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx = \int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}}{t}\,dt.$$

3. Montrer que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{e^{-t} - 1}{t}$ possède un prolongement continu en 0. En déduire la valeur de I.

1. La fonction intégrée est définie et continue sur $]0,+\infty[$. Pour montrer que I existe, nous allons étudier séparément l'existence de l'intégrale sur $]0,1]$ et de l'intégrale sur $[1,+\infty[$.

Classiquement, ceci se fait par une recherche de limites, d'équivalents (notamment via des développements limités) et de comparaison à des fonctions usuelles.

Étude au voisinage de 0 :

Un développement limité à l'ordre 1 en 0 donne $e^{-ax} = 1 - ax + o(x)$ et $e^{-bx} = 1 - bx + o(x)$, d'où $\dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = (b - a) + o(1)$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$ est continue sur $]0,1]$ et converge en 0 donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx$ existe.

Pour l'étude au voisinage de $+\infty$, nous allons classiquement utiliser la règle « $x^\alpha f(x)$ » : si on peut trouver un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha f(x) = 0$ alors f est intégrable au voisinage de $+\infty$ car dominée par la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ qui est elle-même intégrable au voisinage de $+\infty$.

Étude au voisinage de $+\infty$:
$x^2\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (comparaison usuelle des fonctions puissances et exponentielles) donc $\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=o(x^{-2})$ quand x tend vers $+\infty$.
Comme la fonction $x\mapsto x^{-2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, il en est de même de la fonction $x\mapsto \dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$.
En conclusion, I existe.

2. Partant de I, si l'on veut obtenir des intégrales ne faisant intervenir qu'une seule exponentielle comme dans le résultat demandé, un problème de taille se pose. En effet, l'égalité

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$$

n'a aucun sens ! Les deux intégrales de droite sont divergentes car la fonction intégrée est équivalente à $\dfrac{1}{x}>0$ en 0 et $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x}$ diverge.

C'est pour cela que l'énoncé propose d'intégrer non plus à partir de 0 mais à partir d'un certain réel $h>0$: plus aucun problème ne se pose car les deux fonctions sont bien intégrables sur $[h,+\infty[$ d'après l'étude effectuée à la première question.

D'une manière générale, dans le cadre des intégrales généralisées, ne jamais écrire une expression de la forme $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ sans s'être assuré que les intégrales du second membre existent : il peut arriver qu'une telle égalité n'ait pas de sens !

Soit $h\in\mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $x\mapsto\dfrac{e^{-ax}}{x}$ et $x\mapsto\dfrac{e^{-bx}}{x}$ sont intégrables sur $[h,+\infty[$ d'après l'étude menée dans la première question. Ainsi :

$$\int_h^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_h^{+\infty}\frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_h^{+\infty}\frac{e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Il reste à changer ax et bx en t dans chacune des intégrales, ce qui est clairement une application de la formule de changement de variable.

En effectuant le changement de variable $u = ax$ il vient :

$$\int_h^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{ah}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u/a}\,\mathrm{d}u/a = \int_{ah}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

De même :

$$\int_h^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{bh}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

d'où, d'après la relation de Chasles :

$$\int_h^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

3. Il suffit de montrer que g possède une limite finie en 0. La formule étant une forme indéterminée quant t tend vers 0, on peut utiliser des développements limités (à l'ordre 1, puisque le dénominateur abaissera la puissance de 1).

Un développement limité à l'ordre 1 en 0 donne $e^{-t} = 1 - t + o(t)$ d'où l'on tire $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = -1$. La fonction g est donc prolongeable par continuité en 0.
Nous noterons encore g le prolongement de g obtenu en posant $g(0) = -1$, qui est donc continu sur $\mathbb{R}$.

Dans ce cas particulier, on aurait pu remarquer que $g(t) = \dfrac{e^{-t} - e^{-0}}{t - 0}$ et tend donc vers le nombre dérivée de $t \mapsto e^{-t}$ en 0, qui est bien -1. Ce raisonnement est naturel mais est bien moins général que l'usage des développements limités qui peuvent être utilisés systématiquement pour des formes indéterminées plus compliquées, notamment quand le dénominateur est de degré > 1.

Il reste à faire le lien avec le calcul précédent en faisant apparaître $g(t)$ dans l'intégrale. À cet effet, nous pouvons également introduire une primitive G de g.

Soit G la primitive de g nulle en 0, ce qui a bien un sens puisque g est continue en 0.
Faisons apparaître la fonction G :

$$\int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t} - 1}{t}\,\mathrm{d}t = G(bh) - G(ah).$$

Par ailleurs,

$$\int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t} - 1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ah}^{bh} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \ln(b/a).$$

Ainsi :

$$\int_h^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \, \mathrm{d}x = G(bh) - G(ah) + \ln(b/a).$$

La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une primitive de g qui est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, le passage à la limite $h \to 0$ ne pose pas de problème et permet de conclure.

En tant que primitive, la fonction G est continue, donc

$$\lim_{h\to 0} G(bh) = \lim_{h\to 0} G(ah) = G(0) = 0,$$

d'où, en faisant tendre h vers 0 :

$$I = \ln(b/a).$$

Exercice 7.2 : Un calcul d'intégrale II

Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) \, \mathrm{d}x$.

1. Montrer que I est bien définie et est égale à $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) \, \mathrm{d}x$.

2. En déduire une expression de I en fonction de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x)) \, \mathrm{d}x$, puis la valeur de I.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)} \, \mathrm{d}x$. On pourra effectuer le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$.

1. La fonction à intégrer est définie et continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Le seul problème concerne l'intégrabilité au voisinage de 0.

La fonction $x \mapsto \ln(\sin(x))$ est définie et continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. Au voisinage de 0, nous avons $\ln(\sin(x)) \sim \ln(x)$ et donc $\ln(\sin(x)) = o(1/\sqrt{x})$. Puisque la fonction $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ est intégrable au voisinage de 0, la fonction $x \mapsto \ln(\sin(x))$ l'est aussi. Ainsi, I est bien définie.

L'énoncé nous demande de comparer une intégrable contenant un sinus à une intégrale contenant un cosinus. On sait que l'on peut passer de l'un à l'autre par une formule de trigonométrie utilisant un changement de variable du type $y = \frac{\pi}{2} - x$. Nous allons donc faire ce changement de variable dans l'intégrale.

Effectuons le changement de variable $y = \frac{\pi}{2} - x$. Nous obtenons

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)\right)\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(y))\,\mathrm{d}y.$$

Lorsque l'on étudie des intégrales faisant intervenir des fonctions trigonométriques, il est souvent intéressant d'effectuer des changements de variable comme $y = -x, \pi + x, \frac{\pi}{2} - x, \ldots$ En effet, à l'aide des formules trigonométriques, on trouve alors une nouvelle expression de l'intégrale à calculer et, en la comparant avec l'expression de départ, on peut parfois en tirer des informations. La suite de l'exercice présente un exemple de cette stratégie. Dans la suite, n'hésitez pas à essayer différents changements de variable jusqu'à en trouver un qui soit plus pertinent que les autres et bien adapté au problème !

2. L'énoncé nous demande de calculer une nouvelle intégrale faisant intervenir $\sin(2x)$. En utilisant la formule trigonométrique $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, nous allons faire apparaître l'intégrale I.

Nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2\sin(x)\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\ln(2) + 2I,\end{aligned}$$

d'après la question qui précède. On en déduit que

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{4}\ln(2).$$

Une autre possibilité pour faire intervenir I (ou une intégrale proche) en partant de l'intégrale de l'énoncé consiste à effectuer le changement de variable $y = 2x$.

En effectuant le changement de variable $y = 2x$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(y))\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(y))\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à comparer l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(y))\,\mathrm{d}y$ à I. Cela peut se faire à l'aide du changement de variable $z = \pi - y$.

En effectuant le changement de variable $z = \pi - y$ dans la dernière intégrale, nous obtenons

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(y))\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(z))\,\mathrm{d}z = I.$$

Maintenant, nous n'avons plus qu'à regrouper les résultats.

On en déduit que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}I = I.$$

En injectant cette égalité dans la première que nous avons trouvée, nous trouvons

$$I = \frac{1}{2}I - \frac{\pi}{4}\ln(2)$$

et donc

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln(2).$$

3. Commençons pas nous assurer que l'intégrale est bien définie.

La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\tan(x)}$ est définie et continue sur $]0, \dfrac{\pi}{2}]$. En outre, au voisinage de 0, nous avons

$$\frac{x}{\tan(x)} \sim \frac{x}{x} = 1,$$

donc la fonction est intégrable au voisinage de 0. Au voisinage de $\pi/2$, nous avons

$$\frac{x}{\tan(x)} \to 0,$$

donc la fonction est également intégrable au voisinage de $\pi/2$. Par conséquent, l'intégrale est bien définie.

L'énoncé nous propose de modifier l'intégrale à l'aide d'un changement de variable.

En effectuant le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$, nous obtenons

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\pi}{2} - u}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\tan(u)\,\mathrm{d}u.$$

Comment calculer cette dernière intégrale ? Nous savons intégrer la fonction $u \mapsto \tan(u)$ puisque nous en connaissons une primitive : la fonction $u \mapsto -\ln(\cos(u))$. Il nous reste donc à éliminer le terme $\frac{\pi}{2} - u$, ce que nous ferons en intégrant par parties.

On ne peut pas faire d'intégration par parties directement sur des intégrales généralisées ! Ici, la fonction tan n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$. Par définition, l'intégrale que nous voulons calculer est la limite lorsque c tend vers $\frac{\pi}{2}$ des intégrales (classiques) entre 0 et c. Nous effectuerons l'intégration par parties sur ces intégrales classiques, puis passerons à la limite.

Soit $c \in [0, \frac{\pi}{2}[$. Calculons l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\tan(u)\,\mathrm{d}u$ à l'aide d'une intégration par parties : nous dérivons la fonction $u \mapsto \frac{\pi}{2} - u$ en $u \mapsto -1$ et primitivons la fonction $u \mapsto \tan(u)$ en $u \mapsto -\ln(\cos(u))$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^{c} \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\tan(u)\,\mathrm{d}u &= \left[-\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\ln(\cos(u))\right]_0^c - \int_0^c \ln(\cos(u))\,\mathrm{d}u \\ &= -\left(\frac{\pi}{2} - c\right)\ln(\cos(c)) - \int_0^c \ln(\cos(u))\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Calculons la limite du premier terme du membre de droite lorsque c tend vers $\frac{\pi}{2}$. Pour cela, posons $d = \frac{\pi}{2} - c$ et calculons la limite quand d tend vers 0. Nous avons

$$-\left(\frac{\pi}{2} - c\right)\ln(\cos(c)) = -d\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - d\right)\right) = -d\,\ln(\sin(d)).$$

Par conséquent, ce terme est équivalent à $-d\,\ln(d)$ et tend donc vers 0 lorsque d tend vers 0. On en déduit que

$$\int_0^{c} \left(\frac{\pi}{2} - u\right)\tan(u)\,\mathrm{d}u \underset{c\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))\,\mathrm{d}u$$

et donc, en utilisant les questions 1 et 2 que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln(2).$$

Exercice 7.3 : Changement de variable

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $f(1)$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = 1/t$).

2. En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout $x > 0$.

1. Le changement de variable en lui-même ne présente aucune difficulté ; il suffit d'appliquer correctement la formule. Il faut surtout faire attention à ne rien oublier : le changement $u = \dfrac{1}{t}$ (i.e. $t = \dfrac{1}{u}$) doit être effectué dans la fonction intégrée, dans les bornes de l'intégrale et dans l'élément différentiel.
Ici on a, de manière détaillée :

$$\frac{\ln(t)}{1+t^2} = \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2} = \frac{-\ln(u)}{1+(1/u)^2},$$

$$\mathrm{d}t = -\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

et, quand t varie de 0 à $+\infty$, u varie de $+\infty$ à 0 (i.e. les bornes de l'intégrale sont renversées).

En effectuant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ il vient successivement :

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2}(-1/u^2)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{+\infty}^0 \frac{\ln(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= -f(1), \end{aligned}$$

donc $f(1) = 0$.

2. Pour déduire la valeur de $f(x)$ de celle de $f(1)$, nous pouvons envisager un changement de variable. Pour remplacer x par 1 dans x^2+t^2 il suffit de poser $t = ux$: alors $x^2+t^2 = x^2+(ux)^2 = x^2(1+u^2)$.

En effectuant le changement de variable $t = ux$ il vient successivement :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ux)}{x^2+(ux)^2}\,x\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)+\ln(x)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{x}\left(f(1)+\ln(x)\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\right) \\ &= \frac{\ln(x)}{x}\Big[\arctan(u)\Big]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\ln(x)}{x}\left(\lim_{u\to+\infty}(\arctan(u)) - \arctan(0)\right) \\ &= \frac{\pi\ln(x)}{2\,x}. \end{aligned}$$

Exercice 7.4 : Calcul d'une intégrale à paramètre

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer f' sans intégrale.

3. En déduire une expression de f sans intégrale.

1. Pour montrer que la fonction f est bien définie il suffit de démontrer que, pour tout réel $x > 0$ donné, la fonction $t \in]0,1[\mapsto \dfrac{t^{x-1}-1}{\ln(t)}$ est intégrable. Autrement dit, dans cette question, x est considérée comme une constante et on a affaire à un simple problème d'intégrabilité.

Pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,1[$ on pose $\varphi(x,t) = \dfrac{t^{x-1}-1}{\ln(t)}$.
Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. La fonction $t \in]0,1[\mapsto \varphi(x,t)$ est bien définie et continue.

Ceci ne suffit pas car, pour certaines valeurs de x, cette fonction peut diverger quand t tend vers 0 ou 1, auquel cas on ne peut pas conclure sans étudier plus précisément son comportement.

Le comportement quand t tend vers 0 dépend du signe de l'exposant de t ; nous allons donc distinguer les trois cas $x < 1$, $x = 1$ et $x > 1$.

Étude au voisinage de 0 :

Nous allons distinguer les cas $x > 1$, $x = 1$ et $x < 1$ car le comportement de la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ quand t tend vers 0 dépend du signe de l'exposant.

- Si $x > 1$: $\lim_{t\to 0} t^{x-1} = 0$. Comme $\lim_{t\to 0} \ln(t) = -\infty$ on a donc $\lim_{t\to 0} \varphi(x,t) = 0$. La fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est donc intégrable au voisinage de 0.
- Si $x = 1$: $\lim_{t\to 0} t^{x-1} = 1$. Comme $\lim_{t\to 0} \ln(t) = -\infty$ on a donc $\lim_{t\to 0} \varphi(x,t) = 0$. La fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est donc intégrable au voisinage de 0.

Si $x < 1$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ diverge vers $+\infty$ en 0. Cependant, on sait que cette fonction est intégrable au voisinage de 0 si son exposant est strictement supérieur à -1, ce qui est le cas car il ne faut pas oublier que x a été supposé dans l'énoncé strictement positif.

- Si $x < 1$: on a ici une forme indéterminée car $\lim_{t\to 0} t^{x-1} = +\infty$. Cependant, comme $\ln(t)$ tend vers $+\infty$ quand t tend vers 0 on a $\varphi(x,t) = o(t^{x-1})$ quand t tend vers 0. Or $x > 0$, donc $x - 1 > -1$ et $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable au voisinage de 0 d'après le critère de Riemann. On en déduit que $t \mapsto \varphi(x,t)$ est également intégrable au voisinage de 0.

Le problème quand t tend vers 1 est d'une autre nature : le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers 0 ; nous avons affaire à une forme indéterminée.

Parmi les moyens de lever une telle indétermination figurent les développements limités : la fonction logarithme possède des développements limités à tous ordres en 1 donc nous pouvons les introduire pour simplifier l'étude.

Il est également possible de faire un peu plus simple en faisant apparaître des taux d'accroissements. Cela revient peu ou prou à effectuer un développement limité à l'ordre 1.
Plus précisément, pour déterminer la limite en a d'une expression de la forme $\dfrac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)}$, nous pouvons la réécrire

$$\frac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)} = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\,\frac{x - a}{h(x) - h(a)}.$$

Si g et h sont dérivables en a et si $h'(a) \neq 0$, alors le premier terme tend vers $g'(a)$ et le second vers $1/h'(a)$.

Étude au voisinage de 1 **:**
Pour tout réel $t \in]0,1[$:

$$\frac{t^{x-1}-1}{\ln(t)} = \frac{t^{x-1}-1}{t-1} \times \frac{t-1}{\ln(t)}.$$

D'une part, $\frac{t^{x-1}-1}{t-1}$ tend vers le nombre dérivé en 1 de la fonction $t \mapsto t^{x-1}$, qui est $x-1$.
D'autre part $\frac{\ln(t)}{t-1}$ tend vers le nombre dérivé en 1 de $\ln$, qui est 1, donc son inverse aussi.
Ainsi on a :

$$\lim_{t \to 1} \varphi(x,t) = x - 1.$$

La fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ converge en 1 et est donc intégrable au voisinage de 1.
Conclusion :
Pour tout réel $x > 0$ fixé, la fonction $t \in]0,1[\mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $]0,1[$, ce qui montre que la fonction f est bien définie pour tout $x > 0$.

2. Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Nous avons déjà vérifié la première, qui est que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \in]0,1[\mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable. Cette hypothèse sert à assurer l'existence de la fonction f.

Il reste désormais à calculer la dérivée partielle de φ par rapport à x pour vérifier l'hypothèse de domination.

Dans le calcul de la dérivée partielle de φ par rapport à x, c'est cette fois t qui est traitée comme une constante. En particulier, la dérivée de t^{x-1} n'est pas $(x-1)t^{x-2}$ mais

$$\frac{\partial}{\partial x} t^{x-1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{(x-1)\ln(t)}\right) = \ln(t) e^{(x-1)\ln(t)} = \ln(t) t^{x-1}.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,t) &= \frac{1}{\ln(t)} \frac{\partial}{\partial x}\left(t^{x-1}-1\right) \\ &= \frac{1}{\ln(t)} \ln(t) t^{x-1} \\ &= t^{x-1}. \end{aligned}$$

Pour pouvoir appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral il suffit désormais de trouver une fonction $g :]0,1[\to \mathbb{R}$, intégrable, telle que, pour tous $x > 0$ et $t \in]0,1[$, $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant g(t)$. Autrement dit, nous cherchons à majorer $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right|$ indépendamment de x par une fonction de t intégrable sur $]0,1[$.

Remarquons déjà que $t^{x-1} > 0$: on peut donc se passer de valeur absolue.
Une telle majoration n'est pas toujours possible. Supposons qu'il existe une telle fonction g : on a alors $t^{x-1} \leqslant g(t)$ pour tout $x > 0$ et $t \in]0,1[$. En particulier, en faisant tendre x vers 0 à t fixé dans cette inégalité, il vient $g(t) \geqslant \dfrac{1}{t}$, qui n'est pas intégrable sur $]0,1[$, donc g ne l'est pas non plus ! Nous venons en fait de démontrer par l'absurde qu'une telle fonction g n'existe pas.
Ce genre de situation est très fréquent avec les intégrales à paramètre. Cependant, on peut contourner le problème : il suffit en effet de vérifier l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
On pourra alors majorer aisément t^{x-1}, pour $x \in [a,b]$, indépendamment de x : en effet, on a alors

$$a - 1 \leqslant x - 1 \leqslant b - 1$$

donc, pour tout $t \in]0,1[$,

$$(b-1)\ln(t) \leqslant (x-1)\ln(t) \leqslant (a-1)\ln(t)$$

et enfin, par croissance de l'exponentielle,

$$t^{b-1} \leqslant t^{x-1} \leqslant t^{a-1},$$

seule la deuxième inégalité étant intéressante pour nous.

$t \in]0,1[$ donc $\ln(t) < 0$, ce qui inverse le sens des inégalités lorsque l'on multiplie par $\ln(t)$.

Fixons deux réels a et b avec $0 < a < b$. Pour $x \in [a,b]$ et $t \in]0,1[$ on a

$$t^{x-1} = e^{(x-1)\ln(t)} \leqslant e^{(a-1)\ln(t)} = t^{a-1}.$$

Par ailleurs, $t^{x-1} > 0$.
La fonction $t \mapsto t^{a-1}$ est intégrable sur $]0,1[$ car $a - 1 > -1$. Avec $g(t) = t^{a-1}$ nous avons donc :

pour tout réel $x \in [a,b]$, $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant g(t)$ et g intégrable sur $]0,1[$.

L'hypothèse de domination est donc vérifiée sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Il ne reste plus, enfin, qu'à calculer cette intégrale. La variable d'intégration est t : nous allons donc effectuer les calculs en considérant x comme une constante.

Ici, nous avons affaire à une fonction puissance dont on connaît une primitive.

En appliquant le théorème de dérivation des intégrales à paramètre nous avons dérivé t^{x-1} par rapport à x mais, pour le calcul d'intégrale qu'il nous reste à effectuer, nous devons déterminer une primitive de t^{x-1} par rapport à t.
Dans le cadre des intégrales à paramètre il est primordial de toujours bien savoir quelle lettre désigne la variable par rapport à laquelle on dérive ou primitive et quelle lettre désigne la variable considérée comme constante au cours du calcul… sachant que les différentes lettres changent de rôle au fur et à mesure des différents calculs selon le théorème appliqué !

Il s'agit de l'intégrale d'une fonction puissance d'exposant différent de -1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^1 = \frac{1}{x}.$$

3. Nous savons bien sûr que la fonction logarithme est une primitive de f' sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'agit de ne pas aller trop vite : f est égale à la fonction logarithme… à une constante additive près qu'il faudra déterminer. Un moyen simple pour déterminer une telle constante est de calculer la valeur de f en un point où ce calcul est simple. Ici c'est la valeur en 1 qui s'impose car l'intégrale définissant f se simplifie alors considérablement.

D'après ce qui précède, il existe un réel K tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = K + \ln(x).$$

En particulier, il vient $K = f(1)$.
Par ailleurs, pour $x = 1$, on a $t^{x-1} = 1$ pour tout $t \in]0,1[$, soit $\varphi(1,t) = 0$ et finalement $f(1) = 0$; on a donc $K = 0$ soit enfin

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \ln(x).$$

Exercice 7.5 : Fonction Γ d'Euler

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que Γ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$. Que vaut $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?

1. Armons-nous de courage pour vérifier les hypothèses du théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

La première hypothèse assure que la fonction est bien définie.

i) Pour $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, elle est continue, équivalente quand t tend vers 0 à t^{x-1}, qui est intégrable au voisinage de 0 car $x-1 > -1$, et dominée par $1/t^2$ quand t tend vers $+\infty$.

La seconde hypothèse concerne la dérivée partielle par rapport à x de la fonction intégrée. Elle est aisée à calculer si on se souvient que $t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\,\ln(t)}e^{-t}$; t étant considérée comme une constante dans le calcul de la dérivée partielle par rapport à x, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}e^{-t}) = \ln(t)e^{(x-1)\,\ln(t)}e^{-t} = \ln(t)t^{x-1}e^{-t}.$$

ii) La fonction $(x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ possède une dérivée partielle par rapport à x en tout point et

$$\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{\partial}{\partial x}(t^{x-1}e^{-t}) = \ln(t)t^{x-1}e^{-t}.$$

Ce sont les hypothèses « faciles » du théorème, x étant constant dans le premier point et t constant dans le second.

Il reste à dominer la dérivée partielle indépendamment de x.

Comme souvent ceci pose problème car x peut ici prendre de grandes valeurs.

En effet, si on a, pour tous réels x et t, l'inégalité $|\ln(t)t^{x-1}e^{-t}| \leqslant |g(t)|$, il vient, pour $t > 1$ fixé, en faisant tendre x vers $+\infty$, $+\infty \leqslant |g(t)|$. Nous allons donc nous contenter de vérifier l'hypothèse de domination sur tout segment, i.e. d'obtenir une majoration du type précédent pour $x \in [a,b]$ plutôt que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour encadrer la puissance t^{x-1} en fonction de a et b, nous pouvons encadrer son logarithme $\ln(t^{x-1}) = (x-1)\ln(t)$. Comme le signe de $\ln(t)$ dépend de la position de t par rapport à 1 nous allons en fait obtenir deux majorations : l'une pour

$t \in]0,1]$, l'autre pour $t \in [1,+\infty[$. La fonction majorante $|g|$ obtenue sera ainsi définie par deux formules selon la position de t par rapport à 1.

Soient deux réels a et b avec $0 < a < b$ et $x \in [a,b]$.
Pour $t > 1$, on a $(x-1)\ln(t) \leqslant (b-1)\ln(t)$, car $\ln(t) > 0$, donc $0 < t^{x-1} \leqslant t^{b-1}$ et enfin, comme $\ln(t)$ et e^{-t} sont positifs :

$$0 < \ln(t)t^{x-1}e^{-t} \leqslant \ln(t)t^{b-1}e^{-t}.$$

Pour $t < 1$, on a $(x-1)\ln(t) \leqslant (a-1)\ln(t)$, car $\ln(t) < 0$, donc $0 < t^{x-1} \leqslant t^{a-1}$ et enfin, comme $\ln(t) < 0$ et $e^{-t} > 0$:

$$\ln(t)t^{a-1}e^{-t} \leqslant \ln(t)t^{x-1}e^{-t} < 0,$$

ou encore

$$|\ln(t)t^{x-1}e^{-t}| \leqslant |\ln(t)t^{a-1}e^{-t}|.$$

Soit $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(t) = \ln(t)t^{b-1}e^{-t}, \text{ si } t > 1$$
$$g(t) = \ln(t)t^{a-1}e^{-t}, \text{ si } t < 1$$
$$g(1) = 0.$$

L'intégrabilité de g n'est pas a priori évidente car les formules la définissant sont compliquées. On peut résoudre ce problème en cherchant simplement à comparer g à des fonctions puissances.

En effet, si on a $g(t) = o(t^c)$ quand t tend vers 0 avec $c > -1$ alors g est intégrable au voisinage de 0.

La relation $g(t) = o(t^c)$ quand t tend vers 0 est équivalente à $\lim\limits_{t\to 0} t^{-c}g(t) = 0$. Or de telles limites se calculent simplement avec les théorèmes de comparaison de fonctions usuelles. Si on arrive à trouver un tel $c > -1$ on aura donc montré que g est intégrable au voisinage de 0 à l'aide d'un simple calcul de limite.

L'intégrabilité en $+\infty$ pourra être examinée de façon analogue à ceci près que la condition pour que $t \mapsto t^c$ soit intégrable au voisinage de $+\infty$ est $c < -1$.

Revenons à la situation en 0 et cherchons si un réel c peut convenir.

La condition $\lim\limits_{t\to 0} t^{-c}g(t) = 0$ est équivalente à $\lim\limits_{t\to 0} \ln(t)t^{a-c-1}e^{-t} = 0$ en utilisant la formule définissant $g(t)$ pour $t \in]0,1[$.

L'exponentielle tendant vers 1 en 0 il suffit d'avoir $\lim\limits_{t\to 0} \ln(t)t^{a-c-1} = 0$. Le théorème de croissance comparée des fonctions logarithme et puissance nous assure que c'est le cas si $a - c - 1 > 0$. Il suffit donc d'avoir $c < a - 1$ pour que $g(t) = o(t^c)$ quand t tend vers 0.

Nous voulons également que $t \mapsto t^c$ soit intégrable au voisinage de 0. Pour cela, il faut (et il suffit de) avoir $c > -1$. Nous pouvons donc choisir n'importe quel $c \in]-1,a-1[$, par exemple le milieu de cet intervalle : $a/2-1$.

En $+\infty$, les calculs sont plus simples : on a toujours $\lim_{t\to\infty} t^{-c}g(t) = 0$, quel que soit le réel c. On peut donc par exemple prendre $c = -2$ pour obtenir $g(t) = o(1/t^2)$ et donc l'intégrabilité en $+\infty$.

On a alors :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*, |\ln(t)t^{x-1}e^{-t}| \leqslant |g(t)|.$$

Par ailleurs, g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet

i) g est continue sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et aussi en 1.

ii) $\lim_{t\to 0} t^{1-a/2}g(t) = 0$ donc $g(t) = o(t^{a/2-1})$ quand t tend vers 0. Or $t \mapsto t^{a/2-1}$ est intégrable au voisinage de 0 car $a/2-1 > -1$ donc g est intégrable au voisinage de 0.

iii) $\lim_{t\to\infty} t^2 g(t) = 0$ donc $g(t) = o(1/t^2)$ quand t tend vers $+\infty$. Or $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ donc g est intégrable au voisinage de $+\infty$.

En résumé, nous avons

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*, |\ln(t)t^{x-1}e^{-t}| \leqslant |g(t)| \quad \text{et} \quad g \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+^*$$

donc l'hypothèse de domination sur tout segment est vérifiée.

En conclusion, Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Nous devons trouver une relation entre une intégrale faisant intervenir t^{x-1} et une intégrale faisant intervenir t^x, ce qui suggère une intégration par parties.

Afin que tous les calculs effectuées aient bien un sens nous allons les effectuer sur un intervalle $[a,b]$ avec $0 < a < b$, puis nous ferons tendre a vers 0 et b vers $+\infty$. C'est une précaution qu'il est conseillé de prendre car parfois un choix malheureux de primitive peut rendre le crochet et l'intégrale divergents (cf. exercice 1.6 sur l'intégrale de Dirichlet).

Pour $0 < a < b$ on a, en intégrant par parties :

$$\int_a^b t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^x}{x}e^{-t}\right]_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \frac{t^x}{x}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\left[\frac{t^x}{x}e^{-t}\right]_{t=a}^{t=b} = \frac{b^x}{x}e^{-b} - \frac{a^x}{x}e^{-a}$$

donc, quand a tend vers 0,

$$\int_0^b t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{b^x}{x}e^{-b} + \frac{1}{x}\int_0^b t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

et, quand b tend vers $+\infty$:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1).$$

Ceci étant établi, on peut calculer à la main les premières valeurs de $\Gamma(n)$ pour en déduire une formule que nous vérifierons rigoureusement par récurrence.

Tout d'abord, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$. On en déduit $\Gamma(2) = 1 \times \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2 \times \Gamma(2) = 2$, $\Gamma(4) = 3 \times \Gamma(3) = 6, \ldots$ La situation est claire : nous allons démontrer par récurrence que $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose H_n : « $\Gamma(n) = (n-1)!$ ».

- H_1 est vraie. En effet, $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ qui vaut $1 = 0!$ d'après le cours.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ telle que H_n est vraie. On a $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ d'après la propriété vue précédemment et, par hypothèse, $\Gamma(n) = (n-1)!$. On a donc $\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$ donc H_{n+1} est vraie.
- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Exercice 7.6 : Convergence de l'intégrale de Dirichlet

1. Démontrer que $\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie quand A tend vers $+\infty$. On ne cherchera pas à la calculer explicitement, la détermination de sa valeur faisant l'objet des deux exercices suivants.

2. Démontrer que la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour cela, on pourra remarquer que $|\sin(t)| \geqslant \frac{1}{2}(1-\cos(2t))$.

3. Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Montrer, sans calculer explicitement les intégrales, que :

$$\lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Cette limite est généralement désignée sous le nom d'*intégrale de Dirichlet.*

1. Notons tout d'abord que, étant donné un réel $A > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est bien intégrable sur $]0, A]$; en effet, elle y est continue et elle converge en 0 (vers 1 : c'est une limite usuelle). L'intégrale apparaissant dans cette question a bien un sens.

On sait que la limite démandée existe si $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Cependant ce n'est pas le cas, ainsi que l'affirme le résultat annoncé à la deuxième question ! Toutefois, ceci n'empêche pas cette limite d'exister.

Étant donné que nous ne pourrons pas majorer $\left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right|$ par une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$ nous allons employer un procédé classique pour « renforcer la convergence » : intégrer par parties. Plus précisément, nous essaierons ainsi, grâce au facteur $1/t$ de l'intégrale initiale, de faire apparaître une autre intégrale avec un facteur $1/t^2$ qui permettra d'assurer la convergence.

Cependant, un problème se pose. Si nous écrivons brutalement

$$\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_0^A - \int_0^A \frac{\cos(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$$

l'expression de droite n'a aucun sens : le crochet n'est pas défini pour $t = 0$ et l'intégrale n'existe pas non plus car $t^{-2}\cos(t) \sim t^{-2}$ quand t tend vers 0 et t^{-2} n'est pas intégrable au voisinage de 0 d'après le critère de Riemann.

Heureusement nous pouvons contourner facilement ce problème. En écrivant

$$\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t + \int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$$

nous avons exprimé l'intégrale étudiée comme somme d'une constante (l'intégrale de 0 à 1) et d'une intégrale pour laquelle l'intégration par parties se passe sans problème (elle va de 1 à A et t ne prend donc jamais la valeur 0). Bien sûr la valeur de l'intégrale de 0 à 1 reste inconnue mais c'est ici sans importance : on cherche à démontrer que la limite demandée existe, pas à la calculer explicitement !

On a, pour tout réel $A > 0$:

$$\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, il suffit de démontrer que la dernière intégrale converge quand A tend vers $+\infty$.
Pour cela, intégrons par parties en primitivant $\sin(t)$ et dérivant $1/t$:

$$\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

D'une part :

$$\left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^A = \cos(1) - \frac{\cos(A)}{A},$$

qui a une limite finie (à savoir $\cos(1)$) quand A tend vers $+\infty$.
D'autre part :
pour tout réel $t \geqslant 1$, on a $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$. Or la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ aussi. Ainsi, l'expression $\displaystyle\int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente quand A tend vers $+\infty$ (à savoir vers $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$).
En conclusion :
$\displaystyle\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie quand A tend vers $+\infty$.

2. Nous avons déjà signalé ci-dessus qu'il n'y a pas de problème d'intégrabilité en 0. Nous allons donc étudier le problème en $+\infty$ en ne considérant toujours, pour des raisons pratiques de calcul, que des intégrales de 1 à A.
La trigonométrie permet de faire le lien entre $\sin(t)$ et $\cos(2t)$: $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$. Nous sommes donc amenés à comparer $|\sin(t)|$ et $\sin^2(t)$.

Pour tout réel $a \in [0,1]$, $a^2 \leqslant |a|$. Ainsi :

$$|\sin(t)| \geqslant \sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)).$$

En divisant par $|t| > 0$ et intégrant de 1 à A on obtiendra une minoration de $\displaystyle\int_1^A \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\mathrm{d}t$, le but étant de montrer que cette expression tend vers $+\infty$ quand A tend vers $+\infty$.

On déduit de l'inégalité précédente, pour tout réel $A \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\int_1^A \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t &\geqslant \int_1^A \frac{1}{2t}(1-\cos(2t))\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant \frac{1}{2}\ln(A) - \int_1^A \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Le premier terme du minorant tend vers $+\infty$ quand A tend vers $+\infty$: c'est un bon début.

Il reste à étudier le comportement de l'intégrale. On reconnaît une expression analogue à celle de la première question; nous allons utiliser la même technique de calcul, l'intégration par parties, pour voir qu'elle est aussi convergente.

Intégrons par parties comme précédemment

$$\int_1^A \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(2t)}{4t}\right]_1^A + \int_1^A \frac{\sin(2t)}{4t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ici encore le crochet converge quand A tend vers $+\infty$ et l'intégrale aussi car la fonction intégrée est dominée par t^{-2} et donc intégrable sur $[1,+\infty[$.

Ainsi, $\dfrac{1}{2}\ln(A) - \displaystyle\int_1^A \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ est la différence d'un premier terme qui tend vers $+\infty$ quand A tend vers $+\infty$ et d'un second qui converge ; cette différence tend donc vers $+\infty$ et, comme elle minore $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, on en déduit que :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t = +\infty.$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque, dans le cas contraire, l'intégrale précédente serait convergente.

3. Il n'y a ici aucun problème grâce au dénominateur t^2 qui va assurer l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$.

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ notons $g(t) = \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$.

i) g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

ii) Étude de g en 0 :

D'après les limites usuelles, $\lim_{t\to 0} g(t) = 1$. La fonction g est donc intégrable au voisinage de 0.

iii) Étude de g en $+\infty$:

Pour tout réel $t > 0$ on a $0 \leqslant g(t) \leqslant 1/t^2$ car $|\sin| \leqslant 1$. Ceci montre que la fonction g est intégrable au voisinage de $+\infty$, d'après le critère de comparaison avec les intégrales de Riemann.

En conclusion, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La domination par une fonction puissance intégrable, comme dans cette question, est un moyen rapide et simple de montrer qu'une fonction est intégrable. Elle est à utiliser dès que possible !

Notons qu'il existe un théorème analogue dans le cadre des séries numériques (comparaison avec les séries de Riemann).

4. Nous allons reprendre l'intégration par parties effectuée pour montrer l'existence de la limite à la première question : ceci fera apparaître t^2 au dénominateur et un peu de trigonométrie nous permettra de faire apparaître $\sin^2(t)$ au numérateur.

Il va cependant falloir être plus précis : nous ne pouvons nous contenter d'intégrales de 1 à A, il faudra *in fine* faire apparaître des intégrales de 0 à A.

Afin d'y arriver en n'écrivant que des calculs ayant bien un sens nous allons considérer des intégrales sur des segments de la forme $[h, A]$, avec $0 < h < A$, puis faire tendre h vers 0. Nous avons en effet vu précédemment que la borne 0 était problématique.

Cependant, nous allons retomber sur le même problème ; bien que l'égalité

$$\int_h^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_h^A - \int_h^A \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

ait un sens (car $h > 0$), le crochet vaut $\dfrac{\cos(h)}{h} - \dfrac{\cos(A)}{A}$ et diverge donc quand h tend vers 0.

Il s'agit d'améliorer l'intégration par parties. Lorsque l'on demande une primitive de sin on pense immédiatement à $-\cos$ mais c'est oublier que toutes les fonctions de la forme $K - \cos$, avec K constante, conviennent !

Il est possible de choisir K de sorte que le crochet et l'intégrale issus de l'intégration par parties convergent. Partons de l'expression

$$\int_h^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{K - \cos(t)}{t}\right]_h^A + \int_h^A \frac{K - \cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Le crochet vaut

$$\frac{K - \cos(A)}{A} - \frac{K - \cos(h)}{h}.$$

Lorsque h tend vers 0, on a $\cos(h) = 1 + o(h)$ et donc

$$\frac{K - \cos(h)}{h} = \frac{K-1}{h} + o(1).$$

En choisissant $K = 1$ on a donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{K - \cos(h)}{h} = 0$ et le problème de convergence du crochet quand h tend vers 0 est résolu.

Par ailleurs, le numérateur de l'intégrande de la deuxième intégrale est $1 - \cos(t)$, qui est égal à $2\sin^2(t/2)$ d'après les formules de trigonométrie usuelles : voici le carré du sinus qui nous rapproche de la solution annoncée.

Pour deux réels h et A tels que $0 < h < A$ on a, en intégrant par parties :

$$\int_h^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_h^A + \int_h^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

(nous avons choisi $1 - \cos$ comme primitive de sin).
D'une part :

$$\left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_h^A = \frac{1-\cos(A)}{A} - \frac{1-\cos(h)}{h}$$

qui tend vers $\dfrac{1-\cos(A)}{A}$ quand h tend vers 0 ;
d'autre part, étant donné que $1 - \cos(t) = 2\sin^2(t/2)$:

$$\int_h^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_h^A \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Il faut désormais $\sin(t)$ plutôt que $\sin(t/2)$ dans l'intégrale du second membre : le changement de variable $x = t/2$ est tout indiqué.

En effectuant le changement de variable $x = t/2$ il vient

$$\int_h^A \frac{2\sin^2(t/2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{h/2}^{A/2} \frac{2\sin^2(x)}{(2x)^2} 2\,\mathrm{d}x = \int_{h/2}^{A/2} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ cette dernière expression converge, quand h tend vers 0, vers $\displaystyle\int_0^{A/2} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

Ainsi :

$$\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos(A)}{A} + \int_0^{A/2} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Le premier terme du membre de droite tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$; le second converge, car la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Ainsi

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 7.7 : Transformée de Laplace du sinus cardinal

On pose, pour $t > 0, f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$, et $f(0) = 1$ (f est la fonction *sinus cardinal*, que l'on rencontre en physique dans l'étude du phénomène de diffraction).

D'après l'exercice précédent on sait que f est continue, non intégrable sur $\mathbb{R}_+$ mais que $\displaystyle\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t$ possède une limite finie quand A tend vers $+\infty$. Le but de cet exercice et du suivant est de calculer cette limite.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que φ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer explicitement (sans intégrale) la valeur de $\varphi'(x)$ pour tout réel $x > 0$.

3. Déterminer la limite de φ en $+\infty$; en déduire l'expression de $\varphi(x)$ sans intégrale pour tout réel $x > 0$.

1. L'application du théorème de continuité des intégrales à paramètre est immédiate grâce à l'exponentielle qui assure l'intégrabilité.

Nous savons que, pour tout réel t, $|\sin(t)| \leqslant |t|$(il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction sinus, dont la dérivée est majorée en valeur absolue par 1, entre 0 et t). Ainsi, $|f| \leqslant 1$.

Vérifions que, pour tout réel $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Étant donné que $|f| \leqslant 1$, on a $|e^{-xt}f(t)| \leqslant e^{-xt}$. La fonction $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, car $x > 0$, donc la fonction $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ aussi, ce qui montre que $\varphi(x)$ est bien définie pour tout réel $x > 0$.

Pour appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, il faut tout d'abord déterminer la dérivée partielle de l'intégrande par rapport à la variable de dérivation, ici x.

De plus, cette fonction possède une dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^{-xt}f(t)) = -te^{-xt}f(t) = -e^{-xt}\sin(t).$$

Il ne suffit pas de montrer que cette fonction est intégrable pour tout $x > 0$: pour appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre il faut encore la majorer indépendamment de x par une fonction de t intégrable sur $[0,+\infty[$.

Malheureusement, comme souvent, ce n'est pas possible : si une telle fonction h existait, on aurait, pour tous réels $x > 0$ et $t \geqslant 0$: $|-e^{-xt}\sin(t)| \leqslant h(t)$ d'où, quand x tend vers 0 : $|\sin(t)| \leqslant h(t)$, ce qui contredit l'intégrabilité de h. La manière usuelle de contourner ce problème est de montrer non pas directement que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais qu'elle l'est sur $[a,+\infty[$ pour tout réel $a > 0$. Autrement, dit, nous n'allons pas chercher une fonction h vérifiant $|-e^{-xt}\sin(t)| \leqslant h(t)$ pour tout réel $x > 0$ mais uniquement pour $x \geqslant a$.

Fixons un réel $a > 0$. Alors, pour tous réels $x \geqslant a$ et $t \geqslant 0$: $|-e^{-xt}\sin(t)| \leqslant e^{-at}$. Or la fonction $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et indépendante de x ; ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et :

$$\forall x \in [a,+\infty[, \varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}(e^{-xt}f(t))\,\mathrm{d}t.$$

Ceci étant vrai pour $a > 0$ quelconque, φ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, on a successivement :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial(e^{-xt}f(t))}{\partial x}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{+\infty} te^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale d'un produit d'une exponentielle et d'une fonction circulaire on peut passer par les nombres complexes. Ici, nous utiliserons le fait que $\sin(t) = \mathrm{Im}(e^{it})$.

Rappelons que, si λ est un nombre complexe de partie réelle strictement négative, la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda}$.

En utilisant la relation $\sin(t) = \mathrm{Im}(e^{it})$, on a successivement

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{Im}(e^{it})\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x-i}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{x+i}{1+x^2}\right) \\
&= \frac{1}{1+x^2},
\end{aligned}$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Ce type d'intégrale peut aussi se calculer en intégrant deux fois par parties. Plus précisément :

$$\begin{aligned}
\int_0^{T} e^{-xt}\sin(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[-e^{-xt}\cos(t)\Big]_{t=0}^{t=T} - \int_0^{T} xe^{-xt}\cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \Big[-e^{-xt}\cos(t)\Big]_{t=0}^{t=T} - \Big[xe^{-xt}\sin(t)\Big]_{t=0}^{t=T} \\
&\quad - \int_0^{T} x^2e^{-xt}\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (1-e^{-xT}\cos(T)) - (xe^{-xT}\sin(T)) \\
&\quad -x^2\int_0^{T} e^{-xt}\sin(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

soit, en regroupant les intégrales dans le même membre :

$$(1+x^2)\int_0^{T} e^{-xt}\sin(t)\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-xT}\cos(T) - xe^{-xT}\sin(T)$$

d'où, quand T tend vers $+\infty$:

$$(1+x^2)\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

3. On peut souvent être tenté d'utiliser le théorème de convergence dominée pour déterminer la limite en $+\infty$ d'une intégrale à paramètre, en étudiant la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x_n t} f(t)\,\mathrm{d}t$ où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque de réels positifs tendant vers $+\infty$. Même si cela fonctionne bien et est parfois nécessaire il est souvent plus rentable d'essayer une majoration directe.

Nous avons vu que $|f| \leqslant 1$. On a donc

$$|\varphi(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} |e^{-xt} f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

d'où l'on tire

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0.$$

Par ailleurs, nous savons que, pour tout réel $x > 0$, $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$. Il existe donc un réel K tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = K - \arctan(x).$$

L'expression ci-dessus tend vers $K - \pi/2$ quand x tend vers $+\infty$. Étant donné par ailleurs que φ tend vers 0 en $+\infty$, on en déduit que $K = \dfrac{\pi}{2}$, d'où finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Exercice 7.8 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet

On garde les notations de l'exercice précédent. On pose $\ell = \displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction définie par $g(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x}$, pour $x > 0$, et $g(0) = 1$, est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

2. Démontrer que g' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3. Soient A et x deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$\int_0^A e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{Ax} g(u)\sin(u/x)\mathrm{d}u.$$

4. Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$|\varphi(x) - \ell| \leqslant x\left(1 + \int_0^{+\infty} |g'(u)|\mathrm{d}u\right).$$

5. En déduire la valeur de ℓ.

1. La fonction g est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Le seul problème se pose en 0 : il faut montrer que g est bien dérivable en 0 et que, de plus, g' est continue en 0. Cependant, dans ce type de situation, on peut se contenter de montrer un résultat en apparence plus faible : pour montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ sachant qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, il suffit de montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que g' converge en 0.

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Par ailleurs, g est continue en 0. En effet, on a le développement limité, quand x tend vers 0 : $e^{-x} = 1 - x + o(x)$. Ainsi, toujours quand x tend vers 0 : $g(x) = 1 + o(1)$, i.e. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1 = g(0)$. La fonction g est donc bien continue en 0.

Pour étudier la limite de g' en 0 nous aurons encore affaire à une forme indéterminée mais, cette fois, avec x^2 au dénominateur. Un développement limité à l'ordre 2 en 0 du numérateur permettra de conclure.

Un calcul élémentaire donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = \frac{xe^{-x} - (1 - e^{-x})}{x^2}.$$

Utilisons cette fois-ci un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

En ne retenant au cours des calculs que les termes de degré n'excédant pas 2 :

$$xe^{-x} - (1 - e^{-x}) = x - x^2 - (x - \frac{1}{2}x^2) + o(x^2) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

d'où $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et g' converge en 0. La fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Si vous avez déjà étudié les séries entières, vous pouvez montrer que $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} x^n$ et est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

2. Nous savons déjà que g' est continue sur $\mathbb{R}$. Pour montrer qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ il suffit d'étudier son comportement en $+\infty$. Comme l'expression de g' fait intervenir des polynômes et des exponentielles on peut chercher à comparer g' à des fonctions puissances.

La fonction g' est continue sur $\mathbb{R}_+$.
On remarque que $x^2 g'(x) = xe^{-x} - (1 - e^{-x})$ tend vers -1 quand x tend vers $+\infty$; on a donc $|g'(x)| \sim \frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$. D'après le critère de comparaison avec les intégrales de Riemann, g' est donc intégrable au voisinage de $+\infty$.
Par ailleurs, g' est continue en 0 donc intégrable au voisinage de 0.
Ainsi, g' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3. Sachant que $f(t) = \sin(t)/t$ on a

$$(e^{-xt} - 1) f(t) = (e^{-xt} - 1) \frac{\sin(t)}{t}.$$

L'argument de l'exponentielle étant xt, nous pouvons faire apparaître $g(xt) = \frac{1 - e^{-xt}}{xt}$ en écrivant

$$(e^{-xt} - 1) \frac{\sin(t)}{t} = \frac{e^{-xt} - 1}{xt} x \sin(t).$$

On a successivement, par définition des fonctions f et g :

$$\begin{aligned}
\int_0^A e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^A (e^{-xt} - 1) f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^A -xtg(xt) f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^A -xg(xt)\sin(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Enfin, pour avoir $g(u)$ plutôt que $g(xt)$ dans l'intégrale, il suffit de poser $u = xt$, soit $t = u/x$; ceci est licite car $x \neq 0$. Les bornes 0 et A deviennent alors 0 et Ax et $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/x$.

Effectuons le changement de variable $u = xt$. Il vient :

$$\int_0^A -xg(xt)\sin(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^{Ax} g(u)\sin(u/x)\mathrm{d}u.$$

4. Il faudra faire apparaître des intégrales de 0 à $+\infty$: pour cela, nous pourrons chercher à faire tendre A vers $+\infty$ dans le résultat précédent. En effet, le membre de gauche de l'inégalité de la question précédente tend, par définition, vers $\varphi(x) - \ell$ quand A tend vers $+\infty$.

Avant cela, remarquons que le résultat est exprimé à l'aide de g' et non de g. Pour faire apparaître une intégrale faisant intervenir g' à partir d'une intégrale faisant intervenir g, l'outil le plus évident est l'intégration par parties.

Nous utiliserons la dérivée de g et il nous faut donc une primitive de $u \mapsto \sin(u/x)$, par exemple $u \mapsto -x\cos(u/x)$.

Il faut être prudent sur les noms de variables. Ici, nous effectuons une intégration par parties sur une intégrale d'une fonction de variable u. La variable x est ici une constante !

Une intégration par parties donne :

$$\int_0^{Ax} g(u)\sin(u/x)\mathrm{d}u = \Big[-xg(u)\cos(u/x)\Big]_{u=0}^{u=Ax} + x\int_0^{Ax} g'(u)\cos(u/x)\mathrm{d}u.$$

Le crochet vaut :

$$\Big[-xg(u)\cos(u/x)\Big]_{u=0}^{u=Ax} = x(1 - g(Ax)\cos(A)).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^A e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^{Ax} g(u)\sin(u/x)\mathrm{d}u\right| \\
&\leqslant x|1 - g(Ax)\cos(A)| \\
&\quad + x\int_0^{Ax} |g'(u)\cos(u/x)|\mathrm{d}u \\
&\leqslant x|1 - g(Ax)\cos(A)| + x\int_0^{Ax} |g'(u)|\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Lorsque A tend vers $+\infty$:

- $\displaystyle\int_0^A e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $\varphi(x)$, par définition de φ ;
- $\displaystyle\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers ℓ, par définition de ℓ ;
- $x|1 - g(Ax)\cos(A)|$ tend vers x car, comme $x > 0$, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} g(Ax) = \lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$;
- $\displaystyle\int_0^{Ax} |g'(u)|\mathrm{d}u$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g'(u)|\mathrm{d}u$ car g' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

L'inégalité obtenue précédemment donne donc, quand A tend vers $+\infty$:

$$|\varphi(x) - \ell| \leqslant x\left(1 + \int_0^{+\infty} |g'(u)|\mathrm{d}u\right).$$

C'est parce que g' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ que la limite de $\displaystyle\int_0^{Ax} |g'(u)|\mathrm{d}u$ existe et est finie quand A tend vers $+\infty$. Cette propriété de g' est donc essentielle pour conclure.

5. La question précédente montre que φ tend vers ℓ en 0. Par ailleurs, on connaît l'expression de $\varphi(x)$ pour $x > 0$ d'après l'exercice précédent ; il ne reste qu'à combiner ces deux résultats.

D'après la question précédente, il existe une constante M telle que, pour tout réel $x > 0$, $|\varphi(x) - \ell| \leqslant Mx$. En particulier, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \ell$.

Par ailleurs on sait d'après l'exercice précédent que, pour tout réel $x > 0$, $\varphi(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$. On a donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$.

Par unicité de la limite il vient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 7.9 : Une formule d'Euler

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $\displaystyle I_{n,p}(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^p \mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de ces intégrales.

2. Calculer $I_{n,0}(x)$.

3. Donner, pour $p \geqslant 1$, une relation entre $I_{n,p}(x)$ et $I_{n,p-1}(x+1)$; en déduire l'expression de $I_{n,p}(x)$ en fonction de n, p et x mais sans intégrale.

4. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x).$$

5. En déduire, à l'aide de la formule de Stirling, la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

1. Il y a deux cas à distinguer selon la position de x par rapport à 1 : quand $x \geqslant 1$, la fonction intégrée est continue sur le segment $[0,n]$ ce qui suffit pour montrer l'existence de l'intégrale. Pour $x \in]0,1[$, la puissance de t est négative et il va falloir étudier plus en détail le comportement en 0.

Comme il n'y a ici que des fonctions puissances un calcul d'équivalent en 0 permettra d'utiliser le critère de comparaison aux intégrales de Riemann.

Fixons deux entiers $n > 0$ et $p \geqslant 0$ quelconques et un réel $x > 0$.
Premier cas : $x \geqslant 1$.

La fonction $t \mapsto t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^p$ est définie et continue sur le segment $[0,n]$ et donc intégrable ; $I_{n,p}(x)$ est alors bien définie.

Deuxième cas : $x \in]0,1[$.

La fonction $t \mapsto t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^p$ est définie et continue sur $]0,n]$, il reste à étudier le comportement en 0.

Quand t tend vers 0, elle est équivalente à t^{x-1}, qui est intégrable au voisinage de 0 car $x-1 > -1$.
D'après le critère de comparaison avec les intégrales de Riemann cette fonction est donc également intégrable au voisinage de 0 et $I_{n,p}(x)$ est donc également bien définie.

2. Ce cas est élémentaire car on doit intégrer une simple fonction puissance.

Comme $x \neq 0$, une primitive de $t \mapsto t^{x-1}$ est $t \mapsto \frac{t^x}{x}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{n,0}(x) = \int_0^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^n = \frac{n^x}{x}.$$

3. Commençons par comparer les expressions de $I_{n,p}(x)$ et $I_{n,p-1}(x+1)$:

$$I_{n,p}(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^p \mathrm{d}t$$

et

$$I_{n,p-1}(x+1) = \int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{p-1} \mathrm{d}t$$

Les seuls éléments qui diffèrent sont les puissances intervenant dans la fonction intégrée.

Nous allons pouvoir intégrer par parties pour faire apparaître t^x à partir de t^{x-1} (en primitivant) et $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{p-1}$ à partir de $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{p}$ (en dérivant).

Dans le calcul de la dérivée, nous avons affaire à une fonction de la forme u^p donc la dérivée est $pu^{p-1}u'$. Il ne faut pas oublier u', qui ici est la constante $-1/n$. De plus, ceci a bien un sens car $p \geqslant 1$. En effet, pour $p = 0$, ces formules deraient apparaître $u^{p-1} = 1/u$ qui n'est pas définie en n.

En intégrant par parties il vient

$$\begin{aligned} I_{n,p}(x) &= \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^p \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^x}{x}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^p\right]_0^n - \int_0^n \frac{t^x}{x} p \left(-\frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{p-1} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Comme $x \neq 0$ et $p \neq 0$ le crochet se simplifie :

$$\left[\frac{t^x}{x}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^p\right]_0^n = 0$$

d'où l'égalité

$$I_{n,p}(x) = \frac{p}{nx}\int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{p-1} \mathrm{d}t = \frac{p}{nx} I_{n,p-1}(x+1).$$

Si $p \geqslant 2$, on peut appliquer encore une fois la formule précédente :

$$I_{n,p}(x) = \frac{p}{nx} I_{n,p-1}(x+1) = \left(\frac{p}{nx}\right)\left(\frac{p-1}{n(x+1)}\right) I_{n,p-2}(x+2).$$

En répétant p fois ceci on aura la formule :

$$I_{n,p}(x) = \left(\frac{p}{nx}\right) \cdots \left(\frac{1}{n(x+p-1)}\right) I_{n,0}(x+p).$$

En effet, à chaque étape, l'indice p diminue de 1 tandis que la variable x est augmentée de 1et que n ne varie jamais.

Les numérateurs sont $p, p-1, \ldots, 1$ donc leur produit est $p!$.

Les dénominateurs sont $nx, n(x+1), \ldots, n(x+p-1)$. Dans leur produit on peut factoriser n ce qui fournit un facteur n^p car il y a p termes. Le dénominateur peut donc s'écrire plus simplement $n^p x(x+1)\cdots(x+p-1)$.

Enfin, $I_{n,0}(x+p) = \dfrac{n^{x+p}}{x+p}$ d'après le calcul effectué précédemment.

On peut donc proposer la formule simplifiée

$$I_{n,p}(x) = \frac{p!}{n^p} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+p-1)} \frac{n^{x+p}}{x+p}$$

soit encore, en simplifiant les puissances de n :

$$I_{n,p}(x) = \frac{p!n^x}{x(x+1)\cdots(x+p)}.$$

Il n'y a plus qu'à vérifier ceci par récurrence. N'oublions pas que dans les formules précédentes nous avons des relations entre les $I_{n,p}$ pour diverses valeurs de p mais à n constant. La variable de récurrence sera donc p. Notons également que la formule ci-dessus est encore valable pour $p = 0$, la condition $p \geqslant 1$ servant dans la récurrence pour descendre au rang $p-1$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, posons H_p :

« pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $I_{n,p}(x) = \dfrac{p!n^x}{x(x+1)\cdots(x+p)}$.

• H_0 est vraie : en effet cet énoncé se réduit à $I_{n,0}(x) = \dfrac{n^x}{x}$, résultat qui a été démontré précédemment.

• Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que H_p est vraie.

D'après les questions précécentes on a, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$I_{n,p+1}(x) = \frac{p+1}{nx} I_{n,p}(x+1).$$

Par hypothèse de récurrence :

$$I_{n,p}(x+1) = \frac{p!n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+p+1)}.$$

On a donc, pour tous n et x :

$$\begin{aligned} I_{n,p+1}(x) &= \frac{p+1}{nx}\,\frac{p!n^{x+1}}{(x+1)\cdots(x+p+1)} \\ &= \frac{(p+1)!n^x}{x(x+1)\cdots(x+p+1)} \end{aligned}$$

ce qui montre que H_{p+1} est vraie.

- En conclusion, H_p est vraie pour tout entier naturel p, i.e.

$$\forall (n,p,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*, I_{n,p}(x) = \frac{p!n^x}{x(x+1)\cdots(x+p)}.$$

4. Sans surprise l'expression trouvée précédemment ressemble à celle qui intervient dans cette question qui concerne le cas particulier $p = n$; plus précisément, il est demandé ici de montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_{n,n}(x) = \Gamma(x)$.

On a $I_{n,n}(x) = \displaystyle\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$. L'emploi du théroème de convergence dominée semble s'imposer mais il y a une objection de taille : les bornes de l'intégrale dépendent elles aussi de n. Il va donc falloir travailler un peu cette expression pour appliquer le théorème.

Pour éliminer n des bornes de l'intégrale afin d'appliquer le théorème de convergence dominée il existe une méthode efficace consistant à faire intervenir la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,n]$ (i.e. la fonction valant 1 sur cet intervalle et 0 au dehors).

Plus précisément, on peut écrire

$$I_{n,n}(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

où la fonction f_n est définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \leqslant n \\ 0 \quad \text{si} \quad t > n \end{cases}$$

Cette dernière expression peut être écrite plus clairement sous la forme

$$f_n(t) = \chi_n(t)t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$$

où χ_n est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,n]$.

Vue sous cette forme il est clair que f_n est continue par morceaux car χ_n l'est.

Maintenant nous pouvons tenter d'appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (f_n) : l'intervalle d'intégration est bien fixe !

Pour appliquer ce théorème, il faut tout d'abord vérifier que les fonctions f_n sont bien continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ on pose

$$f_n(t) = \chi_n(t)t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

où χ_n est la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,n]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions continues par morceaux.

Par ailleurs, nous avons vu précédemment que la fonction $t \mapsto t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $[0,n]$; f_n est donc intégrable au voisinage de 0.
Enfin, f_n est nulle au voisinage de l'infini donc f_n est intégrable au voisinage de l'infini.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ensuite, il faut étudier la convergence simple de la suite de fonctions de terme général f_n.

Rappelons que la limite de $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$ se retrouve aisément en passant au logarithme :

$$\ln\left(\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) = n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right).$$

Comme n tend vers $+\infty$, on peut utiliser l'équivalent $\ln(1+h) \sim h$ quand h tend vers 0 pour trouver la limite cherchée. Après calculs, on trouve que $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ tend vers e^{-t}.

Fixons un réel positif t. Alors :

- d'une part, $\chi_n(t)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, car $\chi_n(t) = 1$ si $t \leqslant n$ et est donc constante à partir d'un certain rang (par exemple $1 + E(t)$) ;
- d'autre part, $t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ tend vers $t^{x-1}e^{-t}$ quand n tend vers $+\infty$.

En effet, on a successivement, en utilisant l'équivalent $\ln(1+h) \sim h$ quand h tend vers 0 :

$$\begin{aligned}\ln\left(\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) &= n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\\ &\sim n\left(-\frac{t}{n}\right)\\ &\sim -t\end{aligned}$$

et donc, l'exponentielle étant continue :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$$

soit enfin

$$\lim_{n\to\infty} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = t^{x-1}e^{-t}.$$

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$.

Ceci est un bon point : si on peut intervertir intégrale et limite nous retrouverons bien l'intégrale définissant la fonction Γ.

Reste l'hypothèse de domination : nous devons trouver une fonction g, intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $|f_n(t)| \leqslant g(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Notons déjà que les fonctions f_n sont positives.

La difficulté, pour majorer indépendamment de n, vient du facteur $(1 - t/n)^n$. Pour cela, reprenons le calcul de la limite ; nous avons seulement montré que $n\ln(1 - t/n)$ tend vers $-t$ quand n tend vers $+\infty$ alors qu'on peut dire mieux grâce à l'inégalité de convexité classique : $\ln(1+h) \leqslant h$ pour tout réel $h > -1$. Cette inégalité traduit le fait que la représentation graphique du logarithme est situé sous sa tangente en 1, conséquence de sa concavité due à sa dérivée seconde négative en tout point.

Attention, ceci n'a de sens que si $t < n$, afin d'avoir $h > -1$ et donc que le logarithme ait bien un sens !
Nous allons donc être confronté à une deuxième difficulté : passer d'une majoration sur $]0,n[$ a une majoration sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,n[$. Avec $h = -t/n \in]0,1[$ il vient, par concavité du logarithme,

$$\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqslant -\frac{t}{n}$$

d'où, comme $n > 0$,

$$n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leqslant -t$$

et enfin, par croissance de l'exponentielle :

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}.$$

Nous avons donc une première majoration : pour $t \in]0,n[, |f_n(t)| \leqslant t^{x-1}e^{-t}$.

Sur $[n,+\infty[$ la situation est simple car χ_n, et donc f_n, est précisément nulle au-delà de n, i.e. on a la relation : pour $t \in [n,+\infty[$, $|f_n(t)| = 0$.

Ces majorations ont le défaut d'encore faire intervenir n au niveau des intervalles où elles sont valables. Cependant, comme $0 \leqslant t^{x-1}e^{-t}$, on a encore $|f_n(t)| \leqslant t^{x-1}e^{-t}$ pour $t \geqslant n$, cette majoration est donc valable pour tout t et tout n.

Les calculs précédents montrent que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0,n[, |f_n(t)| \leqslant t^{x-1}e^{-t}.$$

Pour chaque n la fonction f_n est nulle sur $[n,+\infty[$; on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, |f_n(t)| \leqslant t^{x-1}e^{-t}.$$

La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ on a, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{n} t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = I_{n,n}(x).$$

En utilisant l'expression de $I_{n,n}(x)$ établie à la question 3, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x).$$

5. Il n'y a qu'à substituer $\frac{1}{2}$ à x dans la formule précédente. La limite obtenue fera intervenir $n!$ mais aussi le produit $\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\cdots\,\frac{2n+1}{2}$ qui peut s'écrire à l'aide de factorielles.

On a, d'après ce qui précède :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^{1/2}}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n)}.$$

Pour simplifier le dénominateur, on peut factoriser $\frac{1}{2}$ dans chaque terme.

Nous avons

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{1}{2^{n+1}}(1\times 3\times\cdots\times(2n+1)).$$

Pour passer du produit d'entiers impairs successifs à une factorielle, il suffit de multiplier par un produit d'entiers pairs.

Or

$$\big(2\times 4\times\cdots\times(2n)\big)\times\big(1\times 3\times\cdots\times(2n+1)\big)=(2n+1)!$$

Enfin, un produit d'entiers pairs peut se simplifier en factorisant 2 dans chaque terme.

et

$$2\times 4\times\cdots\times(2n)=2^n n!.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n\right)=\frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}.$$

et donc que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^2\sqrt{n}\,2^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Enfin, pour déterminer la limite d'une expression comportant des factorielles, nous pouvons utiliser la formule de Stirling.

D'une part, d'après la formule de Stirling,

$$n!\sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

donc

$$(n!)^2\sim 2\pi n^{2n+1}e^{-2n}.$$

D'autre part, toujours d'après cette formule, on a :

$$(2n+1)!\sim(2n+1)^{2n+1}e^{-(2n+1)}\sqrt{2\pi(2n+1)}.$$

Nous avons

$$(2n+1)^{2n+1}=(2n+1)(2n)^{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\sim e(2n+1)(2n)^{2n},$$

car $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n} = \exp\left(2n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$,
et

$$\sqrt{2\pi(2n+1)} \sim \sqrt{4\pi n} = 2\sqrt{\pi n}.$$

Par conséquent

$$(2n+1)! \sim (2n+1)(2n)^{2n}e^{-2n}\,2\sqrt{\pi n}.$$

Il vient donc, en simplifiant avec soin les expressions :

$$\frac{(n!)^2\sqrt{n}\,2^{2n+1}}{(2n+1)!} \sim \frac{2\pi n^{2n+1}e^{-2n}\sqrt{n}\,2^{2n+1}}{(2n+1)2^{2n}n^{2n}e^{-2n}\,2\sqrt{\pi n}} \sim \frac{2n\sqrt{\pi}}{(2n+1)}$$

et cette dernière expression tend vers $\sqrt{\pi}$ quand n tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Par définition, $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Le changement de variable $u = t^{\frac{1}{2}}$ donne alors $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Exercice 7.10 : Intégrale de Gauss

Pour tout réel positif x on pose :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$$

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que f et g sont bien définies et calculer leur dérivée. On ne cherchera pas à calculer les intégrales qui interviendront.

2. Montrer que, pour tout réel positif x, $f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

3. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Étude de la fonction f

Il ne faut pas aller trop vite : f n'est pas une intégrale à paramètre ! En effet, la variable x apparaît dans une borne de l'intégrale et non dans la fonction de t qui est intégrée.

En fait, il s'agit d'une intégrale telle que l'on en rencontre en première année : f est le carré de l'application $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ qui est dérivable de dérivée $x \mapsto e^{-x^2}$.

Soit F la primitive sur $\mathbb{R}_+$ nulle en 0 de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

De plus, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, F'(x) = e^{-x^2}.$$

Par ailleurs, $f = F^2$. Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = 2FF'$, soit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = 2\,e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Étude de la fonction g

La fonction g, elle, est bien définie par une intégrale à paramètre. Nous allons donc vérifier les hypothèses du théorème de dérivation de ces intégrales.

Pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$ posons $\varphi(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$.

i) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. L'application $t \in [0,1] \mapsto \varphi(x,t)$ est intégrable sur $[0,1]$ puisqu'elle est continue et que toute fonction continue sur un segment est intégrable.

ii) φ possède une dérivée partielle par rapport à x et on a

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1], \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} = -2x(1+t^2)\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} = -2x\,e^{-x^2(1+t^2)}.$$

iii) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. L'application $t \in [0,1] \mapsto \dfrac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}$ est intégrable sur $[0,1]$ car elle est continue et toute fonction continue sur un segment est intégrable.

Ces premiers points sont en général faciles à vérifier : on traite séparément les variables x et t. Dans les points i et iii, on se pose la question de l'intégrabilité d'une fonction quand x est considérée comme une constante. Dans le point ii, on calcule une dérivée partielle ; pour cela, c'est t que l'on considère comme une constante pour dériver par rapport à x.

Vient enfin le dernier point, essentiel pour appliquer le théorème : il s'agit d'effectuer une domination uniforme, i.e. d'obtenir une majoration de la forme $\left|\dfrac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right| \leqslant h(t)$, valable pour tout x, avec h une fonction de t intégrable.

L'épithète *uniforme* fait référence au fait que la fonction majorante est indépendante de x.

C'est ce point qui peut, en général, s'avérer le plus technique dans l'application du théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

Cependant, nous sommes dans une situation simplifiée, comme nous avons pu le constater sur les premiers points : nous traitons d'intégrales sur un segment. Comme toute constante est intégrable sur un segment, il suffit de trouver une fonction h constante pour pouvoir appliquer le théorème.

Bien sûr, ceci n'est pas toujours possible, mais l'éventualité d'une majoration grossière par une constante doit toujours être envisagée dans le cas d'intégrales à paramètre sur un segment car ce peut être un moyen de simplifier considérablement la vérification de l'hypothèse du théorème.

Ici, comme $1+t^2 \geqslant 1$, on a déjà la majoration grossière $|-2\,x\,e^{-x^2(1+t^2)}| \leqslant 2\,x\,e^{-x^2}$. Cette fonction de x est continue sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers 0 en $+\infty$ donc est certainement bornée; pour voir cela, on peut effectuer une étude rapide de cette fonction.

Une fois que l'on sait que cette fonction est bornée par un réel positif M on a alors $|-2\,x\,e^{-x^2(1+t^2)}| \leqslant M$ pour tout réel positif x, qui est la majoration recherchée.

iv) On a, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$:

$$\left|\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right| \leqslant 2\,x\,e^{-x^2}.$$

La fonction $u : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto 2\,x\,e^{-x^2}$ a pour dérivée $u' : x \mapsto 2(1-2\,x^2)e^{-x^2}$.
u' est strictement positive sur $[0,1/\sqrt{2}[$, nulle en $1/\sqrt{2}$ et strictement négative sur $]1/\sqrt{2},+\infty[$.
De plus, $u(0)=0$ et, d'après les théorèmes usuels sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$.
On a donc, pour tout réel positif x, $u(x) \leqslant u(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}\,e^{-1/2}$.
En résumé :

– pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\left|\dfrac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x}\right| \leqslant \sqrt{2}\,e^{-1/2}$;

– la fonction $t \in [0,1] \mapsto \sqrt{2}\,e^{-1/2}$ est intégrable sur $[0,1]$.

Ainsi, la fonction g est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}\, \mathrm{d}t$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \int_0^1 -2\,x\, e^{-x^2(1+t^2)}\, \mathrm{d}t$$

ou encore, comme x ne dépend pas de t

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = -2\,x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\, \mathrm{d}t.$$

2. Pour montrer que la fonction $f + g$ est constante, il suffit de montrer que sa dérivée est nulle. Pour cela, on peut se servir des calculs précédents. Le calcul de la valeur de cette constante pourra alors se faire en choisissant une valeur particulière de x pour laquelle les calculs sont simples.

Le problème est que l'intégrale intervenant dans l'expression de f' à pour bornes 0 et x alors que celle de g' a pour bornes 0 et 1. Nous allons donc effectuer un changement de variable pour ne plus avoir que des intégrales sur un même intervalle.

Pour cela, nous allons poser $u = x\,t$; il viendra $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/x$ et les bornes 0 et 1 deviendront 0 et x.

Pour effectuer le changement de variable $u = xt$, il est nécessaire de supposer $x \neq 0$. Nous devrons donc traiter séparément le cas où $x = 0$.

Fixons un réel $x > 0$ et effectuons le changement de variable $u = x\,t$ dans l'intégrale précédente. Il vient successivement

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2\,x \int_0^x e^{-x^2(1+(u/x)^2)}\, \mathrm{d}u/x \\ &= -2 \int_0^x e^{-x^2} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u \\ &= -2\, e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2}\, \mathrm{d}u, \end{aligned}$$

soit $g'(x) = -f'(x)$. La fonction $f + g$ est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$ car sa dérivée est nulle.

Il reste à montrer que $f + g$ est en fait constante sur $\mathbb{R}_+$. Ceci est clair car les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+$ (car on a vu qu'elles sont même de classe $\mathcal{C}^1$). Si a est le réel tel que $f(x) + g(x) = a$ pour tout réel $x > 0$, on a donc $f(0) + g(0) = a$ en faisant tendre x vers 0.

Comme $f+g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et constante sur $\mathbb{R}_+^*$, $f+g$ est constante sur $\mathbb{R}_+$.

Il reste à déterminer la valeur de cette constante. Le plus simple est de la calculant en évaluant $f(x)+g(x)$ en $x=0$.

En particulier, pour $x=0$, on a $f(0)=0$ tandis que $g(0)=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ $=\dfrac{\pi}{4}$.
Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}.$$

3. Dans l'intégrale qui définit g figure l'expression $e^{-x^2(1+t^2)}$, qui tend très vite vers 0 quand x tend vers $+\infty$, quel que soit t. Ceci nous conduit à penser que g tend vers 0 en $+\infty$. C'est ce que nous allons montrer.

À cet effet, il est possible d'utiliser le théorème de convergence dominée pour montrer que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs, $g(x_n)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Même si cette méthode fonctionne ici, on peut aussi chercher une majoration de g par une fonction tendant vers 0 en $+\infty$. Ce procédé est d'ailleurs plus rapide et plus simple.

On peut bien sûr majorer $\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ par 1, mais ceci ne donnera que $g \leqslant 1$. Nous allons donc être plus fin en conservant le facteur e^{-x^2} qui assurera la convergence vers 0.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
De l'inégalité

$$0 \leqslant g(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

on tire, en factorisant e^{-x^2} dans l'intégrale :

$$0 \leqslant g(x)=e^{-x^2}\int_0^1 \frac{e^{-(xt)^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Comme, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$, $0 \leqslant e^{-(xt)^2} \leqslant 1$ et $1+t^2 \geqslant 1$, l'intégrale est inférieure à 1 et il vient

$$0 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x^2}$$

ce qui montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$.

4. Des deux questions précédentes on tire $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}$. On ne peut pas immédiatement en déduire $\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}$: encore faut-il auparavant s'assurer de l'existence de l'intégrale dont la valeur est demandée.

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En effet :
i) elle est continue sur $\mathbb{R}_+$;
ii) $\lim_{t\to\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$ d'après les théorèmes de croissance comparée de fonctions donc $e^{-t^2} = o(1/t^2)$ quand t tend vers $+\infty$.
Ainsi, f converge en $+\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

Par ailleurs, on sait que $f+g$ est constante égale à $\frac{\pi}{4}$ et que g tend vers 0 en $+\infty$. On a donc également

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Enfin, avant de prendre la racine carrée, il faut se poser la question du signe des quantités considérées.

Comme la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est positive, son intégrale de 0 à $+\infty$ l'est également, d'où

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Exercice 7.11 : Théorème de d'Alembert-Gauss

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant à coefficients complexes a une racine complexe.

Nous allons raisonner par l'absurde : soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ et supposons que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) \neq 0$.
Pour $(r,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi]$ on pose

$$\varphi(r,t) = \frac{1}{P(re^{it})}.$$

Enfin, pour $r \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$f(r) = \int_0^{2\pi} \varphi(r,t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que, pour tout réel $A > 0$, il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout nombre complexe z de module supérieur ou égal à R, $|P(z)| \geqslant A$.

2. Calculer $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$.

3. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer f'.

4. Évaluer la limite de f en $+\infty$ et conclure.

1. Il s'agit ici de minorer le module de $P(z)$, qui est défini par une somme ; nous allons utiliser l'inégalité triangulaire. En effet, cette inégalité permet souvent de majorer une somme mais aussi, par un jeu d'écriture, de la minorer. La forme classique $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ donne une majoration de la somme $a+b$. Si l'on écrit $a = (a+b) - b$, on a également $|a| = |(a+b) - b| \leqslant |a+b| + |b|$, d'où l'on déduit une minoration de la somme. Nous allons l'appliquer avec $a = a_n z^n$ et $b = P(z) - a_n z^n$ pour minorer $|a+b| = |P(z)|$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Isolons le terme de plus haut degré de P :

$$a_n z^n = P(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

D'après l'inégalité triangulaire

$$|a_n z^n| = \left| P(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leqslant |P(z)| + \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right|.$$

Nous avons ainsi la minoration

$$|P(z)| \geqslant |a_n z^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right|$$

Pour conclure, nous devons obtenir une minoration de $|P(z)|$ à partir d'une minoration de $|z|$. L'expression précédente permet de le faire simplement. En effet, la valeur absolue de la somme apparaissant dans le membre de droite peut être majorée par l'inégalité triangulaire en fonction de $|z|$. La présence du signe $-$ changera le sens de l'inégalité pour en faire une minoration de $|P(z)|$.

D'après l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k$$

soit

$$|P(z)| \geqslant |a_n||z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k.$$

Ce qui nous intéresse est $|z|$ et non z lui-même. Nous allons introduire une fonction d'une variable réelle qui pourra s'étudier aisément par les méthodes générales.

Considérons la fonction polynomiale réelle Q qui, à un réel x, associe

$$Q(x) = |a_n|x^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|x^k.$$

L'inégalité précédente peut donc s'écrire :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geqslant Q(|z|).$$

Q est non constante (car $n \geqslant 1$) et son coefficient dominant est positif. Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = +\infty$.
En particulier, étant donné un réel $A > 0$, il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout réel $x \geqslant R$, $Q(x) \geqslant A$.
Si z est un nombre complexe tel que $|z| \geqslant R$, on a donc $|P(z)| \geqslant Q(|z|) \geqslant A$.

2. Le calcul des dérivées partielles ne pose pas de difficulté particulière. En effet, les formules usuelles permettent de les calculer à partir des dérivées partielles de $(r,t) \mapsto P(re^{it})$. Ces dérivées partielles se calculent à partir de celles des fonctions $(r,t) \mapsto r^k e^{ikt}$, avec k entier, dont $P(re^{it})$ est combinaison linéaire.

Il faut faire attention au terme $k = 0$. En effet, sa dérivée est nulle, mais si on écrit $\dfrac{\partial}{\partial r}(r^k e^{ikt}) = k\, r^{k-1} e^{ikt}$ cette expression n'est pas définie pour $k = 0$ et $r = 0$.

Pour $k \geqslant 1$, on a

$$\frac{\partial}{\partial r}(a_k r^k e^{ikt}) = k\, a_k r^{k-1} e^{ikt} = e^{it}(k\, a_k (re^{it})^{k-1})$$

tandis que cette dérivée est nulle pour $k = 0$. On en déduit

$$\frac{\partial}{\partial r}(P(re^{it})) = \sum_{k=1}^{n} e^{it}(k\, a_k (re^{it})^{k-1}) = e^{it} P'(re^{it}).$$

Enfin, d'après la formule de dérivation de l'inverse :

$$\frac{\partial \varphi(r,t)}{\partial r} = -\frac{\frac{\partial}{\partial r}(P(re^{it}))}{P^2(re^{it})} = -\frac{e^{it}P'(re^{it})}{P^2(re^{it})}.$$

Pour la dérivée partielle par rapport à t, les calculs sont similaires. Nous allons à nouveau faire apparaître le terme $k\,a_k(re^{it})^{k-1}$ pour obtenir $P'(re^{it})$ dans le résultat final.

Pour $k \geqslant 1$,

$$\frac{\partial}{\partial t}(a_k r^k e^{ikt}) = ik\,a_k r^k e^{ikt} = ir\,e^{it}k\,a_k(re^{it})^{k-1}$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t}(P(re^{it})) = \sum_{k=1}^{n} ir\,e^{it}k\,a_k(re^{it})^{k-1} = ir\,e^{it}P'(re^{it}).$$

Il vient enfin, d'après la formule de dérivation de l'inverse

$$\frac{\partial \varphi(r,t)}{\partial t} = -\frac{ir\,e^{it}P'(re^{it})}{P^2(re^{it})}.$$

On remarque une relation simple entre ces dérivées partielles : $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = ir\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$.

3. Il reste désormais à utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. Certaines hypothèses de ce théorème sont faciles à vérifier, l'hypothèse de domination étant parfois plus technique.

i) Pour tout $r \in \mathbb{R}$, la fonction $t \in [0,2\pi] \mapsto \varphi(r,t)$ est intégrable sur $[0,2\pi]$.
En effet, cette fonction est continue sur $[0,2\pi]$ car elle est obtenue par combinaisons linéaires, produits et quotients à partir de la fonction $t \mapsto re^{it}$ qui est continue. De plus, toute fonction continue sur un segment est intégrable.
ii) φ possède en tout point une dérivée partielle par rapport à r : ceci a été démontré précédemment.

Il reste à vérifier l'hypothèse de domination, i.e. obtenir une inégalité de la forme

$$\left|\frac{\partial \varphi(r,t)}{\partial r}\right| \leqslant h(t)$$

valable pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [0,2\pi]$ avec h intégrable sur $[0,2\pi]$.

Notons deux choses importantes pour simplifier cette recherche :

• on peut utiliser une version plus faible de cette hypothèse de domination : vérifier que, pour tout segment $S \subset \mathbb{R}_+$, il existe une fonction $h : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, intégrable, telle que

$$\forall r \in S, \forall t \in [0,2\pi], \left|\frac{\partial \varphi(r,t)}{\partial r}\right| \leqslant h(t);$$

• toute fonction constante est intégrable sur $[0,2\pi]$: on peut donc se contenter de trouver une fonction h constante vérifiant cette inégalité.

Rappelons l'expression obtenue précédemment :

$$\frac{\partial \varphi(r,t)}{\partial r} = -\frac{e^{it} P'(re^{it})}{P^2(re^{it})}.$$

Il n'est a priori pas évident de majorer ceci indépendamment de r. Cependant, si on se limite à des valeurs de r dans un segment S, la situation est plus simple. En effet, $S \times [0,2\pi]$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$ et toute fonction continue sur un compact est bornée ; comme $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$ est continue sur $S \times [0,2\pi]$, elle y est bornée et on obtient le résultat souhaité.

iii) Fixons un segment $S \subset \mathbb{R}_+$. L'application $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$ est continue sur $S \times [0,2\pi]$ car elle est obtenue par combinaisons linéaires, produits et quotients à partir de la fonction $t \mapsto re^{it}$ qui est continue. De plus, $S \times [0,2\pi]$ est compact.

Ainsi, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$ est bornée sur $S \times [0,2\pi]$, i.e. il existe un réel positif M tel que

$$\forall (r,t) \in S \times [0,2\pi], \left|\frac{\partial \varphi(r,t)}{\partial r}\right| \leqslant M.$$

La fonction $t \mapsto M$ est intégrable sur le segment $[0,2\pi]$ donc $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$ vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, la fonction f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$; de plus

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, f'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi(r,t)}{\partial r} \, \mathrm{d}t.$$

Cette intégrale n'est pas, a priori, aisée à calculer : on intègre par rapport à t une dérivée partielle par rapport à r. Cependant, les questions précédentes donnent une relation entre les dérivées partielles de φ.

Les calculs précédents montrent que

$$\forall (r,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi], \frac{\partial \varphi(r,t)}{\partial t} = ir \frac{\partial \varphi(r,t)}{\partial r}.$$

Ainsi, pour $r > 0$, on a

$$f'(r) = \frac{1}{ir} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi(r,t)}{\partial t} \, \mathrm{d}t,$$

d'où

$$f'(r) = \frac{1}{ir} \Big[\varphi(r,t) \Big]_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$$

Étant donné qu'il y a deux variables, il est préférable de préciser par rapport à quelle variable est calculé le crochet en écrivant $t = 0$ et $t = 2\pi$ plutôt que simplement 0 et 2π.

La division par r oblige à supposer $r \neq 0$. Cependant, f étant de classe $\mathcal{C}^1$, on peut en déduire la valeur de $f'(0)$ par passage à la limite.

f' est donc nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, f' est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc f' est en fait identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$.

4. Quand r est grand, re^{it} est aussi grand car son module est r, donc, d'après la première question, $P(re^{it})$ est grand et l'intégrale de son inverse, i.e. $f(r)$, petite. On s'attend donc à ce que f tende vers 0 en $+\infty$.

Fixons un réel $\varepsilon > 0$. Nous souhaitons majorer f à l'aide de ε donc nous pouvons chercher à minorer $|P(z)|$ à l'aide de $\frac{1}{\varepsilon}$. Pour cela, on peut utiliser la première question avec $A = \frac{1}{\varepsilon}$.

Soit un réel $\varepsilon > 0$. D'après la première question appliquée à $A = \frac{1}{\varepsilon}$ il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout complexe z tel que $|z| \geqslant R$, $|P(z)| \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$. En particulier pour tout réel $r \geqslant R$ et tout réel t, on a

$$|re^{it}| = r \geqslant R$$

et donc

$$|P(re^{it})| \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$$

soit enfin

$$\frac{1}{|P(re^{it})|} \leqslant \varepsilon.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout réel t on obtient, en intégrant de 0 à 2π :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{|P(re^{it})|}\,\mathrm{d}t \leqslant 2\pi\varepsilon$$

et donc

$$|f(r)| = \left|\int_0^{2\pi} \frac{1}{P(re^{it})}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{1}{|P(re^{it})|}\,\mathrm{d}t \leqslant 2\pi\varepsilon.$$

En résumé : pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $R > 0$ tel que, pour tout réel $r \geqslant R$, on a $|f(r)| \leqslant 2\pi\varepsilon$.
Autrement dit, par définition de la limite,

$$\lim_{r \to +\infty} f(r) = 0.$$

Par ailleurs $f' = 0$ donc f est constante : ainsi, $f = 0$. Il reste à voir en quoi ceci constitue une contradiction.

Nous venons d'étudier f au voisinage de $+\infty$. La situation en 0 est facile à étudier car $f(0)$ peut se calculer simplement.

Par ailleurs, nous avons vu précédemment que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que sa dérivée est identiquement nulle; ainsi f est constante sur $\mathbb{R}_+$.
Comme f tend vers 0 en $+\infty$ et est constante on en déduit qu'elle est identiquement nulle.
Cependant

$$f(0) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{P(0)}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{P(0)} \neq 0$$

ce qui constitue une contradiction manifeste avec le point précédent.
Ainsi notre hypothèse de départ, à savoir que P ne possédait aucune racine complexe, est fausse.
Nous avons donc démontré que tout polynôme non constant à coefficients complexes possède au moins une racine complexe.

Séries de Fourier

8

Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique, on définit pour $n \in \mathbb{Z}$ le coefficient de Fourier d'indice n de la fonction f par la formule suivante :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, \mathrm{d}t.$$

Puisque la fonction f est 2π-périodique, nous pouvons remplacer l'intégrale sur $[-\pi,\pi]$ par une intégrale sur n'importe quel autre intervalle de longueur 2π. La définition de la fonction f fait souvent apparaître un intervalle privilégié. De même, une propriété de parité rend plus simple le calcul d'intégrales sur $[-\pi,\pi]$.

La théorie des séries de Fourier fournit des moyens efficaces pour calculer des sommes de séries. Le premier nous est donné par le théorème de Parseval. Il affirme que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, \mathrm{d}t.$$

Remarquons qu'ici encore, puisque la fonction f est 2π-périodique, nous pouvons remplacer l'intégrale sur $[-\pi,\pi]$ par une intégrale sur n'importe quel autre intervalle de longueur 2π.

Un autre moyen nous est donné par le théorème de Dirichlet. Pour l'appliquer, nous devons supposer que la fonction f considérée précédemment est, en outre, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Dans ce cas nous avons, pour tout réel a :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ika} \right) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x\to a^-} f(x) + \lim_{x\to a^+} f(x) \right).$$

Si la fonction f est continue au point a, cette dernière quantité est égale à $f(a)$.

Notons que le théorème de Parseval, contrairement au théorème de Dirichlet, ne nécessite aucune hypothèse supplémentaire sur f.

Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles, il est également possible de définir des coefficients de Fourier réels en utilisant les fonctions trigonométriques. Pour cela, on pose

$$a_0(f) = c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

et

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Les coefficients a_n, b_n et c_n sont liés par les formules

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = c_n + c_{-n} \ \text{ et } \ b_n = i(c_n - c_{-n})$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \ \text{ et } \ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Avec ces notations, le théorème de Parseval devient

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

La conclusion du théorème de Dirichlet s'énonce alors :

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)\cos(na) + b_n(f)\sin(na)\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to a^-} f(x) + \lim_{x\to a^+} f(x)\right).$$

Il existe d'autres conventions pour définir les coefficients de Fourier réels. Ces différentes conventions modifient les formules de Parseval et de Dirichlet en faisant apparaître ou disparaître des facteurs $1/2$. Par exemple, une convention fréquente est de définir a_0 avec un facteur $1/\pi$ (on a donc alors une seule formule pour tous les a_n, $n \in \mathbb{N}$), ce qui a pour effet de modifier a_0 en $a_0/2$ dans les formules.

Pour finir, signalons que certaines propriétés de la fonction f se retrouvent sur ses coefficients de Fourier. C'est le cas de la parité, qui permet de faire l'économie de beaucoup de calculs :

$$\text{si } f \text{ est paire, } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ c_{-n}(f) = c_n(f)\,; \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = 0\,; \end{cases}$$

$$\text{si } f \text{ est impaire, } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ c_{-n}(f) = -c_n(f)\,; \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0. \end{cases}$$

Ces formules se démontrent simplement en effectuant le changement de variable $t \mapsto -t$ dans les intégrales définissant les coefficients de Fourier.

Enfin, il existe des formules pour traiter le cas des fonctions T-périodiques avec $T \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque. Ceci dit, on peut toujours ramener ce genre d'étude au cas 2π-périodique par un changement de variable dans les intégrales : si f est T-périodique, la fonction $g : t \mapsto f(t\frac{T}{2\pi})$ est 2π-périodique. Une fois calculés les coefficients de Fourier de g, on peut faire apparaître f dans les formules de Parseval ou de Dirichlet obtenues avec g en effectuant le changement de variable $u = t\frac{T}{2\pi}$ dans les intégrales. Un raisonnement de ce type est proposé dans l'exercice **8.6**.

Exercice 8.1 : Calcul de séries numériques à l'aide de séries de Fourier I

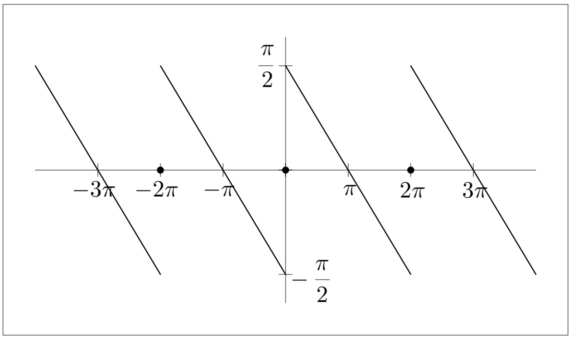
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie par

$$\begin{cases} f(0) = 0\,; \\ \forall x \in\,]0,2\pi[,\ f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}. \end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f.

2. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

1. La fonction f est continue par morceaux et 2π-périodique. Sa représentation graphique est la suivante :



Avant tout il faut penser à considérer la parité de la fonction f afin de simplifier les calculs, comme nous l'avons rappelé en introduction.

On remarque que graphe de la fonction f est symétrique par rapport à l'origine : cette fonction est donc impaire. Ainsi, nous aurons uniquement à calculer les coefficients de Fourier b_n.

Vu la définition de la fonction f, il est naturel de calculer les coefficients à l'aide d'une intégrale sur $[0,2\pi]$. Remarquons que, dans le calcul de cette intégrale, la valeur de f en 0 n'intervient pas ! En effet, changer la valeur d'une fonction en un nombre fini de points ne modifie pas la valeur de l'intégrale. C'est donc la fonction $t \mapsto (\pi - t)\sin(nt)/2$ que nous allons intégrer.

Calculons les coefficients de Fourier de la fonction f. Puisqu'elle est impaire, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N},\, a_n(f) = 0.$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - t}{2}\sin(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On calcule directement la première intégrale : pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\int_0^{2\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 0.$$

Calculons la seconde intégrale à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}t &= \left[t\,\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\pi\,\frac{\cos(2n\pi)}{n} + \left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous obtenons

$$b_n(f) = \frac{1}{n}.$$

L'énoncé nous demande de calculer les coefficients de Fourier de f sans plus de précisions. Nous avons remarqué que la fonction f était impaire et nous sommes donc contentés de calculer les coefficients b_n. Nous pouvons en déduire presque sans calcul les coefficients c_n à l'aide des formules rappelées en introduction. Nous obtenons $c_0(f) = a_0(f) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = (a_n - ib_n)/2 = -i/(2n)$ et $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2 = i/(2n)$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ c_n = -\frac{i}{2n}.$$

2. Ce genre de résultat s'obtient presque toujours en appliquant les théorèmes de Dirichlet et de Parseval. Nous voyons que, dans la première somme, ce sont les coefficients de Fourier qui interviennent, alors que dans la seconde ce sont leurs carrés. Cela nous suggère d'appliquer le théorème de Dirichlet pour calculer la première somme et celui de Parseval calculer pour la seconde.

La fonction f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. De plus, elle est continue en 1. Ainsi, d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f en 1 converge vers $f(1)$. Nous avons donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

Par ailleurs, le théorème de Parseval assure que la série

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n \geqslant 1} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$$

converge et que sa somme est

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Calculons cette intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \frac{(\pi - t)^2}{4} \,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{(t-\pi)^3}{12}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi^3}{6}. \end{aligned}$$

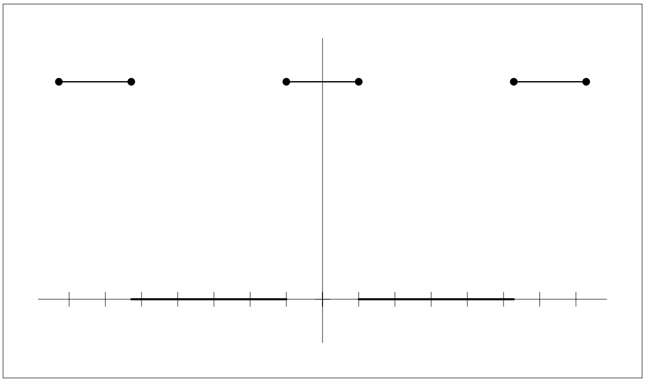
On en déduit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2\,\frac{1}{2\pi}\,\frac{\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 8.2 : Calcul de séries numériques à l'aide de séries de Fourier II

On fixe un réel $a \in]0,\pi[$. On considère la fonction f, définie sur $[-\pi,\pi]$, valant 1 sur $[-a,a]$ et 0 en dehors. On prolonge f par 2π-périodicité sur $\mathbb{R}$.
1. Déterminer les coefficients de Fourier de f.
2. Quelles formules obtient-on en appliquant le théorème de Dirichlet ?
3. Quelle formule obtient-on en appliquant le théorème de Parseval ?

1. Le graphe de la fonction f a l'allure suivante :



Nous constatons que la fonction f est paire. Ainsi, nous nous contenterons de calculer les coefficients $a_n(f)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

f étant paire, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(f) = 0.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} a_0(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \\ &= \frac{a}{\pi}. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous avons enfin

$$
\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \cos(nx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-a}^{a}\\
&= \frac{2\sin(na)}{n\pi}.
\end{aligned}
$$

Le dernier calcul n'est bien valable que pour $n \geqslant 1$: en effet, n apparaît au dénominateur. C'est une situation fréquente dans les calculs de coefficients de Fourier.

2. Il s'agit ici d'une application directe du cours.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Dirichlet : pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(na)}{n\pi}\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x^-} f(t) + \lim_{t\to x^+} f(t)\right).$$

Le membre de droite n'est guère explicite. Nous allons le calculer en distinguant plusieurs cas. Les propriétés de la fonction f nous permettront de restreindre les cas à étudier.

La fonction f est 2π-périodique et paire. On en déduit que la formule ci-dessus est inchangée lorsque l'on remplace x par $x + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, ou par $-x$. Il nous suffit donc de considérer les nombres réels x appartenant au segment $[0,\pi]$. Nous distinguerons plusieurs cas.

• Soit $x \in [0,a[$.

La fonction f est continue au point x et vaut 1 en ce point. On en déduit que

$$\frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(na)}{n\pi}\cos(nx) = 1,$$

autrement dit,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n}\cos(nx) = \frac{\pi - a}{2}.$$

En particulier, pour $x = 0$, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n} = \frac{\pi - a}{2}.$$

La question posée ici est ouverte. Il ne faut donc pas craindre de prendre des initiatives et de spécialiser les formules en des points particuliers lorsque cela s'y prête. Ici, par exemple, considérer le cas $x = 0$ permet d'obtenir une formule élégante qui n'est absolument pas évidente.

• Soit $x \in]a,\pi]$.
La fonction f est continue au point x et vaut 0 en ce point. On en déduit que

$$\frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(na)}{n\pi} \cos(nx) = 0,$$

autrement dit,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n} \cos(nx) = -\frac{a}{2}.$$

En particulier, pour $x = \pi$, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(na)}{n} = -\frac{a}{2}.$$

• Considérons le point $x = a$.
La fonction f n'est pas continue en ce point : sa limite à gauche vaut 1 et sa limite à droite 0. Nous obtenons donc

$$\frac{a}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sin(na)}{n\pi} \cos(na) = \frac{1}{2},$$

autrement dit,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n} \cos(na) = \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2},$$

ou encore

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2na)}{n} = \frac{\pi}{2} - a.$$

Noter que les formules précédentes, dans les cas $a = 1$ ou $a = 1/2$, redonnent le résultat de l'exercice **8.1**.

3. Ici, de nouveau, il s'agit d'une application directe du cours. Il s'agira surtout, comme précédemment, de simplifier l'expression obtenue.

D'après le théorème de Parseval,

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

En remplaçant les coefficients de Fourier par leur expression, nous obtenons

$$\frac{a^2}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} dx = \frac{a}{\pi},$$

autrement dit,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(na)}{n^2} = \frac{(\pi - a)a}{2}.$$

Exercice 8.3 : Calcul de séries numériques à l'aide de séries de Fourier III (PC-PSI)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie par

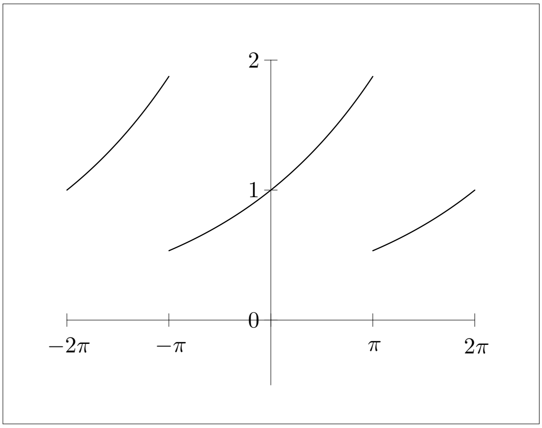
$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \ f(x) = e^{\lambda x}.$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier complexes de la fonction f.
2. En déduire l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda \operatorname{th}(\pi\lambda)} - \frac{1}{2\lambda^2}.$$

3. Qu'obtient-on en faisant tendre λ vers 0 dans la formule ci-dessus ? On prendra soin de justifier rigoureusement toutes les étapes du calcul.

La fonction f ne présente aucune propriété de symétrie particulière. Voici l'allure de sa représentation graphique quand $\lambda > 0$:



1. C'est une application directe de la définition.

La fonction f est 2π-périodique et continue par morceaux. Pour $n \in \mathbb{Z}$ nous avons

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\lambda x} e^{-inx}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\lambda-in)x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(\lambda-in)x}}{\lambda-in}\right]_{-\pi}^{\pi} \end{aligned}$$

car $\lambda \neq in$, puisque λ est un nombre réel non nul et in un nombre imaginaire pur. Nous avons donc

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(\lambda-in)\pi} - e^{-(\lambda-in)\pi}}{\lambda-in}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi}\left(\frac{e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi}}{\lambda-in}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi}\left(\frac{2\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda-in}\right) \\ &= \frac{(-1)^n\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\pi(\lambda-in)}. \end{aligned}$$

2. La formule à démontrer fait intervenir une somme de série. Le terme général de cette série possède un terme n^2 au dénominateur, alors que le coefficient de Fourier $c_n(f)$ possède un terme n au dénominateur. Nous allons donc chercher à utiliser le théorème de Parseval, qui fait intervenir le module au carré des coefficients de Fourier.

D'après le théorème de Parseval,

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

Il nous reste maintenant à calculer chacun des deux termes de cette inégalité. En ce qui concerne le terme de gauche, nous devons l'exprimer sous la forme d'une somme de série. Il faut donc passer d'une somme sur $\mathbb{Z}$ à une somme sur $\mathbb{N}$. Nous y parviendrons en regroupant les termes d'indice n et $-n$.

Calculons les deux termes de cette égalité. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Nous avons

$$|c_n(f)|^2 = \frac{\text{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2(\lambda^2 + n^2)}.$$

En particulier, nous remarquons que $|c_n(f)|^2 = |c_{-n}(f)|^2$. Nous avons donc

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + 2 \sum_{n=1}^{N} |c_n(f)|^2.$$

En passant à la limite, nous obtenons

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 = \frac{\text{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2\lambda^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\text{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2(\lambda^2 + n^2)}.$$

Calculons, à présent, l'intégrale. Nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2\lambda x} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{2\lambda x}}{2\lambda} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{2\lambda\pi} - e^{-2\lambda\pi}}{2\lambda} \right) \\
&= \frac{\text{sh}(2\lambda\pi)}{2\lambda\pi}.
\end{aligned}$$

En revenant maintenant à l'égalité, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\text{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2(\lambda^2 + n^2)} = \frac{\text{sh}(2\lambda\pi)}{2\lambda\pi} - \frac{\text{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2\lambda^2}.$$

Ce n'est pas encore exactement l'égalité recherchée. Nous allons donc la manipuler pour lui donner la forme voulue. À cet effet, nous ferons appel à quelques résultats sur les fonctions trigonométriques hyperboliques.

Puisque $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{sh}(\lambda\pi) \neq 0$. Nous pouvons donc mutiplier les deux membres de l'égalité par $\pi^2/(2\mathrm{sh}^2(\lambda\pi))$. Nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\lambda^2} &= \frac{2\mathrm{sh}(\lambda\pi)\mathrm{ch}(\lambda\pi)\pi^2}{4\lambda\pi\mathrm{sh}^2(\lambda\pi)} - \frac{1}{2\lambda^2} \\ &= \frac{\pi}{2\lambda\mathrm{th}(\lambda\pi)} - \frac{1}{2\lambda^2}.\end{aligned}$$

Les formules de trigonométrie hyperboliques étant moins classiques que les formules de trigonométrie, nous donnons ici une démonstration de celle que nous avons utilisée. En cas de doute, il ne faut pas hésiter à prendre le temps de refaire ce calcul rapide. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}(2\lambda\pi) &= \frac{e^{2\lambda\pi} - e^{-2\lambda\pi}}{2} \\ &= \frac{(e^{\lambda\pi} + e^{-\lambda\pi})(e^{\lambda\pi} - e^{-\lambda\pi})}{2} \\ &= 2\mathrm{ch}(\lambda\pi)\mathrm{sh}(\lambda\pi).\end{aligned}$$

2. Nous devons calculer la limite des deux membres de l'égalité lorsque λ tend vers 0. Aucune des deux n'est complétement évidente.

Commençons par le membre de gauche. Il s'agit visiblement d'intervertir une série et une limite. Nous allons donc chercher à démontrer la convergence normale de la série (comme série de fonctions de la variable λ).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto & \dfrac{1}{n^2+\lambda^2} \end{array}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |f_n(\lambda)| \leqslant \frac{1}{n^2},$$

qui est le terme général d'une série convergente. Par conséquent, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Puisque toutes les fonctions f_n sont continues en 0, leur somme l'est aussi.

Nous avons donc

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+\lambda^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Passons, à présent, au second membre de l'égalité :

$$\frac{\pi}{2\lambda\mathrm{th}(\lambda\pi)}-\frac{1}{2\lambda^2}.$$

Il s'agit d'une forme indéterminée lorsque λ tend vers 0. Nous pouvons lever cette indétermination à l'aide des développements limités.

Cherchons maintenant la limite du second terme lorsque λ tend vers 0. Commençons par calculer un développement limité de $1/\mathrm{th}(x)$ quand x tend vers 0. Nous avons successivement

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{th}(x)} &= \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\\
&= \frac{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}\\
&= \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\frac{1}{1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}\\
&= \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\\
&= \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)\\
&= \frac{1}{x}+\frac{x}{3}+o(x).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2\lambda\mathrm{th}(\lambda\pi)}-\frac{1}{2\lambda^2} &= \frac{\pi}{2\lambda}\left(\frac{1}{\lambda\pi}+\frac{\lambda\pi}{3}+o(\lambda)\right)-\frac{1}{2\lambda^2}\\
&= \frac{\pi^2}{6}+o(1).
\end{aligned}$$

Finalement, en prenant la limite des deux termes de l'égalité lorsque λ tend vers 0, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Ce n'est pas la manière la plus efficace de trouver la valeur de cette somme (voir exercice **8.1**)

Exercice 8.4 : Relation de récurrence sur les coefficients de Fourier

Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{5 + 4\cos(t)}.$$

Pour cela, on pourra chercher une relation de récurrence entre ces coefficients.

Remarquons que la fonction est bien définie et continue par morceaux (et même de classe $\mathcal{C}^{\infty}$) sur $\mathbb{R}$ et est paire. Ainsi, nous allons calculer ses coefficients de Fourier réels, plus précisément les coefficients a_n.

Pour obtenir une relation de récurrence entre ces coefficients, nous avons besoin d'une relation de récurrence entre les réels $\cos(nt)$. On peut obtenir une telle relation à l'aide des formules de trigonométrie usuelles. La formule

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

appliquée avec $a = (n+1)t$ et $b = \pm t$ fournit :

$$\cos(nt) + \cos((n+2)t) = 2\cos((n+1)t)\cos(t).$$

C'est cette relation qui permet d'étudier les polynômes de Chebyshev : si l'on souhaite démontrer l'existence de polynômes T_n vérifiant $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, la relation ci-dessus montre que l'on doit avoir

$$T_n(\cos(\theta)) + T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)).$$

Ceci impose que les polynômes T_n vérifient la relation de récurrence $T_n + T_{n+2} = 2XT_{n+1}$ et on vérifie sans peine que la suite de polynômes définie ainsi et par ses premiers termes $T_0 = 1$ et $T_1 = X$ vérifie bien la propriété $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Nous pouvons donc calculer $a_n + a_{n+2}$ en espérant une simplification des calculs.

a_0 étant défini avec un facteur $1/(2\pi)$ (et non $1/\pi$), les calculs que nous allons effectuer ne sont valables que pour $n \geqslant 1$. Dans le cas $n = 0$, ce ne sera pas a_0 mais $2a_0$ qui interviendra. Nous traiterons ce cas ultérieurement.

Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+2} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt) + \cos((n+2)t)}{5+4\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\cos((n+1)t)\cos(t)}{5+4\cos(t)}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Il n'y a que le facteur $\cos(t)$ en trop au numérateur pour que l'on puisse faire apparaître a_{n+1}. On peut l'éliminer presque sans calcul en effectuant la manipulation classique suivante sur les fractions qui consiste à faire apparaître le dénominateur au numérateur :

$$\frac{X}{5+4X} = \frac{1}{4}\,\frac{(5+4X)-5}{5+4X} = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\,\frac{1}{5+4X}.$$

On a successivement :

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((n+1)t)(5+4\cos(t)-5)}{5+4\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+1)t)\,\mathrm{d}t - \frac{5}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((n+1)t)}{5+4\cos(t)}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

D'une part,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+1)t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin((n+1)t)}{n+1}\right]_{-\pi}^{\pi} \quad (\text{car } n+1 \neq 0)$$

et cette intégrale est donc nulle.

D'autre part, la seconde intégrale n'est autre que a_{n+1} à un facteur près. On obtient alors

$$a_n + a_{n+2} = -\frac{5}{2}a_{n+1}$$

soit la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+2} + \frac{5}{2}a_{n+1} + a_n = 0.$$

Par ailleurs, comme $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5+4\cos(t)}\,\mathrm{d}t$, les calculs précédents montrent que $2a_0 + a_2 = -\dfrac{5}{2}a_1$.

Pour initialiser la relation de récurrence d'ordre 2 nous avons besoin des deux premiers termes qui sont a_1 et a_2. Nous allons commencer par calculer a_0, qui est de toutes façons demandé, et dont on pourra tirer les valeurs de a_1 et a_2 sans peine par les manipulations ci-dessus.

Le calcul de a_0 peut se faire par un changement de variable. Les règles de Bioche ne donnant aucun résultat, nous allons effectuer le changement de variable standard $u = \tan(t/2)$ qui permet toujours de calculer une intégrale d'une fraction rationnelle en sinus et cosinus.

Calculons a_0 en effectuant le changement de variable $u = \tan(t/2)$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{5+4\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{5+4\frac{1-u^2}{1+u^2}}\,\frac{2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{9+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{9\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+(u/3)^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{9\pi}\Big[3\arctan(u/3)\Big]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Le calcul de a_1 peut certes se traiter de la même façon, mais aussi sans calcul en effectuant la manipulation $\cos(t) = (1/4)(5+4\cos(t)-5)$ au numérateur comme lors de la détermination de la relation de récurrence :

Nous avons successivement :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(t)}{5+4\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{5+4\cos(t)-5}{5+4\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\,\mathrm{d}t - \frac{5}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{5+4\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}-\frac{5}{2}a_0 \\ &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Enfin, a_2 se déduit de la relation $2a_0 + a_2 = -\dfrac{5}{2}a_1$: $a_2 = \dfrac{1}{6}$.

Il reste à résoudre l'équation caractéristique puis à déterminer les paramètres qui apparaissent dans la solution générale à l'aide des premiers termes.

L'équation caractéristique de la relation de récurrence est $r^2 + (5/2)r + 1 = 0$ dont les racines sont -2 et $-1/2$.
En conséquence, il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \lambda(-2)^n + \mu(-1/2)^n.$$

En écrivant cette relation pour $n \in \{1,2\}$ on obtient le système

$$\begin{cases} -2\lambda & - & \mu/2 & = & -1/3 \\ 4\lambda & + & \mu/4 & = & 1/6 \end{cases}$$

dont on trouve sans peine les solutions : $\lambda = 0$ et $\mu = 2/3$. Ainsi :

$$a_0 = \frac{1}{3} \text{ et, pour } n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{(-1)^n}{3.2^{n-1}}.$$

Il est facile de vérifier le résultat. En effet, f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle est égale à la somme de sa série de Fourier (théorème de Dirichlet). Cette dernière somme peut être calculée directement :

$$\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \cos(nx) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathcal{R}\mathrm{e}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{e^{ix}}{2}\right)^n\right)$$

et il n'y a plus qu'à sommer la série géométrique pour voir que l'on retrouve bien $f(x)$.

Exercice 8.5 : Expression d'une intégrale sous forme de série (PC-PSI)

À l'aide de la fonction $f : t \mapsto \exp(e^{it})$, montrer que

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos(t)}\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}.$$

La relation demandée ressemble fortement à l'égalité de Parseval. D'ailleurs, le membre de gauche n'est autre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$. Nous allons donc calculer les coefficients de Fourier de f qui est bien 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que la fonction f peut s'écrire sous forme d'une série :

$$\begin{aligned} \exp(e^{it}) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{it})^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} e^{int}. \end{aligned}$$

Nous avons l'impression d'avoir écrit ici le théorème de Dirichlet ! Visiblement, les coefficients de Fourier de f sont égaux à $1/n!$ (si $n \geqslant 0$) ou nuls (si $n < 0$). Nous allons maintenant vérifier que les coefficients de Fourier de f sont bien ceux que l'on lit sur ce développement en série (et donc qu'il s'agit effectivement de la série de Fourier de f).

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{e^{it}} e^{-int} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^{it})^k}{k!} e^{-int} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{i(k-n)t}}{k!} \, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Pour intervertir l'intégrale et la série, plusieurs théorèmes peuvent être utilisés. Ici, il y a visiblement convergence normale sur le segment $[0,2\pi]$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,2\pi]$ posons $f_k(t) = e^{i(k-n)t}/k!$. f_k est bornée sur $[0,2\pi]$ et $||f_k||_\infty = 1/k!$. Ainsi, la série de fonctions $\sum f_k$ est normalement convergente sur $[0,2\pi]$. En conséquence, on peut intervertir série et intégrale, ce qui fournit la relation

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(k-n)t}}{k!} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k!} \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t} \mathrm{d}t \right) \end{aligned}$$

Chaque intégrale est aisée à calculer : en effet, si $\lambda \in \mathbb{Z}$, on a

$$\int_0^{2\pi} e^{i\lambda t} \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{i\lambda t}}{\lambda} \right]_0^{2\pi} = 0$$

et, si $\lambda = 0$, cette intégrale est égale à 2π.

Il faut donc distinguer le cas $k = n$, mais attention ! k ne peut pas être égal à n lorsque n est strictement négatif... Il ne faut pas oublier que nous calculons ici les coefficients de Fourier complexes et donc que l'entier n prend ses valeurs dans $\mathbb{Z}$.

• Si $n < 0$ on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(k-n)t}}{k!}\,dt = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ car alors $k - n$ ne peut être nul.
• Si $n \in \mathbb{N}$, cette intégrale est nulle sauf si $k = n$, auquel cas elle vaut $2\pi/n!$.
En conséquence, la série précédemment obtenue a tous ses termes nuls, sauf éventuellement un. En résumé :

$$\begin{cases} \text{si } n < 0,\ c_n = 0\,; \\ \text{si } n \geqslant 0,\ c_n = 1/n!\,. \end{cases}$$

Il n'y a plus désormais qu'à écrire l'égalité de Parseval pour conclure, comme nous l'avons remarqué au début de l'exercice.

Étant donné que $|e^{e^{it}}| = |e^{\cos(t)+i\sin(t)}| = e^{\cos(t)}$, l'égalité de Parseval appliquée à la fonction f donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2\cos(t)}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n!)^2}.$$

Exercice 8.6 : Inégalité de Wirtinger (PC-PSI)

1. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,2\pi]$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant $f(0) = f(2\pi)$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt$. Préciser le cas d'égalité.
2. Adapter au cas d'un segment quelconque.

1. L'inégalité à établir n'est *a priori* pas évidente. Le fait que l'exercice se situe dans le chapitre consacré aux séries de Fourier permet néanmoins de trouver une interprétation : chacune de ces intégrales peut s'exprimer, par le théorème de Parseval, comme une somme de série. Qui plus est, nous savons exprimer les coefficients de Fourier de f' en fonction de ceux de f. Ceci nous permettra de conclure.

Nous venons de commettre un abus : f n'a pas de coefficients de Fourier puisqu'elle n'est pas périodique ! Il faut préalablement prolonger la fonction en une fonction périodique.

Nous avons

$$f(0) = f(2\pi).$$

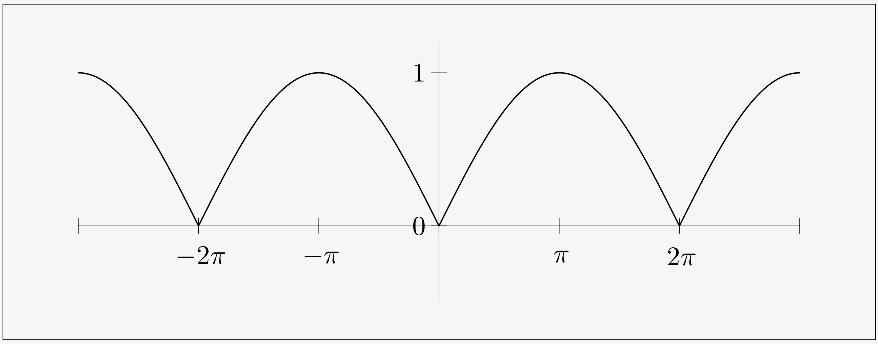
Par conséquent, nous pouvons prolonger la fonction f par 2π-périodicité en une fonction que nous noterons g. Pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in [0,2\pi]$, nous avons

$$g(2k\pi + x) = f(x).$$

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Plus précisément, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},\ g'(x) = f'(x).$$

En général, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, mais pas de classe $\mathcal{C}^1$. Son graphe présente en effet des ruptures de pente lorsque $f'(0) \neq f'(2\pi)$; c'est par exemple le cas si la fonction f est la fonction $t \mapsto \sin(t/2)$, comme on le voit sur la figure suivante :



Cependant, nous pouvons quand même parler de la dérivée g' de g : cette fonction est définie partout sauf, éventuellement, en un nombre de points fini sur chaque segment. Nous désignerons alors par g' n'importe quel prolongement de g' à $\mathbb{R}$. Le choix des valeurs par lesquelles on prolonge g' n'a pas d'importance puisque l'on cherche à utiliser la théorie des séries de Fourier : les coefficients de Fourier sont définis par des intégrales et on peut donc modifier la valeur de la fonction considérée en un nombre de points fini sur le segment d'intégration.

De plus nous savons que, lorsque u est une fonction continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et que l'on désigne par u' un prolongement de sa dérivée comme expliqué ci-dessus, nous avons la relation $c_n(u') = inc_n(u)$ pour tout entier relatif n.

Appliquons le théorème de Parseval à la fonction g : nous avons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{n} |c_k(g)|^2.$$

Puisque la fonction g coïncide avec la fonction f sur l'intervalle $[0,2\pi]$, on en déduit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k(g)|^2.$$

Ici, il est naturel de calculer les intégrales sur l'intervalle $[0,2\pi]$. En effet, il est adapté aux données de l'énoncé puisque c'est le domaine de définition de la fonction f.

La fonction g' est 2π-périodique et continue par morceaux. Nous pouvons donc lui appliquer le théorème de Parseval. En remarquant que la fonction g' coïncide avec la fonction f' sur $]0,2\pi[$, nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k(g')|^2.$$

D'après le cours, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, nous avons

$$c_k(g') = ikc_k(g).$$

En conséquence,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} k^2|c_k(g)|^2.$$

Nous devons maintenant comparer les quantités trouvées. Pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, nous avons $k^2 \geqslant 1$ et donc $|c_k(g)|^2 \leqslant k^2|c_k(g)|^2$. Nous obtenons donc une inégalité dans le sens souhaité. Il nous reste à traiter le cas du coefficient d'indice 0. L'hypothèse sur l'intégrale de f montre qu'il est nul ; il ne nous gênera donc pas.

Pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, nous avons $k^2 \geqslant 1$, et donc

$$|c_k(g)|^2 \leqslant k^2|c_k(g)|^2.$$

Par hypothèse, nous avons

$$c_0(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

L'égalité précédente est donc encore valable lorsque $k = 0$.
Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t &= 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k(g)|^2 \\
&\leqslant 2\pi \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} k^2 |c_k(g)|^2 \\
&\leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Nous avons obtenu l'inégalité demandée. Il nous reste maintenant déterminer à quelle condition c'est une égalité. Vu les calculs précédents, il semble qu'il faille que $k^2|c_k(g)|^2 = |c_k(g)|^2$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Démontrons ce fait. Précisément, nous allons démontrer que si l'une de ces égalités n'est pas satisfaite, alors l'inégalité entre les intégrales est stricte.

Nous allons supposer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $|c_{n_0}(g)|^2 < n_0^2 |c_{n_0}(g)|^2$. On en déduit que

$$\forall n \geqslant |n_0|, \sum_{k=-n}^{n} |c_k(g)|^2 < \sum_{k=-n}^{n} k^2 |c_k(g)|^2.$$

Cette inégalité ne suffit pas pour conclure ! En effet, lorsque l'on passe à la limite, les inégalités strictes deviennent larges et nous ne pouvons pas obtenir mieux que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k(g)|^2 \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} k^2 |c_k(g)|^2,$$

ce que nous connaissons déjà.

Nous devons donc préciser l'inégalité. À cet effet, nous allons chercher à minorer la différence des termes.

Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $|c_{n_0}(g)|^2 < n_0^2 |c_{n_0}(g)|^2$. Pour tout $n \geqslant |n_0|$, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} |c_k(g)|^2 &= |c_{n_0}(g)|^2 + \sum_{\substack{-n\leqslant k\leqslant n \\ k\neq n_0}} |c_k(g)|^2 \\
&\leqslant |c_{n_0}(g)|^2 + \sum_{\substack{-n\leqslant k\leqslant n \\ k\neq n_0}} k^2 |c_k(g)|^2 \\
&\leqslant (1 - n_0^2)|c_{n_0}(g)|^2 + \sum_{-n\leqslant k\leqslant n} k^2 |c_k(g)|^2.
\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}|c_k(g)|^2 &\leqslant (1-n_0^2)|c_{n_0}(g)|^2+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}k^2|c_k(g)|^2\\ &< \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}k^2|c_k(g)|^2.\end{aligned}$$

Les intégrales $\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$ ne peuvent donc pas être égales.
En revanche, si pour tout $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, nous avons $|c_n(g)|^2=n^2|c_n(g)|^2$, alors les intégrales sont égales. Nous avons donc montré que

$$\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

si, et seulement si,

$$\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},\ |c_n(g)|^2=n^2|c_n(g)|^2.$$

Il nous reste à interpréter cette dernière condition de façon plus explicite en termes de la fonction f. Puisque la fonction g est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de Dirichlet assure qu'elle est somme de sa série de Fourier. Nous pourrons donc lire sur la fonction g (et donc sur la fonction f) les conditions sur les coefficients de Fourier.

Cette dernière condition est encore équivalente à la suivante :

$$\forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\},\ c_n(g)=0.$$

Puisque la fonction g est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de Dirichlet s'applique. Sous la condition précédente, il assure, vu que $c_0(g)=0$ par hypothèse, que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=c_{-1}(g)e^{-ix}+c_1(g)e^{ix}.$$

La fonction f est donc de la forme

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & \alpha e^{-ix}+\beta e^{ix} \end{array},$$

avec $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$.
Réciproquement, toute fonction f de la forme précédente est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, prend la même valeur en 0 et en 2π (à savoir $\alpha+\beta$), est d'intégrale nulle sur $[0,2\pi]$ et la fonction g associée vérifie $c_n(g)=0$ pour tout

$n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\}$. Elle satisfait donc l'égalité

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt.$$

Pour résumer, nous avons montré que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt$$

si, et seulement si,

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \alpha e^{-ix} + \beta e^{ix}.$$

2. L'énoncé nous demande, à présent, d'adapter le résultat pour des fonctions définies sur un segment quelconque. Considérons donc un segment $[a,b]$ et une fonction f définie sur ce segment. Deux solutions se présentent : nous pouvons

– soit reprendre tout le raisonnement de la première question en utilisant la théorie des séries de Fourier pour les fonctions $(b-a)$-périodiques ;

– soit associer à f une fonction g définie sur $[0,2\pi]$ à laquelle nous appliquerons les résultats obtenus à la question précédente.

On s'en doute, c'est la seconde méthode qui est la plus rapide. C'est elle que nous allons mettre en œuvre en effectuant un changement de variable affine.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} j : & [0,2\pi] & \to & [a,b] \\ & x & \mapsto & \dfrac{b-a}{2\pi} x + a \end{array}.$$

C'est une bijection d'inverse

$$\begin{array}{rccc} j^{-1} : & [a,b] & \to & [0,2\pi] \\ & x & \mapsto & \dfrac{2\pi}{b-a} (x-a) \end{array}.$$

Posons

$$\begin{array}{rccc} g = f \circ j : & [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & f\left(\dfrac{b-a}{2\pi} x + a\right) \end{array}.$$

Nous allons maintenant appliquer le résultat de la première question à la fonction g.

D'après la première question, si la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$, vérifie $g(0) = g(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors

$$\int_0^{2\pi} |g(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Commençons par traduire les hypothèses relatives à g en utilisant la fonction f.

- La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ car f et j le sont.
- $g(0) = g(2\pi)$:
Nous avons $g(0) = f(a)$ et $g(2\pi) = f(b)$. Par conséquent, cette condition équivaut à $f(a) = f(b)$.
- $\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$:
Le changement de variable $t = j^{-1}(x)$ donne

$$\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La condition équivaut donc à

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Pour traduire la conclusion, nous allons calculer les intégrales $\int_0^{2\pi} |g(t)|^2\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{2\pi} |g'(t)|^2\,\mathrm{d}t$ en fonction de f. Comme précédemment, nous allons effectuer le changement de variable $t = j^{-1}(x)$. Pour la première intégrale, nous obtenons

$$\int_0^{2\pi} |g(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{b-a}\int_a^b |f(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Afin de calculer la seconde, remarquons que nous avons

$$\forall t \in\,]0,2\pi[,\ g'(t) = j'(t)f'(j(t)) = \frac{b-a}{2\pi}\, f'(j(t)).$$

Nous obtenons donc

$$\int_0^{2\pi} |g'(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2\pi}\int_a^b |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

L'inégalité

$$\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

est donc équivalente à

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Pour résumer, nous avons démontré le résultat suivant. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = f(b)$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = 0$. Alors, nous avons

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Pour finir, traduisons le cas d'égalité. Nous avons vu que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si, il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \alpha e^{-it} + \beta e^{it}.$$

Cette condition est équivalente à la suivante : il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= g(j^{-1}(x)) \\ &= \alpha e^{-i\frac{2\pi}{b-a}(x-a)} + \beta e^{i\frac{2\pi}{b-a}(x-a)} \\ &= \alpha e^{ia} e^{-\frac{2i\pi}{b-a}x} + \beta e^{-ia} e^{\frac{2i\pi}{b-a}x}. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons montré que

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 \, \mathrm{d}x$$

si, et seulement si,

$$\exists (\gamma,\delta) \in \mathbb{C}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \gamma e^{-\frac{2i\pi}{b-a}x} + \delta e^{\frac{2i\pi}{b-a}x}.$$

Il est toujours utile de vérifier le résultat que l'on annonce, sinon dans le cas général, au moins dans quelques cas particuliers. Considérons par exemple le cas où $\gamma = 0$ et $\delta = 1$ et vérifions, par un calcul explicite, que l'égalité est bien satisfaite.

Avec les choix précédents, nous avons

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) = e^{\frac{2i\pi}{b-a}x}.$$

Nous avons

$$\int_a^b |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_a^b 1 \,\mathrm{d}x = b - a$$

et

$$\begin{aligned}\left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 \,\mathrm{d}x &= \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b \left|\frac{2i\pi}{b-a}\, e^{\frac{2i\pi}{b-a}x}\right|^2 \mathrm{d}x \\ &= b-a.\end{aligned}$$

Par ailleurs, en prenant $a = 0$ et $b = 2\pi$, nous retrouvons bien le résultat initial, ce qui est la moindre des choses !

Séries entières

9

Exercice 9.1 : Calculs de sommes de séries numériques

Calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Vous pouvez partir de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, en déduire d'autres séries, puis choisir x.

• On peut dériver et intégrer terme à terme la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ à l'intérieur de l'intervalle de convergence $]-1,+1[$.
On a donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1} \right) \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-2} = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

$$= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2}$$

Les rayons de convergence des trois séries sont égaux à 1.

• En remplaçant x par $\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2 \quad ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = 2 \quad ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6\,.$$

Compléments

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $a_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{2^{n+1}}$.

La deuxième série est égale à $2a_1$ et la troisième à $2a_2$.

a_k est le nombre de façons de classer k personnes en admettant les ex-aequo.

On montre que $a_k \underset{\infty}{\sim} \dfrac{k!}{2 \times (\ln 2)^{k+1}}$.

On peut montrer que $a_k \in \mathbb{N}$ en calculant :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} a_j &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} n^j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \left[(n+1)^k - 1\right] \\ &= \sum_{n'=2}^{\infty} \frac{n'^k}{2^{n'}} - \frac{1}{2} = 2\left(a_k - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = 2a_k - 1\end{aligned}$$

donc $a_k = 1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} a_j$ puis $a_k \in \mathbb{N}$ par récurrence.

Les premières valeurs sont : $a_1 = 1,\ a_2 = 1 + 2 = 3,\ a_3 = 1 + 3a_1 + 3a_2 = 13$.

Exercice 9.2 : Calculs de rayons de convergence avec la règle de d'Alembert

Les deux questions qui suivent sont indépendants.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^n n^2}{(n^2+1)2^n} z^n$ $(z \in \mathbb{C})$.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n} x^{2n}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Pour une série entière $\sum a_n z^n$, on détermine souvent R à partir de la règle de d'Alembert. Si la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = l|z|^k$ existe, en écrivant :

$$l|z|^k < 1 \iff |z| < \sqrt[k]{\frac{1}{l}}$$

on obtient $R = \sqrt[k]{\dfrac{1}{l}}$.

1. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n^2} \times \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2+1} \times \dfrac{1}{2} \times |z|$

$$= \frac{1}{2} \times |z|.$$

Le rayon de convergence est donc $R = 2$.

2. La suite $a_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n}$ est définie pour $n \neq 0$. Cherchons d'abord un équivalent :

$$a_n = \frac{2(e^n + e^{-n})}{(e^n - e^{-n})^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{2}{e^n}.$$

On a donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}x^{2(n+1)}|}{|a_n x^{2n}|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{e^{n+1}} \times \dfrac{e^n}{2} \times |x|^2 = \dfrac{1}{e} \times |x|^2$.

$$\frac{1}{e} \times |x|^2 < 1 \iff |x| < \sqrt{e}.$$

Le rayon de convergence est donc $R = \sqrt{e}$.

Dans les deux questions de cet exercice, la règle de d'Alembert a été utilisée à titre d'entraînement. Mais on pouvait aller plus vite en remarquant que, dans les deux cas, $|u_n|$ est équivalent au terme général d'une série géométrique :

1. $|u_n(z)| \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\dfrac{|z|}{2}\right)^n$ d'où $R = 2$.

2. $|u_n(x)| \underset{n\to\infty}{\sim} 2\left(\dfrac{|x|^2}{e}\right)^n$ d'où $R = \sqrt{e}$.

Exercice 9.3 : Calculs de rayons de convergence avec la définition

Les deux questions qui suivent sont indépendantes.

1. Soit (a_n), (b_n), (c_n) des suites numériques telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n| \leqslant |b_n| \leqslant |c_n|.$$

On suppose que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ ont le même rayon de convergence R.

Que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum b_n z^n$?

2. Soit (a_n) une suite réelle. Comparer les rayons de convergence R_1 de $\sum a_n z^n$ et R_2 de $\sum a_n^2 z^n$.

Quand la règle de d'Alembert ne peut pas être utilisée, revenez à la définition : le nombre R est la borne supérieure des ensembles des réels $r > 0$ tels que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, r^n \text{ converge ; ou } |a_n|\, r^n \text{ borné ; ou } \lim_{n\to+\infty} a_n\, r^n = 0.$$

1. L'hypothèse entraîne :

$$\sum |a_n||z|^n \leqslant \sum |b_n||z|^n \leqslant \sum |c_n||z|^n.$$

– Soit z tel que $|z| < R$. Comme $\sum |c_n||z|^n$ converge, il en est de même de $\sum |b_n||z|^n$.

– Soit z tel que $|z| > R$. Comme $\sum |a_n||z|^n$ diverge, il en est de même de $\sum |b_n||z|^n$.

La série entière $\sum b_n z^n$ a donc un rayon de convergence égal à R.

Exemples d'utilisation vus dans les oraux :
$b_n = n$-ième décimale non nulle de π, de $\sqrt{3}, \ldots$
$b_n =$ somme des diviseurs de n.

2. • Soit z tel que $|z| < R_1$, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0$.

Ceci entraîne : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^2 z^{2n} = 0$, soit $|z^2| \leqslant R_2$, ou encore $|z| \leqslant \sqrt{R_2}$.

On vient de démontrer :

$$\forall z \qquad |z| < R_1 \Longrightarrow |z| \leqslant \sqrt{R_2}\,,$$

ce qui entraîne : $R_1 \leqslant \sqrt{R_2}$.

• Soit z tel que $|z| < R_2$, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^2 z^n = 0$.

Ceci entraîne : $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n u)^2 = 0$ avec $u^2 = z$,

puis $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n u = 0$,

soit $|u| \leqslant R_1$, ou encore $|z| \leqslant R_1^2$.

On vient de démontrer :

$$\forall z \qquad |z| < R_2 \Longrightarrow |z| \leqslant R_1^2\,,$$

ce qui entraîne : $R_2 \leqslant R_1^2$.

• En conclusion :

$$R_2 = R_1^2\,.$$

Exercice 9.4 : Domaine de convergence

On considère la série entière de terme général $u_n x^n$ avec

$$u_n = \ln\left[\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right].$$

Déterminer son rayon de convergence et étudier le comportement aux bornes.

Pour faciliter la recherche de limite utilisée dans la règle de d'Alembert, commencez par déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

Pour ceci, on pense aux développements limités. Il sera préférable d'avoir deux termes non nuls pour l'étude aux bornes.

- **Calculs préalables**

Dans le quotient, factorisons le terme dominant au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} &= \frac{\sqrt{n}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 1\right]}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 1\right] \times \left[1 + \frac{1}{n}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right] \times \left[1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Comme $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, on en déduit :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On a donc : $|u_n| \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

- **Rayon de convergence**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}x^{n+1}|}{|u_n x^n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\,|x|}{\sqrt{n+1}} = |x|\,.$$

Le rayon de convergence de la série entière est donc $R = 1$.

- **Étude pour $x = -1$**

On a alors : $u_n(-1)^n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

La série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est positive et divergente (série de Riemann).
On peut donc en déduire que $\sum u_n(-1)^n$ diverge.
La série entière diverge pour la borne $x = -1$.

• **Étude pour** $x = 1$

On a alors : $u_n(1)^n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, mais on ne peut rien en déduire puisque le théorème sur les séries équivalentes suppose les séries de signe constant à partir d'un certain rang.

Reprenons : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge d'après le critère des séries alternées.

La série de terme général $v_n = -\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ vérifie $v_n \underset{\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$.

Le théorème sur les équivalents s'applique puisque $-\dfrac{1}{n}$ est de signe constant et, comme cette dernière série diverge, la série de terme général v_n diverge.
Finalement, la série de terme général $u_n(1)^n$, somme d'une série convergente et d'une série divergente, est divergente.
La série entière diverge pour la borne $x = 1$.

Exercice 9.5 : Convergence et calcul de la somme I

Déterminer le domaine de convergence et la valeur de la somme de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{4n^2 - 1}.$$

Pour le calcul de la somme, les techniques de base sont la dérivation et la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

• Pour la détermination du rayon de convergence, on peut utiliser la règle d'Alembert.

En posant : $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{4n^2 - 1}$ on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = |x^2|$.

La série entière a donc $R = 1$ pour rayon de convergence.

Pour $x = \pm 1$, on a : $|u_n(x)| \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge.
Le domaine de convergence de la série étudiée est donc $I = [-1,1]$, et la convergence est normale sur I.

• Le développement en série entière connu le plus proche est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan x$$

Pour s'en rapprocher, décomposons en éléments simples :

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right].$$

Notons $f(x)$ la somme de la série entière de l'énoncé. On peut l'écrire comme somme de deux séries entières qui sont définies sur I :

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

soit en utilisant le développement en série entière de $\arctan x$, avec une mise en facteur et un premier terme à rajouter et à enlever :

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big[-x^2 \arctan x - (\arctan x - x)\Big] = \frac{1}{2}\Big[x - (1+x^2)\arctan x\Big].$$

Exercice 9.6 : Convergence et calcul de la somme II

Déterminer le domaine de convergence et la valeur de la somme de :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{(n+3)n!}x^n.$$

• **Convergence**

Puisque $\left|\frac{n+1}{(n+3)n!}x^n\right| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}$ la série converge pour tout x.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

• **Calcul**

Dans le but de faire disparaître le terme $n+3$ au dénominateur, dérivons le produit $x^3 f(x)$:

$$\left(x^3 f(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{n!}x^{n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n!} = (x^3+x^2)\,\mathrm{e}^x.$$

On en déduit en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} x^3 f(x) &= \int_0^x (t^3+t^2)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (x^3+x^2)\,\mathrm{e}^x - \int_0^x (3t^2+2t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= (x^3+x^2-3x^2-2x)\,\mathrm{e}^x + \int_0^x (6t+2)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= (x^3-2x^2-2x+6x+2)\,\mathrm{e}^x - 2 - 6\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= (x^3-2x^2+4x-4)\,\mathrm{e}^x + 4 \end{aligned}$$

d'où :

$$f(x) = \frac{(x^3 - 2x^2 + 4x - 4)\,e^x + 4}{x^3} \quad \text{si } x \neq 0, \text{ et } f(0) = \frac{1}{3}\cdot$$

Exercice 9.7 : Développement d'une fonction en série entière

Développer en série entière la fonction définie par : $f(x) = \ln(1 + x - 2x^2)$.
Étudier la validité aux bornes.

Commencez par déterminer l'ensemble de définition de f.
Vous pouvez ainsi prévoir la valeur de R et le comportement aux bornes, ce qui sera rassurant quand la démonstration confirmera vos pronostics.

La fonction f existe si $1 + x - 2x^2 > 0$. Ce trinôme a pour racines $-\frac{1}{2}$ et 1.
La fonction f a pour ensemble de définition : $I = \left]-\frac{1}{2}, 1\right[$.
Comme le développement en série entière d'une fonction a lieu sur un intervalle centré à l'origine (aux bornes près), on peut penser que le rayon de convergence sera $R = \frac{1}{2}$ et que la série entière obtenue va diverger en $x = -\frac{1}{2}$ et converger en $x = \frac{1}{2}\cdot$
Le trinôme se factorise : $1 + x - 2x^2 = (1 - x)(1 + 2x)$ et on peut écrire :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \ln(1 - x) + \ln(1 + 2x)\,.$$

Attention dans la factorisation : les deux logarithmes écrits doivent exister au voisinage de 0.

En utilisant les développements en séries entières du cours, on a :

$$\forall x \in [-1, 1[\qquad \ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \qquad R_1 = 1$$

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \qquad \ln(1 + 2x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2x)^n}{n} \qquad R_2 = \frac{1}{2}$$

$f(x)$ est donc la somme de deux fonctions développables en séries entières, avec des rayons de convergence différents. Elle est donc développable en série entière et le rayon de convergence de la somme est égal à $\inf(R_1, R_2) = \frac{1}{2}$.

Pour détailler l'étude aux bornes, il est préférable de ne pas regrouper trop vite les deux séries entières.

En $x = -\dfrac{1}{2}$ et en $x = \dfrac{1}{2}$ la première série converge, puisque ce sont des valeurs situées à l'intérieur de l'intervalle de convergence.
Dans la deuxième série entière,
en remplaçant x par $-\dfrac{1}{2}$ on obtient la série numérique divergente $-\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$,
et en remplaçant par $\dfrac{1}{2}$ la série numérique convergente $-\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.
On conclut donc :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^n - 1}{n} x^n .$$

Autre solution

On peut aussi : dériver $f(x)$, décomposer la fraction rationnelle $f'(x)$ en éléments simples, développer les éléments simples en séries entières, intégrer terme à terme ces séries (avec $f(0) = 0$).

L'étude aux bornes doit se faire sur le développement de $f(x)$.

Exercice 9.8 : Avec une suite récurrente linéaire

Soit (s_n) la suite définie par $s_0 = s_1 = 1$ et $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leqslant 2^n$ et en déduire que le rayon R de convergence de $\sum s_n x^n$ n'est pas nul.

2. Calculer la somme $S(x)$ de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n$ pour $|x| < R$.

3. Calculer R et s_n pour tout n.

2. Considérer une série associée à $S(x)$ et dont tous les termes sont nuls.

1. La relation $s_n \leqslant 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est immédiate (raisonner par récurrence).
De l'inégalité $|s_n x^n| \leqslant |2x|^2$ on déduit (théorème de comparaison des séries à termes positifs) que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n$ converge absolument pour $|x| < \dfrac{1}{2}$ et, par suite, son rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \dfrac{1}{2}$.

2. La relation $s_n - s_{n-1} - s_{n-2} = 0$, pour $n \geqslant 2$, conduit à :

$$0 = \sum_{n=2}^{+\infty} (s_n - s_{n-1} - s_{n-2})\, x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} s_n\, x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} s_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} s_{n-2}\, x^n$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} s_n\, x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} s_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} s_n\, x^{n+2} \qquad .$$

$$= S(x) - s_0 - s_1\, x - x\,(S(x) - s_0) - x^2\, S(x)$$

On en déduit, pour $|x| < R$, $S(x) = \dfrac{1}{1 - x - x^2}$.

3. En décomposant la fraction rationnelle $S(x)$, on est conduit à poser :

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

(soit $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\beta = -1$)
et on obtient :

$$\frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\alpha - \beta}\Big(\frac{\alpha}{1 - \alpha\, x} - \frac{\beta}{1 - \beta\, x}\Big)$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n+1}\, x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \beta^{\,n+1}\, x^n\Big) \qquad .$$

$$\text{pour } |x| < \min\left\{\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{|\beta]}\right\} = |\beta|$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha^{n+1} - \beta^{\,n+1})\, x^n$$

De l'unicité du développement en série entière à l'origine d'une fonction on déduit :

$$s_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{\,n+1}}{\alpha - \beta}.$$

Le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} s_n\, x^n$ est $R = |\beta| = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Le procédé de cet exercice, qui consiste à associer à une suite récurrente linéaire une série entière afin d'en obtenir l'expression explicite pour chaque valeur de n est connu sous le *nom de transformation en z* et joue, dans la résolution des équations récurrentes linéaires, un rôle analogue à celui de la transformation de Laplace dans la résolution des équations différentielles linéaires.

Exercice 9.9 : Détermination d'une somme

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{2n-1} x^n$

1. Donner le rayon de convergence de $f(x)$.

2. Montrer que : $2f = (1+4x)f'$.

3. En déduire f.

1. Utilisons la règle de d'Alembert. Le quotient :

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{(2n+2)!}{\left[(n+1)!\right]^2} \times \frac{\left[n!\right]^2}{(2n)!} \times \frac{2n-1}{2n+1} \times |x| = \frac{2(2n-1)}{n+1}|x|$$

a pour limite $4\,|x|$ quand n tend vers l'infini.

Le rayon de convergence de la série entière est donc égal à $\frac{1}{4}$.

2. • Pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ on peut calculer la dérivée :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{n}{2n-1} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \binom{2n+2}{n+1} \frac{n+1}{2n+1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \times \binom{2n}{n} \times \frac{n+1}{2n+1}\, x^n \\
&= 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \binom{2n}{n} x^n
\end{aligned}$$

Avec la première expression de $f'(x)$, on a :

$$4xf'(x) = 4\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{n}{2n-1} x^n$$

et on peut rajouter $n = 0$ dans cette somme sans rien changer.

• On en déduit :

$$\begin{aligned}
(1+4x)f'(x) &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \binom{2n}{n} x^n + 4\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{n}{2n-1} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2n-1} \times \left[-2(2n-1) + 4n\right] \\
&= 2f(x)
\end{aligned}$$

3. Pour $|x| < \dfrac{1}{4}$ la résolution de l'équation différentielle $f'(x) = \dfrac{2}{1+4x} f(x)$ conduit à :

$$f(x) = \lambda \exp\left(\int_0^x \frac{2}{1+4t} \mathrm{d}t\right) = \lambda \exp\left[\frac{1}{2} \ln(1+4x)\right] = \lambda\sqrt{1+4x}\,.$$

Avec $f(0) = -1$, on conclut :

$$f(x) = -\sqrt{1+4x}\,.$$

Exercice 9.10 : Somme de deux séries

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2}\cdot$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f. La fonction f est-elle continue sur D ?

2. Exprimer $f'(x)$ avec les fonctions usuelles.

En déduire $f(x)$, puis la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n\, n^2}\cdot$

Dans la rédaction, vous pouvez admettre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$

1. Posons $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}\cdot$ C'est une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1 (calcul immédiat avec la règle de d'Alembert).
Pour $x = \pm 1$ on obtient une série numérique absolument convergente (série de Riemann).
g est donc définie et continue sur $[-1,1]$.
Comme $f(x) = g(x) + g(1-x)$, la fonction f est donc définie et continue pour $x \in [-1,1]$ et $1 - x \in [-1,1]$ c'est-à-dire $x \in [0,2]$.
f est donc définie et continue sur $D = [0,1]$.

2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et l'on a :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{1}{x}\ \ln(1-x)$$

On en déduit :

$$\forall x \in]0,1[\qquad f'(x) = g'(x) - g'(1-x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}\ln x$$

On peut en déduire $f(x)$ avec des intégrations par parties. Mais il est plus rapide de remarquer que :

$$f'(x) = \left[-\ln x \ln(1-x) \right]'$$

ce qui entraîne :

$$f(x) = f(0) - \ln x \ln(1-x) \quad \text{avec } f(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En remplaçant x par $\frac{1}{2}$ on obtient :

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n\, n^2} = \frac{\pi^2}{6} - (\ln 2)^2$, d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n\, n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln 2)^2 .$$

Exercice 9.11 : Un équivalent de la somme

Soit g la fonction définie par $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n)\, x^n$.

Donner un équivalent de $g(x)$ au voisinage de 1.

On pourra considérer $(1-x)\, g(x)$.

Pour donner un sens à la question posée, commencez par des informations sur l'ensemble de définition de g.

- Pour $|x| < 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} \left[\ln n\, |x|^n \right] = 0$ (croissance comparée du logarithme et des puissances). La série entière a donc un rayon de convergence $R \geqslant 1$.

Et en fait $R = 1$ puisque pour $x = \pm 1$ le terme général ne tend pas vers 0. La fonction g est définie sur $]-1, 1[$.

- Utilisons l'indication de l'énoncé.

$$(1-x)g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n+1)\, x^{n+1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n)\, x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^{n+1}$$

On sait que $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ ce qui permet de penser à faire intervenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^{n+1} = -\ln(1-x) .$$

Considérons la fonction h définie sur $]-1,1[$ par :

$$h(x) = (1-x)g(x) + \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right] x^{n+1}.$$

Comme $\left| \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$ la série entière qui définit $h(x)$ converge normalement sur $[-1,1]$. Par suite, h est continue sur $[-1,1]$, d'où :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} \Big[(1-x)g(x) + \ln(1-x) \Big] = h(1).$$

La somme a une limite finie, le second terme tend vers l'infini ; on a donc :

$$(1-x)g(x) \underset{\substack{x\to1\\x<1}}{\sim} -\ln(1-x) \qquad \text{ou encore : } g(x) \underset{\substack{x\to1\\x<1}}{\sim} -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

On peut améliorer le résultat obtenu :

$$\begin{aligned} h(1) &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \right] = \lim_{N\to+\infty} \left[\ln(N+1) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right] \\ &= -\gamma \text{ (constante d'Euler)} \end{aligned}$$

On a donc montré (au voisinage de 1^-) que :

$$g(x) = -\frac{\ln(1-x)}{1-x} - \frac{\gamma}{1-x} + o\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Exercice 9.12 : Limite du quotient de deux sommes

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon de convergence infini.

On suppose que $a_n \geqslant 0$ et $b_n > 0$ pour tout n, et que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Montrer que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Il y a la limite d'une suite dans l'hypothèse et la limite d'une fonction dans la conclusion. Utilisez les définitions avec ε pour aller de l'une à l'autre.

La définition de la limite de l'hypothèse s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geqslant n_0 \qquad \left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| \leqslant \varepsilon\,.$$

Avec la majoration $|a_n - Lb_n| \leqslant \varepsilon b_n$ utilisable à partir de n_0, on a donc :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - L\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1} |a_n - Lb_n| x^n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} \varepsilon b_n x^n$$

On en déduit pour $x \geqslant 1$:

$$\left|\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n} - L\right| \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{n=0}^{n_0-1} \left|a_n - Lb_n\right|\right) x^{n_0-1}}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n} + \varepsilon\, \frac{\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n\, x^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n}$$

$$\leqslant \frac{A}{b_{n_0} x} + \varepsilon \qquad \text{en posant } A = \sum_{n=0}^{n_0-1} \left|a_n - Lb_n\right|$$

Donc, pour $x > \dfrac{A}{b_{n_0}\varepsilon}$ on obtient $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leqslant 2\varepsilon$; soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Exercice 9.13 : Calcul de la somme d'une série numérique

Soit $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Justifier que f possède un développement en série entière. Quel est son rayon de convergence ?

2. Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1, puis calculer le développement en série entière de f.

3. En déduire la valeur de : $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

1. La fonction f est le produit de deux fonctions possédant un développement en série entière de rayon 1. Elle possède donc un développement en série entière de rayon $\geqslant 1$. Ce rayon est égal à 1 car f n'est pas définie en $x = 1$.

2. Pour obtenir une équation différentielle, calculons la dérivée :

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \arcsin x \times \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On en déduit que f vérifie l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)f'(x) = 1 + xf(x)\,.$$

Comme f est un fonction impaire, son développement en série entière s'écrit :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}\,.$$

On reporte dans l'équation différentielle :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)a_n x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2} = 1\,,$$

soit en changeant les indices si nécessaire pour avoir x^{2n} partout :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)\,a_n\,x^{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} 2\,n\,a_{n-1}\,x^{2n} = 1\,.$$

L'unicité du développement en série entière entraîne :

$$a_0 = 1 \qquad \text{et pour tout } n \geqslant 1 \,:\, a_n = \frac{2n}{2n+1}a_{n-1}.$$

On en déduit en substituant de proche en proche :

$$a_n = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2(n-1)}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3}a_0 = \frac{\left[2^n n!\right]^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

soit : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}} x^{2n+1}$.

3. Pour $x \in]-1,1[$, on peut dériver :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{\binom{2n}{n}} x^{2n}\,.$$

donc :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}} = f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Pour votre entraînement, voici un autre énoncé qui permet d'obtenir la valeur de S.

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 t^n(1-t)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$ (intégrer par parties).

2. Donner une expression de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ sous forme d'une intégrale de fraction rationnelle (utiliser $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$).

3. Calculer S.

Équations différentielles

10

Dans tout ce chapitre, on assimile souvent une fonction f, c'est-à-dire la transformation : $x \mapsto f(x)$, avec l'image $f(x)$ d'un réel quelconque.

Cette notation est abusive, mais sans importance puisqu'à votre niveau la différence entre f et $f(x)$ est installée. Et c'est tellement plus simple pour la rédaction.

Exercice 10.1 : Équations emboîtées

Soit l l'opérateur défini par : $l(y) = y' + p(x)y$.
Calculer $l \circ l(y)$. En déduire les solutions de :

$$y'' + 2\,\mathrm{th}\,x\,y' + y = 0.$$

Précisons l'énoncé : on considère E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. p est un élément de E et l est un endomorphisme de E.

Le calcul donne :

$$l \circ l(y) = (y' + py)' + p(y' + py) = y'' + 2py' + (p' + p^2)y.$$

Avec $p(x) = \mathrm{th}\,x$, on obtient $p'(x) + p^2(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) + \mathrm{th}^2(x) = 1$.
L'équation proposée s'écrit donc :

$$l \circ l(y) = 0 \quad \text{avec} \quad l(y) = y' + \mathrm{th}\,x\,y.$$

Pour résoudre l'équation différentielle, surtout pas d'équation caractéristique puisque les coefficients ne sont pas constants. Et le mot-clé « en déduire » nous dit qu'il faut utiliser l'emboîtement $l \circ l$.

En posant $z = l(y)$, on est conduit à résoudre d'abord $l(z) = 0$, soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$z' + \operatorname{th} x\, z = 0.$$

La solution générale de cette équation est :

$$\begin{aligned} z(x) &= A \exp\left(-\int \operatorname{th} x \,\mathrm{d}x\right) = A \exp\left(-\int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \,\mathrm{d}x\right) \\ &= A\,(-\ln(\operatorname{ch} x)) = \frac{A}{\operatorname{ch} x} \end{aligned}$$

où A est une constante réelle quelconque.
L'équation $z = l(y)$ devient donc :

$$(E) \qquad y' + \operatorname{th} x\, y = \frac{A}{\operatorname{ch} x}\,\cdot$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont on a déjà résolu l'équation homogène associée.
On peut donc utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire considérer une fonction auxiliaire $u(x)$ telle que $y(x) = u(x)\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ soit solution de (E).
En calculant : $y'(x) = u'(x)\dfrac{1}{\operatorname{ch} x} - u(x)\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$ et en reportant dans (E), il vient : $u'(x) = A$, d'où l'on déduit $u(x) = Ax + B$.
Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation proposée est l'espace vectoriel, de dimension 2, des fonctions y définies par :

$$y(x) = \frac{Ax + B}{\operatorname{ch} x}\,\cdot$$

Après résolution, on peut découvrir une solution plus courte en remarquant que :

$$\operatorname{ch} x\, y'' + 2 \operatorname{sh} x\, y' + \operatorname{ch} x\, y = (\operatorname{ch} x\, y)''.$$

Exercice 10.2 : Variation de la constante ou des constantes ?

Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' + 4y' + 4y = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1 + x^2}\,\cdot$$

C'est une équation différentielle linéaire. On commence donc par résoudre l'équation homogène associée. Et, comme les coefficients sont constants, on va considérer l'équation caractéristique.

Comme les coefficients de l'équation homogène sont constants, considérons l'équation caractéristique :

$$r^2 + 4r + 4 = 0 = (r+2)^2.$$

Elle admet -2 comme racine double. La solution générale de l'équation homogène s'écrit donc :

$$y(x) = (Ax + B)\,\mathrm{e}^{-2x}$$

avec A et B constantes réelles quelconques.

Pour résoudre l'équation (E), on peut utiliser la méthode de variation *des* constantes ou la méthode de variation de *la* constante.

• Méthode de variation des constantes

Considérons deux fonctions auxiliaires $A(x)$ et $B(x)$, dérivables autant de fois que nécessaire, telles que $y(x) = A(x)\,x\,\mathrm{e}^{-2x} + B(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$ soit solution de (E) avec, en plus la condition : $0 = A'(x)\,x\,\mathrm{e}^{-2x} + B'(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$. Dans ce cas, on a :

$$y'(x) = A(x)\,(1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x} - 2B(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$$

$$y''(x) = A'(x)\,(1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x} + A(x)\,(-4+4x)\,\mathrm{e}^{-2x} \\ -2B'(x)\,\mathrm{e}^{-2x} + 4B(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$$

En reportant dans l'équation (E) et en simplifiant, il reste :

$$A'(x)\,(1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x} - 2B'(x)\,\mathrm{e}^{-2x} = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+x^2}\cdot$$

Les fonctions inconnues $A'(x)$ et $B'(x)$ vérifient donc le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x\,A'(x) + B'(x) & = & 0 \\ (1-2x)\,A'(x) - 2B'(x) & = & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}\right.$$

Vous pouvez obtenir plus rapidement ce résultat si vous connaissez votre cours sur l'utilisation d'un système fondamental de solutions.

Le déterminant du système linéaire en $A'(x)$ et $B'(x)$ est le wronskien :

$$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1-2x & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

La résolution du système (par les formules de Cramer par exemple) donne :

$$\begin{cases} A'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ B'(x) = -\dfrac{x}{1+x^2} \end{cases}$$

ce qui conduit aux primitives :

$$A(x) = \arctan x + A \quad ; \quad B(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + B$$

puis à la solution générale de (E) :

$$y(x) = \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + Ax + B\right] \mathrm{e}^{-2x}$$

avec A et B réels quelconques.

- **Méthode de variation de la constante**

Choisissons une solution particulière (non nulle) de l'équation homogène, la plus simple : e^{-2x}. Considérons une fonction auxiliaire $u(x)$ telle que $y(x) = u(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$ soit solution de (E).
On calcule les dérivées :
$y'(x) = u'(x)\,\mathrm{e}^{-2x} - 2u(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$
$y''(x) = u''(x)\,\mathrm{e}^{-2x} - 4u'(x)\,\mathrm{e}^{-2x} + 4u(x)\,\mathrm{e}^{-2x}$
puis on reporte dans l'équation (E). Après simplications, il reste :

$$u''(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Un premier calcul de primitive donne : $u'(x) = \arctan x + A$, puis avec une intégration par parties, on obtient :

$$u(x) = x\ \arctan\ x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + Ax + B.$$

Attention, il ne faut pas oublier de reporter dans $y(x)$.

On obtient donc la solution générale de (E) :

$$y(x) = \left[x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + Ax + B\right] \mathrm{e}^{-2x}$$

avec A et B réels quelconques.

Ici la méthode de variation de la constante est plus simple et plus rapide que la méthode de variation des constantes. C'est toujours le cas quand l'équation caractéristique a une racine double. Sinon, les méthodes sont d'usages comparables.

On pouvait aussi remarquer que l'équation (E) est équivalente à : $\left(\mathrm{e}^{2x}y\right)'' = \dfrac{1}{1+x^2}$ ·

Exercice 10.3 : Utilisation d'une solution « évidente »

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (1+x)\,y'' - 2y' + (1-x)\,y = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

sur un intervalle ne contenant pas $x = -1$.

2. Étudier le prolongement éventuel à $\mathbb{R}$.

Regardez bien les coefficients du premier membre. D'accord ils ne sont pas constants, donc pas d'équation caractéristique. Mais ils ont une propriété intéressante.

1. La somme des coefficients du premier membre est égale à 0. L'équation homogène associée à (E) admet donc e^x comme solution particulière.
On va utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire considérer une fonction auxiliaire $u(x)$ telle que $y(x) = u(x)\mathrm{e}^x$ soit solution de (E).
En dérivant, on obtient :

$$y'(x) = u'(x)\mathrm{e}^x + u(x)\mathrm{e}^x$$

$$y''(x) = u''(x)\mathrm{e}^x + 2u'(x)\mathrm{e}^x + u(x)\mathrm{e}^x.$$

En reportant dans (E) et en simplifiant, on obtient :

$$(1+x)u''(x) + 2xu'(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

Vous observez que $u(x)$ a disparu, ce qui est toujours le cas dans la méthode utilisée, et constitue donc un outil d'auto-contrôle.

L'équation différentielle que nous venons d'obtenir est linéaire d'ordre 1 par rapport à la fonction $u'(x)$.
Sur un intervalle ne contenant pas $x = -1$, la solution générale de l'équation homogène associée est :

$$\begin{aligned} f(x) &= A\exp\left(-\int \frac{2x}{1+x}\mathrm{d}x\right) = A\exp\left(-2\int \frac{x+1-1}{1+x}\mathrm{d}x\right) \\ &= A\exp\left(-2x + 2\ln|x+1|\right) = A(x+1)^2\,\mathrm{e}^{-2x} \end{aligned}$$

où A est une constante réelle quelconque.

On en déduit par variation de la constante :

$$u'(x) = A(x+1)^2\,\mathrm{e}^{-2x} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x},$$

puis $u(x)$ par un calcul de primitives, qui se fait avec deux intégrations par parties, et qui donne :

$$u(x) = -\frac{A}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right) + B + \frac{x+1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.
La solution générale de $(\boldsymbol{E})$ sur un intervalle ne contenant pas $x = -1$ est donc de la forme :

$$y(x) = -\frac{A}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right) + B\,\mathrm{e}^{x} + \frac{x+1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

2. D'après la question précédente, il existe des constantes A_1, B_1, A_2, B_2 telles que :

$$\forall x \in]-\infty, -1[\quad y(x) = -\frac{A_1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right) + B_1\,\mathrm{e}^{x} + \frac{x+1}{2}\mathrm{e}^{-x}$$

$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad y(x) = -\frac{A_2}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right) + B_2\,\mathrm{e}^{x} + \frac{x+1}{2}\mathrm{e}^{-x}$$

Le prolongement éventuel d'une solution de l'équation différentielle

– doit être continu en $x = -1$, c'est-à-dire que $\displaystyle\lim_{x \to (-1)^-} y(x) = \lim_{x \to (-1)^+} y(x)$, ce qui donne la condition :

$$-\frac{A_1}{4}\,\mathrm{e}^{1} + B_1\,\mathrm{e}^{-1} = -\frac{A_2}{4}\,\mathrm{e}^{1} + B_2\,\mathrm{e}^{-1}$$

– doit être deux fois dérivable en $x = -1$, ce qui est assuré par les conditions suffisantes

$$\lim_{x \to (-1)^-} y'(x) = \lim_{x \to (-1)^+} y'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to (-1)^-} y''(x) = \lim_{x \to (-1)^+} y''(x)$$

qui donnent la même condition que la continuité.
Il ne reste donc qu'une égalité à vérifier par les 4 constantes. Les solutions prolongeables sur $\mathbb{R}$ constituent un sous-espace affine de dimension 3.

Exercice 10.4 : Utilisation de séries entières (cas régulier)

En utilisant les séries entières, résoudre l'équation différentielle :

$$(1-x^2)\,y''(x) - 6\,x\,y'(x) - 4\,y(x) = 0.$$

Exprimer la solution générale à l'aide de fonctions usuelles.

Dans chaque intervalle $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,+\infty[$ l'équation est équivalente à :

$$y''(x) - \frac{6\,x}{1-x^2}\,y'(x) - \frac{4}{1-x^2}\,y(x) = 0.$$

Les fonctions $p(x) = -\dfrac{6\,x}{1-x^2}$ et $q(x) = -\dfrac{4}{1-x^2}$ sont développables en séries entières. Dans un tel cas, vous *pouvez* peut-être savoir que toute solution définie au voisinage de l'origine y est développable en série entière.

Mais vous *devez* savoir que, sur chacun des intervalles cités, les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2. Donc si la recherche des solutions développables en séries entières conduit à un tel espace, c'est que vous avez toutes les solutions; sinon il faudra continuer.

Cherchons une solution sous la forme $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$, sous réserve que le rayon de convergence soit non nul.

On a $y'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1}$ et $y''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^{n-2}$.

En reportant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^n \\
&\qquad -6\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)\,(n+1)\,a_{n+2}\,x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^n \\
&\qquad -6\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^n - 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[(n+2)\,(n+1)\,a_{n+2} - (n+1)\,(n+4)\,a_n\Big]x^n.
\end{aligned}$$

La série précédente a pour somme la fonction nulle si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls. Il en résulte :

$$a_{n+2} = \frac{n+4}{n+2}\, a_n \text{ pour tout } n \geqslant 0, \text{ avec } a_0 \text{ et } a_1 \text{ quelconques.}$$

En distinguant les cas n pair et impair, on en déduit :

$$a_{2p} = (p+1)\, a_0, \quad a_{2p+1} = \frac{2p+3}{3}\, a_1 \ ;$$

d'où la forme générale des solutions développables en série entière :

$$y(x) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) x^{2p} + \frac{a_1}{3} \sum_{p=0}^{+\infty} (2p+3)\, x^{2p+1}$$

Le rayon de convergence de chacune des séries est égal à 1, puisque :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+2}\, x^{n+2}}{a_n\, x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+4}{n+2} \right| |x|^2 = |x|^2 .$$

Le rayon de convergence R de la série représentant $y(x)$ vérifie donc $R \geqslant 1$, et la représentation obtenue est valable, dans tous les cas, dans $]-1,1[$.
Comme l'ensemble des solutions obtenues dépend de deux constantes réelles, c'est un espace vectoriel de dimension 2 : on a ainsi toutes les solutions.
Pour exprimer $y(x)$ à l'aide de fonctions usuelles, écrivons successivement :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (p+1) x^{2p} = \frac{1}{2x} \sum_{p=0}^{+\infty} (2p+2)\, x^{2p+1} = \frac{1}{2x} \Big(\sum_{p\geqslant 0} x^{2p+2} \Big)'$$

$$= \frac{1}{2x} \Big(\frac{x^2}{1-x^2} \Big)' = \frac{1}{(1-x^2)^2}.$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (2p+3) x^{2p+1} = \frac{1}{x} \sum_{p=0}^{+\infty} (2p+3)\, x^{2p+2} = \frac{1}{x} \Big(\frac{x^3}{1-x^2} \Big)' = \frac{x\,(3-x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

La solution générale dans l'intervalle $]-1,1[$ est donc :

$$y(x) = \frac{A + Bx\,(3-x^2)}{(1-x^2)^2}.$$

Cette fonction est également solution dans les autres intervalles.

Exercice 10.5 : Utilisation de séries entières (cas singulier)

En utilisant les séries entières, résoudre l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x\,y''(x) + 2\,y'(x) + 4\,x\,y(x) = 0.$$

Exprimer les solutions à l'aide de fonctions usuelles.

Dans tout intervalle où $x \neq 0$, l'équation différentielle est équivalente à :

$$y''(x) + \frac{2}{x} y'(x) + \frac{4}{x} y(x) = 0\,.$$

Les coefficients $p(x) = \dfrac{2}{x}$ et $q(x) = \dfrac{4}{x}$ sont tels que $x\,p(x) = 2$ et $x^2\,q(x) = 4\,x$ sont développables en séries entières. Dans ce cas, vous *pouvez* savoir qu'on peut chercher une solution sous la forme :

$$y(x) = x^r \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+r} \text{ avec } c_0 \neq 0,$$

avec r à déterminer. Essayez.

Mais vous *devez* savoir que, sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$, les solutions forment un espace vectoriel de dimension 2. Donc si la recherche des solutions développables en séries entières conduit à un tel espace, c'est que vous avez toutes les solutions; sinon il faudra continuer. C'est cette méthode qui est conforme à votre programme et donc que nous allons développer.

Cherchons une solution sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$, sous réserve que le rayon de convergence soit non nul.

On a $y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1}$ et $y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^{n-2}$.

En reportant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n\,x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\,n\,a_{n+1}\,x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,a_{n+1}\,x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}\,x^n \\ &= 2a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big[(n+2)\,(n+1)\,a_{n+1} + 4\,a_{n-1} \Big] x^n. \end{aligned}$$

La série précédente a pour somme la fonction nulle si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls. Il en résulte :

$$a_1 = 0 \quad \text{et} \quad a_n = \frac{-4}{(n+1)n}\, a_{n-2} \text{ pour tout } n \geqslant 2.$$

En distinguant les cas n pair et n impair, on en déduit (après une récurrence immédiate) :

$$a_{2p+1} = 0, \quad a_{2p} = \frac{(-1)^p\, 4^p}{(2p+1)!}\, a_0 .$$

Les solutions de (E) développables en séries entières peuvent donc s'écrire :

$$y(x) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\, 4^p}{(2p+1)!}\, x^{2p} .$$

Et la série écrite a un rayon de convergence infini, ce qui justifie *a posteriori* la possibilité de dériver.

On obtient ainsi un espace vectoriel de dimension 1, qui n'est donc pas l'ensemble des solutions de (E). Pour continuer, il faut absolument écrire la série entière ci-dessus avec les fonctions usuelles.

On vient d'obtenir une solution particulière de l'équation (homogène) qui est :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p\, 4^p}{(2p+1)!}\, x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\, (2x)^{2p} = \frac{1}{2x} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\, (2x)^{2p+1} = \frac{1}{2}\, \frac{\sin(2x)}{x}.$$

On va utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire considérer une fonction auxiliaire $u(x)$ telle que $y(x) = u(x)\dfrac{\sin(2x)}{x}$ soit solution de (E).

En dérivant, on obtient :

$$y'(x) = u'(x)\, \frac{\sin(2x)}{x} + u(x)\, \frac{2x\cos(2x) - \sin(2x)}{x^2}$$

$$y''(x) = u''(x)\, \frac{\sin(2x)}{x} + 2u'(x)\, \frac{2x\cos(2x) - \sin(2x)}{x^2} + u(x)\, \frac{-4x\cos(2x) + (2-4x^2)\sin(2x)}{x^3}.$$

En reportant dans (E) et en simplifiant, on obtient :

$$\sin(2x)u''(x) + 4\cos(2x)u'(x) = 0 .$$

Vous observez que $u(x)$ a disparu, ce qui est toujours le cas dans la méthode utilisée, et constitue donc un outil d'auto-contrôle.

L'équation différentielle que nous venons d'obtenir est linéaire d'ordre 1 par rapport à la fonction $u'(x)$.
Sur un intervalle où $\sin(2x)$ ne s'annule pas , sa solution générale est :

$$u'(x)=A\exp\left(-\int\frac{4\cos(2x)}{\sin(2x)}\mathrm{d}x\right)=A\exp\Big(-2\ln|\sin(2x)|\Big)=A\frac{1}{\sin^2(2x)}$$

où A est une constante réelle quelconque.

On en déduit $u(x)$ par un calcul de primitives : $u(x)=\dfrac{A}{2}\cot(2x)+B$

La solution générale de (E) sur un intervalle où $\sin(2x)$ ne s'annule pas est donc :

$$y(x)=u(x)\frac{\sin(2x)}{x}=\frac{A\cos(2x)+B\sin(2x)}{x}.$$

En fait la solution générale obtenue convient sur $I_1=]-\infty,0[$ et sur $I_2=]0,+\infty[$. Sur chacun de ces deux intervalles, l'ensemble des solutions constitue bien un espace vectoriel de dimension 2.

On peut se demander, à titre de question supplémentaire, s'il existe des solutions prolongeables sur $\mathbb{R}$.

Les solutions obtenues s'écrivent :

$$y(x)=\frac{A_1\cos(2x)+B_1\sin(2x)}{x}\quad\text{pour } x\in I_1$$
$$y(x)=\frac{A_2\cos(2x)+B_2\sin(2x)}{x}\quad\text{pour } x\in I_2$$

Pour que les limites à gauche et à droite en 0 existent il faut $A_1=A_2=0$, et soient égales il faut $B_1=B_2=B$.

Les fonctions ainsi prolongées par continuité sont deux fois dérivables car elles possèdent un développement en série entière, et les solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont de la forme :

$$y(x)=\frac{B\sin(2x)}{x}.$$

Elles constituent un espace vectoriel de dimension 1.

Exercice 10.6 : Système différentiel d'ordre 2

Résoudre le système différentiel :

$$(S)\quad\begin{cases}x' &= 5x-2y+\mathrm{e}^t\\ y' &= -x+6y+t\end{cases}$$

Il s'agit d'un système différentiel d'ordre 1 à coefficients constants. De nombreuses méthodes sont possibles. Quatre vont vous être proposées ; il va de soit qu'une seule suffit lors d'une épreuve !

Le système (S) a pour écriture matricielle :

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

avec : $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$, $\quad B(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ t \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de A est $\lambda^2 - 11\lambda + 28$.
Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 7$. Elles sont distinctes, donc A est diagonalisable.

Les espaces propres associés sont respectivement engendrés par $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• **Variation des constantes**

Des calculs des éléments propres déjà faits, il résulte que la solution générale du système homogène associé est :

$$X(t) = A\mathrm{e}^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + B\mathrm{e}^{7t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.
Dans la méthode de variation des constantes, on considère alors deux fonctions auxiliaires définies par $u(t)$ et $v(t)$, appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et telles que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = u(t)\mathrm{e}^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v(t)\mathrm{e}^{7t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soit solution du système (S). Cette condition est équivalente à :

$$u'(t)\mathrm{e}^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v'(t)\mathrm{e}^{7t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ t \end{pmatrix}$$

soit au système linéaire en $u'(t)$ et $v'(t)$ dont la résolution est immédiate :

$$\begin{cases} 2\mathrm{e}^{4t}u'(t) + \mathrm{e}^{7t}v'(t) &= \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{4t}u'(t) - \mathrm{e}^{7t}v'(t) &= t \end{cases} \iff \begin{cases} u'(t) &= \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3t} + \dfrac{1}{3}\,t\,\mathrm{e}^{-4t} \\ v'(t) &= \dfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-6t} - \dfrac{2}{3}\,t\,\mathrm{e}^{-7t} \end{cases}$$

Par calcul de primitives, en utilisant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{cases} u(t) = -\dfrac{1}{9}\,\mathrm{e}^{-3t} - \dfrac{1}{12}\,t\,\mathrm{e}^{-4t} - \dfrac{1}{48}\,\mathrm{e}^{-4t} + A \\ v(t) = -\dfrac{1}{18}\,\mathrm{e}^{-6t} + \dfrac{2}{21}\,t\,\mathrm{e}^{-7t} + \dfrac{2}{147}\,\mathrm{e}^{-7t} + B \end{cases}$$

puis en reportant, et en simplifiant, la solution générale de (S) :

$$\begin{cases} x(t) = 2A\,\mathrm{e}^{4t} + B\,\mathrm{e}^{7t} - \dfrac{5}{18}\,\mathrm{e}^{t} - \dfrac{1}{14}\,t - \dfrac{11}{392} \\ y(t) = A\,\mathrm{e}^{4t} - B\,\mathrm{e}^{7t} - \dfrac{1}{18}\,\mathrm{e}^{t} - \dfrac{5}{28}\,t - \dfrac{27}{784} \end{cases}$$

où A et B sont des constantes réelles quelconques.

- **Diagonalisation de A**

Diagonalisons A dans la base des vecteurs propres déjà écrits.
On a $A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\ ;\quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\ ;\quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Le système (S) peut alors s'écrire :

$$X'(t) = PDP^{-1}X(t) + B(t)$$

C'est-à-dire, en multipliant à gauche par P^{-1} et posant $U(t) = P^{-1}X(t)$:

$$U'(t) = DU(t) + P^{-1}B(t)$$

Comme $P^{-1}B(t) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} + t \\ \mathrm{e}^{t} - 2t \end{pmatrix}$ en notant $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, on est conduit au système :

$$\begin{cases} u'(t) = 4u(t) + \dfrac{1}{3}\,(\mathrm{e}^{t} + t) \\ v'(t) = 7v(t) + \dfrac{1}{3}\,(\mathrm{e}^{t} - 2t) \end{cases}$$

Il s'agit de deux équations différentielles linéaires du premier ordre, dont la résolution donne :

$$\begin{cases} u(t) = K_1\,\mathrm{e}^{4t} - \dfrac{1}{9}\,\mathrm{e}^{t} - \dfrac{1}{12}\left(t + \dfrac{1}{4}\right) \\ v(t) = K_2\,\mathrm{e}^{7t} - \dfrac{1}{18}\,\mathrm{e}^{t} + \dfrac{2}{21}\left(t + \dfrac{1}{7}\right) \end{cases}$$

On en déduit la solution générale de (S) avec $X(t) = PU(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = 2K_1\,\mathrm{e}^{4t} + K_2\,\mathrm{e}^{7t} - \dfrac{5}{18}\mathrm{e}^t - \dfrac{1}{14}t - \dfrac{11}{392} \\ y(t) = K_1\,\mathrm{e}^{4t} - K_2\,\mathrm{e}^{7t} - \dfrac{1}{18}\mathrm{e}^t - \dfrac{5}{28}t - \dfrac{27}{784} \end{cases}$$

• **Intégrales premières indépendantes** (à réserver au cas où A est d'ordre 2)

Les valeurs propres de A ayant été déterminées, on introduit les systèmes :

$$\begin{cases} x' - 4x = x - 2y + \mathrm{e}^t \\ y' - 4y = -x + 2y + t \end{cases}$$

qui entraîne :

$$(x+y)' - 4(x+y) = \mathrm{e}^t + t$$

et :

$$\begin{cases} x' - 7x = -2x - 2y + \mathrm{e}^t \\ y' - 7y = -x - y + t \end{cases}$$

qui entraîne :

$$(x-2y)' - 7(x-2y) = \mathrm{e}^t - 2t$$

La résolution des deux équations linéaires du premier ordre donne :

$$\begin{cases} x + y = a\mathrm{e}^{4t} - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^t - \dfrac{1}{4}t - \dfrac{1}{16} \\ x - 2y = b\mathrm{e}^{7t} - \dfrac{1}{6}\mathrm{e}^t + \dfrac{2}{7}t + \dfrac{2}{49} \end{cases}$$

puis la résolution de ce système linéaire en x et y :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{2a}{3}\mathrm{e}^{4t} + \dfrac{b}{3}\mathrm{e}^{7t} - \dfrac{5}{18}\mathrm{e}^t - \dfrac{1}{14}t - \dfrac{11}{392} \\ y(t) = \dfrac{a}{3}\mathrm{e}^{4t} - \dfrac{b}{3}\mathrm{e}^{7t} - \dfrac{1}{18}\mathrm{e}^t - \dfrac{5}{28}t - \dfrac{27}{784} \end{cases}$$

• **Substitution** (à réserver au cas où A est d'ordre 2)

Dérivons la première équation par rapport à t, puis substituons progressivement pour obtenir une équation ne comportant plus y :

$$\begin{aligned} x''(t) &= 5x'(t) - 2y'(t) + \mathrm{e}^t \\ &= 5x'(t) - 2\big[-x(t) + 6y(t) + t\big] + \mathrm{e}^t \\ &= 5x'(t) + 2x(t) + 6\big[x'(t) - 5x(t) - \mathrm{e}^t\big] - 2t + \mathrm{e}^t \end{aligned}$$

c'est-à-dire l'équation :

$$x''(t) - 11x'(t) + 28x(t) = -5e^t - 2t.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants. Son équation caractéristique $r^2 - 11r + 28 = 0$ (regardez le polynôme caractéristique de A) a pour racines $r_1 = 4$ et $r_2 = 7$.
La solution générale de l'équation homogène s'écrit donc :

$$x(t) = K_1 e^{4t} + K_2 e^{7t}.$$

Par identification, on obtient $-\dfrac{5}{18}\,e^t$ comme solution particulière de

$$x''(t) - 11x'(t) + 28x(t) = -5e^t,$$

puis $-\dfrac{1}{14}\,t - \dfrac{11}{392}$ comme solution particulière de

$$x''(t) - 11x'(t) + 28x(t) = -2t.$$

La solution générale de l'équation en $x(t)$ est donc :

$$x(t) = K_1 e^{4t} + K_2 e^{7t} - \frac{5}{18}\,e^t - \frac{1}{14}\,t - \frac{11}{392}.$$

avec K_1 et K_2 constantes réelles quelconques.

Pour obtenir $y(t)$, ne recommencez pas le même processus, vous obtiendriez de nouvelles constantes intempestives.

En reportant le résultat obtenu pour $x(t)$ dans la première équation du système (S), on obtient :

$$y(t) = \frac{K_1}{2}\,e^{4t} - K_2 e^{7t} - \frac{1}{18}\,e^t - \frac{5}{28}\,t - \frac{27}{784}.$$

Exercice 10.7 : Système différentiel d'ordre 3 (A diagonalisable)

Résoudre le système différentiel :

$$(S) \qquad \begin{cases} 5x' &= -x - 6y + 6z \\ 5y' &= -3x + 2y + 3z \\ 5z' &= 6x + 6y - z \end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire à coefficients constants. On va étudier si la matrice A est diagonalisable.

(S) s'écrit $X' = AX$ avec $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -6 & 6 \\ -3 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & -1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- **Recherche des valeurs propres de A**

Le polynôme caractéristique de A s'écrit :

$$\begin{aligned}
\det(A - lI_3) &= \frac{1}{5^3}\begin{vmatrix} -1-5\lambda & -6 & 6 \\ -3 & 2-5\lambda & 3 \\ 6 & 6 & -1-5\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{125}\begin{vmatrix} -1-5\lambda & 0 & 6 \\ -3 & 5-5\lambda & 3 \\ 6 & 5-5\lambda & -1-5\lambda \end{vmatrix} \qquad C_2 \longleftarrow C_2 + C_3 \\
&= \frac{1}{25}(1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-5\lambda & 0 & 6 \\ -3 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & -1-5\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{5}(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1-5\lambda \end{vmatrix} \qquad C_1 \longleftarrow C_1 + C_3 \\
&= -(\lambda-1)^2\,(\lambda+2)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc : 1 (double), -2 (simple).

Vérifiez que la somme des valeurs propres est égale à la trace de A.

- **Recherche de l'espace propre associé à 1**

L'espace propre E_1 est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ qui vérifient le système :

$$\begin{cases} -a - 6b + 6c &= 5a \\ -3a + 2b + 3c &= 5b \\ 6a + 6b - c &= 5c \end{cases} \iff a + b - c = 0$$

E_1 est donc un plan, ce qui entraîne que A est diagonalisable.

On peut choisir comme base de E_1 : $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **Recherche de l'espace propre associé à -2**

L'espace propre E_{-2} est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ qui vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -a-6b+6c & = & -10a \\ -3a+2b+3c & = & -10b \\ 6a+6b-c & = & -10c \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a=2k \\ b=k \\ c=-2k \end{array}\right.$$

Il admet donc pour base $V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- **Conclusion**

La matrice A étant diagonalisable, la solution générale de (S) est donc :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = K_1\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + K_2\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + K_3\,\mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

soit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & K_1\,\mathrm{e}^t + 2K_3\,\mathrm{e}^{-2t} \\ y(t) & = & K_2\,\mathrm{e}^t + K_3\,\mathrm{e}^{-2t} \\ z(t) & = & K_1\,\mathrm{e}^t + K_2\,\mathrm{e}^t - 2K_3\,\mathrm{e}^{-2t} \end{array}\right.$$

avec K_1, K_2, K_3 constantes réelles quelconques.

Exercice 10.8 : Système différentiel d'ordre 3 (A trigonalisable)

Résoudre le système différentiel :

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{rcl} 5x' & = & -x-3y+11z \\ 5y' & = & -10x+5y+10z \\ 5z' & = & 9x+7y+z \end{array}\right.$$

Il s'agit d'un système linéaire à coefficients constants, de matrice A.

Si la matrice A est diagonalisable, la solution générale de (S) est donnée par une formule du cours qui utilise les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Si A n'est pas diagonalisable, avec comme valeurs propres λ_1 d'ordre 2 et λ_2 d'ordre 1 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, vous pouvez admettre, et utiliser, que A est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ (dite réduite de Jordan).}$$

(S) s'écrit $X' = AX$ avec $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 11 \\ -10 & 5 & 10 \\ 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

• **Recherche des valeurs propres de A**

Le polynôme caractéristique de A s'écrit :

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) &= \frac{1}{5^3}\begin{vmatrix} -1-5\lambda & -3 & 11 \\ -10 & 5-5\lambda & 10 \\ 9 & 7 & 1-5\lambda \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{125}\begin{vmatrix} -1-5\lambda & -3 & 10-5\lambda \\ -10 & 5-5\lambda & 0 \\ 9 & 7 & 10-5\lambda \end{vmatrix} \quad C_3 \longleftarrow C_3 + C_1 \\
&= \frac{1}{25}(2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-5\lambda & -3 & 1 \\ -10 & 5-5\lambda & 0 \\ 9 & 7 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{25}(2-\lambda)\begin{vmatrix} -10-5\lambda & -10 & 0 \\ -10 & 5-5\lambda & 0 \\ 9 & 7 & 1 \end{vmatrix} \quad L_1 \longleftarrow L_1 - L_3 \\
&= -(\lambda-2)^2\,(\lambda+3)
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc : 2 (double), -3 (simple).

Vérifiez que la somme des valeurs propres est égale à la trace de A.

• **Recherche de l'espace propre associé à 2**

L'espace propre E_2 est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ qui vérifient le système :

$$\begin{cases} -a - 3\,b + 11\,c = 10\,a \\ -10\,a + 5\,b + 10\,c = 10\,b \\ 9\,a + 7\,b + c = 10\,c \end{cases} \iff \begin{cases} a = k \\ b = 0 \\ c = k \end{cases}$$

E_2 est donc la droite qui admet pour base $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et A n'est pas diagonalisable.

- **Recherche de** V_2

Pour obtenir la forme admise pour la matrice réduite semblable à A, il faut choisir V_2 tel que $f(V_2) = V_1 + 2V_2$. Les coordonnées (a,b,c) de V_2 vérifient donc le système :

$$\begin{cases} -a - 3\,b + 11\,c &= 5 + 10\,a \\ -10\,a + 5\,b + 10\,c &= 10\,b \\ 9\,a + 7\,b + c &= 5 + 10\,c \end{cases} \iff \begin{cases} a = k \\ b = 2 \\ c = k + 1 \end{cases}$$

On peut donc choisir $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **Recherche de l'espace propre associé à** -3

L'espace propre E_{-3} est l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ qui vérifient le système :

$$\begin{cases} -a - 3b + 11c &= -15a \\ -10a + 5b + 10c &= -15b \\ 9a + 7b + c &= -15c \end{cases} \iff \begin{cases} a = k \\ b = k \\ c = -k \end{cases}$$

E_{-3} est donc la droite qui admet pour base $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- **Réduction de** A

Dans la base (V_1, V_2, V_3) l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique a pour matrice représentative :

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

On peut donc écrire $A = PRP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- **Résolution du système**

Le système (S) s'écrit : $X' = AX = PRP^{-1}X$, soit en posant $U = P^{-1}X$:

$$U' = RU.$$

En notant $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ le système différentiel devient donc :

$$\begin{cases} u_1' &= 2u_1 + u_2 \\ u_2' &= 2u_2 \\ u_3' &= -3u_3 \end{cases}$$

En résolvant d'abord les deux dernières équations, puis la première, on obtient :

$$\begin{cases} u_1(t) &= (K_1 + K_2 t)\,\mathrm{e}^{2t} \\ u_2(t) &= K_2\,\mathrm{e}^{2t} \\ u_3(t) &= K_3\,\mathrm{e}^{-3t} \end{cases}$$

puis avec $X = PU$:

$$\begin{cases} x(t) &= (K_1 + K_2 t)\,\mathrm{e}^{2t} + K_3\,\mathrm{e}^{-3t} \\ y(t) &= 2K_2\,\mathrm{e}^{2t} + K_3\,\mathrm{e}^{-3t} \\ z(t) &= (K_1 + K_2 + K_2 t)\,\mathrm{e}^{2t} - K_3\,\mathrm{e}^{-3t} \end{cases}$$

Remarquez que le calcul de P^{-1} ne sert pas. Il est donc inutile de le faire un jour de concours.

Fonctions de plusieurs variables

11

Exercice 11.1 : Continuité d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4 - 2x^2y + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue.

2. Montrez que la fonction f n'est pas continue à l'origine.

Pour prouver qu'une fonction de plusieurs variables n'admet pas de limite en M_0, il suffit d'expliciter une restriction à une courbe continue passant par M_0 qui n'admette pas de limite, ou deux restrictions qui conduisent à des limites différentes.

Mais pour prouver l'existence d'une limite, il faut considérer le cas général. Une infinité d'exemples ne démontre rien.

Remarquons tout d'abord que la fonction est bien définie dans $\mathbb{R}^2$ puisque :

$$x^4 - 2x^2y + 3y^2 = (x^2 - y)^2 + 2y^2$$

ne s'annule qu'en $(0,0)$.

1. La restriction de f aux droites $x = 0$ et $y = 0$ est la fonction nulle.
La restriction de f à la droite $y = mx$, avec $m \neq 0$, donne :

$$f(x,mx) = \frac{mx}{x^2 - 2mx + 3m^2}$$

et tend vers 0 quand x tend vers 0.
Comme $f(0,0) = 0$, la restriction de f à toute droite passant par l'origine est donc continue.

2. Considérons la restriction de f à la parabole $y = x^2$. On a :

$$f(x,x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, $f(x,x^2)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0.
La fonction f n'est donc pas continue à l'origine.

Exercice 11.2 : À propos du théorème de Schwarz

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Montrez que f admet des dérivées partielles secondes en tout point. Que pouvez-vous déduire du calcul de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$?

Il faudra distinguer l'origine et les autres points du plan.

• Si l'on considère un point M_0 distinct de l'origine, il existe une boule de centre M_0 dans laquelle f est donnée seulement par la première expression. Comme il s'agit d'une composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, f est de classe $\mathcal{C}^2$ en M_0.

• Dans tout voisinage de $(0,0)$, les deux expressions de f interviennent et on doit revenir aux définitions :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$$

On va avoir aussi besoin du calcul pour $(x,y) \neq (0,0)$ de :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1$$

Comme $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, le théorème de Schwarz permet de conclure que les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.

Le théorème de Schwarz a été publié en 1873. L'exemple de l'exercice est dû à Peano (1858-1932).

Exercice 11.3 : Différentiabilité d'une fonction (PSI)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Étudier la différentiabilité de f.

Si les dérivées partielles sont continues, la fonction est nécessairement différentiable. Si une dérivée partielle n'existe pas, la fonction ne peut pas être différentiable.

Si les dérivées partielles existent et si l'une d'entre elles n'est pas continue, il faut recourir à la définition de la différentiabilité.

- En $(x,y) \neq (0,0)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ces dérivées partielles sont continues comme composées de fonctions continues.
Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est donc différentiable.

- En $(0,0)$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = 2^{-\frac{3}{2}} \neq 0$ montre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$. Il en est de même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

f n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$.

- Étudions la différentiabilité de f en $(0,0)$. L'égalité de définition conduit à poser :

$$\varepsilon(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\big[f(0+x,0+y) - f(0,0)\big] = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Cette fonction ne tend pas vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$ puisque $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varepsilon(x,x) = \frac{1}{2}$.

f n'est donc pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 11.4 : Une équation aux dérivées partielles

Soit $U =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions f, $\mathcal{C}^1$ sur U, qui vérifient :

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x} \qquad \textbf{(1)}.$$

Ce type d'exercice a pour but de vous faire calculer les dérivées partielles d'une fonction composée. En l'absence d'indications particulières, passez en coordonnées polaires.

L'introduction des coordonnées polaires :

$$x = \rho\cos\theta \quad \text{et} \quad y = \rho\sin\theta$$

nous permet de considérer la fonction g définie sur $]0,+\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par :

$$g(\rho,\theta) = f(x,y)\,.$$

Pour déterminer l'équation vérifiée par les dérivées partielles de g, il est plus automatique de calculer les dérivées partielles de f pour pouvoir substituer dans l'équation donnée.

Mais pour ceci, il faut écrire d'abord la matrice jacobienne de $(\rho,\theta) \mapsto (x,y)$, puis inverser cette matrice pour disposer des dérivées partielles qui interviennent dans les calculs.

Si on a de la chance, on peut aussi calculer les dérivées partielles de g et croiser les doigts !

• **Première solution**

On a :

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\times\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\times\frac{\partial y}{\partial \rho} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\left[x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

soit en reportant dans l'équation **(1)** :

$$\rho\,\frac{\partial g}{\partial \rho} = \tan\theta \qquad \textbf{(2)}.$$

• **Deuxième solution**

Écrivons la matrice jacobienne J de $(\rho,\theta) \mapsto (x,y)$, puis son inverse J^{-1}.

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial x} & \dfrac{\partial \rho}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\dfrac{\sin\theta}{\rho} & \dfrac{\cos\theta}{\rho} \end{pmatrix}$$

On dispose alors des éléments pour calculer :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \theta} \end{aligned}$$

La fonction f vérifie **(1)** si, et seulement si, la fonction g vérifie :

$$\rho\cos\theta\left[\cos\theta\,\frac{\partial g}{\partial \rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right] + \rho\sin\theta\left[\sin\theta\,\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \theta}\right] = \tan\theta$$

soit après simplication :

$$\rho\,\frac{\partial g}{\partial \rho} = \tan\theta \qquad \textbf{(2)}.$$

On voit ici l'intérêt du passage en coordonnées polaires puisque l'équation **(2)** est beaucoup plus simple que l'équation **(1)**.

En intégrant l'équation **(2)** par rapport à ρ on a :

$$g(\rho,\theta) = \ln\rho \times \tan\theta + \varphi(\theta)$$

où φ est une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^1$.
En revenant à f, on obtient la solution générale de **(1)** :

$$f(x,y) = \frac{y}{2x}\ln(x^2+y^2) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

où ψ est une fonction $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11.5 : Équation des cordes vibrantes

Considérons une corde de longueur l fixée aux extrémités d'abscisses 0 et l. Lors de vibrations dans des conditions idéales, désignons par $\varphi(x,t)$ le déplacement à l'instant t du point d'abscisse x.
Cette fonction, supposée de classe $\mathcal{C}^2$, vérifie l'*équation des cordes vibrantes* :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

où C est une constante > 0.

1. Déterminer α et β pour que le changement de variable

$$u = x + \alpha t \quad ; \quad v = x + \beta t$$

ramène l'équation **(1)** à la forme $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$ avec $F(u,v) = \varphi(x,t)$.

2. En déduire la forme des solutions de **(1)**.

3. Préciser ces solutions en sachant que les extrémités de la corde sont fixes.

Il est préférable de calculer les dérivées partielles qui figurent dans l'équation donnée pour pouvoir les reporter.

1. Le changement de variable proposé est bijectif si, et seulement si, $\alpha \neq \beta$.
En posant $F(u,v) = \varphi(x,t)$, on a, par dérivation d'une fonction composée de classe $\mathcal{C}^2$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha\frac{\partial F}{\partial u} + \beta\frac{\partial F}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \alpha\Big[\alpha\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \beta\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}\Big] + \beta\Big[\alpha\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \beta\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\Big]$$

$$= \alpha^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \beta^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

En substituant dans l'équation **(1)**, on obtient alors :

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{C^2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\left(1 - \frac{\alpha\beta}{C^2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \left(1 - \frac{\beta^2}{C^2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$$

ce qui donne la forme réduite annoncée en choisissant α et β tels que :

$$\alpha^2 = C^2 \quad ; \quad \beta^2 = C^2 \quad ; \quad \alpha \neq \beta$$

soit, par exemple : $\alpha = C \quad ; \quad \beta = -\alpha = -C$.

2. La forme de la solution générale de l'équation $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$ est $F(u,v) = G(u) + H(v)$, ce qui donne :

$$\varphi(x,t) = f(x + Ct) + g(x - Ct)$$

où f et g sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ quelconques.

3. Comme les extrémités de la corde sont fixes, on a :

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \varphi(0,t) = f(Ct) + g(-Ct) = 0$$
$$\varphi(l,t) = f(l+Ct) + g(l-Ct) = 0$$

La première condition montre que $g(-u) = -f(u)$, ce qui conduit à :

$$\varphi(x,t) = f(x+Ct) - f(Ct-x)\,.$$

La seconde condition s'écrit alors :

$$\forall t \geqslant 0 \qquad f(Ct+l) - f(Ct-l) = 0\,,$$

ce qui montre que f est périodique de période $2l$. La solution du problème des cordes vibrantes est donc :

$$\varphi(x,t) = f(Ct+x) - f(Ct-x)$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de période $2l$.

Cette résolution du problème des cordes vibrantes (1747) par d'Alembert en fait le fondateur des équations aux dérivées partielles.
En 1753, Daniel Bernoulli considère que les fonctions périodiques les plus simples sont les fonctions trigonométriques $\sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right)$ et $\cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right)$. Il représente alors f sous la forme d'une série trigonométrique.
La suite des travaux (notamment par Poisson, Fourier) amènera aux séries de Fourier.

Exercice 11.6 : Dérivée directionnelle

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right).$$

2. La fonction f est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$?
3. En $C = (0,1)$, déterminer la dérivée de f dans la direction d'un vecteur unitaire $\overrightarrow{n} = (a,b)$. Comment choisir $\overrightarrow{n}$ pour que cette dérivée soit maximale ?

1. Pour que f existe il faut, et il suffit, que $x + \sqrt{x^2+y^2} > 0$. Il faut exclure les points (x,y) tels que :

$$\sqrt{x^2+y^2} \leqslant -x \iff x \leqslant 0 \text{ et } x^2+y^2 \leqslant x^2 \iff x \leqslant 0 \text{ et } y = 0\,.$$

L'ensemble de définition de f est le plan privé de la demi-droite : $\{(x,0)\ ;\ x \leqslant 0\}$.

2. Sur son ensemble D de définition, la fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions continues et de classe $\mathcal{C}^1$.
En $(x,y) \in D$, les dérivées partielles premières sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x + \sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2} + x^2 + y^2}$$

3. En $C = (0,1)$, le gradient de f est égal à :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(C) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\,,\, \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\right) = (1,1)\,.$$

Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, la dérivée de f au point C dans la direction du vecteur unitaire $\overrightarrow{n}$ est égale à :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(C) \cdot \overrightarrow{n} = a + b\,.$$

Cette dérivée est maximale dans la direction du gradient, soit $a = b$ avec $a > 0$ et $\sqrt{a^2+b^2} = 1$, ou encore :

$$\overrightarrow{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Exercice 11.7 : Recherche d'extremums

Trouver les extremums de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y\,.$$

• Détermination des points critiques

La fonction f étant polynomiale, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
Les éventuels extremums de f vérifient les conditions nécessaires :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

La seule solution de ce système est $(x,y) = (0,3)$.

• **Étude du point critique**

– Méthode du programme de PT

On calcule les dérivées secondes au point étudié :

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,3) = 2 \ ; \ S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,3) = 1 \ ; T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,3) = 2$$

Comme $S^2 - RT = -3 < 0$ et $R > 0$, le point $(0,3)$ est un minimum (local) de valeur $f(0,3) = -9$.

– Méthode pour tous

On revient à la définition, c'est-à-dire à l'étude du signe de $f(x,y) - f(0,3)$ pour x voisin de 0 et y voisin de 3.
Mais il est préférable de se ramener à des variables voisines de 0 en considérant :

$$D(h,k) = f(0+h,3+k) - f(0,3) = h^2 + hk + k^2 .$$

Vous observez que les termes de degré 1 en h et k ont disparu, ce qui est toujours le cas au voisinage d'un point critique.

La transformation algébrique :

$$D(h,k) = \left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 \geqslant 0$$

montre que le point $(0,3)$ est un mimimum. Il est même global puisqu'on n'a rien négligé dans le calcul ci-dessus.

Exercice 11.8 : Extremums sur un compact

Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; x^2 + y^2 \leqslant 9\right\}$.
Déterminer les extremums sur D de la fonction définie par :

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1 .$$

La fonction f est continue comme composée de fonctions continues.

La partie D est fermée et bornée en dimension finie : c'est un compact.

Dans ce cas, vous devez savoir que la fonction numérique f admet sur D un maximum (et un minimum) global atteint au moins une fois.

D'autre part, le calcul des dérivées partielles dont vous avez l'habitude se fait sur un ouvert.

• **Conditions nécessaires**

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Les éventuels extremums de f sur l'ouvert :

$$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 < x^2 + y^2 < 9\right\}$$

vérifient les conditions nécessaires :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 2y = 0 \end{cases}$$

Ce système n'admet pas de solution dans Δ. Les extremums de f sur D sont à chercher sur la frontière de Δ, c'est-à-dire au point$(0,0)$ et sur le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 9$.

• **Étude en** $(0,0)$

On a $f(0,0) = -1$ et on a toujours $f(x,y) \geqslant -1$, l'égalité n'ayant lieu qu'en $(0,0)$.
La fonction f admet donc un minimum global en $(0,0)$.

• **Étude sur le cercle**

Le cercle de centre O et de rayon 3 peut se paramétrer :

$$x = 3\cos t \,;\, y = 3\sin t \,;\, t \in [0,2\pi[\,.$$

La restriction de f au cercle s'écrit donc $g(t) = 2 + 9\sin^2 t$ et ses valeurs décrivent le segment $[2,11]$.

• **Bilan**

Sur D, la fonction f admet un minimum global de valeur -1 atteint en $(0,0)$; un maximum global de valeur 11 atteint en $(0,3)$ et $(0,-3)$.

Exercice 11.9 : Extremums d'une fonction de 3 variables

Étudier les extremums de la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y.$$

• **Détermination des points critiques**

La fonction f étant polynomiale, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$.
Les éventuels extremums de f vérifient les conditions nécessaires :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x + yz = 0 & (\mathbf{1}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = xz + 1 = 0 & (\mathbf{2}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = xy - 1 = 0 & (\mathbf{3}) \end{array}\right.$$

Les égalités **(2)** et **(3)** entraînent $x(y+z) = 0$ et $x \neq 0$. On a donc $z = -y$.
D'après **(1)** on a alors $x = y^2$, puis $y^3 = 1$ d'après **(3)**.
On obtient donc un seul point critique : $(1,1,-1)$.

• Étude du point critique

On revient à la définition, c'est-à-dire à l'étude du signe de $f(x,y,z) - f(1,1,-1)$ pour x voisin de 1, y voisin de 1, et z voisin de -1. Mais il est préférable de se ramener à des variables voisines de 0 en considérant :

$$\begin{aligned} D(h,k,l) &= f(1+h,1+k,-1+l) - f(1,1,-1) \\ &= kl + hl - hk + \frac{h^2}{2} + o\big(\|(h,k,l)\|^2\big). \end{aligned}$$

Vous observez que les termes de degré 1 ont disparu, ce qui est toujours le cas au voisinage d'un point critique.
Localement, on est ramené à étudier le signe d'une forme quadratique définie par :

$$q(h,k,l) = kl + hl - hk + \frac{h^2}{2}.$$

On peut le faire en utilisant la matrice symétrique réelle associée à q.
Mais on peut aussi :
– soit faire des transformations algébriques si l'on pense qu'il s'agit d'un extremum,
– soit fournir deux restrictions contradictoires si l'on pense que q n'est pas de signe constant.

Considérons les restrictions à des droites passant par l'origine :

$$q(h,0,h) = \frac{3}{2}h^2 > 0 \quad ; \quad q(h,h,0) = -\frac{1}{2}h^2 < 0\,.$$

Les signes de ces restrictions montrent que q n'est pas de signe constant au voisinage de $(0,0,)$.
Le point critique n'est pas un extremum.

Exercice 11.10 : Majoration (PC-PSI)

Soit a, b, c des réels positifs tels que $a + b + c = \frac{\pi}{2} \cdot$ Montrer que l'on a :

$$\sin a \sin b \sin c \leqslant \frac{1}{8} \cdot$$

Il s'agit d'un oral placé ici pour tester votre réaction. Il faut penser à une notion relative aux fonctions à une variable vue en première année. C'est une notion qui permet d'obtenir des inégalités globales.

Sur $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, la fonction définie par $\ln(\sin x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et l'on a :

$$\left[\ln(\sin x)\right]'' = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0\,.$$

C'est donc une fonction concave, et $-f$ est convexe.

Rappelons l'inégalité de convexité :
g étant convexe sur I, si $x_1,\ldots,x_n$ appartiennent à I, si $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, alors :

$$g\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, g(x_i)\,.$$

Appliquons l'inégalité de convexité à la fonction $-f$ avec les réels $a, b, c, \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et les coefficients $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$:

$$-\ln\Big[\sin\big(\frac{a+b+c}{3}\big)\Big] \leqslant \frac{1}{3}\Big[-\ln(\sin a) - \ln(\sin b) - \ln(\sin c)\Big]\,.$$

Comme $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ et $\ln(\sin \frac{\pi}{6}) = -\ln 2$, on a aussi :

$$-3\ln 2 \geqslant \ln(\sin a) + \ln(\sin b) + \ln(\sin c)\,.$$

La fonction exponentielle étant croissante, on en déduit :

$$\frac{1}{8} \geqslant \sin a \sin b \sin c\,.$$

Exercice 11.11 : D'un extremum local à un extremum global (PC-PSI)

Soit $a > 0$ et f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x,y) = \frac{a}{x} + \frac{a}{y} + \frac{xy}{a^2}.$$

1. Montrer que f admet un minimum local que l'on déterminera.

2. Montrer que :

$$\forall(\alpha,\beta,\gamma) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \qquad \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geqslant (\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{3}}.$$

En déduire que le minimum obtenu dans la question précédente est global.

C'est un sujet d'oral. Nous allons rédiger la méthode vraisemblablement attendue par l'examinateur.

Mais il existe aussi une méthode élémentaire (niveau première S) qui sera présentée en annexe à la fin.

• **Détermination des points critiques**

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.
Les éventuels extremums de f vérifient les conditions nécessaires :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{a}{x^2} + \dfrac{y}{a^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{a}{y^2} + \dfrac{x}{a^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 y = a^3 \\ xy^2 = a^3 \end{cases} \iff x = y = a$$

Le point (a,a) est donc le seul point critique.

• **Étude du point critique**

– Méthode du programme de PT

On calcule les dérivées secondes au point étudié :

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,a) = \frac{2}{a^2}\ ;\ S = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,a) = \frac{1}{a^2}\ ;\ T = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,a) = \frac{2}{a^2}$$

Comme $S^2 - RT = \dfrac{-3}{a^2} < 0$ et $R > 0$, le point (a,a) est un minimum (local) de valeur $f(a,a) = 3$.

– Méthode pour tous

On revient à la définition, c'est-à-dire à l'étude du signe de $f(x,y) - f(a,a)$ pour x voisin de a et y voisin de a. Mais il est préférable de se ramener à des variables voisines de 0 en considérant :

$$\begin{aligned} D(h,k) &= f(a+h,a+k) - f(a,a) = \frac{1}{1+\frac{h}{a}} + \frac{1}{1+\frac{h}{a}} + \left(1+\frac{h}{a}\right)\left(1+\frac{k}{a}\right) - 3 \\ &= 1 - \frac{h}{a} + \frac{h^2}{a^2} + o(h^2) + 1 - \frac{k}{a} + \frac{k^2}{a^2} + o(k^2) + 1\frac{h}{a} + \frac{k}{a} + \frac{hk}{a^2} - 3 \\ &= \frac{1}{a^2}(h^2+k^2+hk) + o(||(h,k)||^2) \end{aligned}$$

Vous observez que les termes de degré 1 en h et k ont disparu, ce qui est toujours le cas au voisinage d'un point critique.

Au voisinage de (a,a), la différence $D(h,k)$ est du signe de :

$$h^2 + k^2 + hk = \big(h + \frac{1}{2}k\big)^2 + \frac{3}{4}k^2 > 0 \text{ si } (h,k) \neq (0,0)\,.$$

Le point critique (a,a) est donc un minimum, local puisque des termes ont été négligés lors du calcul des développements limités.

2. La grande difficulté de cette question est de penser à une notion relative aux fonctions à une variable vue en première année. C'est une notion qui permet d'obtenir des inégalités globales.

Vous êtes peut-être une personne qu'on vexe facilement ?

Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction ln est de classe $\mathcal{C}^2$ et l'on a $(\ln x)'' = -\dfrac{1}{x^2} < 0$.

C'est donc une fonction concave, et $-f$ est convexe.

Rappelons l'inégalité de convexité :

g étant convexe sur I, si $x_1,\ldots,x_n$ appartiennent à I, si $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont des réels positifs tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, alors :

$$g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, g(x_i)\,.$$

Appliquons l'inégalité de convexité à la fonction $-f$ avec les réels $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ et les coefficients $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dfrac{1}{3}$:

$$-\ln\Big(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\Big) \leqslant \frac{1}{3}\big(-\ln\alpha - \ln\beta - \ln\gamma\big)\,.$$

La fonction exponentielle étant croissante, on en déduit :

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} \geqslant (\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{3}}$$

d'où :

$$\frac{a}{x}+\frac{a}{y}+\frac{xy}{a^2} \geqslant 3\left(\frac{a}{x}\times\frac{a}{y}\times\frac{xy}{a^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 3\,.$$

Le point (a,a) tel que $f(a,a) = 3$ est donc un minimum global.

Annexe : méthode élémentaire (niveau première S)

La démonstration se fait en deux étapes, en étudiant une fonction à une variable à chaque étape.

• Pour x fixé, considérons la fonction g définie par : $g(y) = \dfrac{a}{y}+\dfrac{xy}{a^2}\cdot$

Sa dérivée $g'(y) = \dfrac{x}{a^2}-\dfrac{a}{y^2}$ s'annule pour $y_0 = \sqrt{\dfrac{a^3}{x}}$ et $g''(y) = \dfrac{2a}{y^3} < 0$.

La fonction g présente donc un minimum pour $y = y_0$ dont la valeur est $g(y_0) = 2\sqrt{\dfrac{x}{a}}\cdot$

Par suite :

$$f(x,y) \geqslant \frac{a}{x}+2\sqrt{\frac{x}{a}}$$

l'égalité ayant lieu pour $y = \sqrt{\dfrac{a^3}{x}}$.

• Considérons la fonction h définie par : $h(x) = \dfrac{a}{x}+2\sqrt{\dfrac{x}{a}}$

Sa dérivée $h'(x) = -\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{ax}}$ s'annule pour $x_0 = a$ et elle est négative pour $x \leqslant a$ et positive pour $x \geqslant a$.

La fonction h présente donc un minimum pour $x = a$ dont la valeur est $h(a) = 3$.

• En conclusion, on a :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \qquad f(x,y) \geqslant 3$$

l'égalité ayant lieu si, et seulement si, $x = y = a$.

Exercice 11.12 : Détermination d'un facteur intégrant d'une forme différentielle (PSI)

1. Déterminer une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, telle que la forme différentielle :

$$\omega = g(x^2 - y^2)\big[(x^2 + y^2 + 1)\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y\big]$$

soit une forme exacte sur des ouverts à préciser.

2. Déterminer alors, sur chaque ouvert, f telle que $\omega = \mathrm{d}f$.

On sait que, pour qu'une forme différentielle soit exacte, il est nécessaire qu'elle soit fermée. Nous allons commencer par écrire cette condition qui est plus facile à exploiter.

La réciproque (théorème de Poincaré) exige une condition sur l'ouvert U sur lequel on se place.

La condition D étoilé (il existe $a \in U$, pour tout $x \in U$, le segment d'extrémités a et x soit inclus dans U) convient.

La condition D simplement connexe (toute courbe fermé incluse dans U peut se ramener à un point par déformation continue) convient aussi.

1. Pour que ω soit exacte sur un ouvert U, il est nécessaire qu'elle soit fermée, c'est-à-dire que, pour tout $(x,y) \in U$, on ait :

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[(x^2 + y^2 + 1)g(x^2 - y^2)\Big] = \frac{\partial}{\partial x}\Big[-2xyg(x^2 - y^2)\Big]$$

soit après calculs et simplifications :

$$4yg(x^2 - y^2) - 2y(-x^2 + y^2 + 1)g'(x^2 - y^2) = 0\,.$$

Pour $y \neq 0$, on peut simplifier, puis prolonger par continuité l'égalité obtenue au cas $y = 0$, ce qui donne :

$$\forall (x,y) \in U \qquad 2g(x^2 - y^2) + (x^2 - y^2 - 1)g'(x^2 - y^2) = 0\,.$$

En notant $u = x^2 - y^2$, la fonction g est donc solution de l'équation différentielle :

$$(u - 1)g'(u) + 2g(u) = 0\,.$$

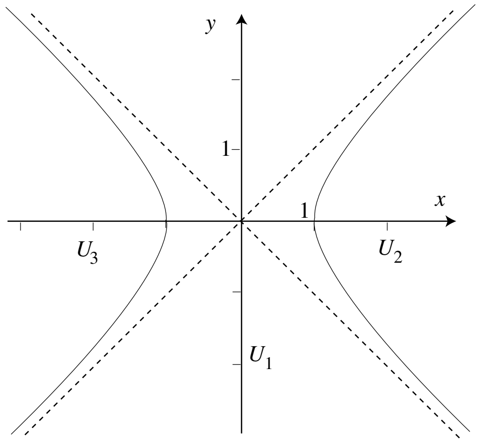
C'est une équation différentielle linéaire, homogène, du premier ordre dont la solution générale est (sur un intervalle où $u \neq 1$) :

$$g(u) = K\,\exp\Big(\int \frac{-2}{u-1}\mathrm{d}u\Big) = K\,\exp\big(-2\ln|u-1|\big) = \frac{K}{(u-1)^2}.$$

En choisissant $g(x^2 - y^2) = \dfrac{1}{(x^2 - y^2 - 1)^2}$ la forme différentielle devient :

$$\omega = \frac{x^2+y^2+1}{(x^2-y^2-1)^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2xy}{(x^2-y^2-1)^2}\,\mathrm{d}y = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\,.$$

Elle est définie et fermée sur chacun des trois ouverts :



$U_1 = \{(x,y)\ ;\ x^2 - y^2 < 1\}$
$U_2 = \{(x,y)\ ;\ x^2 - y^2 > 1 \quad \text{et} \quad x > 0\}$
$U_3 = \{(x,y)\ ;\ x^2 - y^2 > 1 \quad \text{et} \quad x < 0\}$

U_1 est étoilé par rapport à O ; U_2 et U_3 sont convexes donc étoilés par rapport à chacun de leurs points.
D'après le théorème de Poincaré, il s'agit de conditions suffisantes pour que ω soit exacte sur chaque ouvert.

2. Sur U_k (où $k \in \{1,2,3\}$), déterminons f_k telle que $\omega = \mathrm{d}f_k$.
En choisissant de commencer par la dérivée partielle la plus facile à intégrer, on a :

$$\frac{\partial f_k}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2-y^2-1)^2} \quad \text{d'où :} \quad f_k(x,y) = \frac{-x}{x^2-y^2-1} + \varphi_k(x)$$

puis en dérivant par rapport à x :
$\dfrac{\partial f_k}{\partial x} = \dfrac{x^2+y^2+1}{(x^2-y^2-1)^2} + \varphi_k'(x)$ ce qui entraîne $\varphi_k'(x) = 0$ et finalement :

$$f_k(x,y) = \frac{-x}{x^2-y^2-1} + \lambda_k.$$

Exercice 11.13 : Calcul d'une intégrale double

Calculer l'intégrale double :

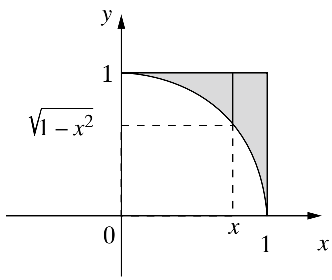
$$I = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où D est l'ensemble des points (x,y) du plan tels que :

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant x^2+y^2.$$

Commencez par dessiner D. Le réflexe le plus souvent observé est le passage par les coordonnées polaires. Mais ce n'est pas le simple.

Un dessin facilite la visualisation de l'exercice.



Le théorème de Fubini permet d'écrire I avec un emboîtement d'intégrales simples. On verra bien si le calcul est possible.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \Big(\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \Big[\frac{x}{2}\ln(1+x^2+y^2) \Big]_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x}{2}\ln\Big(\frac{2+x^2}{2}\Big)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Le changement de variable :

$$u = \frac{2+x^2}{2} \;;\; \mathrm{d}u = x\mathrm{d}x$$

conduit à :

$$I = \frac{1}{2}\int_1^{\frac{3}{2}} \ln u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big[u\ln u - u\Big]_1^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\ln\Big(\frac{3}{2}\Big) \approx 0{,}054\,.$$

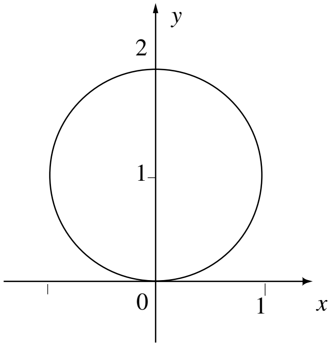
Exercice 11.14 : Calcul d'une intégrale curviligne

Soit C le cercle d'équation $x^2+y^2-2y=0$. Calculer de deux façons différentes l'intégrale curviligne :

$$I=\int_{C^+} -x^2y\,\mathrm{d}x + xy^2\,\mathrm{d}y\,.$$

Commencez par dessiner C et son orientation directe qui donne C^+.
Pour les deux méthodes demandées, il n'y a pas à hésiter :
– le calcul direct en paramétrant C^+ ;
– l'utilisation de la formule de Green-Riemann.

Un dessin facilite la visualisation de l'exercice.



- **Calcul direct**

Le cercle étant de centre $(0,1)$ et de rayon 1, on peut paramétrer C^+ par :

$$x=\cos t\ ;\ y=1+\sin t\ ;\ t\in[0,2\pi[\,,$$

ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\left[\cos^2 t(1+\sin t)\sin t+\cos^2 t(1+\sin t)^2\right]\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{2\pi}\left[2\cos^2 t\,\sin^2 t+3\cos^2 t\,\sin t+\cos^2 t\right]\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\mathrm{d}t+3\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\sin t\,\mathrm{d}t\\
&\qquad\qquad +\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[1+\cos(2t)\right]\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{4}\left[t+\frac{1}{4}\sin(4t)\right]_0^{2\pi}-\left[\cos^3 t\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{2\pi}\\
&= \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

- **Calcul avec la formule de Green-Riemann**

La forme différentielle s'écrit $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ avec $P=-x^2y$ et $Q=xy^2$. On calcule :

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=x^2+y^2\,.$$

D'après la formule de Green-Riemann, l'intégrale curviligne I est égale à l'intégrale double sur le disque D limité par C :

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Le dessin suggère d'introduire le changement de variables :

$$x = \rho\cos\theta\,;\, y = 1 + \rho\sin\theta\,.$$

Le jacobien est égal à ρ et le domaine d'intégration devient :

$$\Delta = \left\{(\rho,\theta)\,;\,\rho \in [0,1]\,,\,\theta \in [0,2\pi[\right\}.$$

On a donc :

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\rho^2 + 1 + 2\rho\sin\theta\right]\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} [\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin\theta]\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2}\cdot$$

Courbes et surfaces

12

Exercice 12.1 : Droites tangentes et normales

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormal, on considère la courbe paramétrée $\mathcal{C}$:

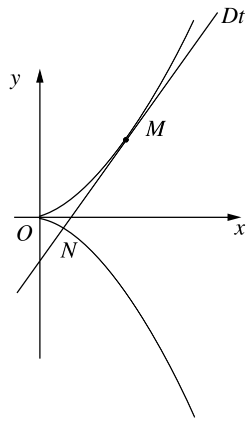
$$\begin{cases} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Déterminez les droites qui sont à la fois tangentes et normales à $\mathcal{C}$.

Construisez rapidement la courbe pour comprendre le problème posé.

La stratégie à adopter n'est pas évidente. la plus efficace consiste à considérer la tangente en un point $M(t)$ à préciser, puis son intersection avec $\mathcal{C}$.

Une contruction de la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ donne :



Comme $x'(t) = 6t$ et $y'(t) = 6t^2$, tout point de $\mathcal{C}$ tel que $t \neq 0$ est régulier et la tangente en $M(t)$ a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$.

La tangente D_t en $M(t)$ admet donc pour équation :

$$tX - Y - t^3 = 0.$$

Si D_t recoupe $\mathcal{C}$ en $N(u)$, le paramètre u vérifie l'équation :

$$3tu^2 - 2u^3 - t^3 = 0\,.$$

Le polynôme en u du premier membre est de degré 3 et il admet t comme racine double puisque la droite est tangente en $M(t)$. On peut donc le factoriser et l'équation précédente s'écrit :

$$(u-t)^2(2u+t) = 0\,.$$

La droite D_t recoupe donc $\mathcal{C}$ en $N\left(-\dfrac{t}{2}\right)$. Elle est normale à $\mathcal{C}$ en ce point si, et seulement si, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{t}{2} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux, donc si $t^2 = 2$.

Les droites qui sont à la fois normales et tangentes à $\mathcal{C}$ admettent donc pour équations :

$$y = \sqrt{2}\,(x-2) \quad ; \quad y = -\sqrt{2}\,(x-2)\,.$$

Exercice 12.2 : Enveloppe d'une famille de droites (PT)

Soit $a > 0$, (H) l'hyperbole d'équation $xy = a^2$ dans un repère orthonormal du plan, A et B des points variables de (H) dont les abscisses vérifient $x_B = 2\,x_A$. Déterminer l'enveloppe des droites (AB).

Il faut choisir un paramètre pour exprimer une équation de la droite (AB).

On peut paramétrer (AB) par l'abscisse t de A, nécessairement non nulle. Les coordonnées de A et B sont alors $A\left(t, \dfrac{a^2}{t}\right)$ et $B\left(2t, \dfrac{a^2}{2t}\right)$ et la droite (AB) admet pour équation :

$$a^2x + 2t^2y - 3a^2t = 0 \qquad (D_t).$$

Le point caractéristique de (AB) vérifie aussi :

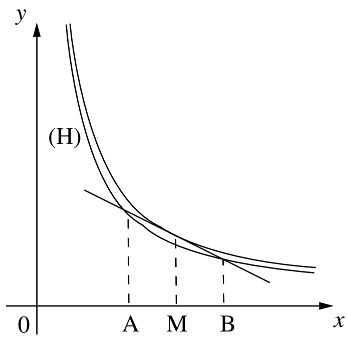
$$4ty - 3a^2 = 0 \qquad (D'_t).$$

Comme le déterminant $D = \begin{vmatrix} a^2 & 2t^2 \\ 0 & 4t \end{vmatrix} = 4a^2t$ ne s'annule jamais, l'enveloppe des droites (AB) est formée par l'ensemble des points qui vérifient le système :

$$\begin{cases} a^2x + 2t^2y = 3a^2t \\ 4ty = 3a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{3}{2}\,t \\ y = \dfrac{3a^2}{4t} \end{cases}$$

Remarquez que le point caractéristique de (AB) est le milieu de $[AB]$.

On obtient ainsi une représentation paramétrique de l'enveloppe cherchée.
On en déduit comme équation cartésienne $xy = \dfrac{9}{8}\,a^2$, ce qui est l'équation de l'hyperbole image de (H) par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\cdot$



Autre solution

Après avoir démontré que le déterminant D n'est jamais nul, vous pouvez remarquer que D_t peut aussi être considéré comme un polynôme de degré 2 par rapport à t

$$2yt^2 - 3a^2t + a^2x = 0$$

qui admet une racine double puisqu'il existe un zéro commun à D_t et à D_t'. On a donc :

$$0 = \Delta = 9a^4 - 8a^2xy \iff xy = \frac{9}{8}\,a^2,$$

ce qui donne directement une équation cartésienne de l'enveloppe. Mais il ne faut pas oublier de vérifier que $D \neq 0$.

Exercice 12.3 Longueur et développée (PT)

Déterminer la longueur et la développée de l'arche de cycloïde :

$$(C)\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

• **Longueur de l'arche de cycloïde**

De $x'(t) = 1 - \cos t$ et $y'(t) = \sin t$, on déduit $x'^2(t) + y'^2(t) = 4\sin^2\dfrac{t}{2}$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 2\sin\dfrac{t}{2}\cdot$ La longueur de (C) est donc :

$$L = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \Big[-4\cos\frac{t}{2}\Big]_0^{2\pi} = 8\,.$$

• **Développée**

Pour $t \in]0,2\pi[$, la tangente en $M(t)$ est dirigée par

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = x'(t)\,\overrightarrow{i} + y'(t)\,\overrightarrow{j} = 2\sin\frac{t}{2}\Big[\sin\frac{t}{2}\,\overrightarrow{i} + \cos\frac{t}{2}\,\overrightarrow{j}\,\Big]\,.$$

On en déduit le vecteur unitaire tangent

$$\overrightarrow{T} = \sin\frac{t}{2}\,\overrightarrow{i} + \cos\frac{t}{2}\,\overrightarrow{j}$$

d'angle polaire $\alpha = (\,\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{T}\,) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{t}{2}$, puis le vecteur unitaire normal

$$\overrightarrow{N} = \cos\Big(\pi - \frac{t}{2}\Big)\,\overrightarrow{i} + \sin\Big(\pi - \frac{t}{2}\Big)\,\overrightarrow{j} = -\cos\frac{t}{2}\,\overrightarrow{i} + \sin\frac{t}{2}\,\overrightarrow{j}\ .$$

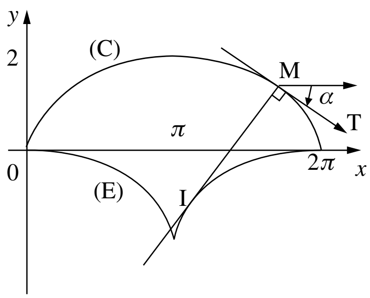
Le rayon de courbure au point régulier M est donc :

$$R = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} = -4\sin\frac{t}{2}\cdot$$

Le centre de courbure en M est donc le point I défini par $\overrightarrow{MI} = R\,\overrightarrow{N}$.
Il a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = t - \sin t + 4\sin\dfrac{t}{2}\,\cos\dfrac{t}{2} = t + \sin t \\[2ex] y = 1 - \cos t - 4\sin\dfrac{t}{2}\,\sin\dfrac{t}{2} = -1 + \cos t \end{cases}$$

La développée de (C) est l'ensemble (E) des points I.



On peut aussi obtenir la développée comme enveloppe des normales.

Exercice 12.4 : Plans tangents à une surface

Déterminer les plans tangents à l'ellipsoïde Σ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

qui coupent les axes en A, B, C, tels que $OA = OB = OC$.

Pour déterminer le plan tangent en M_0 à une surface, on détermine un vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Si la surface est donnée sous forme cartésienne $f(x,y,z)=0$, on a $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)$.

Si la surface est donnée sous forme paramétrique $\overrightarrow{OM}(u,v)$, on a $\overrightarrow{n} = \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}$.

Dans les deux cas, si $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}$, le point M_0 est un point singulier (pas de plan tangent) ; sinon le plan tangent est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MM_0}\cdot\overrightarrow{n}=0\,.$$

L'équation de l'ellipsoïde s'écrit $f(x,y,z)=0$ avec $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\,.$
Un point singulier de Σ vérifie :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{2x}{a^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{2y}{b^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \dfrac{2z}{c^2} = 0 \end{cases}$$

Seul le point $O(0,0,0)$ vérifie ce système, mais il n'appartient pas à la surface.
En tout $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de Σ, il existe donc un plan tangent, ensemble des points $M(X,Y,Z)$ tels que :

$$\overrightarrow{MM_0}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M_0)=0\,.$$

Il a donc pour équation :

$$\frac{2x_0}{a^2}(X-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(Y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(Z-z_0)=0\,.$$

Comme $M_0 \in \Sigma$, cette équation peut aussi s'écrire :

$$\frac{x_0}{a^2}X + \frac{y_0}{b^2}Y + \frac{z_0}{c^2}Z - 1 = 0\,.$$

Pour que ce plan coupe les trois axes, il faut que $x_0\, y_0\, z_0 \neq 0$.
Dans ce cas, la condition de l'énoncé s'écrit :

$$\frac{a^2}{|x_0|} = \frac{b^2}{|y_0|} = \frac{c^2}{|z_0|} \qquad \text{soit} \quad |x_0| = ka^2\ ,\ |y_0| = kb^2\ ,\ |z_0| = kc^2$$

et en reportant dans l'équation de Σ : $\quad k^2 = \dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\,.$

On obtient donc 8 points M_0 (un pour chaque trièdre défini par les axes) :

$$M_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(\pm a^2, \pm b^2, \pm c^2)\,.$$

et les plans tangents correspondants ont pour équations :

$$\pm X \pm Y \pm Z - \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 0$$

Exercice 12.5 : Intersection d'un cône et d'un plan

Déterminer l'angle aigu des deux génératrices intersection du cône d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ et du plan d'équation $2x + 3y - z = 0$.

Pour étudier l'intersection (ou l'inclusion) de deux objets en géométrie analytique, il est recommandé de représenter l'un sous forme cartésienne et l'autre sous forme paramétrique.

Remarquons d'abord que le plan passe par le sommet O du cône et donc que l'intersection est bien constituée par deux génératrices.
Il faut transformer l'une des équations sous forme paramétrique.

• Première solution

Choisissons de paramétrer le plan par x et y. Un point de l'intersection cherchée vérifie donc $z = 2x + 3y$ et

$$x^2 + y^2 - (2x+3y)^2 = 0 \iff 3x^2 + 8y^2 + 12xy = 0\,.$$

Comme $\quad 3x^2 + 8y^2 + 12xy = 3\,(x+2y)^2 - 4y^2$
$$= \left(\sqrt{3}\,x + 2\sqrt{3}\,y - 2y\right)\left(\sqrt{3}\,x + 2\sqrt{3}\,y + 2y\right),$$

les deux génératrices sont définies comme intersection de plans :

$$(D_1)\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ \sqrt{3}\,x + 2\,(\sqrt{3}-1)\,y = 0 \end{cases} \qquad (D_2)\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ \sqrt{3}\,x + 2\,(\sqrt{3}+1)\,y = 0 \end{cases}$$

On peut choisir des vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$, et en déduire que l'angle θ des deux génératrices est tel que :

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{V}_1 . \overrightarrow{V}_2|}{\|\overrightarrow{V}_1\| \, \|\overrightarrow{V}_2\|} = \frac{1}{13}.$$

L'angle *aigu* des deux génératrices est donc $\arccos\dfrac{1}{13} \approx 1{,}49$ rad.

• **Deuxième solution**

En choisissant de paramétrer le cône :

$$x = z\cos\varphi \; ; \; y = z\sin\varphi \; ; \; z = z,$$

l'intersection s'écrit :

$$1 = 2\cos\varphi + 3\sin\varphi = \sqrt{2^2+3^2}\cos\,(\varphi - \varphi_0)$$

d'où $\varphi_1 = \varphi_0 + \arccos\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ et $\varphi_2 = \varphi_0 - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

On peut alors choisir comme vecteurs directeurs

$$\overrightarrow{V_1} = \big(\cos\varphi_1, \sin\varphi_1, 1\big) \; ; \; \overrightarrow{V_2} = \big(\cos\varphi_2, \sin\varphi_2, 1\big)$$

et en déduire :

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{V}_1 . \overrightarrow{V}_2|}{\|\overrightarrow{V}_1\| \, \|\overrightarrow{V}_2\|} = \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + 1}{2}$$
$$= \frac{\cos\,(\varphi_1-\varphi_2)+1}{2} = \cos^2\Big(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\Big) = \frac{1}{13}.$$

Exercice 12.6 : Équation d'un cylindre

Déterminer une équation du cylindre de direction $\overrightarrow{u}\,(1,1,1)$ et circonscrit à la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=1$.

• **Première méthode : avec un nouveau repère**

Considérons un nouveau repère orthonormal $\big(O; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\big)$ avec $\overrightarrow{K} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\overrightarrow{u}$.

Dans ce repère, le cylindre a pour équation : $X^2+Y^2=1$.
On peut revenir au repère initial,
– soit en choisissant $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$;

– soit en écrivant : $x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$,

puis : $Z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \dfrac{1}{\sqrt{3}}y + \dfrac{1}{\sqrt{3}}z$.

L'équation du cylindre dans le repère initial est donc :

$1 = x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{1}{3}(x + y + z)^2$, soit après développement et simplication :

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{3}{2}\cdot$$

• **Deuxième méthode : avec des plans tangents**

En tout point $M_0(x_0, y_0, z_0)$, la sphère (S) admet un plan tangent d'équation :

$$2x_0x + 2y_0y + 2z_0z = 1\,.$$

Le cylindre circonscrit à (S) de direction $\overrightarrow{u}$ est la réunion des tangentes dirigée par $\overrightarrow{u}$. Il faut donc que $\overrightarrow{u}$ appartienne à la direction du plan tangent précédent soit :

$$x_0 + y_0 + z_0 = 0\,.$$

L'intersection de la sphère et du cylindre est donc le cercle :

$$(C) \qquad \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \\ x_0 + y_0 + z_0 = 0 \end{cases}$$

Le cylindre cherché est l'ensemble des points $M(X,Y,Z)$ tels que $\overrightarrow{M_0M} = k\overrightarrow{u}$ avec $k \in \mathbb{R}$ et $M_0 \in (C)$.

On a donc :

$$\begin{cases} (X - k)^2 + (Y - k)^2 + (Z - k)^2 = 1 \\ X + Y + Z = 3k \end{cases}$$

Développons la première égalité et substituons :

$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2k(X + Y + Z) + 3k^2 = 1 = X^2 + Y^2 + Z^2 - 3k^2$

ce qui donne :

$X^2 + Y^2 + Z^2 - \dfrac{1}{3}(X + Y + Z)^2 = 1$, soit :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - XY - YZ - ZX = \frac{3}{2}\cdot$$

• **Troisième méthode : avec des droites tangentes**

Le cylindre est la réunion des droites (D), de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, tangentes à (S).

Une telle droite (D) a pour équations $\begin{cases} x = z + a \\ y = z + b \end{cases} \quad z \in \mathbb{R}$

Son intersection avec la sphère est donnée par :

$$(z+a)^2 + (z+b)^2 + z^2 = 1 \Longleftrightarrow 3z^2 + 2(a+b)z + a^2 + b^2 - 1 = 0\,.$$

(D) est tangente à (S) si, et seulement si, l'équation en z a une racine double, soit :

$\Delta = 0 \Longleftrightarrow (a+b)^2 - 3(a^2+b^2) + 3 = 0 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 - ab = \dfrac{3}{2}$

En reportant $a = x - z$ et $b = y - z$ dans cette égalité, on obtient l'équation du cylindre :

$$(x-z)^2 + (y-z)^2 - (x-z)(y-z) = \frac{3}{2}$$
$$\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{3}{2}\,\cdot$$

L'intersection du cylindre et de la sphère s'appelle le contour apparent de la sphère pour la direction engendrée par $\overrightarrow{u}$.

L'intérêt de la deuxième méthode, c'est qu'elle peut s'appliquer à une surface quelconque.

Exercice 12.7 : Étude d'une quadrique

Soit (S) la surface définie par :

$$x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy - 2x + 4y = 0\,.$$

Montrer que (S) est une surface de révolution et préciser ses éléments.

Vous pouvez transformer l'équation de (S), ou diagonaliser la matrice de la forme quadratique, ou encore chercher les centres de symétrie en écrivant $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z) = 0$.

• **Première solution**

Les centres de symétrie de (S) vérifient : $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z) = 0$, soit

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - 4y - 2 \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 8y - 4x + 4 \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 10z \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \Delta \quad \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

En prenant comme nouvelle origine un point $\Omega(1,0,0)$ de Δ, l'équation de (S) devient :

$$(X - 2Y)^2 + 5Z^2 = 1\,.$$

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ les deux plans d'équations $X - 2Y = 0$ et $Z = 0$. Ils sont perpendiculaires et ont pour intersection la droite Δ. L'équation de (S) peut s'écrire :

$$(X - 2Y)^2 + 5Z^2 = 1 \iff d(M,\mathcal{P})^2 + d(M,\mathcal{Q})^2 = \frac{1}{5}\cdot$$

C'est donc l'équation d'un cylindre de révolution, d'axe Δ et de rayon $R = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot$

- **Deuxième solution**

L'équation de (S) se transforme :

$$(x - 2y)^2 + 5z^2 - 2\,(x - 2y) = 0$$

Cette expression nous suggère le changement de repère *orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{I} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j}\right) \\ \overrightarrow{J} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right) \\ \overrightarrow{K} = \overrightarrow{k} \end{cases} \quad \text{qui donne} \quad \begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(x - 2y\right) \\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(2x + y\right) \\ Z = z \end{cases}$$

Dans ce repère, l'équation de (S) devient :

$$X^2 + Z^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\,X = 0 \iff \left(X - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + Z^2 - \frac{1}{5} = 0\,,$$

ce qui est l'équation du cylindre de révolution de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et d'axe :

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ Z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- **Troisième solution**

La partie quadratique de l'équation de (S) a pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres λ de A sont les zéros du polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\,(\lambda-5)^2$$

L'espace propre E_0 a pour base $\overrightarrow{V_1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0\right)$.

L'espace propre E_5 est le plan d'équation $2x + y = 0$. Comme $\dim E_5 = 2$, A est diagonalisable.

En considérant une base orthonormale $\left(\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3}\right)$ de E_5 et en utilisant le nouveau repère $\left(O,\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3}\right)$, on rejoint la solution précédente.

Exercice 12.8 : Variations sur les normes usuelles du plan

Soit $k > 0$. Étudier les surfaces d'équations :

(S_1) : $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = k$

(S_2) : $\max\left\{|x-y|,|y-z|,|z-x|\right\} = k$

(S_3) : $|x-y| + |y-z| + |z-x| = 2k$

Le changement de repère pour étudier (S_1) fait partie de vos connaissances. Utilisez le même pour les autres surfaces.

• **Étude de (S_1)**

Il s'agit d'une quadrique dont l'équation peut aussi s'écrire :

$$f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - k = 0.$$

Si la quadrique a un centre, il vérifie :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \overrightarrow{0}$$

ce qui donne un système dont la solution est la droite $x = y = z$. Nous choisissons une nouvelle origine sur cette droite, c'est-à-dire que nous ne changerons pas d'origine !

La matrice symétrique réelle associée à f est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on sait qu'elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Son polynôme caractéristique est :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -\lambda & 2-\lambda & -1 \\ -\lambda & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-3)^2$$

L'espace propre E_3 est l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $x+y+z=0$.

Il admet pour base orthonormale les vecteurs $\overrightarrow{I} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{J} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

L'espace propre E_0 est la droite engendrée par le vecteur

$$\overrightarrow{K} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Après avoir diagonalisé A, pris une origine qui annule $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ et pour laquelle la valeur de f n'est pas modifiée, nous obtenons la forme réduite de (S_1) dans le repère $\left(O; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$:

$$3X^2 + 3Y^2 = k\,.$$

Il s'agit d'un cylindre de révolution d'axe dirigé par $\overrightarrow{K}$.

Après avoir choisi le repère précédent, vous pouvez aussi substituer dans l'équation de (S_1) le changement de coordonnées :

$$\begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z \\ z &= -2\frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z \end{cases}$$

C'est une étape dont on peut se passer pour (S_1), mais pas pour (S_2).

Remarquons aussi que le choix d'une nouvelle base orthonormale nous a donné une matrice de passage orthogonale, ce qui est fondamental puisque les longueurs ne sont pas modifiées.

• **Étude de (S_2)**

Avec le changement de repère, et de coordonnées, explicité pour (S_1), on obtient :

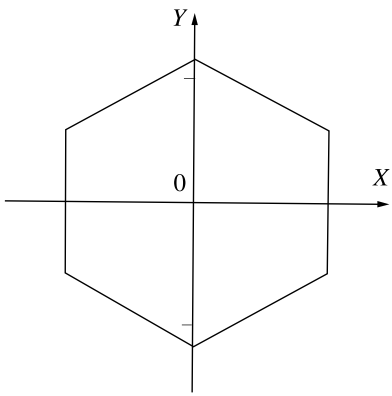
$$\begin{cases} x - y &= \frac{2}{\sqrt{2}}X \\ y - z &= -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{3}{\sqrt{6}}Y \\ z - x &= -\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{3}{\sqrt{6}}Y \end{cases}$$

et l'équation de (S_2) devient :

$$\max \left\{2|X|, |-X + \sqrt{3}Y|, |X + \sqrt{3}Y|\right\} = k\sqrt{2}\,.$$

Dans cette équation, Z a disparu. Il s'agit donc à nouveau d'un cylindre d'axe OZ.

La section dans le plan XOY est un hexagone régulier :



• **Étude de (S_3)**

Avec le même changement de repère que pour les autres surfaces, l'équation de (S_3) devient :

$$2|X| + |-X + \sqrt{3}Y| + |X + \sqrt{3}Y| = 2k\sqrt{2}\,.$$

Comme cette équation est inchangée quand on remplace X par $-X$, ou Y par $-Y$, il suffit de la préciser dans le premier quadrant où $X \geqslant 0$ et $Y \geqslant 0$.

– Si $X \leqslant \sqrt{3}Y$, l'équation devient : $X + \sqrt{3}Y = k\sqrt{2}$ et l'équation de (S_2) se réduit aussi à la même expression.

– Si $X \geqslant \sqrt{3}Y$, l'équation devient : $2X = k\sqrt{2}$ et l'équation de (S_2) se réduit aussi à la même expression.

La surface (S_3) est donc identique à la surface (S_2).

• **Démonstration directe de $(S_2) = (S_3)$**

Nous allons simplifier les premiers membres respectifs $g(x,y,z)$ et $h(x,y,z)$ de (S_2) et de (S_3).

Posons $a = x - y$ et $b = y - z$.

– Premier cas : $ab \geqslant 0$

$g(x,y,z) = \max\left\{|a|,|b|,|a+b|\right\} = |a+b|$

$h(x,y,z) = |a| + |b| + |a+b| = 2|a+b|$

– Second cas : $ab < 0$, en choisissant des notations telles que $|a| \geqslant |b|$

$g(x,y,z) = |a|$

$h(x,y,z) = |a| + |b| + |a| - |b| = 2|a|$

Donc :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad 2g(x,y,z) = h(x,y,z)\,.$$

Exercice 12.9 : Quadrique dépendant d'un paramètre

Discuter suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$ la nature de la surface d'équation :

$$x(a-y) + y(a-z) + z(a-x) = a\,.$$

Il s'agit d'une quadrique d'équation :

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx - a(x+y+z) + a = 0\,.$$

• **Première méthode**

L'équation de la quadrique peut encore s'écrire :

$$(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2) - 2a(x+y+z) + 2a = 0\,.$$

Il est alors pertinent de faire un changement de repère orthonormal, de façon que l'axe (OZ) soit dirigé par $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

On a alors $Z = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{3}}\cdot$ Avec $x^2+y^2+z^2 = X^2+Y^2+Z^2$, on obtient :

$$\begin{aligned}(Z\sqrt{3})^2 - (X^2+Y^2+Z^2) - 2aZ\sqrt{3} + 2a = 0 \\ \iff X^2+Y^2 = 2Z^2 - 2aZ\sqrt{3} + 2a \\ \iff X^2+Y^2 = 2\Big(Z - \frac{a\sqrt{3}}{2}\Big)^2 + \frac{a}{2}(4-3a)\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une surface de révolution d'axe OZ.

– si $a \in \left]0,\frac{4}{3}\right[$, c'est un hyperboloïde à une nappe ;

– si $a \in \{0,\frac{4}{3}\}$, c'est un cône, de sommet $S(0,0,\frac{a\sqrt{3}}{2})$ dans le repère $OXYZ$ et donc $(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2})$ dans le repère $Oxyz$.

– si $a < 0$ ou $a > \frac{4}{3}$, c'est un hyperboloïde à deux nappes.

• **Deuxième méthode**

Le système :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x,y,z) = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} y+z-a=0 \\ x+z-a=0 \\ y+x-a=0 \end{cases} \iff x=y=z=\frac{a}{2}$$

a une solution unique, ce qui montre que c'est une quadrique à centre $\Omega(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2})$. La matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ admet les valeurs propres -1 (double) et 2 (calculs faciles et faits dans l'exercice **12.11**), et une base orthonormale de vecteurs propres $\overrightarrow{I}$, $\overrightarrow{J}$, $\overrightarrow{K}$ (qu'il n'est pas nécessaire de déterminer).

Dans le repère $\left(\Omega;\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K}\right)$, l'équation de la quadrique prend la forme réduite :

$$-X^2 - Y^2 + 2Z^2 + k = 0.$$

La valeur de la constante k s'obtient en calculant $f(\Omega)$ dans l'ancien et dans le nouveau repère :

$f(\Omega) = -\dfrac{3}{4}a^2 + a = \dfrac{k}{2}$ (car la matrice associée à f est $\dfrac{1}{2}A$).

L'équation réduite de la quadrique est donc :

$$X^2 + Y^2 - 2Z^2 = 2a\big(1 - \frac{3}{4}a\big)$$

Si le second membre est > 0, soit $a \in \left]0, \frac{4}{3}\right[$, c'est un hyperboloïde à une nappe.
Si le second membre est nul, c'est un cône de sommet Ω.
Si le second membre est < 0, c'est un hyperboloïde à deux nappes.

Exercice 12.10 : Détermination d'un cône

Soit (S) la sphère de centre $A(0,0,a)$ et de rayon $a > 0$.
Déterminer une équation du cône de révolution (C) circonscrit à (S) et de sommet $B(0,2a,0)$.

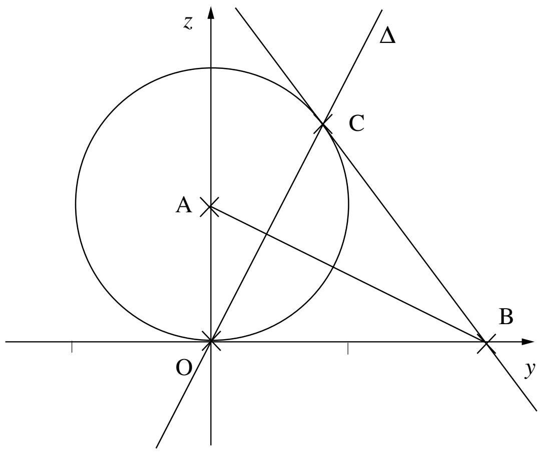
Vous pouvez faire un dessin en coupe dans le plan Oyz.

Pour les calculs, vous pouvez déterminer d'abord une équation du cercle de contact comme intersection de la sphère et d'un plan, puis engendrer le cône par des homothéties.

Vous pouvez aussi caractériser un point M du cône par une propriété géométrique portant sur la droite (BM).

• Première méthode

Comme les premières coordonnées de A et de B sont nulles, il est très suggestif de faire un dessin en coupe dans le plan Oyz.



Le cône a pour axe (AB). Il est engendré par la rotation de (Oy) autour de (AB).

Le cercle (C) de contact entre la sphère et le cône est perpendiculaire au plan Oyz et son intersection avec ce plan est la droite Δ.
Déterminons d'abord une équation de Δ dans le plan Oyz.
(BO) et (BC) sont les deux tangentes au cercle menées de B.
La droite (AB) est un axe de symétrie de la figure ; en particulier (OC) est orthogonale à (AB).
La droite Δ a donc $\overrightarrow{AB}(2a,-a)$ comme vecteur normal. Comme elle passe par l'origine, elle admet pour équation :

$$2y - z = 0\,,$$

qui est aussi une équation dans l'espace du plan de l'intersection du cône et de la sphère.
Le cercle de contact $\mathcal{C}$, intersection de ce plan et de la sphère (S), a donc pour équation :

$$\mathcal{C} \quad \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2az = 0 \end{cases}$$

Un point $M(x,y,z)$ appartient au cône cherché si, et seulement si, il existe $M_0 \in \mathcal{C}$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{BM} = k\,\overrightarrow{BM_0}$. On a donc :

$$\begin{cases} x = kx_0 \\ y - 2a = k(y_0 - 2a) \\ z = kz_0 \end{cases}$$

Une équation cartésienne du cône va s'obtenir en éliminant le paramètre k et les coordonnées (x_0, y_0, z_0) qui vérifient les équations cu cercle $\in \mathcal{C}$.

On a, d'une part :

$$y - 2a - \frac{1}{2}z = k(y_0 - 2a) - \frac{1}{2}kz_0 = k(y_0 - \frac{z_0}{2}) - 2ak = -2ak$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} x^2 + (y-2a)^2 + z^2 &= k^2\big[x_0^2 + (y_0 - 2a)^2 + z_0^2\big] \\ &= k^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 4ay_0 + 4a^2) \\ &= k^2(2az_0 - 4ay_0 + 4a^2) \\ &= 4a^2k^2 \end{aligned}$$

On en déduit l'équation du cône :

$$x^2 + (y-2a)^2 + z^2 = (y - 2a - \frac{1}{2}z)^2 \iff x^2 + \frac{3}{4}z^2 + (y-2a)z = 0\,.$$

• **Deuxième méthode**

Soit $M(x,y,z) \neq B$ un point fixé de l'espace. Il appartient au cône si, et seulement si, la droite (BM) est tangente à la sphère.
Un point $Q(X,Y,Z)$ appartient à la droite (BM) s'il vérifie les équations paramétriques :

$$\begin{cases} X = tx \\ Y - 2a = t(y - 2a) \\ Z = tz \end{cases}$$

L'intersection de la droite (BM) et de la sphère correspond à l'équation en t :

$$(tx)^2 + \left[2a + t(y - 2a)\right]^2 + (tz - a)^2 = a^2$$

soit en regroupant par rapport à t :

$$\left[x^2 + (y - 2a)^2 + z^2\right]t^2 + 2a(2y - 4a - z)t + 4a^2 = 0\,.$$

La droite (BM) est tangente à la sphère si, et seulement si, cette équation a une racine double, soit $\Delta = 0$, c'est-à-dire :

$$(2y - 4a - z)^2 - 4\left[x^2 + (y - 2a)^2 + z^2\right] = 0$$

ce qui est bien la même équation que celle qui a été obtenue avec l'autre méthode.

Exercice 12.11 : Intersection d'une quadrique avec un plan et projection

Soit (S) la surface d'équation : $xy + yz + zx = -2$.
1. Préciser la nature de (S).
2. Déterminer l'intersection (C) de (S) et du plan $x + y + z = 0$.
3. Que peut-on dire de la projection orthogonale de (C) sur le plan Oxy ?

Pour la première question, pas d'hésitation : réduire la quadrique.

1. On peut écrire l'équation de la quadrique sous la forme :

$$2xy + 2yz + 2zx + 4 = 0 = f(x,y,z)\,,$$

ce qui conduit à la matrice symétrique associée :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J - I_3 \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice J est de rang 1. Son noyau est le plan d'équation : $x + y + z = 0$.

D'autre part, $J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ montre que 3 est valeur propre de J.

Par suite, la matrice A admet : $0 - 1 = -1$ comme valeur propre double ;
$3 - 1 = 2$ comme valeur propre simple.

L'espace propre E_{-1} de A est le plan $x + y + z = 0$. Il admet pour base orthonormale les vecteurs $\overrightarrow{I} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{J} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

L'espace propre E_2 est la droite engendrée par le vecteur $\overrightarrow{K} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow x = y = z = 0$, la quadrique admet le point O pour centre.

Dans le repère $\left(O; \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$, l'équation de (S) s'écrit : $-X^2 - Y^2 + 2Z^2 = -4$ soit :

$$\frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{4} - \frac{Z^2}{2} = 1$$

C'est un hyperboloïde à une nappe.

2. Dans le nouveau repère, le plan $x + y + z = 0$ a pour équation $Z = 0$. L'intersection de la surface et du plan a donc pour équations :

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 4 \\ Z = 0 \end{cases}$$

C'est un cercle de centre O et de rayon 2.

3. • Première méthode

La matrice de changement de base utilisée dans la première question pour réduire l'équation de la quadrique est :

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Les points de la projection orthogonale de (C) sur le plan $z = 0$ vérifient donc (en tenant compte de $Z = 0$) :

$$\begin{cases} x = \dfrac{X}{\sqrt{2}} + \dfrac{Y}{\sqrt{6}} \\ y = -\dfrac{X}{\sqrt{2}} + \dfrac{Y}{\sqrt{6}} \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad X^2 + Y^2 = 4$$

On a donc : $x - y = X\sqrt{2}$ et $x + y = Y\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ qui donne l'équation :

$$(x-y)^2 + 3(x+y)^2 = 8\,.$$

Dans le repère $Ox'y'$ obtenu par rotation de $-\dfrac{\pi}{4}$ on a $x' = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$ et $y' = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$ et par conséquent l'équation réduite :

$$x'^2 + 3y'^2 = 4 \iff \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{\frac{4}{3}} = 1\,.$$

C'est une ellipse de demi grand axe $a = 2$, de demi petit axe $b = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, d'excentricité $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot$

- **Deuxième méthode**

L'intersection (C) de (S) et du plan $x + y + z = 0$ a pour équations :

$$\begin{cases} xy + yz + zx = -2 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} xy - (x+y)^2 = -2 \\ z = -(x+y) \end{cases}$$

Sa projection orthogonale sur le plan Oxy a donc pour équation $x^2 + xy + y^2 = 2$.

La matrice symétrique associée à cette conique est $B = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Ses valeurs propres sont $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{3}{2}\cdot$ Une équation réduite est donc :

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{3}{2}y'^2 = 2 \iff \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{\dfrac{4}{3}} = 1\,.$$

C'est une ellipse dont les paramètres ont été explicités dans la première méthode.

Index

F

G

H

I

M

N

O

P

R

S

T

V