PARTEA 2

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019 · ID

LOGICĂ PROPOZIŢIONALĂ

LIMBAJUL LOGICII PROPOZIŢIONALE

Limbajul logicii propoziţionale este bazat pe propoziţii sau enunţuri declarative.

Propoziţii declarative

- Suma numerelor 2 şi 4 este 6.
- Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- Maria a reacţionat violent la acuzaţiile lui Ion.
- Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- Andrei este deştept.
- Marţienilor le place pizza.

Propoziţii care nu sunt declarative

- Poţi să îmi dai, te rog, pâinea?
- Pleacă!

LITERELE GRECEŞTI

Αα **ALPHA** [a] *ἄλφα*	Ββ **BETA** [b] *βῆτα*	Γγ **GAMMA** [g] *γάμμα*	Δδ **DELTA** [d] *δέλτα*	Εε **EPSILON** [e] *ἒ ψιλόν*	Ζζ **ZETA** [dz] *ζῆτα*
Ηη **ETA** [ɛː] *ἦτα*	Θθ **THETA** [$\mathrm{t^h}$] *θῆτα*	Ιι **IOTA** [i] *ἰῶτα*	Κκ **KAPPA** [k] *κάππα*	Λλ **LAMBDA** [l] *λάμβδα*	Μμ **MU** [m] *μῦ*
Νν **NU** [n] *νῦ*	Ξξ **XI** [ks] *ξεῖ*	Οο **OMICRON** [o] *ὂ μικρόν*	Ππ **PI** [p] *πεῖ*	Ρρ **RHO** [r] *ῥῶ*	Σσς **SIGMA** [s] *σῖγμα*
Ττ **TAU** [t] *ταῦ*	Υυ **UPSILON** [ʉ] *ὖ ψιλόν*	Φφ **PHI** [$\mathrm{p^h}$] *φεῖ*	Χχ **CHI** [$\mathrm{k^h}$] *χεῖ*	Ψψ **PSI** [ps] *ψεῖ*	Ωω **OMEGA** [ɔː] *ὦ μέγα*

Considerăm anumite propoziţii ca fiind atomice şi le notăm cu $p, q, r, \ldots$ sau cu $p_1, p_2, p_3, \ldots$.

Exemplu.

- p = Numărul 2 este par.
- q = Mâine plouă.
- r = Sunt obosit.

Pornind de la propoziţiile atomice, putem crea propoziţii complexe (notate φ, ψ, χ, $\cdots$) folosind conectorii logici:

- $\neg$ (negaţia),
- $\rightarrow$ (implicaţia),
- $\vee$ (disjuncţia),
- $\wedge$ (conjuncţia),
- $\leftrightarrow$ (echivalenţa).

Exemplu.

p = Numărul 2 este par.

q = Mâine plouă.

r = Sunt obosit.

$\neg p$	=	Numărul 2 nu este par.
$p \vee q$	=	Numărul 2 este par sau mâine plouă.
$p \wedge q$	=	Numărul 2 este par şi mâine plouă.
$p \rightarrow q$	=	Dacă numărul 2 este par, atunci mâine plouă.
$p \leftrightarrow q$	=	Numărul 2 este par dacă şi numai dacă mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obţine propoziţii şi mai complexe. Pentru a elimina ambiguităţile, folosim parantezele (,).

Exemplu.

$\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$

Exemplu.
Fie propoziţia:

φ = *Azi este 27 octombrie, deci avem curs de logică.*

Considerăm propoziţiile atomice

- p = *Azi este 27 octombrie.*
- q = *Avem curs de logică.*

Atunci $\varphi = p \to q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$ = *Azi este 27 octombrie şi nu avem curs de logică.*

Exemplu.

Fie propoziţia:

φ = *Dacă trenul întârzie şi nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propoziţiile atomice

- p = *Trenul întârzie.*
- q = *Sunt taxiuri la gară.*
- r = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate şi r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q? q este adevărată.

Definiţie 1.1

Limbajul logicii propoziţionale (LP) este format din:

- o mulţime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile
- conectori logici: $\neg$ (se citeşte non), $\rightarrow$ (se citeşte implică)
- paranteze: (,).

Mulţimea Sim a simbolurilor lui LP este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}.$$

Notăm variabilele cu $v, u, w, x, y, v_0, v_1, v_2, \ldots$

Definiţia 1.2

Mulţimea *Expr* a expresiilor lui *LP* este mulţimea tuturor şirurilor finite de simboluri ale lui *LP*.

- Expresia vidă se notează λ.
- Lungimea unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ.
- Sim^n este mulţimea şirurilor de simboluri ale lui *LP* de lungime n.
- Prin convenţie, $Sim^0 = \{\lambda\}$.
- Atunci $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n$.

Exemplu.

$((((v_7, \quad v_1 \neg \rightarrow (v_2), \quad \neg v_1 v_2, \quad ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1)), \quad (\neg(v_1 \rightarrow v_2))$

Definiţia 1.3

Formulele lui *LP* sunt expresiile lui *LP* definite astfel:

(F0) Orice variabilă propoziţională este formulă.

(F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.

(F2) Daca φ şi ψ sunt formule, atunci $(\varphi \to \psi)$ este formulă.

Numai expresiile obţinute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.

Mulţimea formulelor se notează *Form*. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.

Observaţii.

- Definiţia formulelor este un exemplu de definiţie inductivă.
- Orice formulă se obţine aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- $Form \subseteq Expr$. Formulele sunt expresiile ”bine formate”.
- Pentru orice formulă φ, notăm cu $Var(\varphi)$ mulţimea variabilelor care apar în φ.

Exemplu.

- $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule .
- $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$ sunt formule.

Citire unică (*Unique readability*)

Dacă φ este o formulă, atunci exact una din următoarele alternative are loc:

- $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Propoziţia 1.4

Mulţimea *Form* a formulelor lui *LP* este numărabilă.

Conectorii derivaţi $\vee$ (se citeşte sau), $\wedge$ (se citeşte şi), $\leftrightarrow$ (se citeşte dacă şi numai dacă) sunt introduşi prin abrevierile:

$$\begin{aligned}
(\varphi \vee \psi) &\quad := \quad ((\neg\varphi) \rightarrow \psi) \\
(\varphi \wedge \psi) &\quad := \quad (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi))) \\
(\varphi \leftrightarrow \psi) &\quad := \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).
\end{aligned}$$

Convenţii.

- În practică, renunţăm la parantezele exterioare; le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi$, dar scriem $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$.
- Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$ are precedenţa mai mare decât ceilalţi conectori;
  - $\wedge, \vee$ au precedenţă mai mare decât $\rightarrow, \leftrightarrow$.
- Prin urmare, formula $(((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.

Propoziţia 1.5 (Principiul inducţiei pe formule)

Fie P o proprietate. Presupunem că:

(0) Orice variabilă are proprietatea P.

(1) Pentru orice formulă φ, dacă φ are proprietatea P, atunci şi $(\neg\varphi)$ are proprietatea P.

(2) Pentru orice formule φ, ψ, dacă φ şi ψ au proprietatea P, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ are proprietatea P.

Atunci orice formulă φ are proprietatea P.

Demonstraţie. Pentru orice formulă φ, notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$Q(n)$ e adevărată ddacă orice formulă φ cu $c(\varphi) \leq n$ are proprietatea P.

Demonstrăm prin inducţie că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Pasul iniţial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ, $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ şi, conform ipotezei (0), v are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Ipoteza de inducţie. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducţie. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$, conform (0).
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducţie, ψ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. Aplicînd ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducţie, ψ şi χ au proprietatea $\boldsymbol{P}$. Rezultă din (2) că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Aşadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă φ există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. $\square$

Propoziţia 1.6 (Principiul inducţiei pe formule - variantă alternativă)
Fie Γ o mulţime de formule care are următoarele proprietăţi:

- $V \subseteq \Gamma$;
- Γ este închisă la $\neg$, adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- Γ este închisă la $\rightarrow$, adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = Form$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Definiţia 1.7

Fie φ o formulă a lui *LP*. O subformulă a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ.

Notaţie.

Mulţimea subformulelor lui φ se notează $SubForm(\varphi)$.

Exemplu.

Fie $\varphi = ((v_1 \to v_2) \to (\neg v_1))$. Atunci

$$SubForm(\varphi) = \{v_1, v_2, v_1 \to v_2, \neg v_1, \varphi\}.$$

Definiţie alternativă.

Mulţimea $SubForm(\varphi)$ poate fi definită şi recursiv:

$$\begin{aligned} SubForm(v) &= \{v\} \\ SubForm(\neg\varphi) &= SubForm(\varphi) \cup \{\neg\varphi\} \\ SubForm(\varphi \to \psi) &= SubForm(\varphi) \cup SubForm(\psi) \cup \{\varphi \to \psi\}. \end{aligned}$$

SEMANTICA LOGICII PROPOZIŢIONALE

Valori de adevăr.

Folosim următoarele notaţii pentru cele două valori de adevăr posibile:

- 1 pentru adevărat şi
- 0 pentru fals.

Prin urmare, mulţimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$.

Tabele de adevăr.

Definim următoarele operaţii pe $\{0,1\}$ folosind tabelele de adevăr.

$$\neg : \{0,1\} \to \{0,1\} \qquad \to: \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$$

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că

$$\neg p = 1 \iff p = 0.$$

$$p \to q = 1 \iff p \le q.$$

Operaţiile

- $\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$,
- $\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ şi
- $\leftrightarrow : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$

se definesc astfel:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observaţie.
Pentru orice $p, q \in \{0,1\}$, $p \vee q = \neg p \to q$, $p \wedge q = \neg(p \to \neg q)$ şi $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$.

Definiţia 1.8

O evaluare (sau interpretare) este o funcţie $e : V \to \{0, 1\}$.

Teorema 1.9

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ există o unică funcţie

$$e^+ : Form \to \{0, 1\}$$

care verifică următoarele proprietăţi:

- $e^+(v) = e(v)$ pentru orice orice $v \in V$.
- $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in Form$,
- $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in Form$.

Propoziţia 1.10

Dacă $e : V \to \{0, 1\}$ este o evaluare, atunci pentru orice formule φ, ψ,

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \mathbin{\mathbf{\vee}} e^+(\psi),$$
$$e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \mathbin{\mathbf{\wedge}} e^+(\psi),$$
$$e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \mathbin{\boldsymbol{\leftrightarrow}} e^+(\psi).$$

Propoziţia 1.11

Pentru orice formulă φ şi orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$,

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi). \qquad (*)$$

Demonstraţie. Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \boldsymbol{P} \text{ ddacă pentru orice evaluări } e_1, e_2 : V \to \{0, 1\},$$
$$\varphi \text{ satisface } (*).$$

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ folosind Principiul inducţiei pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$.

Demonstraţie. (continuare)

- $\varphi = (\neg\psi)$ şi ψ satisface $\boldsymbol{P}$. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\varphi) = Var(\psi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi)$. Aşadar, aplicând $\boldsymbol{P}$ pentru ψ, obţinem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$. Rezultă că

  $$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

  deci φ satisface $\boldsymbol{P}$.

Demonstraţie. (continuare)

- $\varphi = (\psi \to \chi)$ şi ψ, χ satisfac $\boldsymbol{P}$. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\psi) \subseteq Var(\varphi)$ şi $Var(\chi) \subseteq Var(\varphi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi) \cup Var(\chi)$. Aşadar, aplicând $\boldsymbol{P}$ pentru ψ şi χ, obţinem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ şi $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \rightarrow e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \rightarrow e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface $\boldsymbol{P}$. $\square$

Definiţia 1.12

Fie φ o formulă.

- O evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$.
  Notaţie: $e \vDash \varphi$.
- φ este satisfiabilă dacă admite un model.
- Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem şi că φ este nesatisfiabilă sau contradictorie.
- φ este tautologie dacă orice evaluare este model al lui φ.
  Notaţie: $\vDash \varphi$.

Mulţimea tuturor modelelor lui φ se notează $Mod(\varphi)$.

Propoziţia 1.13

(i) φ este tautologie ddacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

(ii) φ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Fie φ o formulă arbitrară şi $Var(\varphi) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$, $e^+(\varphi)$ depinde doar de $e(x_1), \ldots, e(x_k)$, conform Propoziţiei 1.12.

Aşadar, $e^+(\varphi)$ depinde doar de restricţia lui e la $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$:

$$e' : \{x_1, \ldots, x_k\} \to \{0, 1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Sunt 2^k astfel de funcţii posibile $e'_1, e'_2 \ldots, e'_{2^k}$. Asociem fiecăreia o linie într-un tabel:

x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$ subformule ale lui φ $\ldots$	φ
$e'_1(x_1)$	$e'_1(x_2)$	$\ldots$	$e'_1(x_k)$	$\ldots$	${e'_1}^+(\varphi)$
$e'_2(x_1)$	$e'_2(x_2)$	$\ldots$	$e'_2(x_k)$	$\ldots$	${e'_2}^+(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$e'_{2^k}(x_1)$	$e'_{2^k}(x_2)$	$\ldots$	$e'_{2^k}(x_k)$	$\ldots$	${e'_{2^k}}^+(\varphi)$

Pentru orice i, ${e'_i}^+(\varphi)$ se defineşte similar cu Teorema 1.10

φ este tautologie ddacă ${e'_i}^+(\varphi) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, 2^k\}$.

Exemplu.

Fie $\varphi = v_1 \to (v_2 \to (v_1 \wedge v_2))$. Vrem să demonstrăm că $\models \varphi$.

$$Var(\varphi) = \{v_1, v_2\}$$

v_1	v_2	$v_1 \wedge v_2$	$v_2 \to (v_1 \wedge v_2)$	$v_1 \to (v_2 \to (v_1 \wedge v_2))$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Definiţia 1.14

Fie φ, ψ două formule. Spunem că

- φ este consecinţă semantică a lui ψ dacă $Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi)$.
  Notaţie: $\psi \vDash \varphi$.
- φ şi ψ sunt (logic) echivalente dacă $Mod(\psi) = Mod(\varphi)$.
  Notaţie: $\varphi \sim \psi$.

Observaţie.

Relaţia $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea *Form* a formulelor.

Propoziţia 1.15

Fie φ, ψ formule. Atunci

(i) $\psi \vDash \varphi$ ddacă $\vDash \psi \rightarrow \varphi$.

(ii) $\psi \sim \varphi$ ddacă ($\psi \vDash \varphi$ şi $\varphi \vDash \psi$) ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 1.16

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

terţul exclus	$\vDash \varphi \vee \neg\varphi$	(1)
modus ponens	$\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \vDash \psi$	(2)
afirmarea concluziei	$\psi \vDash \varphi \to \psi$	(3)
contradicţia	$\vDash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$	(4)
dubla negaţie	$\varphi \sim \neg\neg\varphi$	(5)
contrapoziţia	$\varphi \to \psi \sim \neg\psi \to \neg\varphi$	(6)
negarea premizei	$\neg\varphi \vDash \varphi \to \psi$	(7)
modus tollens	$\neg\psi \wedge (\varphi \to \psi) \vDash \neg\varphi$	(8)
tranzitivitatea implicaţiei	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \vDash \varphi \to \chi$	(9)

legile lui de Morgan	$\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))$	(10)
	$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi))$	(11)
exportarea şi importarea	$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim \varphi \wedge \psi \to \chi$	(12)
idempotenţa	$\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$	(13)
slăbirea	$\vDash \varphi \wedge \psi \to \varphi \qquad \vDash \varphi \to \varphi \vee \psi$	(14)
comutativitatea	$\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi \qquad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$	(15)
asociativitatea	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$	(16)
	$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi$	(17)
absorbţia	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$	(18)
	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$	(19)
distributivitatea	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$	(20)
	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$	(21)

$$\varphi \to \psi \wedge \chi \sim (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \tag{22}$$

$$\varphi \to \psi \vee \chi \sim (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi) \tag{23}$$

$$\varphi \wedge \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi) \tag{24}$$

$$\varphi \vee \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \tag{25}$$

$$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim \psi \to (\varphi \to \chi) \sim (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi) \tag{26}$$

$$\neg\varphi \sim \varphi \to \neg\varphi \sim (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi) \tag{27}$$

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \tag{28}$$

$$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \to \psi) \to \psi \tag{29}$$

$$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \tag{30}$$

$$\vDash (\varphi \to \psi) \vee (\neg\varphi \to \psi) \tag{31}$$

$$\vDash (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \neg\psi) \tag{32}$$

$$\vDash \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi)) \tag{33}$$

$$\vDash (\varphi \to \psi) \to (((\varphi \to \chi) \to \psi) \to \psi) \tag{34}$$

Demonstraţie. Exerciţiu.

Demonstrăm (1) $\vDash \varphi \vee \neg\varphi$.

Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Observăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$. Putem demonstra că $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ în două moduri.

I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

II. Raţionând direct.

Avem două cazuri:

- $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ şi, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.
- $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 1$ şi, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$. $\square$

$\top$ şi $\bot$

De multe ori este convenabil să avem o tautologie canonică şi o formulă nesatisfiabilă canonică.

Observaţie.

$v_0 \to v_0$ este tautologie şi $\neg(v_0 \to v_0)$ este nesatisfiabilă.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Notaţii.

- Notăm $v_0 \to v_0$ cu $\top$ şi o numim adevărul.
- Notăm $\neg(v_0 \to v_0)$ cu $\bot$ şi o numim falsul.

Observaţie.

- φ este tautologie ddacă $\varphi \sim \top$.
- φ este nesatisfiabilă ddacă $\varphi \sim \bot$.

Notaţii

- Scriem $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ în loc de $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
- Similar, scriem $\varphi \vee \psi \vee \chi$ în loc de $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
- Fie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ formule. Pentru $n \geq 3$, notăm

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n := ((\ldots(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$$
$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n := ((\ldots(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \ldots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.$$

- $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ se mai scrie şi $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ sau $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$.
- $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$ se mai scrie şi $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$ sau $\displaystyle\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$.

Propoziţia 1.17

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$,

- $e^+(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $e^+(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru un $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Propoziţia 1.18

$$\begin{aligned} \neg(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) &\sim \neg\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\varphi_n \\ \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) &\sim \neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n \end{aligned}$$

Demonstraţie. Exerciţiu.

Fie Γ o mulţime de formule.

Definiţia 1.19

- O evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \vDash \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$).
  Notaţie: $e \vDash \Gamma$.
- Γ este satisfiabilă dacă are un model.
- Γ este finit satisfiabilă dacă orice submulţime finită a sa este satisfiabilă.
- Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem şi că Γ este nesatisfiabilă sau contradictorie.

Mulţimea tuturor modelelor lui Γ se notează $Mod(\Gamma)$.
Notăm $Mod(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$.

$$Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi).$$

Fie Γ, Δ mulţimi de formule.

Definiţia 1.20

O formulă φ este consecinţă semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$.
Notaţie: $\Gamma \vDash \varphi$.

Notăm cu $Cn(\Gamma)$ mulţimea consecinţelor semantice ale lui Γ. Aşadar,

$$Cn(\Gamma) = \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}.$$

Definiţia 1.21

- Δ este consecinţă semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta)$.
  Notaţie: $\Gamma \vDash \Delta$.
- Γ şi Δ sunt (logic) echivalente dacă $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$.
  Notaţie: $\Gamma \sim \Delta$.

Teorema 1.22 (Teorema de compacitate)
Pentru orice mulţime Γ de formule,

$$\Gamma \text{ este satisfiabilă } \text{ ddacă } \Gamma \text{ este finit satisfiabilă.}$$

SINTAXA LOGICII PROPOZIŢIONALE

Axiomele logice.

Mulţimea *Axm* a axiomelor lui *LP* constă în toate formulele de forma:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

unde φ, ψ şi χ sunt formule.

Regula de deducţie.

Pentru orice formule φ, ψ,

din φ şi $\varphi \to \psi$ se inferă ψ (modus ponens sau (MP)):

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$$

Fie Γ o mulţime de formule.
Definiţia Γ-teoremelor este un nou exemplu de definiţie inductivă.

Definiţia 1.23

Γ-teoremele sunt formulele lui *LP* definite astfel:

(T0) Orice axiomă este Γ-teoremă.

(T1) Orice formulă din Γ este Γ-teoremă.

(T2) Dacă φ şi $\varphi \to \psi$ sunt Γ-teoreme, atunci ψ este Γ-teoremă.

Numai formulele obţinute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ-teoreme.

Dacă φ este Γ-teoremă, atunci spunem şi că φ este dedusă din ipotezele Γ.

Notaţii.

$$\begin{array}{lcl} Thm(\Gamma) & := & \text{mulţimea } \Gamma\text{-teoremelor} \\ Thm & := & Thm(\emptyset) \\ \Gamma \vdash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ este } \Gamma\text{-teoremă} \\ \vdash \varphi & \Leftrightarrow & \emptyset \vdash \varphi \\ \Gamma \vdash \Delta & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash \varphi \text{ pentru orice } \varphi \in \Delta. \end{array}$$

Definiţia 1.24

O formulă φ se numeşte teoremă a lui *LP* dacă $\vdash \varphi$.

Reformulând condiţiile (T0), (T1), (T2) folosind notaţia $\vdash$, obţinem:

Propoziţia 1.25

(i) dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;

(ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;

(iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ şi $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.

Definiţia Γ-teoremelor dă naştere la metoda de demonstraţie prin inducţie după Γ-teoreme.

Inducţie după Γ-teoreme

Fie *P* o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ-teoremă satisface *P* astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă are proprietatea *P*;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea *P*;

(iii) demonstrăm că dacă φ şi $\varphi \to \psi$ au proprietatea *P*, atunci ψ are proprietatea *P*.

Propoziţia 1.26
Fie Γ, Δ mulţimi de formule.

(i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ,
$$\Gamma \vdash \varphi \text{ implică } \Delta \vdash \varphi.$$

(ii) $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,
$$\vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iii) Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,
$$\Delta \vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iv) $Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,
$$Thm(\Gamma) \vdash \varphi \ \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi.$$

Demonstraţie. Exerciţiu.

Definiţia 1.27

O Γ-demonstraţie (demonstraţie din ipotezele Γ) este o secvenţă de formule $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiţii este satisfăcută:

(i) θ_i este axiomă;

(ii) $\theta_i \in \Gamma$;

(iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \to \theta_i$.

O $\emptyset$-demonstraţie se va numi simplu demonstraţie.

Definiţia 1.28

Fie φ o formulă. O Γ-demonstraţie a lui φ sau demonstraţie a lui φ din ipotezele Γ este o Γ-demonstraţie $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numeşte lungimea Γ-demonstraţiei.

Propoziţia 1.29

Fie Γ o mulţime de formule şi φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ-demonstraţie a lui φ.

Propoziţia 1.30

Pentru orice formulă φ, $\vdash \varphi \to \varphi$.

Demonstraţie.

(1) $\vdash (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$
(A2) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$, $\chi := \varphi$) şi Propoziţia 1.25.(i)

(2) $\vdash \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$
(A1) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$) şi Propoziţia 1.25.(i)

(3) $\vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$
(1), (2) şi Propoziţia 1.25.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)

(4) $\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi)$
(A1) (cu φ, $\psi := \varphi$) şi Propoziţia 1.25.(i)

(5) $\vdash \varphi \to \varphi$
(MP): (3), (4) $\square$

Teorema deducţiei este unul din cele mai utile instrumente pentru a arăta că o formulă e teoremă.

Teorema deducţiei 1.31

Fie $\Gamma \subseteq Form$ şi $\varphi, \psi \in Form$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Demonstraţie. Dacă $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, atunci:

(1) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$ $(\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\})$
(2) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$ $(\varphi \in \Gamma \cup \{\varphi\})$
(3) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (MP): (1), (2)

Presupunem că $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ şi demonstrăm că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Demonstraţie. (cont.)

Fie $\psi_1, \ldots, \psi_n = \psi$ o demonstraţie pentru ψ din ipotezele $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Demonstrăm că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_i$ prin inducţie după $1 \leq i \leq n$.

Dacă $i = 1$, atunci ψ_1 este axiomă sau $\psi_1 \in \Gamma \cup \{\varphi\}$. Dacă $\psi_1 = \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi \to \varphi$ deoarece $\vdash \varphi \to \varphi$. Dacă $\psi_1 \in \Gamma$ sau ψ_1 este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \psi_1$ şi avem:

(1) $\Gamma \vdash \psi_1$
(2) $\Gamma \vdash \psi_1 \to (\varphi \to \psi_1)$ (A1)
(3) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_1$ (MP): (1), (2)

Demonstraţie. (cont.)

Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_k$ oricare $k < i$. Dacă ψ_i este axiomă sau $\psi_i \in \Gamma \cup \{\varphi\}$ atunci demonstrăm ca mai sus. Altfel, există $j, k < i$ astfel incat $\psi_j = \psi_k \to \psi_i$. Rezultă:

(1) $\Gamma \vdash \varphi \to (\psi_k \to \psi_i)$ (ip. de inducţie)
(2) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_k$ (ip. de inductie)
(3) $\Gamma \vdash (\varphi \to (\psi_k \to \psi_i)) \to ((\varphi \to \psi_k) \to (\varphi \to \psi_i))$ (A3)
(4) $\Gamma \vdash \varphi \to \psi_i$ (1), (2), $2 \times$ MP.

Pentru $i = n$ obţinem $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. $\square$

Propoziţia 1.32
Pentru orice formule φ, ψ, χ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)). \tag{35}$$

Demonstraţie. Folosind teorema deducţiei observăm că

$$\begin{gathered}
\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)) \\
\Updownarrow \\
\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi) \\
\Updownarrow \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi \\
\Updownarrow \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.
\end{gathered}$$

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema iniţială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

(1)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$	Propoziţia 1.25.(ii)
(2)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziţia 1.25.(ii)
(3)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$	Propoziţia 1.25.(ii)
(5)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$	(MP): (3), (4).

$\square$

Propoziţia 1.33

Pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ, χ,

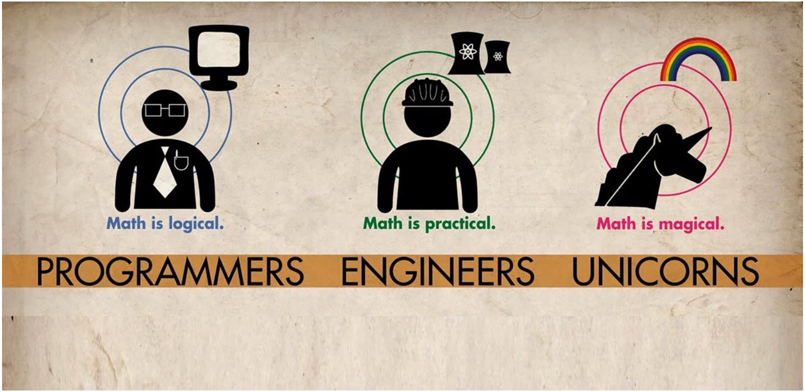
$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ şi } \Gamma \vdash \psi \to \chi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \to \chi. \tag{36}$$

Demonstraţie.

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$	P. 1.32 şi P. 1.25.(ii)
(3)	$\Gamma \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (1), (2)
(4)	$\Gamma \vdash \psi \to \chi$	ipoteză
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (3), (4).

□

Pe data viitoare!



Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.