Lecţie polinoame ID

În cele ce urmează, $R(+,\cdot)$ este un inel comutativ iar $R[X]$ este inelul de polinoame cu coeficienţi în inelul R. Dacă $f(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in R[X]$ şi $g(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \in R[X]$, atunci polinoamele f şi g sunt egale dacă şi numai dacă $n = m$ şi $a_j = b_j$ pentru orice $j = \overline{0, n}$. Cu notaţiile de mai sus, $f + g$ este polinomul

$$\sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) X^k,$$

unde $a_k = 0$ dacă $k > n$ şi $b_k = 0$ dacă $k > m$. Polinomul $f \cdot g$ este

$$f \cdot g(X) = \sum_{j=0}^{m+n} c_j X^j \in R[X],$$

unde $c_i = \sum_{j+k=i} a_j b_k$, pentru orice $i = \overline{0, m+n}$. Gradul polinomului f este $grad(f) = n$ dacă $a_n \neq 0$. Prin convenţie, gradul polinomului 0 se consideră a fi $-\infty$. Dacă R este un corp comutativ, $grad(fg) = grad(f) + grad(g)$, pentru orice polinoame $f, g \in R[X]$. Este o deosebire conceptuală importantă între un polinom f şi funcţia polinoamială asociată polinomului f. Aceasta este o funcţie care se notează tot cu $f : R \to R$, definită prin formula $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$, pentru orice $x \in R$. Un element $x \in R$ se numeşte rădăcină a polinomului f dacă $f(x) = 0$.

Teoremă: Fie $f \in K[X]$ un polinom de grad $n \in \mathbb{N}$, unde K este un corp comutativ. Numărul de rădăcini ale polinomului f este cel mult n.

Consecinţă (Wilson): Pentru orice număr prim p, avem că p divide $(p-1)! + 1$. Teorema de mai sus rezultă rapid din egalitatea polinoamelor

$$X^{p-1} - \overline{1} = \prod_{j=1}^{p-1} (X - \overline{j}) \in \mathbb{Z}_p[X].$$

Formulele lui Viète reprezintă unul dintre cele mai importante rezultate din această secţiune.

Formulele lui Viète: Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului de grad n, $f(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in K[X]$ (unde K este un corp comutativ), atunci

$$\sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n} x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n},$$

pentru orice $k = \overline{1, n}$.

Teorema fundamentală a algebrei spune că orice polinom cu coeficienţi în $\mathbb{C}$, de grad n, are exact n rădăcini complexe (se ţine cont şi de multiplicităţi).

Iată problemele propuse spre gândire:

1) Fie $f(X) = X^4 + X^3 + X^2 - 11X + 1 \in \mathbb{C}[X]$ şi $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$, rădăcinile acestui polinom. Calculaţi $\sum_{j=1}^{4} x_j^2$.

2) Folosind calculul anterior, determinaţi câte din rădăcinile x_j sunt reale. Indicaţie: aveţi nevoie şi de un argument din analiza matematică.

3) Care sunt rădăcinile din $\mathbb{Z}_{41}$ ale polinomului $X^3 - \overline{1} \in \mathbb{Z}_{41}[X]$?

4) Care sunt rădăcinile din $\mathbb{Z}_{73}$ ale polinomului $X^4 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_{73}[X]$?

5) Scrieţi polinomul $X^4 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_{43}[X]$ ca produs de două polinoame (din acelaşi inel), care să aibă grade nenule.