Geometrie - Curs 2

Victor Vuletescu

Universitatea București, Facultatea de Matematică și Informatică

24 Martie 2018

Aplicații liniare. Definiții, exemple

Definiție

Fie U, V spații vectoriale peste același corp K. O funcție $f : U \to V$ se numește *aplicație liniară* (sau *morfism de spații vectoriale*) dacă pentru orice doi vectori $u_1, u_2 \in U$ și orice doi scalari $\alpha, \beta \in K$ avem

$$f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2).$$

Aplicații liniare. Definiții, exemple

Definiție

Fie U, V spații vectoriale peste același corp K. O funcție $f : U \to V$ se numește *aplicație liniară* (sau *morfism de spații vectoriale*) dacă pentru orice doi vectori $u_1, u_2 \in U$ și orice doi scalari $\alpha, \beta \in K$ avem

$$f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2).$$

Exemple

Aplicații liniare. Definiții, exemple

Definiție

Fie U, V spații vectoriale peste același corp K. O funcție $f : U \to V$ se numește *aplicație liniară* (sau *morfism de spații vectoriale*) dacă pentru orice doi vectori $u_1, u_2 \in U$ și orice doi scalari $\alpha, \beta \in K$ avem

$$f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2).$$

Exemple

- Fie $U = V = \mathbb{R}^2$ și $f : U \to V$, $f(x_1, x_2) = 3(x_1, x_2)$.

Aplicații liniare. Definiții, exemple

Definiție

Fie U, V spații vectoriale peste același corp K. O funcție $f : U \to V$ se numește *aplicație liniară* (sau *morfism de spații vectoriale*) dacă pentru orice doi vectori $u_1, u_2 \in U$ și orice doi scalari $\alpha, \beta \in K$ avem

$$f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2).$$

Exemple

- Fie $U = V = \mathbb{R}^2$ și $f : U \to V$, $f(x_1, x_2) = 3(x_1, x_2)$.
- Putem extinde exemplul anterior astfel. Fie $A \in Mat_{22}(\mathbb{R})$ o matrice arbitrară,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Definim $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ prin

Aplicații liniare. Definiții, exemple

Definiție

Fie U, V spații vectoriale peste același corp K. O funcție $f : U \to V$ se numește *aplicație liniară* (sau *morfism de spații vectoriale*) dacă pentru orice doi vectori $u_1, u_2 \in U$ și orice doi scalari $\alpha, \beta \in K$ avem

$$f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2).$$

Exemple

- Fie $U = V = \mathbb{R}^2$ și $f : U \to V$, $f(x_1, x_2) = 3(x_1, x_2)$.
- Putem extinde exemplul anterior astfel. Fie $A \in Mat_{22}(\mathbb{R})$ o matrice arbitrară,

  $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

  Definim $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ prin

  $$f_A(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$$

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

$$Im(f) = \{v \in V | \exists u \in U, f(u) = v\}.$$

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

$$Im(f) = \{v \in V | \exists u \in U, f(u) = v\}.$$

- *Nucleul* lui f, $Ker(f)$, prin:

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

$$Im(f) = \{v \in V | \exists u \in U, f(u) = v\}.$$

- *Nucleul* lui f, $Ker(f)$, prin:

$$Ker(f) = \{u \in U | f(u) = 0\}.$$

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

$$Im(f) = \{v \in V | \exists u \in U, f(u) = v\}.$$

- *Nucleul* lui f, $Ker(f)$, prin:

$$Ker(f) = \{u \in U | f(u) = 0\}.$$

Teoremă

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

$$Im(f) = \{v \in V | \exists u \in U, f(u) = v\}.$$

- *Nucleul* lui f, $Ker(f)$, prin:

$$Ker(f) = \{u \in U | f(u) = 0\}.$$

Teoremă

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

- $Ker(f) \subset U$ și $Im(f) \subset V$ sunt subspații vectoriale;

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

$$Im(f) = \{v \in V | \exists u \in U, f(u) = v\}.$$

- *Nucleul* lui f, $Ker(f)$, prin:

$$Ker(f) = \{u \in U | f(u) = 0\}.$$

Teoremă

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

- $Ker(f) \subset U$ și $Im(f) \subset V$ sunt subspații vectoriale;
- f este surjectivă dacă și numai dacă $Im(f) = V$;

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

$$Im(f) = \{v \in V | \exists u \in U, f(u) = v\}.$$

- *Nucleul* lui f, $Ker(f)$, prin:

$$Ker(f) = \{u \in U | f(u) = 0\}.$$

Teoremă

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

- $Ker(f) \subset U$ și $Im(f) \subset V$ sunt subspații vectoriale;
- f este surjectivă dacă și numai dacă $Im(f) = V$;
- f este injectivă dacă și numai dacă $Ker(f) = \{0_U\}$.

Dimensiunea nucleului și imaginii unei aplicații liniare

Teoremă ("teorema dimensiunii pentru aplicații liniare")

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

Dimensiunea nucleului și imaginii unei aplicații liniare

Teoremă ("teorema dimensiunii pentru aplicații liniare")

Fie $f : U \rightarrow V$ o aplicație liniară. Atunci:

$$dim_K(Ker(f)) + dim_K(Im(f)) = dim_K(U).$$

Dimensiunea nucleului și imaginii unei aplicații liniare

Teoremă (”teorema dimensiunii pentru aplicații liniare”)

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

$$dim_K(Ker(f)) + dim_K(Im(f)) = dim_K(U).$$

Corolar

Fie U, V două spații vectoriale (peste același corp K). Dacă:

Dimensiunea nucleului și imaginii unei aplicații liniare

Teoremă ("teorema dimensiunii pentru aplicații liniare")

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

$$dim_K(Ker(f)) + dim_K(Im(f)) = dim_K(U).$$

Corolar

Fie U, V două spații vectoriale (peste același corp K). Dacă:

- $dim_K(U) < dim_K(V)$ atunci

Dimensiunea nucleului și imaginii unei aplicații liniare

Teoremă ("teorema dimensiunii pentru aplicații liniare")

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

$$dim_K(Ker(f)) + dim_K(Im(f)) = dim_K(U).$$

Corolar

Fie U, V două spații vectoriale (peste același corp K). Dacă:

- $dim_K(U) < dim_K(V)$ atunci nu există nici o aplicație surjectivă liniară $f : U \to V$;

Dimensiunea nucleului și imaginii unei aplicații liniare

Teoremă ("teorema dimensiunii pentru aplicații liniare")

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

$$dim_K(Ker(f)) + dim_K(Im(f)) = dim_K(U).$$

Corolar

Fie U, V două spații vectoriale (peste același corp K). Dacă:

- $dim_K(U) < dim_K(V)$ atunci nu există nici o aplicație surjectivă liniară $f : U \to V$;
- $dim_K(U) > dim_K(V)$ atunci

Dimensiunea nucleului și imaginii unei aplicații liniare

Teoremă ("teorema dimensiunii pentru aplicații liniare")

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

$$dim_K(Ker(f)) + dim_K(Im(f)) = dim_K(U).$$

Corolar

Fie U, V două spații vectoriale (peste același corp K). Dacă:

- $dim_K(U) < dim_K(V)$ atunci nu există nici o aplicație surjectivă liniară $f : U \to V$;
- $dim_K(U) > dim_K(V)$ atunci nu există nici o aplicație injectivă liniară $f : U \to V$;

Matricea unei aplicații liniare

Definiție

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o aplicație liniară și $B_U = \{e_1, \dots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \dots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Se numește *matricea asociată lui f în raport cu bazele date* matricea $A = (a_{ij})$ definită prin

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Matricea unei aplicații liniare

Definiție

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o aplicație liniară și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Se numește *matricea asociată lui f în raport cu bazele date* matricea $A = (a_{ij})$ definită prin

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Exemplu

Fie $U = V = \mathbb{R}^2$, $B_U = B_V = \{e_1 = (1,1), e_2 = (0,2)\}$ și $f : U \to V, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Avem:

Matricea unei aplicații liniare

Definiție

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o aplicație liniară și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Se numește *matricea asociată lui f în raport cu bazele date* matricea $A = (a_{ij})$ definită prin

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Exemplu

Fie $U = V = \mathbb{R}^2$, $B_U = B_V = \{e_1 = (1,1), e_2 = (0,2)\}$ și $f : U \to V, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Avem:

$f(e_1) = (1,3) =$

Matricea unei aplicații liniare

Definiție

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o aplicație liniară și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Se numește *matricea asociată lui f în raport cu bazele date* matricea $A = (a_{ij})$ definită prin

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Exemplu

Fie $U = V = \mathbb{R}^2$, $B_U = B_V = \{e_1 = (1, 1), e_2 = (0, 2)\}$ și $f : U \to V, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Avem:
$f(e_1) = (1, 3) = e_1 + e_2$,

Matricea unei aplicații liniare

Definiție

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o aplicație liniară și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Se numește *matricea asociată lui f în raport cu bazele date* matricea $A = (a_{ij})$ definită prin

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Exemplu

Fie $U = V = \mathbb{R}^2$, $B_U = B_V = \{e_1 = (1,1), e_2 = (0,2)\}$ și $f : U \to V, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Avem:
$f(e_1) = (1,3) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = (-2,6) =$

Matricea unei aplicații liniare

Definiție

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o aplicație liniară și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Se numește *matricea asociată lui f în raport cu bazele date* matricea $A = (a_{ij})$ definită prin

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Exemplu

Fie $U = V = \mathbb{R}^2$, $B_U = B_V = \{e_1 = (1,1), e_2 = (0,2)\}$ și $f : U \to V, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Avem:
$f(e_1) = (1,3) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = (-2,6) = -2e_1 + 4e_2$,

Matricea unei aplicații liniare

Definiție

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o aplicație liniară și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Se numește *matricea asociată lui f în raport cu bazele date* matricea $A = (a_{ij})$ definită prin

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Exemplu

Fie $U = V = \mathbb{R}^2$, $B_U = B_V = \{e_1 = (1, 1), e_2 = (0, 2)\}$ și $f : U \to V, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Avem: $f(e_1) = (1, 3) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = (-2, 6) = -2e_1 + 4e_2$, deci matricea lui f va fi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Caracterizarea în coordonate a unei aplicații liniare

Teoremă

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o funcție, și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Atunci f este aplicație liniară dacă și numai dacă există o matrice A astfel încât, pentru orice $u \in U$ avem

$$Y = AX$$

unde

Caracterizarea în coordonate a unei aplicații liniare

Teoremă

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o funcție, și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Atunci f este aplicație liniară dacă și numai dacă există o matrice A astfel încât, pentru orice $u \in U$ avem

$$Y = AX$$

unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ respectiv $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix}$

sunt cordonatele lui

Caracterizarea în coordonate a unei aplicații liniare

Teoremă

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o funcție, și $B_U = \{e_1, \dots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \dots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Atunci f este aplicație liniară dacă și numai dacă există o matrice A astfel încât, pentru orice $u \in U$ avem

$$Y = AX$$

unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ respectiv $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix}$

sunt cordonatele lui u : $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ respectiv $f(u)$: $f(u) = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j$.

Vectori și valori proprii

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Se numește: *valoare proprie* pt f, un scalar $\lambda \in K$ pentru care există un vector $v \in V$ **nenul** astfel încât

$$f(v) = \lambda v$$

Pentru o valoare proprie fixată λ, un vector v astfel încât $f(v) = \lambda v$ se numește *vector propriu* asociat valorii proprii λ.

Vectori și valori proprii

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Se numește: *valoare proprie* pt f, un scalar $\lambda \in K$ pentru care există un vector $v \in V$ **nenul** astfel încât

$$f(v) = \lambda v$$

Pentru o valoare proprie fixată λ, un vector v astfel încât $f(v) = \lambda v$ se numește *vector propriu* asociat valorii proprii λ.

Exemplu

Vectori și valori proprii

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Se numește: *valoare proprie* pt f, un scalar $\lambda \in K$ pentru care există un vector $v \in V$ **nenul** astfel încât

$$f(v) = \lambda v$$

Pentru o valoare proprie fixată λ, un vector v astfel încât $f(v) = \lambda v$ se numește *vector propriu* asociat valorii proprii λ.

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Atunci

Vectori și valori proprii

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Se numește: *valoare proprie* pt f, un scalar $\lambda \in K$ pentru care există un vector $v \in V$ **nenul** astfel încât

$$f(v) = \lambda v$$

Pentru o valoare proprie fixată λ, un vector v astfel încât $f(v) = \lambda v$ se numește *vector propriu* asociat valorii proprii λ.

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Atunci

- $\lambda = 2$ este valoare proprie, pentru că $f(1, 0) =$

Vectori și valori proprii

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Se numește: *valoare proprie* pt f, un scalar $\lambda \in K$ pentru care există un vector $v \in V$ **nenul** astfel încât

$$f(v) = \lambda v$$

Pentru o valoare proprie fixată λ, un vector v astfel încât $f(v) = \lambda v$ se numește *vector propriu* asociat valorii proprii λ.

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Atunci

- $\lambda = 2$ este valoare proprie, pentru că $f(1, 0) = (2, 0) =$

Vectori și valori proprii

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Se numește: *valoare proprie* pt f, un scalar $\lambda \in K$ pentru care există un vector $v \in V$ **nenul** astfel încât

$$f(v) = \lambda v$$

Pentru o valoare proprie fixată λ, un vector v astfel încât $f(v) = \lambda v$ se numește *vector propriu* asociat valorii proprii λ.

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Atunci

- $\lambda = 2$ este valoare proprie, pentru că $f(1, 0) = (2, 0) = 2(1, 0)$;

Vectori și valori proprii

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Se numește: *valoare proprie* pt f, un scalar $\lambda \in K$ pentru care există un vector $v \in V$ **nenul** astfel încât

$$f(v) = \lambda v$$

Pentru o valoare proprie fixată λ, un vector v astfel încât $f(v) = \lambda v$ se numește *vector propriu* asociat valorii proprii λ.

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Atunci

- $\lambda = 2$ este valoare proprie, pentru că $f(1, 0) = (2, 0) = 2(1, 0)$;
- $\lambda = 3$ este valoare proprie, pentru că $f(1, -1) =$

Vectori și valori proprii

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Se numește: *valoare proprie* pt f, un scalar $\lambda \in K$ pentru care există un vector $v \in V$ **nenul** astfel încât

$$f(v) = \lambda v$$

Pentru o valoare proprie fixată λ, un vector v astfel încât $f(v) = \lambda v$ se numește *vector propriu* asociat valorii proprii λ.

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Atunci

- $\lambda = 2$ este valoare proprie, pentru că $f(1, 0) = (2, 0) = 2(1, 0)$;
- $\lambda = 3$ este valoare proprie, pentru că $f(1, -1) = (3, -3) =$

Vectori și valori proprii

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Se numește: *valoare proprie* pt f, un scalar $\lambda \in K$ pentru care există un vector $v \in V$ **nenul** astfel încât

$$f(v) = \lambda v$$

Pentru o valoare proprie fixată λ, un vector v astfel încât $f(v) = \lambda v$ se numește *vector propriu* asociat valorii proprii λ.

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Atunci

- $\lambda = 2$ este valoare proprie, pentru că $f(1,0) = (2,0) = 2(1,0)$;
- $\lambda = 3$ este valoare proprie, pentru că $f(1,-1) = (3,-3) = 3(1,-1)$.

Subspații proprii

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Fie $\lambda \in K$ arbitrar; definim

$$V_\lambda = \{v \in V | f(v) = \lambda v\}.$$

Subspații proprii

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Fie $\lambda \in K$ arbitrar; definim

$$V_\lambda = \{v \in V | f(v) = \lambda v\}.$$

Propoziție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară și $\lambda \in K$ arbitrar. Atunci

Subspații proprii

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Fie $\lambda \in K$ arbitrar; definim

$$V_\lambda = \{v \in V | f(v) = \lambda v\}.$$

Propoziție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară și $\lambda \in K$ arbitrar. Atunci

- $V_\lambda \subset V$ este subspațiu vectorial;

Subspații proprii

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Fie $\lambda \in K$ arbitrar; definim

$$V_\lambda = \{v \in V | f(v) = \lambda v\}.$$

Propoziție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară și $\lambda \in K$ arbitrar. Atunci

- $V_\lambda \subset V$ este subspațiu vectorial;
- λ este valoare proprie dacă și numai dacă $dim_K(V_\lambda) > 0$.

Subspații proprii

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Fie $\lambda \in K$ arbitrar; definim

$$V_\lambda = \{v \in V | f(v) = \lambda v\}.$$

Propoziție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară și $\lambda \in K$ arbitrar. Atunci

- $V_\lambda \subset V$ este subspațiu vectorial;
- λ este valoare proprie dacă și numai dacă $dim_K(V_\lambda) > 0$.

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară și $\lambda \in K$ o valoare proprie a lui f. Se numește *multiplicitate geometrică* a lui λ numărul natural g_λ definit prin

Subspații proprii

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Fie $\lambda \in K$ arbitrar; definim

$$V_\lambda = \{v \in V | f(v) = \lambda v\}.$$

Propoziție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară și $\lambda \in K$ arbitrar. Atunci

- $V_\lambda \subset V$ este subspațiu vectorial;
- λ este valoare proprie dacă și numai dacă $dim_K(V_\lambda) > 0$.

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară și $\lambda \in K$ o valoare proprie a lui f. Se numește *multiplicitate geometrică* a lui λ numărul natural g_λ definit prin

$$g_\lambda = dim_K(V_\lambda)$$

Polinom caracteristic

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară și $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ o bază fixată a lui V. Fie $A=$ matricea lui f în baza B. Se numește *polinom caracteristic* al lui f, polinomul $P_A(X)$ definit prin

Polinom caracteristic

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară și $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ o bază fixată a lui V. Fie A= matricea lui f în baza B. Se numește *polinom caracteristic* al lui f, polinomul $P_A(X)$ definit prin

$$P_{f,A}(X) = det(A - X\mathbb{I}_n)$$

Polinom caracteristic

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară și $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ o bază fixată a lui V. Fie A= matricea lui f în baza B. Se numește *polinom caracteristic* al lui f, polinomul $P_A(X)$ definit prin

$$P_{f,A}(X) = det(A - X\mathbb{I}_n)$$

Exemplu

Polinom caracteristic

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară și $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ o bază fixată a lui V. Fie $A=$ matricea lui f în baza B. Se numește *polinom caracteristic* al lui f, polinomul $P_A(X)$ definit prin

$$P_{f,A}(X) = det(A - X\mathbb{I}_n)$$

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Considerăm în $\mathbb{R}^2$ baza

canonică. Atunci matricea lui f este

Polinom caracteristic

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară și $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ o bază fixată a lui V. Fie A= matricea lui f în baza B. Se numește *polinom caracteristic* al lui f, polinomul $P_A(X)$ definit prin

$$P_{f,A}(X) = det(A - X\mathbb{I}_n)$$

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Considerăm în $\mathbb{R}^2$ baza canonică. Atunci matricea lui f este $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Polinom caracteristic

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară și $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ o bază fixată a lui V. Fie A= matricea lui f în baza B. Se numește *polinom caracteristic* al lui f, polinomul $P_A(X)$ definit prin

$$P_{f,A}(X) = det(A - X\mathbb{I}_n)$$

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Considerăm în $\mathbb{R}^2$ baza canonică. Atunci matricea lui f este $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ deci polinomul caracteristic este $P_{f,A}(X) = det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

Polinom caracteristic

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară și $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ o bază fixată a lui V. Fie A= matricea lui f în baza B. Se numește *polinom caracteristic* al lui f, polinomul $P_A(X)$ definit prin

$$P_{f,A}(X) = det(A - X\mathbb{I}_n)$$

Exemplu

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Considerăm în $\mathbb{R}^2$ baza canonică. Atunci matricea lui f este $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ deci polinomul caracteristic este $P_{f,A}(X) = det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - X\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

Așadar $P_{f,A}(X) = \begin{vmatrix} 2-X & -1 \\ 0 & 3-X \end{vmatrix} = (2-X)(3-X)$

Polinom caracteristic

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

Polinom caracteristic

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

- a) polinomul caracteristic al lui f *nu depinde* de baza aleasă a lui V. Ca atare, vom nota P_f polinomul caracteristic al lui f.

Polinom caracteristic

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

- a) polinomul caracteristic al lui f *nu depinde* de baza aleasă a lui V. Ca atare, vom nota P_f polinomul caracteristic al lui f.
- b) Un scalar $\lambda \in K$ este valoare proprie dacă și numai dacă λ este rădăcină a polinomului caracteristic, $P_f(\lambda) = 0$.

Polinom caracteristic

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

- a) polinomul caracteristic al lui f *nu depinde* de baza aleasă a lui V. Ca atare, vom nota P_f polinomul caracteristic al lui f.
- b) Un scalar $\lambda \in K$ este valoare proprie dacă și numai dacă λ este rădăcină a polinomului caracteristic, $P_f(\lambda) = 0$.

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Fie λ o valoare proprie a lui f. Se numește *multiplicitate algebrică* a lui λ numărul natural

Polinom caracteristic

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

- a) polinomul caracteristic al lui f *nu depinde* de baza aleasă a lui V. Ca atare, vom nota P_f polinomul caracteristic al lui f.
- b) Un scalar $\lambda \in K$ este valoare proprie dacă și numai dacă λ este rădăcină a polinomului caracteristic, $P_f(\lambda) = 0$.

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Fie λ o valoare proprie a lui f. Se numește *multiplicitate algebrică* a lui λ numărul natural

$$m_\lambda = \max\{k \text{ astfel încât } (X - \lambda)^k | P_f(X)\}$$

Diagonalizare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Spunem că f este *diagonalizabilă* dacă există o bază $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V în raport cu care matricea A a lui f are formă diagonală,

Diagonalizare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Spunem că f este *diagonalizabilă* dacă există o bază $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ a lui V în raport cu care matricea A a lui f are formă diagonală,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diagonalizare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Spunem că f este *diagonalizabilă* dacă există o bază $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V în raport cu care matricea A a lui f are formă diagonală,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Observație

Cu notațiile de mai sus, f este diagonalizabilă în baza B dacă și numai dacă pentru orice $i = 1, \ldots, n$ avem $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

Diagonalizare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Spunem că f este *diagonalizabilă* dacă există o bază $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V în raport cu care matricea A a lui f are formă diagonală,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Observație

Cu notațiile de mai sus, f este diagonalizabilă în baza B dacă și numai dacă pentru orice $i = 1, \ldots, n$ avem $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

Cu alte cuvinte, *f este diagonalizabilă dacă și numai dacă există o bază a lui V formată doar din vectori proprii pentru f.*

Teorema de diagonalizare

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Atunci f este diagonalizabilă dacă și numai dacă au loc simultan condițiile:

Teorema de diagonalizare

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Atunci f este diagonalizabilă dacă și numai dacă au loc simultan condițiile:

- Polinomul caracteristic P_f al lui f are *toate rădăcinile* în corpul K, și

Teorema de diagonalizare

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Atunci f este diagonalizabilă dacă și numai dacă au loc simultan condițiile:

- Polinomul caracteristic P_f al lui f are *toate rădăcinile* în corpul K, și
- pentru orice valoare proprie λ avem $g_\lambda = m_\lambda$.

Teorema de diagonalizare

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Atunci f este diagonalizabilă dacă și numai dacă au loc simultan condițiile:

- Polinomul caracteristic P_f al lui f are *toate rădăcinile* în corpul K, și
- pentru orice valoare proprie λ avem $g_\lambda = m_\lambda$.

Observații

Teorema de diagonalizare

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Atunci f este diagonalizabilă dacă și numai dacă au loc simultan condițiile:

- Polinomul caracteristic P_f al lui f are *toate rădăcinile* în corpul K, și
- pentru orice valoare proprie λ avem $g_\lambda = m_\lambda$.

Observații

- Pentru orice valoare proprie λ a lui f avem

$$g_\lambda \leq m_\lambda;$$

Teorema de diagonalizare

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K, $f : V \to V$ o aplicație liniară. Atunci f este diagonalizabilă dacă și numai dacă au loc simultan condițiile:

- Polinomul caracteristic P_f al lui f are *toate rădăcinile* în corpul K, și
- pentru orice valoare proprie λ avem $g_\lambda = m_\lambda$.

Observații

- Pentru orice valoare proprie λ a lui f avem
$$g_\lambda \leq m_\lambda;$$
- Ca și consecință, avem că *dacă polinomul caracteristic p_F are toate rădăcinile în K și acestea sunt* **toate simple**, *atunci f este diagonalizabilă*.

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Am văzut că

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Am văzut că $P_f(X) = (2 - X)(3 - X)$;

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Am văzut că $P_f(X) = (2 - X)(3 - X)$; deci P_f are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$ și acestea sunt toate simple.

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Am văzut că $P_f(X) = (2 - X)(3 - X)$; deci P_f are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$ și acestea sunt toate simple. Deducem că f este diagonalizabilă.

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Am văzut că $P_f(X) = (2 - X)(3 - X)$; deci P_f are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$ și acestea sunt toate simple. Deducem că f este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Matricea A a lui f în baza canonică este

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Am văzut că $P_f(X) = (2 - X)(3 - X)$; deci P_f are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$ și acestea sunt toate simple. Deducem că f este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; deducem

  $P_f =$

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Am văzut că $P_f(X) = (2 - X)(3 - X)$; deci P_f are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$ și acestea sunt toate simple. Deducem că f este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; deducem

  $$P_f = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1.$$

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Am văzut că $P_f(X) = (2 - X)(3 - X)$; deci P_f are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$ și acestea sunt toate simple. Deducem că f este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; deducem $P_f = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1$. Cum $X^2 + 1$ nu are rădăcini reale, deducem că f nu este diagonalizabilă.

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Am văzut că $P_f(X) = (2 - X)(3 - X)$; deci P_f are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$ și acestea sunt toate simple. Deducem că f este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; deducem $P_f = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1$. Cum $X^2 + 1$ nu are rădăcini reale, deducem că f nu este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$. Matricea A a lui f în baza canonică este

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x_1,x_2)=(2x_1-x_2,3x_2)$. Am văzut că $P_f(X)=(2-X)(3-X)$; deci P_f are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$ și acestea sunt toate simple. Deducem că f este diagonalizabilă.
- Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x_1,x_2)=(-x_2,x_1)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; deducem $P_f=\begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix}=X^2+1$. Cum X^2+1 nu are rădăcini reale, deducem că f nu este diagonalizabilă.
- Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_2)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; deducem

  $P_f=$

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x_1,x_2)=(2x_1-x_2,3x_2)$. Am văzut că $P_f(X)=(2-X)(3-X)$; deci P_f are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$ și acestea sunt toate simple. Deducem că f este diagonalizabilă.
- Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x_1,x_2)=(-x_2,x_1)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; deducem $P_f=\begin{vmatrix}-X & -1\\ 1 & -X\end{vmatrix}=X^2+1$. Cum X^2+1 nu are rădăcini reale, deducem că f nu este diagonalizabilă.
- Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_2)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; deducem $P_f=\begin{vmatrix}1-X & 1\\ 0 & 1-X\end{vmatrix}=(X-1)^2$.

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Am văzut că $P_f(X) = (2 - X)(3 - X)$; deci P_f are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$ și acestea sunt toate simple. Deducem că f este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; deducem $P_f = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1$. Cum $X^2 + 1$ nu are rădăcini reale, deducem că f nu este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; deducem $P_f = \begin{vmatrix} 1 - X & 1 \\ 0 & 1 - X \end{vmatrix} = (X - 1)^2$. Acum $P_f(X)$ are toate rădăcinile reale: $\lambda = 1$ cu multiplicitate algebrică

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x_1,x_2)=(2x_1-x_2,3x_2)$. Am văzut că $P_f(X)=(2-X)(3-X)$; deci P_f are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$ și acestea sunt toate simple. Deducem că f este diagonalizabilă.
- Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x_1,x_2)=(-x_2,x_1)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; deducem $P_f=\begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix}=X^2+1$. Cum X^2+1 nu are rădăcini reale, deducem că f nu este diagonalizabilă.
- Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_2)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; deducem $P_f=\begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix}=(X-1)^2$. Acum $P_f(X)$ are toate rădăcinile reale: $\lambda=1$ cu multiplicitate algebrică $m_\lambda=2$.

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Am văzut că $P_f(X) = (2 - X)(3 - X)$; deci P_f are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$ și acestea sunt toate simple. Deducem că f este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; deducem $P_f = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1$. Cum $X^2 + 1$ nu are rădăcini reale, deducem că f nu este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; deducem $P_f = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 0 & 1-X \end{vmatrix} = (X - 1)^2$. Acum $P_f(X)$ are toate rădăcinile reale: $\lambda = 1$ cu multiplicitate algebrică $m_\lambda = 2$. Calculând însă V_λ găsim

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Am văzut că $P_f(X) = (2 - X)(3 - X)$; deci P_f are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$ și acestea sunt toate simple. Deducem că f este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; deducem $P_f = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1$. Cum $X^2 + 1$ nu are rădăcini reale, deducem că f nu este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; deducem $P_f = \begin{vmatrix} 1 - X & 1 \\ 0 & 1 - X \end{vmatrix} = (X - 1)^2$. Acum $P_f(X)$ are toate rădăcinile reale: $\lambda = 1$ cu multiplicitate algebrică $m_\lambda = 2$. Calculând însă V_λ găsim $g_\lambda = 1$

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Am văzut că $P_f(X) = (2 - X)(3 - X)$; deci P_f are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$ și acestea sunt toate simple. Deducem că f este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; deducem $P_f = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1$. Cum $X^2 + 1$ nu are rădăcini reale, deducem că f nu este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; deducem $P_f = \begin{vmatrix} 1 - X & 1 \\ 0 & 1 - X \end{vmatrix} = (X - 1)^2$. Acum $P_f(X)$ are toate rădăcinile reale: $\lambda = 1$ cu multiplicitate algebrică $m_\lambda = 2$. Calculând însă V_λ găsim $g_\lambda = 1 \neq m_\lambda$

Exemple de aplicare a teoremei de diagonalizare

- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Am văzut că $P_f(X) = (2 - X)(3 - X)$; deci P_f are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$ și acestea sunt toate simple. Deducem că f este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; deducem $P_f = \begin{vmatrix} -X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = X^2 + 1$. Cum $X^2 + 1$ nu are rădăcini reale, deducem că f nu este diagonalizabilă.
- Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$. Matricea A a lui f în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; deducem $P_f = \begin{vmatrix} 1 - X & 1 \\ 0 & 1 - X \end{vmatrix} = (X - 1)^2$. Acum $P_f(X)$ are toate rădăcinile reale: $\lambda = 1$ cu multiplicitate algebrică $m_\lambda = 2$. Calculând însă V_λ găsim $g_\lambda = 1 \neq m_\lambda$ deci f nu este diagonalizabilă.

Forme biliniare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. Se numește *formă biliniară* o funcție $g : V \times V \to K$ care este liniară în fiecare argument, i.e.

$$g(\alpha v_1 + \beta v_2, u) = \alpha g(v_1, u) + \beta g(v_2, u), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, u \in V;$$

Forme biliniare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. Se numește *formă biliniară* o funcție $g : V \times V \to K$ care este liniară în fiecare argument, i.e.

$$g(\alpha v_1 + \beta v_2, u) = \alpha g(v_1, u) + \beta g(v_2, u), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, u \in V;$$

$$g(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha g(u, v_1) + \beta g(u, v_2), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, u \in V.$$

Forme biliniare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. Se numește *formă biliniară* o funcție $g : V \times V \to K$ care este liniară în fiecare argument, i.e.

$$g(\alpha v_1 + \beta v_2, u) = \alpha g(v_1, u) + \beta g(v_2, u), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, u \in V;$$

$$g(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha g(u, v_1) + \beta g(u, v_2), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, u \in V.$$

Exemple

Forme biliniare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. Se numește *formă biliniară* o funcție $g : V \times V \to K$ care este liniară în fiecare argument, i.e.

$$g(\alpha v_1 + \beta v_2, u) = \alpha g(v_1, u) + \beta g(v_2, u), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, u \in V;$$

$$g(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha g(u, v_1) + \beta g(u, v_2), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, u \in V.$$

Exemple

- $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Forme biliniare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. Se numește *formă biliniară* o funcție $g : V \times V \to K$ care este liniară în fiecare argument, i.e.

$$g(\alpha v_1 + \beta v_2, u) = \alpha g(v_1, u) + \beta g(v_2, u), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, u \in V;$$

$$g(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha g(u, v_1) + \beta g(u, v_2), \forall \alpha, \beta \in K, \forall v_1, v_2, u \in V.$$

Exemple

- $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$g\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$
- $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$h\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = 2x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 5x_2 y_2.$$

Matricea asociată unei forme biliniare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K, $g : V \times V \to K$ o biliniară și $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază fixată a lui V. Se numește *matricea asociată lui g în baza B* matricea $A = A_{g,B} = (a_{ij})$ definită prin

Matricea asociată unei forme biliniare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K, $g : V \times V \to K$ o biliniară și $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază fixată a lui V. Se numește *matricea asociată lui g în baza B* matricea $A = A_{g,B} = (a_{ij})$ definită prin

$$a_{ij} = g(e_i, e_j), i, j = 1, \ldots, n.$$

Matricea asociată unei forme biliniare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K, $g : V \times V \to K$ o biliniară și $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază fixată a lui V. Se numește *matricea asociată lui g în baza B* matricea $A = A_{g,B} = (a_{ij})$ definită prin

$$a_{ij} = g(e_i, e_j), i, j = 1, \dots, n.$$

Exemple

Să fixăm în $\mathbb{R}^2$ baza canonică. Atunci:

Matricea asociată unei forme biliniare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K, $g : V \times V \to K$ o biliniară și $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază fixată a lui V. Se numește *matricea asociată lui g în baza B* matricea $A = A_{g,B} = (a_{ij})$ definită prin

$$a_{ij} = g(e_i, e_j), i, j = 1, \ldots, n.$$

Exemple

Să fixăm în $\mathbb{R}^2$ baza canonică. Atunci:

- Pentru $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ matricea asociată este $A =$

Matricea asociată unei forme biliniare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K, $g : V \times V \to K$ o biliniară și $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază fixată a lui V. Se numește *matricea asociată lui g în baza B* matricea $A = A_{g,B} = (a_{ij})$ definită prin

$$a_{ij} = g(e_i, e_j), i, j = 1, \dots, n.$$

Exemple

Să fixăm în $\mathbb{R}^2$ baza canonică. Atunci:

- Pentru $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ matricea asociată este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Matricea asociată unei forme biliniare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K, $g : V \times V \to K$ o biliniară și $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază fixată a lui V. Se numește *matricea asociată lui g în baza B* matricea $A = A_{g,B} = (a_{ij})$ definită prin

$$a_{ij} = g(e_i, e_j), i, j = 1, \dots, n.$$

Exemple

Să fixăm în $\mathbb{R}^2$ baza canonică. Atunci:

- Pentru $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$ matricea asociată este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- Pentru $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_2$

Matricea asociată unei forme biliniare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K, $g : V \times V \to K$ o biliniară și $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază fixată a lui V. Se numește *matricea asociată lui g în baza B* matricea $A = A_{g,B} = (a_{ij})$ definită prin

$$a_{ij} = g(e_i, e_j), i, j = 1, \dots, n.$$

Exemple

Să fixăm în $\mathbb{R}^2$ baza canonică. Atunci:

- Pentru $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ matricea asociată este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- Pentru $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = 2x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 5x_2 y_2$ matricea asociată este $A =$

Matricea asociată unei forme biliniare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K, $g : V \times V \to K$ o biliniară și $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază fixată a lui V. Se numește *matricea asociată lui g în baza B* matricea $A = A_{g,B} = (a_{ij})$ definită prin

$$a_{ij} = g(e_i, e_j), i, j = 1, \dots, n.$$

Exemple

Să fixăm în $\mathbb{R}^2$ baza canonică. Atunci:

- Pentru $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$ matricea asociată este $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- Pentru $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 5x_2 y_2$ matricea asociată este $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Biliniare simetrice

Definiție

O biliniară $g : V \times V \to K$ se numește *simetrică* dacă

$$g(u, v) = g(v, u), \forall u, v \in V.$$

Biliniare simetrice

Definiție

O biliniară $g : V \times V \to K$ se numește *simetrică* dacă

$$g(u, v) = g(v, u), \forall u, v \in V.$$

Definiție

Fie $g : V \times V \to K$ o biliniară simetrică. Se numește *forma pătratică asociată lui* g, funcția $q_g : V \to K$ dată prin

$$q_g(v) = g(v, v), \forall v \in V.$$

Biliniare simetrice

Definiție

O biliniară $g : V \times V \to K$ se numește *simetrică* dacă

$$g(u, v) = g(v, u), \forall u, v \in V.$$

Definiție

Fie $g : V \times V \to K$ o biliniară simetrică. Se numește *forma pătratică asociată lui* g, funcția $q_g : V \to K$ dată prin

$$q_g(v) = g(v, v), \forall v \in V.$$

Observație

O biliniară simetrică pe un spațiu vectorial K cu $char(K) \neq 2$ este complet determinată de forma pătratică asociată ei q_g deoarece avem identitatea:

$$g(u, v) = \frac{1}{2}\left(q_g(u + v) - q_g(u) - q_g(v)\right), \forall u, v \in V.$$

Exprimarea unei biliniare în coordonate

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $g : V \times V \to K$ o biliniară, $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ o bază fixată a lui V. Fie $A = (a_{ij})$ matricea lui g

în baza B. Atunci

Exprimarea unei biliniare în coordonate

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $g : V \times V \to K$ o biliniară, $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ o bază fixată a lui V. Fie $A = (a_{ij})$ matricea lui g în baza B. Atunci $g(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ unde

Exprimarea unei biliniare în coordonate

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $g : V \times V \to K$ o biliniară, $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ o bază fixată a lui V. Fie $A = (a_{ij})$ matricea lui g în baza B. Atunci $g(u, v) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ unde $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $v = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j e_j$.

Exprimarea unei biliniare în coordonate

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $g : V \times V \to K$ o biliniară, $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ o bază fixată a lui V. Fie $A = (a_{ij})$ matricea lui g în baza B. Atunci $g(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ unde $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$.

Corolar

O biliniară $g : V \times V \to K$ este simetrică dacă și numai dacă matricea ei A este simetrică,

Exprimarea unei biliniare în coordonate

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $g : V \times V \to K$ o biliniară, $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ o bază fixată a lui V. Fie $A = (a_{ij})$ matricea lui g în baza B. Atunci $g(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ unde $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$.

Corolar

O biliniară $g : V \times V \to K$ este simetrică dacă și numai dacă matricea ei A este simetrică, $A = A^t$; $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = 1, \ldots n$.

Exprimarea unei biliniare în coordonate

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $g : V \times V \to K$ o biliniară, $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$ o bază fixată a lui V. Fie $A = (a_{ij})$ matricea lui g în baza B. Atunci $g(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ unde $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$.

Corolar

O biliniară $g : V \times V \to K$ este simetrică dacă și numai dacă matricea ei A este simetrică, $A = A^t$; $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = 1, \dots n$. În particular, dacă g este o biliniară simetrică de matrice $A = (a_{ij})$ atunci expresia în coordonate a formei pătratice q_g asociată ei este:

Exprimarea unei biliniare în coordonate

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $g : V \times V \to K$ o biliniară, $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ o bază fixată a lui V. Fie $A = (a_{ij})$ matricea lui g în baza B. Atunci $g(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ unde $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$.

Corolar

O biliniară $g : V \times V \to K$ este simetrică dacă și numai dacă matricea ei A este simetrică, $A = A^t$; $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = 1, \ldots n$. În particular, dacă g este o biliniară simetrică de matrice $A = (a_{ij})$ atunci expresia în coordonate a formei pătratice q_g asociată ei este:

$$q_g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{ij} x_i x_j.$$

Baze canonice pentru biliniare simetrice

Definiție

Fie $g : V \times V \to K$ o bliniară simetrică. O bază $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ a lui V se numește *bază canonică* pentru g dacă matricea $A = (a_{ij})$ a lui g în această bază este matrice diagonală, i.e. $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$.

Baze canonice pentru biliniare simetrice

Definiție

Fie $g : V \times V \to K$ o bliniară simetrică. O bază $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V se numește *bază canonică* pentru g dacă matricea $A = (a_{ij})$ a lui g în această bază este matrice diagonală, i.e. $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$.

Remarcă

Fie $g : V \times V \to K$ o bliniară simetrică. O bază $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V este bază canonică pentru g dacă și numai dacă expresia formei pătratice q_g asociată lui g

Baze canonice pentru biliniare simetrice

Definiție

Fie $g : V \times V \to K$ o bliniară simetrică. O bază $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ a lui V se numește *bază canonică* pentru g dacă matricea $A = (a_{ij})$ a lui g în această bază este matrice diagonală, i.e. $a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j$.

Remarcă

Fie $g : V \times V \to K$ o bliniară simetrică. O bază $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ a lui V este bază canonică pentru g dacă și numai dacă expresia formei pătratice q_g asociată lui g conține numai "pătrate veritabile", i.e.

$$q_g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$$

Găsirea unei baze canonice pentru biliniare simetrice

"Algoritmul lui Gauss"

Fie $g : V \times V \to K$ o biliniară simetrică și q_g forma pătratică asociată ei. Fie $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază fixată a lui V. Presupunem că q_g are în baza B expresia:

$$q_g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2 a_{ij} x_i x_j.$$

Anulăm, prin inducție după $i = 1, \ldots, n-1$ termenii de forma a_{ij} cu $j > i$ după cum urmează.

- Dacă $a_{ii} \neq 0$ atunci putem scrie

$$q_g(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{l=1}^{i-1} a_{ll} x_i^2 + a_{ii} \left(x_i^2 + \sum_{j \leq n} 2 \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_i x_j \right) + \sum_{i+1 \leq s,t \leq n} a_{st} x_s x_t$$

Găsirea unei baze canonice pentru biliniare simetrice

"Algoritmul lui Gauss"

$$q_g(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{l=1}^{i-1} a_{ll} x_i^2 + a_{ii} \left(x_i^2 + \sum_{j \le n} 2 \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_i x_j \right) + \sum_{i+1 \le s < t \le n} 2 a_{st} x_s x_t =$$

$$= \sum_{l=1}^{i-1} a_{ll} x_i^2 + a_{ii} \left(x_i + \sum_{j \le n} 2 \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_i x_j \right)^2 + \sum_{i+1 \le s, t \le n} \left(a_{st} - \frac{a_{is} a_{it}}{a_{ii}^2} \right) x_s x_t .$$

Găsirea unei baze canonice pentru biliniare simetrice

"Algoritmul lui Gauss"

$$q_g(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{l=1}^{i-1} a_{ll}x_i^2 + a_{ii}\left(x_i^2 + \sum_{j\leq n} 2\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_ix_j\right) + \sum_{i+1\leq s<t\leq n} 2a_{st}x_sx_t =$$

$$= \sum_{l=1}^{i-1} a_{ll}x_i^2 + a_{ii}\left(x_i + \sum_{j\leq n} 2\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_ix_j\right)^2 + \sum_{i+1\leq s,t\leq n}\left(a_{st} - \frac{a_{is}a_{it}}{a_{ii}^2}\right)x_sx_t.$$

Găsirea unei baze canonice pentru biliniare simetrice

"Algoritmul lui Gauss"

$$q_g(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{l=1}^{i-1} a_{ll} x_i^2 + a_{ii} \left(x_i^2 + \sum_{j \leq n} 2 \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_i x_j \right) + \sum_{i+1 \leq s < t \leq n} 2 a_{st} x_s x_t =$$

$$= \sum_{l=1}^{i-1} a_{ll} x_i^2 + a_{ii} \left(x_i + \sum_{j \leq n} 2 \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_i x_j \right)^2 + \sum_{i+1 \leq s,t \leq n} \left(a_{st} - \frac{a_{is} a_{it}}{a_{ii}^2} \right) x_s x_t .$$

Făcând schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} y_k = x_, \forall k \neq i, \\ y_i = x_i + \sum_{j \leq n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j, \end{cases}$$

expresia lui q_g devine:

Găsirea unei baze canonice pentru biliniare simetrice

"Algoritmul lui Gauss"

$$q_g(y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \sum_{l=1}^{i-1} a_{ll} y_l^2 + a_{ii} y_i^2 + \sum_{i+1 \leq s,t \leq n} \left(a_{st} - \frac{a_{is} a_{it}}{a_{ii}^2} \right) y_s y_t .$$

Găsirea unei baze canonice pentru biliniare simetrice

"Algoritmul lui Gauss"

$$q_g(y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \sum_{l=1}^{i-1} a_{ll} y_l^2 + a_{ii} y_i^2 + \sum_{i+1 \leq s,t \leq n} \left(a_{st} - \frac{a_{is} a_{it}}{a_{ii}^2} \right) y_s y_t .$$

Așadar, nu mai avem termeni nediagonali de forma $a_{ij}, i < j$; iterativ, anulăm toți termenii nediagonali.

Găsirea unei baze canonice pentru biliniare simetrice

Remarcă

Dacă nu există termeni a_{ii} nenuli. i.e. $a_{ii} = 0, \forall i$, atunci considerăm un termen de forma $2a_{ij}x_ix_j$ cu $a_{ij} \neq 0$; trebuie să existe un astfel de termen, altfel forma pătratică ar fi identic nulă. Facem schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} x_k = y_k, \forall k \neq i, j \\ x_i = y_i + y_j \\ x_j = y_i - y_j \end{cases}$$

și deci va apărea termenul

$$2a_{ij}(y_i + y_j)(y_i - y_j) = 2a_{ij}(y_i^2 - y_j^2)$$

deci vom avea la dispoziție două "pătrate veritabile" nenule! Ca atare, vom putea reveni la pasul anterior.

Forme canonice pentru forme pătratice

Observație

Putem reformula rezultatul algoritmului lui Gauss și astfel: *pentru orice formă pătratică q pe un spațiu vectorial de dimensiune n există o bază a lui V în raport cu care q are expresia*

$$q(x_1, \dots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

O astfel de bază se numește *bază canonică* pentru forma pătratică q iar o expresie ca mai sus pentru q se numește *formă canonică* a lui q.

Forme canonice pentru forme pătratice

Observație

Putem reformula rezultatul algoritmului lui Gauss și astfel: *pentru orice formă pătratică q pe un spațiu vectorial de dimensiune n există o bază a lui V în raport cu care q are expresia*

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

O astfel de bază se numește *bază canonică* pentru forma pătratică q iar o expresie ca mai sus pentru q se numește *formă canonică* a lui q.

Remarcă

Evident, pentru o aceeași formă pătratică q pot exista mai multe forme canonice. Apare deci întrebarea:

Forme canonice pentru forme pătratice

Observație

Putem reformula rezultatul algoritmului lui Gauss și astfel: *pentru orice formă pătratică q pe un spațiu vectorial de dimensiune n există o bază a lui V în raport cu care q are expresia*

$$q(x_1,\dots,x_n)=\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\cdots+\lambda_nx_n^2.$$

O astfel de bază se numește *bază canonică* pentru forma pătratică q iar o expresie ca mai sus pentru q se numește *formă canonică* a lui q.

Remarcă

Evident, pentru o aceeași formă pătratică q pot exista mai multe forme canonice. Apare deci întrebarea:

Putem alege o formă canonică "distinsă"?

Forme normale pentru forme pătratice

Teoremă: existența formelor normale

- Pentru orice formă pătratică definită peste un spațiu vectorial V peste corpul complex ($K = \mathbb{C}$), există o bază a lui V (numită *bază normală*) în raport cu care q are expresia

$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2. \ (r \leq n);$$

Forme normale pentru forme pătratice

Teoremă: existența formelor normale

- Pentru orice formă pătratică definită peste un spațiu vectorial V peste corpul complex ($K = \mathbb{C}$), există o bază a lui V (numită *bază normală*) în raport cu care q are expresia

$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2. \ (r \leq n);$$

- Pentru orice formă pătratică definită peste un spațiu vectorial V peste corpul real ($K = \mathbb{R}$), există o bază a lui V (numită *bază normală*) în raport cu care q are expresia

$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2. \ (r \leq n);$$

Forme normale pentru forme pătratice

Teoremă: existența formelor normale

- Pentru orice formă pătratică definită peste un spațiu vectorial V peste corpul complex ($K = \mathbb{C}$), există o bază a lui V (numită *bază normală*) în raport cu care q are expresia

$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2. \ (r \leq n);$$

- Pentru orice formă pătratică definită peste un spațiu vectorial V peste corpul real ($K = \mathbb{R}$), există o bază a lui V (numită *bază normală*) în raport cu care q are expresia

$$q(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2. \ (r \leq n);$$

Teorema de inerție Sylvester

Forma normală a unei forme pătratice peste $\mathbb{R}$ este unică.

Definiții, proprietăți elementare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. Se numește *spațiu afin* de direcție V o mulțime $\mathcal{A}$ înzestrată cu o funcție $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$,

$$\varphi(A, B) = \overrightarrow{AB}$$

ce satisface:

Definiții, proprietăți elementare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. Se numește *spațiu afin* de direcție V o mulțime $\mathcal{A}$ înzestrată cu o funcție $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$,

$$\varphi(A, B) = \overrightarrow{AB}$$

ce satisface:

- ("Regula lui Chasles", sau "regula triunghiului")

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \forall A, B, C \in \mathcal{A}$$

Definiții, proprietăți elementare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. Se numește *spațiu afin* de direcție V o mulțime $\mathcal{A}$ înzestrată cu o funcție $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$,

$$\varphi(A, B) = \overrightarrow{AB}$$

ce satisface:

- ("Regula lui Chasles", sau "regula triunghiului")

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \forall A, B, C \in \mathcal{A}$$

- Există un punct $O \in \mathcal{A}$ astfel încât funcția $\varphi_O : \mathcal{A} \to V$

$$\varphi_O(A) = \overrightarrow{OA}$$

Definiții, proprietăți elementare

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. Se numește *spațiu afin* de direcție V o mulțime $\mathcal{A}$ înzestrată cu o funcție $\varphi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$,

$$\varphi(A, B) = \overrightarrow{AB}$$

ce satisface:

- ("Regula lui Chasles", sau "regula triunghiului")

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \forall A, B, C \in \mathcal{A}$$

- Există un punct $O \in \mathcal{A}$ astfel încât funcția $\varphi_O : \mathcal{A} \to V$

$$\varphi_O(A) = \overrightarrow{OA}$$

este bijectivă.

Definiții, proprietăți elementare

Propoziție

- Din regula lui Chasles rezultă că pentru orice $A \in \mathcal{A}$ avem

$$\overrightarrow{AA} = 0_V$$

și

Definiții, proprietăți elementare

Propoziție

- Din regula lui Chasles rezultă că pentru orice $A \in \mathcal{A}$ avem

$$\overrightarrow{AA} = 0_V$$

și

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}, \forall A, B \in \mathcal{A};$$

Definiții, proprietăți elementare

Propoziție

- Din regula lui Chasles rezultă că pentru orice $A \in \mathcal{A}$ avem
$$\overrightarrow{AA} = 0_V$$
și
$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}, \forall A, B \in \mathcal{A};$$
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin, atunci pentru **orice** $O \in \mathcal{A}$ funcția $\varphi_O : \mathcal{A} \to V$
$$\varphi_O(A) = \overrightarrow{OA}$$
este bijectivă.

Definiții, proprietăți elementare

Terminologie

Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin, atunci:

Definiții, proprietăți elementare

Terminologie

Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin, atunci:

- spațiul vectorial V se va numi și *spațiu director* al lui $\mathcal{A}$ (sau *direcția lui* $\mathcal{A}$) și se nota și $dir(\mathcal{A})$;

Definiții, proprietăți elementare

Terminologie

Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin, atunci:

- spațiul vectorial V se va numi și *spațiu director* al lui $\mathcal{A}$ (sau *direcția lui* $\mathcal{A}$) și se nota și $dir(\mathcal{A})$;
- elementele lui $\mathcal{A}$ le vom numi *puncte*, iar elementele lui $dir(\mathcal{A})$ vor fi numiți și *vectori liberi*.

Definiții, proprietăți elementare

Terminologie

Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin, atunci:

- spațiul vectorial V se va numi și *spațiu director* al lui $\mathcal{A}$ (sau *direcția lui* $\mathcal{A}$) și se nota și $dir(\mathcal{A})$;
- elementele lui $\mathcal{A}$ le vom numi *puncte*, iar elementele lui $dir(\mathcal{A})$ vor fi numiți și *vectori liberi*.

Exemplu de spațiu afin

Fie V un spațiu vectorial arbitrar. Luăm $\mathcal{A} = V$ și definim funcția $\varphi : V \times V \to V$ prin

$$\varphi(u, v) = v - u.$$

Definiții, proprietăți elementare

Terminologie

Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin, atunci:

- spațiul vectorial V se va numi și *spațiu director* al lui $\mathcal{A}$ (sau *direcția lui* $\mathcal{A}$) și se nota și $dir(\mathcal{A})$;
- elementele lui $\mathcal{A}$ le vom numi *puncte*, iar elementele lui $dir(\mathcal{A})$ vor fi numiți și *vectori liberi*.

Exemplu de spațiu afin

Fie V un spațiu vectorial arbitrar. Luăm $\mathcal{A} = V$ și definim funcția $\varphi : V \times V \to V$ prin

$$\varphi(u, v) = v - u.$$

Această structură de spațiu afin pe un spațiu vectorial se va numi *structura afină canonică*.

Combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}$ și $x_1, \ldots x_n \in K$ fixate. Alegem $O \in \mathcal{A}$ un punct arbitrar; definim punctul $P_O \in \mathcal{A}$ prin

$$\overrightarrow{OP_O} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{OP_i}$$

Combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}$ și $x_1, \ldots x_n \in K$ fixate. Alegem $O \in \mathcal{A}$ un punct arbitrar; definim punctul $P_O \in \mathcal{A}$ prin

$$\overrightarrow{OP_O} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{OP_i}$$

Atunci, **dacă** $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ punctul P_O nu depinde de alegerea lui O.

Combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}$ și $x_1, \ldots x_n \in K$ fixate. Alegem $O \in \mathcal{A}$ un punct arbitrar; definim punctul $P_O \in \mathcal{A}$ prin

$$\overrightarrow{OP_O} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{OP_i}$$

Atunci, **dacă** $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ punctul P_O nu depinde de alegerea lui O.

În acest caz, vom nota

$$P_O = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$$

Combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}$ și $x_1, \ldots x_n \in K$ fixate. Alegem $O \in \mathcal{A}$ un punct arbitrar; definim punctul $P_O \in \mathcal{A}$ prin

$$\overrightarrow{OP_O} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{OP_i}$$

Atunci, **dacă** $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ punctul P_O nu depinde de alegerea lui O.

În acest caz, vom nota

$$P_O = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i$$

și vom spune că punctul P este o *combinație afină* a punctelor $P_1, \ldots, P_n$.

Afin independență, sistem afin de generatori

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $S = \{P_0, \dots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Spunem că S este:

Afin independență, sistem afin de generatori

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Spunem că S este:

- sistem afin independent, dacă

Afin independență, sistem afin de generatori

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Spunem că S este:

- sistem afin independent, dacă nici unul dintre punctele sistemului nu se poate obține ca și o combinație afină de ceilalți;

Afin independență, sistem afin de generatori

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Spunem că S este:

- sistem afin independent, dacă nici unul dintre punctele sistemului nu se poate obține ca și o combinație afină de ceilalți;
- sistem afin de generatori pentru $\mathcal{A}$ dacă

Afin independență, sistem afin de generatori

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Spunem că S este:

- sistem afin independent, dacă nici unul dintre punctele sistemului nu se poate obține ca și o combinație afină de ceilalți;
- sistem afin de generatori pentru $\mathcal{A}$ dacă orice punct din $\mathcal{A}$ se poate obține ca și combinație afină de punctele lui S.

Afin independență, sistem afin de generatori

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Spunem că S este:

- sistem afin independent, dacă nici unul dintre punctele sistemului nu se poate obține ca și o combinație afină de ceilalți;
- sistem afin de generatori pentru $\mathcal{A}$ dacă orice punct din $\mathcal{A}$ se poate obține ca și combinație afină de punctele lui S.

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Atunci, S este:

Afin independență, sistem afin de generatori

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Spunem că S este:

- sistem afin independent, dacă nici unul dintre punctele sistemului nu se poate obține ca și o combinație afină de ceilalți;
- sistem afin de generatori pentru $\mathcal{A}$ dacă orice punct din $\mathcal{A}$ se poate obține ca și combinație afină de punctele lui S.

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Atunci, S este:

- sistem afin independent,

Afin independență, sistem afin de generatori

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Spunem că S este:

- sistem afin independent, dacă nici unul dintre punctele sistemului nu se poate obține ca și o combinație afină de ceilalți;
- sistem afin de generatori pentru $\mathcal{A}$ dacă orice punct din $\mathcal{A}$ se poate obține ca și combinație afină de punctele lui S.

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Atunci, S este:

- sistem afin independent, dacă și numai dacă sistemul de vectori din $dir(\mathcal{A})$: $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ este sistem liniar independent;

Afin independență, sistem afin de generatori

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Spunem că S este:

- sistem afin independent, dacă nici unul dintre punctele sistemului nu se poate obține ca și o combinație afină de ceilalți;
- sistem afin de generatori pentru $\mathcal{A}$ dacă orice punct din $\mathcal{A}$ se poate obține ca și combinație afină de punctele lui S.

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Atunci, S este:

- sistem afin independent, dacă și numai dacă sistemul de vectori din $dir(\mathcal{A})$: $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ este sistem liniar independent;
- sistem afin de generatori pentru $\mathcal{A}$ dacă și numai dacă

Afin independență, sistem afin de generatori

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Spunem că S este:

- sistem afin independent, dacă nici unul dintre punctele sistemului nu se poate obține ca și o combinație afină de ceilalți;
- sistem afin de generatori pentru $\mathcal{A}$ dacă orice punct din $\mathcal{A}$ se poate obține ca și combinație afină de punctele lui S.

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin, $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ un sistem de puncte. Atunci, S este:

- sistem afin independent, dacă și numai dacă sistemul de vectori din $dir(\mathcal{A})$: $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ este sistem liniar independent;
- sistem afin de generatori pentru $\mathcal{A}$ dacă și numai dacă sistemul de vectori $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ este sistem de generatori pentru $dir(\mathcal{A})$.

Dimensiunea unui spațiu afin

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. Un sistem de puncte $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ se numește *reper afin* al lui $\mathcal{A}$ dacă

Dimensiunea unui spațiu afin

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. Un sistem de puncte $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ se numește *reper afin* al lui $\mathcal{A}$ dacă este simultan sistem afin independent și sistem afin de generatori pentru $\mathcal{A}$.

Dimensiunea unui spațiu afin

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. Un sistem de puncte $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ se numește *reper afin* al lui $\mathcal{A}$ dacă este simultan sistem afin independent și sistem afin de generatori pentru $\mathcal{A}$.

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. Un sistem de puncte $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ este reper afin dacă și numai dacă sistemul de vectori

$$dir_{P_0}(S) = \{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\} \subset dir(\mathcal{A})$$

este

Dimensiunea unui spațiu afin

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. Un sistem de puncte $S = \{P_0, \dots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ se numește *reper afin* al lui $\mathcal{A}$ dacă este simultan sistem afin independent și sistem afin de generatori pentru $\mathcal{A}$.

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. Un sistem de puncte $S = \{P_0, \dots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ este reper afin dacă și numai dacă sistemul de vectori

$$dir_{P_0}(S) = \{\overrightarrow{P_0 P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\} \subset dir(\mathcal{A})$$

este bază pentru $dir(\mathcal{A})$.

Dimensiunea unui spațiu afin

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. Un sistem de puncte $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ se numește *reper afin* al lui $\mathcal{A}$ dacă este simultan sistem afin independent și sistem afin de generatori pentru $\mathcal{A}$.

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. Un sistem de puncte $S = \{P_0, \ldots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ este reper afin dacă și numai dacă sistemul de vectori

$$dir_{P_0}(S) = \{\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\} \subset dir(\mathcal{A})$$

este bază pentru $dir(\mathcal{A})$.

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial $dir(\mathcal{A})$ peste corpul K. Se numește *dimensiunea lui*

Dimensiunea unui spațiu afin

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. Un sistem de puncte $S = \{P_0, \dots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ se numește *reper afin* al lui $\mathcal{A}$ dacă este simultan sistem afin independent și sistem afin de generatori pentru $\mathcal{A}$.

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. Un sistem de puncte $S = \{P_0, \dots, P_n\} \subset \mathcal{A}$ este reper afin dacă și numai dacă sistemul de vectori

$$dir_{P_0}(S) = \{\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\} \subset dir(\mathcal{A})$$

este bază pentru $dir(\mathcal{A})$.

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de direcție spațiul vectorial $dir(\mathcal{A})$ peste corpul K. Se numește *dimensiunea lui $\mathcal{A}$* : $dim(\mathcal{A}) = dim_K(dir(\mathcal{A}))$.

Coordonate carteziene

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin.

Coordonate carteziene

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin.

- Se numește *reper cartezian* al lui $\mathcal{A}$ un cuplu de forma $\mathcal{R} = (O, B)$ unde $O \in \mathcal{A}$ este un punct iar $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset dir(\mathcal{A})$ este o bază a lui $dir(\mathcal{A})$.

Coordonate carteziene

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin.

- Se numește *reper cartezian* al lui $\mathcal{A}$ un cuplu de forma $\mathcal{R} = (O, B)$ unde $O \in \mathcal{A}$ este un punct iar $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset dir(\mathcal{A})$ este o bază a lui $dir(\mathcal{A})$.
- dacă $\mathcal{R}$ este un reper cartezian fixat pentru $\mathcal{A}$ iar $P \in \mathcal{A}$ este un punct arbitrar, scalarii $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ unic definiți de

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

se vor numi

Coordonate carteziene

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin.

- Se numește *reper cartezian* al lui $\mathcal{A}$ un cuplu de forma $\mathcal{R} = (O, B)$ unde $O \in \mathcal{A}$ este un punct iar $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset dir(\mathcal{A})$ este o bază a lui $dir(\mathcal{A})$.
- dacă $\mathcal{R}$ este un reper cartezian fixat pentru $\mathcal{A}$ iar $P \in \mathcal{A}$ este un punct arbitrar, scalarii $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ unic definiți de

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

se vor numi
coordonate carteziene ale lui P în raport cu reperul $\mathcal{R}$.

Subspații afine: definiții, proprietăți elementare

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. O submulțime $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ se numește *subspațiu afin* dacă există un punct $O' \in \mathcal{A}'$ astfel încât

$$dir_{O'}(\mathcal{A}') = \{\overrightarrow{O'P} | P \in \mathcal{A}'\}$$

este subspațiu vectorial al lui $dir(\mathcal{A})$.

Subspații afine: definiții, proprietăți elementare

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. O submulțime $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ se numește *subspațiu afin* dacă există un punct $O' \in \mathcal{A}'$ astfel încât

$$dir_{O'}(\mathcal{A}') = \{\overrightarrow{O'P} | P \in \mathcal{A}'\}$$

este subspațiu vectorial al lui $dir(\mathcal{A})$.

Observație

Dacă $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este un subspațiu afin, atunci:

Subspații afine: definiții, proprietăți elementare

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. O submulțime $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ se numește *subspațiu afin* dacă există un punct $O' \in \mathcal{A}'$ astfel încât

$$dir_{O'}(\mathcal{A}') = \{\overrightarrow{O'P} | P \in \mathcal{A}'\}$$

este subspațiu vectorial al lui $dir(\mathcal{A})$.

Observație

Dacă $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este un subspațiu afin, atunci:

- $dir_{O'}(\mathcal{A}')$ nu depinde de punctul $O' \in \mathcal{A}'$ ales;

Subspații afine: definiții, proprietăți elementare

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. O submulțime $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ se numește *subspațiu afin* dacă există un punct $O' \in \mathcal{A}'$ astfel încât

$$dir_{O'}(\mathcal{A}') = \{\overrightarrow{O'P} | P \in \mathcal{A}'\}$$

este subspațiu vectorial al lui $dir(\mathcal{A})$.

Observație

Dacă $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este un subspațiu afin, atunci:

- $dir_{O'}(\mathcal{A}')$ nu depinde de punctul $O' \in \mathcal{A}'$ ales;
- $\mathcal{A}'$ devine un spațiu afin de direcție $dir_{O'}(\mathcal{A}')$.

Caracterizarea în coordonate carteziene a subspațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ o submulțime. Atunci $\mathcal{A}'$ este subspațiu afin dacă și numai dacă

Caracterizarea în coordonate carteziene a subspațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ o submulțime. Atunci $\mathcal{A}'$ este subspațiu afin dacă și numai dacă există o matrice $A \in Mat_{n,m}(K)$ și $B \in Mat_{m,1}(K)$ astfel încât

$$\mathcal{A}' = \{P \in \mathcal{A} \text{ de coordonate } X | AX = B\}.$$

Caracterizarea în coordonate carteziene a subspațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ o submulțime. Atunci $\mathcal{A}'$ este subspațiu afin dacă și numai dacă există o matrice $A \in Mat_{n,m}(K)$ și $B \in Mat_{m,1}(K)$ astfel încât

$$\mathcal{A}' = \{P \in \mathcal{A} \text{ de coordonate } X | AX = B\}.$$

Propoziție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ dat de sistemul de ecuații $AX = B$. Atunci $dir(\mathcal{A}')$ este subspațiul vectorial definit de sistemul de ecuații omogene

Caracterizarea în coordonate carteziene a subspațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ o submulțime. Atunci $\mathcal{A}'$ este subspațiu afin dacă și numai dacă există o matrice $A \in Mat_{n,m}(K)$ și $B \in Mat_{m,1}(K)$ astfel încât

$$\mathcal{A}' = \{P \in \mathcal{A} \text{ de coordonate } X | AX = B\}.$$

Propoziție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ dat de sistemul de ecuații $AX = B$. Atunci $dir(\mathcal{A}')$ este subspațiul vectorial definit de sistemul de ecuații omogene

$$(dir(\mathcal{A}')) : \quad AX = 0.$$

Caracterizarea în coordonate carteziene a subspațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ o submulțime. Atunci $\mathcal{A}'$ este subspațiu afin dacă și numai dacă există o matrice $A \in Mat_{n,m}(K)$ și $B \in Mat_{m,1}(K)$ astfel încât

$$\mathcal{A}' = \{P \in \mathcal{A} \text{ de coordonate } X | AX = B\}.$$

Propoziție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ dat de sistemul de ecuații $AX = B$. Atunci $dir(\mathcal{A}')$ este subspațiul vectorial definit de sistemul de ecuații omogene

$$(dir(\mathcal{A}')) : \quad AX = 0.$$

În particular,

$$dim(\mathcal{A}') = dim(\mathcal{A}) - rang(A).$$

Cazuri particulare remarcabile

Drepte afine

- Se numște *dreaptă afină* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune

Cazuri particulare remarcabile

Drepte afine

- Se numște *dreaptă afină* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 1$.

Cazuri particulare remarcabile

Drepte afine

- Se numște *dreaptă afină* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 1$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$ atunci dreapta afină ce trece prin punctul A de coordonate $A = (x_1^A, \dots, x_n^A)$ și are direcția generată de vectorul $v = (v_1, \dots, v_n)$ este

Cazuri particulare remarcabile

Drepte afine

- Se numște *dreaptă afină* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 1$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$ atunci dreapta afină ce trece prin punctul A de coordonate $A = (x_1^A, \dots, x_n^A)$ și are direcția generată de vectorul $v = (v_1, \dots, v_n)$ este

$$\frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$$

Cazuri particulare remarcabile

Drepte afine

- Se numște *dreaptă afină* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 1$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$ atunci dreapta afină ce trece prin punctul A de coordonate $A = (x_1^A, \ldots, x_n^A)$ și are direcția generată de vectorul $v = (v_1, \ldots, v_n)$ este

$$\frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$$

- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$ iar $A \neq B$ sunt două puncte distincte din $\mathcal{A}$, atunci ecuația dreptei determinată de A și B este:

Cazuri particulare remarcabile

Drepte afine

- Se numște *dreaptă afină* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 1$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$ atunci dreapta afină ce trece prin punctul A de coordonate $A = (x_1^A, \ldots, x_n^A)$ și are direcția generată de vectorul $v = (v_1, \ldots, v_n)$ este

$$\frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$$

- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$ iar $A \neq B$ sunt două puncte distincte din $\mathcal{A}$, atunci ecuația dreptei determinată de A și B este:

$$\frac{x_1 - x_1^A}{x_1^B - x_1^A} = \frac{x_2 - x_2^A}{x_2^B - x_2^A} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{x_n^B - x_n^A}$$

Cazuri particulare remarcabile

Plane afine

- Se numște *plan afin* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune

Cazuri particulare remarcabile

Plane afine

- Se numște *plan afin* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 2$.

Cazuri particulare remarcabile

Plane afine

- Se numște *plan afin* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 2$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin de dimensiune $dim(\mathcal{A}) = 3$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$, $A \in \mathcal{A}'$ este un punct iar $V' \subset dir(\mathcal{A})$ este un subspațiu vectorial de dimensiune $dim_K(V') = 2$ generat de vectorii $V' =< v = (v_1, v_2, v_3), u = (u_1, u_2, u_3) >$ atunci planul afin $\mathcal{A}'$ ce trece prin A și are direcția V' are ecuația:

Cazuri particulare remarcabile

Plane afine

- Se numște *plan afin* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 2$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin de dimensiune $dim(\mathcal{A}) = 3$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$, $A \in \mathcal{A}'$ este un punct iar $V' \subset dir(\mathcal{A})$ este un subspațiu vectorial de dimensiune $dim_K(V') = 2$ generat de vectorii $V' =< v = (v_1, v_2, v_3), u = (u_1, u_2, u_3) >$ atunci planul afin $\mathcal{A}'$ ce trece prin A și are direcția V' are ecuația:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^A & v_1 & u_1 \\ x_2 - x_2^A & v_2 & u_2 \\ x_3 - x_3^A & v_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

Cazuri particulare remarcabile

Plane afine

- Se numște *plan afin* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 2$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin de dimensiune $dim(\mathcal{A}) = 3$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$, $A \in \mathcal{A}'$ este un punct iar $V' \subset dir(\mathcal{A})$ este un subspațiu vectorial de dimensiune $dim_K(V') = 2$ generat de vectorii $V' =< v = (v_1, v_2, v_3), u = (u_1, u_2, u_3) >$ atunci planul afin $\mathcal{A}'$ ce trece prin A și are direcția V' are ecuația:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^A & v_1 & u_1 \\ x_2 - x_2^A & v_2 & u_2 \\ x_3 - x_3^A & v_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

- Ca atare, ecuația planului determinat de trei puncte A, B, C va fi

Cazuri particulare remarcabile

Plane afine

- Se numște *plan afin* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 2$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin de dimensiune $dim(\mathcal{A}) = 3$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$, $A \in \mathcal{A}'$ este un punct iar $V' \subset dir(\mathcal{A})$ este un subspațiu vectorial de dimensiune $dim_K(V') = 2$ generat de vectorii $V' =< v = (v_1, v_2, v_3), u = (u_1, u_2, u_3) >$ atunci planul afin $\mathcal{A}'$ ce trece prin A și are direcția V' are ecuația:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^A & v_1 & u_1 \\ x_2 - x_2^A & v_2 & u_2 \\ x_3 - x_3^A & v_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

- Ca atare, ecuația planului determinat de trei puncte A, B, C va fi

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^A & x_1^B - x_1^A & x_1^C - x_1^A \\ x_2 - x_2^A & x_2^B - x_2^A & x_2^C - x_2^A \\ x_3 - x_3^A & x_3^B - x_3^A & x_3^C - x_3^A \end{vmatrix} = 0$$

Paralelism în spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ subspații afine ale sale. Spunem că $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt paralele (notat $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$) dacă are loc măcar una dintre incluziunile $dir(\mathcal{A}_1) \subset dir(\mathcal{A}_2)$ sau invers, $dir(\mathcal{A}_2) \subset dir(\mathcal{A}_1)$.

Paralelism în spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ subspații afine ale sale. Spunem că $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt paralele (notat $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$) dacă are loc măcar una dintre incluziunile $dir(\mathcal{A}_1) \subset dir(\mathcal{A}_2)$ sau invers, $dir(\mathcal{A}_2) \subset dir(\mathcal{A}_1)$.

Observații

Paralelism în spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ subspații afine ale sale. Spunem că $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt paralele (notat $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$) dacă are loc măcar una dintre incluziunile $dir(\mathcal{A}_1) \subset dir(\mathcal{A}_2)$ sau invers, $dir(\mathcal{A}_2) \subset dir(\mathcal{A}_1)$.

Observații

- Relația de paralelism *nu este* tranzitivă, i.e. dacă $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ sunt trei subspații astfel încât $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2 \parallel \mathcal{A}_3$ nu rezultă $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_3$.

Paralelism în spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ subspații afine ale sale. Spunem că $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt paralele (notat $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$) dacă are loc măcar una dintre incluziunile $dir(\mathcal{A}_1) \subset dir(\mathcal{A}_2)$ sau invers, $dir(\mathcal{A}_2) \subset dir(\mathcal{A}_1)$.

Observații

- Relația de paralelism *nu este* tranzitivă, i.e. dacă $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ sunt trei subspații astfel încât $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2 \parallel \mathcal{A}_3$ nu rezultă $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_3$.
- Dacă $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sunt subspații afine *de aceeași dimensiune* atunci $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$ dacă și numai dacă $dir(\mathcal{A}_1) = dir(\mathcal{A}_2)$.

Paralelism în spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ subspații afine ale sale. Spunem că $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt paralele (notat $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$) dacă are loc măcar una dintre incluziunile $dir(\mathcal{A}_1) \subset dir(\mathcal{A}_2)$ sau invers, $dir(\mathcal{A}_2) \subset dir(\mathcal{A}_1)$.

Observații

- Relația de paralelism *nu este* tranzitivă, i.e. dacă $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ sunt trei subspații astfel încât $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2 \parallel \mathcal{A}_3$ nu rezultă $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_3$.
- Dacă $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sunt subspații afine *de aceeași dimensiune* atunci $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$ dacă și numai dacă $dir(\mathcal{A}_1) = dir(\mathcal{A}_2)$.
- Ca și consecință, în categria spațiilor afine are loc "*postulatul paralelelor*": dacă $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este un subspațiu afin și $A \in \mathcal{A}$ este un punct arbitrar, atunci există și este unic un subspațiu afin $\mathcal{A}''$ astfel încât
$$A \in \mathcal{A}'',\ \mathcal{A}'' \parallel \mathcal{A}',\ \text{și } dim(\mathcal{A}'') = dim(\mathcal{A}').$$

Paralelism în spații afine

Exemple: drepte paralele

- Fie dreptele

$$(d_1) : \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^A}{v_3}$$

Paralelism în spații afine

Exemple: drepte paralele

- Fie dreptele

$$(d_1) : \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^A}{v_3}$$

și

$$(d_2) : \frac{x_1 - x_1^B}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^B}{u_2} = \frac{x_3 - x_3^B}{u_3}$$

Paralelism în spații afine

Exemple: drepte paralele

- Fie dreptele

$$(d_1): \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^A}{v_3}$$

și

$$(d_2): \frac{x_1 - x_1^B}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^B}{u_2} = \frac{x_3 - x_3^B}{u_3}$$

Atunci $d_1 \parallel d_2$ dacă și numai dacă

Paralelism în spații afine

Exemple: drepte paralele

- Fie dreptele

$$(d_1): \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^A}{v_3}$$

și

$$(d_2): \frac{x_1 - x_1^B}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^B}{u_2} = \frac{x_3 - x_3^B}{u_3}$$

Atunci $d_1 \parallel d_2$ dacă și numai dacă

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

Paralelism în spații afine

Exemple: plane paralele

- Fie planele

$$(\pi_1) : \ A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = D_1$$

Paralelism în spații afine

Exemple: plane paralele

- Fie planele
$$(\pi_1): \ A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = D_1$$
și
$$(\pi_2): \ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 = D_2$$

Paralelism în spații afine

Exemple: plane paralele

- Fie planele

$$(\pi_1): \; A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = D_1$$

și

$$(\pi_2): \; A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 = D_2$$

Atunci $\pi_1 \parallel \pi_2$ dacă și numai dacă

Paralelism în spații afine

Exemple: plane paralele

- Fie planele
$$(\pi_1): \ A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = D_1$$
și
$$(\pi_2): \ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 = D_2$$
Atunci $\pi_1 \parallel \pi_2$ dacă și numai dacă
$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$$

Paralelism în spații afine

Exemple: plan paralel cu dreaptă

- Fie planul

$$(\pi) : \; Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$$

Paralelism în spații afine

Exemple: plan paralel cu dreaptă

- Fie planul

$$(\pi):\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$$

și dreapta

$$(d):\ \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^A}{v_3}$$

Paralelism în spații afine

Exemple: plan paralel cu dreaptă

- Fie planul

$$(\pi):\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$$

și dreapta

$$(d):\ \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^A}{v_3}$$

Atunci $\pi \parallel d$ dacă și numai dacă

Paralelism în spații afine

Exemple: plan paralel cu dreaptă

- Fie planul
$$(\pi): \; Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$$
și dreapta
$$(d): \; \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^A}{v_3}$$
Atunci $\pi \parallel d$ dacă și numai dacă
$$Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0$$

Aplicații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un acelassi corp K. O funcție $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ se numește *aplicație afină* dacă

Aplicații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un acelassi corp K. O funcție $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ se numește *aplicație afină* dacă există un punct $O \in \mathcal{A}_1$ astfel încât aplicația $T_{O,\tau} : dir(\mathcal{A}_1) \to dir(\mathcal{A}_2)$ definită prin

$$T_{O,\tau}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(P)}$$

este aplicație liniară.

Aplicații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un acelassi corp K. O funcție $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ se numește *aplicație afină* dacă există un punct $O \in \mathcal{A}_1$ astfel încât aplicația $T_{O,\tau} : dir(\mathcal{A}_1) \to dir(\mathcal{A}_2)$ definită prin

$$T_{O,\tau}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(P)}$$

este aplicație liniară.

Propoziție

Dacă $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ este o aplicație afină, atunci aplicația liniară $T_{O,\tau}$ de mai sus *nu depinde de alegerea lui O*. Ea se numește *urma vectorială* a lui τ și este notată T_τ.

Caracterizarea aplicațiilor afine utilizând combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un același corp K și $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Atunci τ este transformare afină dacă și numai dacă **pentru orice** $n \geq 2$, și orice alegeri $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ și $a_1, \ldots, a_n \in K$ cu $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ avem

$$\tau\left(\sum_{i=1}^{n} a_i P_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i.$$

Caracterizarea aplicațiilor afine utilizând combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un același corp K și $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Atunci τ este transformare afină dacă și numai dacă **pentru orice** $n \geq 2$, și orice alegeri $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ și $a_1, \ldots, a_n \in K$ cu $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ avem

$$\tau\left(\sum_{i=1}^{n} a_i P_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i.$$

Remarcă

În cazul afin, spre deosebire de cel vectorial, nu ne putem limita la a testa egalitatea de mai sus doar pentru $n = 2$!!!

Caracterizarea aplicațiilor afine utilizând combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un același corp K și $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Atunci τ este transformare afină dacă și numai dacă **pentru orice** $n \geq 2$, și orice alegeri $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ și $a_1, \ldots, a_n \in K$ cu $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ avem

$$\tau\left(\sum_{i=1}^{n} a_i P_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i.$$

Remarcă

În cazul afin, spre deosebire de cel vectorial, nu ne putem limita la a testa egalitatea de mai sus doar pentru $n = 2$!!!

Se poate demonstra că dacă avem $char(K) \neq 2$ atunci ne putem limita la a testa egalitatea de mai sus doar pentru $n = 2$puncte.

Caracterizarea în coordonate a aplicațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un același corp K de dimensiuni n (respectiv m) și $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Fie $\mathcal{R}_1$ (respectiv $\mathcal{R}_2$) repere afine pentru $\mathcal{A}_1$ (respectiv $\mathcal{A}_2$) fixate. Atunci τ este aplicație afină dacă și numai dacă

Caracterizarea în coordonate a aplicațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un același corp K de dimensiuni n (respectiv m) și $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Fie $\mathcal{R}_1$ (respectiv $\mathcal{R}_2$) repere afine pentru $\mathcal{A}_1$ (respectiv $\mathcal{A}_2$) fixate. Atunci τ este aplicație afină dacă și numai dacă există o matrice $A \in Mat_{m,n}(K)$ și o matrice $B \in Mat_{m,1}(K)$ astfel încât

$$\tau(X) = AX + B$$

Caracterizarea în coordonate a aplicațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un același corp K de dimensiuni n (respectiv m) și $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Fie $\mathcal{R}_1$ (respectiv $\mathcal{R}_2$) repere afine pentru $\mathcal{A}_1$ (respectiv $\mathcal{A}_2$) fixate. Atunci τ este aplicație afină dacă și numai dacă există o matrice $A \in Mat_{m,n}(K)$ și o matrice $B \in Mat_{m,1}(K)$ astfel încât

$$\tau(X) = AX + B$$

Remarcă

Dacă $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ este o transformare afină ce are expresia

$$\tau(X) = AX + B$$

în raport cu reperele $\mathcal{R}_1 = (O_1, B_1)$ respectiv $\mathcal{R}_2 = (O_2, B_2)$ atunci matricea urmei vectoriale T_τ a lui τ în raport cu bazele B_1 respectiv B_2 este

Caracterizarea în coordonate a aplicațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un același corp K de dimensiuni n (respectiv m) și $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Fie $\mathcal{R}_1$ (respectiv $\mathcal{R}_2$) repere afine pentru $\mathcal{A}_1$ (respectiv $\mathcal{A}_2$) fixate. Atunci τ este aplicație afină dacă și numai dacă există o matrice $A \in Mat_{m,n}(K)$ și o matrice $B \in Mat_{m,1}(K)$ astfel încât

$$\tau(X) = AX + B$$

Remarcă

Dacă $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ este o transformare afină ce are expresia

$$\tau(X) = AX + B$$

în raport cu reperele $\mathcal{R}_1 = (O_1, B_1)$ respectiv $\mathcal{R}_2 = (O_2, B_2)$ atunci matricea urmei vectoriale T_τ a lui τ în raport cu bazele B_1 respectiv B_2 este A, i.e.

$$T_\tau(X) = AX.$$

Exemple remarcabile de transformări afine

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *translație* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}) \to dir(\mathcal{A})$ este identitatea,

$$T_\tau(v) = v, \ \forall v \in dir(\mathcal{A}).$$

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *translație* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}) \to dir(\mathcal{A})$ este identitatea,

$$T_\tau(v) = v, \ \forall v \in dir(\mathcal{A}).$$

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este translație dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *translație* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}) \to dir(\mathcal{A})$ este identitatea,
$$T_\tau(v) = v,\ \forall v \in dir(\mathcal{A}).$$
- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este translație dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este $\tau(X) = X + B$

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *translație* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}) \to dir(\mathcal{A})$ este identitatea,

$$T_\tau(v) = v, \ \forall v \in dir(\mathcal{A}).$$

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este translație dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este $\tau(X) = X + B$

Omotetii

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *translație* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}) \to dir(\mathcal{A})$ este identitatea,

$$T_\tau(v) = v,\ \forall v \in dir(\mathcal{A}).$$

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este translație dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este $\tau(X) = X + B$

Omotetii

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *omotetie* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}_1) \to dir(\mathcal{A}_1)$ este de forma

$$T_\tau(v) = \lambda v,\ \lambda \in K, \lambda \neq 1.$$

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *translație* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}) \to dir(\mathcal{A})$ este identitatea,

$$T_\tau(v) = v, \ \forall v \in dir(\mathcal{A}).$$

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este translație dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este $\tau(X) = X + B$

Omotetii

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *omotetie* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}_1) \to dir(\mathcal{A}_1)$ este de forma

$$T_\tau(v) = \lambda v, \ \lambda \in K, \lambda \neq 1.$$

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este omotetie dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *translație* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}) \to dir(\mathcal{A})$ este identitatea,

$$T_\tau(v) = v,\ \forall v \in dir(\mathcal{A}).$$

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este translație dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este $\tau(X) = X + B$

Omotetii

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *omotetie* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}_1) \to dir(\mathcal{A}_1)$ este de forma

$$T_\tau(v) = \lambda v,\ \lambda \in K, \lambda \neq 1.$$

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este omotetie dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este $\tau(X) = \lambda X + B$

Hipercuadrice în spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n raportat la un reper cartezian $\mathcal{R}$. Se numește hipercuadrică în $\mathcal{A}$ o submulțime $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ care este mulțimea zerourilor ununi polinom de gradul doi $F \in K[X_1, \dots, X_n]$,

$$\mathcal{Q} = \{(x_1, \dots, x_n) | F(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

Hipercuadrice în spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n raportat la un reper cartezian $\mathcal{R}$. Se numește hipercuadrică în $\mathcal{A}$ o submulțime $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ care este mulțimea zerourilor ununi polinom de gradul doi $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$,

$$\mathcal{Q} = \{(x_1, \ldots, x_n) | F(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

Observație

Cu alte cuvinte, o hipercuadrică este o mulțime de forma

$$\mathcal{Q} = \{\{(x_1, \ldots, x_n) | \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0\}$$

Hipercuadrice în spații afine

Terminologie

- Dacă $\mathcal{Q}$ este o hipercuadrică ca mai sus, vom nota

$$q_F = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

  și respectiv

$$l_F = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i;$$

  q_F este evident o formă pătratică (vectorială), numită *forma pătratică asociată hipercuadricei*.
- În cazul $dim(\mathcal{A}) = 2$ hipercuadricele se numesc *conice*, iar în cazul $dim(\mathcal{A}) = 3$ hipercuadricele se numesc *cuadrice*.