Rezolvările problemelor din lecţia de polinoame

Rezolvarea primele două probleme am postat-o pe platforma moodle într-un mic filmuleţ. Reiau, foarte pe scurt, rezolvările şi aici.

1-2) x_1, x_2, x_3, x_4 erau rădăcinile complexe ale polinomului $f(X) = X^4 + X^3 + X^2 - 11X + 1$. Din formulele Viète ştim că $\sum_{j=1}^{4} x_j = -1$, $\sum_{1 \leq j < k \leq 4} x_j x_k = 1$. De aici deducem că

$$\sum_{j=1}^{4} x_j^2 = (\sum_{j=1}^{4} x_j)^2 - 2 \sum_{1 \leq j < k \leq 4} x_j x_k = (-1)^2 - 2 = -1.$$

De aici rezultă că cel puţin o rădăcină x_j nu este reală. De fapt, chiar două, fiindcă şi conjugatul complex al lui x_j va fi o rădăcină nereală (nu uitaţi că polinomul este din $\mathbb{R}[X]$). Cum $f(0) = 1, f(1) = -7, f(2) = 7$, deducem că polinomul are două rădăcini reale în intervalele $(0, 1)$ şi $(1, 2)$. Deci polinomul are doar două rădăcini reale.

3) Care sunt rădăcinile din $\mathbb{Z}_{41}$ ale polinomului $x^3 - \overline{1}$? Vom arăta că doar $\overline{1}$ este rădăcină a polinomului. Din identitatea

$$x^3 - \overline{1} = (x - 1)(x^2 + x + \overline{1}),$$

este suficient să arătăm că nu există $x \in \mathbb{Z}_{41}$ astfel încât

$$x^2 + x + \overline{1} = \overline{0}.$$

Presupunem contrariul. Rezultă că $(\overline{2}x + \overline{1})^2 = \overline{-3}$. Ridicând la puterea 20 şi ţinând cont de Mica Teoremă a lui Fermat, deducem că

$$\overline{1} = (\overline{2}x + \overline{1})^{40} = (\overline{-3})^{20} = \overline{-1},$$

deoarece $3^4 \equiv -1 \pmod{41}$. Am obţinut contradicţia $\overline{1} = \overline{-1}$.

4) Care sunt rădăcinile din $\mathbb{Z}_{73}$ ale polinomului $x^4 + \overline{1}$? Rădăcinile sunt $\overline{10}, \overline{63}, \overline{51}, \overline{22}$. Este suficient să observăm că $\overline{10}^2 = \overline{27}$, $\overline{10}^4 = \overline{27}^2 = \overline{-1}$ şi $\overline{22}^2 = \overline{-27}$.

5) Să se scrie polinomul $X^4 + \overline{1} \in \mathbb{Z}_{43}[X]$ ca produs de polinoame de grade nenule din acelaş inel.

Avem

$$X^4+\overline{1}=(X^2-\overline{1})^2+\overline{2}X^2=(X^2-\overline{1})^2-(\overline{16}X)^2=(X^2-\overline{1}-\overline{16}X)(X^2-\overline{1}+\overline{16}X).$$

Am ţinut cont în cele de mai sus de faptul că $16^2 \equiv -2 \pmod{43}$.

Exerciţiul de azi: găsiţi n astfel încât $2^n \equiv 31 \pmod{83}$.

Din calculul din lecţie ştim că $2^{41} \equiv 82 \pmod{83}$. De aici rezultă că

$$2^{40} \equiv 41 \equiv 124 \pmod{83}.$$

$$2^{38} \equiv 31 \pmod{83}.$$

Deci numărul căutat este 38.