Geometrie

Victor Vuletescu

Universitatea București, Facultatea de Matematică și Informatică

23 Martie 2019

Definiții, proprietăți elementare

Definiție

Se numește *spațiu vectorial* peste un corp K o mulțime V înzestrată cu două legi de compoziție:

Definiții, proprietăți elementare

Definiție

Se numește *spațiu vectorial* peste un corp K o mulțime V înzestrată cu două legi de compoziție:

$+ : V \times V \to V \ (u, v) \mapsto u + v$, și

Definiții, proprietăți elementare

Definiție

Se numește *spațiu vectorial* peste un corp K o mulțime V înzestrată cu două legi de compoziție:

$+ : V \times V \to V\ (u, v) \mapsto u + v$, și

$\cdot : K \times V \to V,\ (\alpha, v) \mapsto \alpha v$

ce satisfac proprietățile:

Definiții, proprietăți elementare

Definiție

Se numește *spațiu vectorial* peste un corp K o mulțime V înzestrată cu două legi de compoziție:

$+ : V \times V \to V \ (u, v) \mapsto u + v$, și

$\cdot : K \times V \to V, \ (\alpha, v) \mapsto \alpha v$

ce satisfac proprietățile:

- $(V, +)$ este grup abelian;

Definiții, proprietăți elementare

Definiție

Se numește *spațiu vectorial* peste un corp K o mulțime V înzestrată cu două legi de compoziție:

$+ : V \times V \to V\ (u, v) \mapsto u + v$, și

$\cdot : K \times V \to V,\ (\alpha, v) \mapsto \alpha v$

ce satisfac proprietățile:

- $(V, +)$ este grup abelian;
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v,\ \forall \alpha \in K, \forall u, v \in V$

Definiții, proprietăți elementare

Definiție

Se numește *spațiu vectorial* peste un corp K o mulțime V înzestrată cu două legi de compoziție:

$+ : V \times V \to V \ (u, v) \mapsto u + v$, și

$\cdot : K \times V \to V, \ (\alpha, v) \mapsto \alpha v$

ce satisfac proprietățile:

- $(V, +)$ este grup abelian;
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \ \forall \alpha \in K, \forall u, v \in V$
- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v, \ \forall \alpha, \beta \in K, \forall v \in V$;

Definiții, proprietăți elementare

Definiție

Se numește *spațiu vectorial* peste un corp K o mulțime V înzestrată cu două legi de compoziție:

$+ : V \times V \to V \ (u, v) \mapsto u + v$, și

$\cdot : K \times V \to V, \ (\alpha, v) \mapsto \alpha v$

ce satisfac proprietățile:

- $(V, +)$ este grup abelian;
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \ \forall \alpha \in K, \forall u, v \in V$
- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v, \ \forall \alpha, \beta \in K, \forall v \in V;$
- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v), \ \forall \alpha, \beta \in K, \forall v \in V;$

Definiții, proprietăți elementare

Definiție

Se numește *spațiu vectorial* peste un corp K o mulțime V înzestrată cu două legi de compoziție:

$+ : V \times V \to V \ (u, v) \mapsto u + v$, și

$\cdot : K \times V \to V, \ (\alpha, v) \mapsto \alpha v$

ce satisfac proprietățile:

- $(V, +)$ este grup abelian;
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \ \forall \alpha \in K, \forall u, v \in V$
- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v, \ \forall \alpha, \beta \in K, \forall v \in V$;
- $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v), \ \forall \alpha, \beta \in K, \forall v \in V$;
- $1_K v = v \ \forall v \in V$.

Terminologie

Elementele lui V le vom numi *vectori* iar cele din K le vom numi *scalari*.

Definiții, proprietăți elementare

Exemple

Definiții, proprietăți elementare

Exemple

- Mulțimea matricelor de un tip (m, n) fixat peste un un corp K; $V = Mat_{m,n}(K)$.

Definiții, proprietăți elementare

Exemple

- Mulțimea matricelor de un tip (m, n) fixat peste un un corp K; $V = Mat_{m,n}(K)$.
- Mulțimea polinoamelor peste corpul K: $V = K[X]$.

Definiții, proprietăți elementare

Exemple

- Mulțimea matricelor de un tip (m, n) fixat peste un un corp K; $V = Mat_{m,n}(K)$.
- Mulțimea polinoamelor peste corpul K: $V = K[X]$.
- "Spații numerice": $V = K^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in K\}$.

Definiții, proprietăți elementare

Exemple

- Mulțimea matricelor de un tip (m, n) fixat peste un un corp K; $V = Mat_{m,n}(K)$.
- Mulțimea polinoamelor peste corpul K: $V = K[X]$.
- "Spații numerice": $V = K^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in K\}$. Elementele din V vor fi notate in calcule sub formă de vectori coloană

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Liniar independență, sisteme de generatori

Terminologie

O expresie de forma

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,\ a_i \in K, v_i \in V, i = 1, \dots, n$$

se numește *combinație liniară* (a vectorilor $v_1, \dots, v_n$).

Liniar independență, sisteme de generatori

Terminologie

O expresie de forma

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i,\ a_i \in K, v_i \in V, i = 1, \ldots, n$$

se numește *combinație liniară* (a vectorilor $v_1, \ldots, v_n$).

Liniar independență, sistem de generatori

Definiție. Fie $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ un sistem de vectori. S se numește:

Liniar independență, sisteme de generatori

Terminologie

O expresie de forma

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \ a_i \in K, v_i \in V, i = 1, \dots, n$$

se numește *combinație liniară* (a vectorilor $v_1, \dots, v_n$).

Liniar independență, sistem de generatori

Definiție. Fie $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ un sistem de vectori. S se numește:

- *sistem liniar independent* dacă nici un vector al sistemului S nu se poate exprima ca o combinație liniară de ceilalți;

Liniar independență, sisteme de generatori

Terminologie

O expresie de forma

$$w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \ a_i \in K, v_i \in V, i = 1, \ldots, n$$

se numește *combinație liniară* (a vectorilor $v_1, \ldots, v_n$).

Liniar independență, sistem de generatori

Definiție. Fie $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ un sistem de vectori. S se numește:

- *sistem liniar independent* dacă nici un vector al sistemului S nu se poate exprima ca o combinație liniară de ceilalți;
- *sistem de generatori* dacă **orice** vector din V se poate exprima ca o combinație liniară de vectori din S.

Liniar independență, sisteme de generatori

Exemple

Liniar independență, sisteme de generatori

Exemple

- Sistemul $S = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, -2, 0), v_3 = (0, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$ este liniar independent.

Liniar independență, sisteme de generatori

Exemple

- Sistemul $S = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, -2, 0), v_3 = (0, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$ este liniar independent.
- Sistemul $S = \{v_1 = (0, -2, 3), v_2 = (0, -2, 0), v_3 = (0, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$ nu este liniar independent, pentru că $v_1 = v_2 + v_3$.

Liniar independență, sisteme de generatori

Exemple

- Sistemul $S = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, -2, 0), v_3 = (0, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$ este liniar independent.
- Sistemul $S = \{v_1 = (0, -2, 3), v_2 = (0, -2, 0), v_3 = (0, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$ nu este liniar independent, pentru că $v_1 = v_2 + v_3$.
- Sistemul $S = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, -2, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ nu este sistem de generatori (pentru că, de exemplu, nu putem exprima $v = (0, 0, 7)$ ca o combinație liniară de v_1, v_2).

Liniar independență, sisteme de generatori

Exemple

- Sistemul $S = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,-2,0), v_3 = (0,0,3)\} \subset \mathbb{R}^3$ este liniar independent.
- Sistemul $S = \{v_1 = (0,-2,3), v_2 = (0,-2,0), v_3 = (0,0,3)\} \subset \mathbb{R}^3$ nu este liniar independent, pentru că $v_1 = v_2 + v_3$.
- Sistemul $S = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,-2,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ nu este sistem de generatori (pentru că, de exemplu, nu putem exprima $v = (0,0,7)$ ca o combinație liniară de v_1, v_2).
- Sistemul $S = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,-2,0), v_3 = (0,0,3)\} \subset \mathbb{R}^3$ este sistem de generatori - pentru că dacă $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ este arbitrar, avem

Liniar independență, sisteme de generatori

Exemple

- Sistemul $S = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,-2,0), v_3 = (0,0,3)\} \subset \mathbb{R}^3$ este liniar independent.
- Sistemul $S = \{v_1 = (0,-2,3), v_2 = (0,-2,0), v_3 = (0,0,3)\} \subset \mathbb{R}^3$ nu este liniar independent, pentru că $v_1 = v_2 + v_3$.
- Sistemul $S = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,-2,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ nu este sistem de generatori (pentru că, de exemplu, nu putem exprima $v = (0,0,7)$ ca o combinație liniară de v_1, v_2).
- Sistemul $S = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,-2,0), v_3 = (0,0,3)\} \subset \mathbb{R}^3$ este sistem de generatori - pentru că dacă $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ este arbitrar, avem

$$v = x_1(1,0,0) - \frac{x_2}{2}(0,-2,0) + \frac{x_3}{3}(0,0,3)$$

Liniar independență, sisteme de generatori

Exemple

- Sistemul $S = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, -2, 0), v_3 = (0, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$ este liniar independent.
- Sistemul $S = \{v_1 = (0, -2, 3), v_2 = (0, -2, 0), v_3 = (0, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$ nu este liniar independent, pentru că $v_1 = v_2 + v_3$.
- Sistemul $S = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, -2, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ nu este sistem de generatori (pentru că, de exemplu, nu putem exprima $v = (0, 0, 7)$ ca o combinație liniară de v_1, v_2).
- Sistemul $S = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, -2, 0), v_3 = (0, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$ este sistem de generatori - pentru că dacă $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ este arbitrar, avem

$$v = x_1(1, 0, 0) - \frac{x_2}{2}(0, -2, 0) + \frac{x_3}{3}(0, 0, 3)$$

i.e. $v = x_1 v_1 - \frac{x_2}{2} v_2 + \frac{x_3}{3} v_3$.

Liniar independență, sisteme de generatori

Test de liniar independență/sistem de generatori

Fie

$$S = \{v_1 = (v_{1,1}, \ldots, v_{1,n}), v_1 = (v_{2,1}, \ldots, v_{2,n}) \ldots, v_m = (v_{m,1}, \ldots, v_{m,n})\}$$

un sistem de m vectori în $V = K^n$.

Liniar independență, sisteme de generatori

Test de liniar independență/sistem de generatori

Fie

$$S = \{v_1 = (v_{1,1}, \ldots, v_{1,n}), v_1 = (v_{2,1}, \ldots, v_{2,n}) \ldots, v_m = (v_{m,1}, \ldots, v_{m,n})\}$$

un sistem de m vectori în $V = K^n$. Formăm matricea

$$A_S = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \ldots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \ldots & v_{2,n} \\ . & . & \ldots & . \\ v_{m,1} & v_{m,2} & \ldots & v_{m,n} \end{pmatrix}$$

Liniar independență, sisteme de generatori

Test de liniar independență/sistem de generatori

Fie

$$S = \{v_1 = (v_{1,1}, \ldots, v_{1,n}), v_1 = (v_{2,1}, \ldots, v_{2,n}) \ldots, v_m = (v_{m,1}, \ldots, v_{m,n})\}$$

un sistem de m vectori în $V = K^n$. Formăm matricea

$$A_S = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \ldots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \ldots & v_{2,n} \\ . & . & \ldots & . \\ v_{m,1} & v_{m,2} & \ldots & v_{m,n} \end{pmatrix}$$

Atunci:

Liniar independență, sisteme de generatori

Test de liniar independență/sistem de generatori

Fie

$$S = \{v_1 = (v_{1,1}, \ldots, v_{1,n}), v_1 = (v_{2,1}, \ldots, v_{2,n}) \ldots, v_m = (v_{m,1}, \ldots, v_{m,n})\}$$

un sistem de m vectori în $V = K^n$. Formăm matricea

$$A_S = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \ldots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \ldots & v_{2,n} \\ . & . & \ldots & . \\ v_{m,1} & v_{m,2} & \ldots & v_{m,n} \end{pmatrix}$$

Atunci:

- S este sistem liniar independent dacă și numai dacă $rang(A_S) = m$.

Liniar independență, sisteme de generatori

Test de liniar independență/sistem de generatori

Fie

$$S = \{v_1 = (v_{1,1}, \ldots, v_{1,n}), v_1 = (v_{2,1}, \ldots, v_{2,n}) \ldots, v_m = (v_{m,1}, \ldots, v_{m,n})\}$$

un sistem de m vectori în $V = K^n$. Formăm matricea

$$A_S = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & \ldots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & v_{2,2} & \ldots & v_{2,n} \\ . & . & \ldots & . \\ v_{m,1} & v_{m,2} & \ldots & v_{m,n} \end{pmatrix}$$

Atunci:

- S este sistem liniar independent dacă și numai dacă $rang(A_S) = m$.
- S este sistem de generatori dacă și numai dacă $rang(A_S) = n$.

Baze

Baze

Definiție. Fie V un spațiu vectorial. Un sistem $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ se numește bază a lui V dacă este *simultan* și sistem liniar independent și sistem de generatori.

Baze

Baze

Definiție. Fie V un spațiu vectorial. Un sistem $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ se numește bază a lui V dacă este *simultan* și sistem liniar independent și sistem de generatori.

Exemple

Baze

Baze

Definiție. Fie V un spațiu vectorial. Un sistem $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ se numește bază a lui V dacă este *simultan* și sistem liniar independent și sistem de generatori.

Exemple

- Fie $V = K^n$; atunci sistemul

$$\{e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$$

este o bază, numită *baza canonică* a lui K^n.

Baze

Baze

Definiție. Fie V un spațiu vectorial. Un sistem $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ se numește bază a lui V dacă este *simultan* și sistem liniar independent și sistem de generatori.

Exemple

- Fie $V = K^n$; atunci sistemul
$$\{e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$$
este o bază, numită *baza canonică* a lui K^n.
- Sistemul $S = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, -2, 0), v_3 = (0, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$ este o bază a lui $\mathbb{R}^3$.

Dimensiune

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial care admite un sistem de generatori finit. Atunci:

Dimensiune

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial care admite un sistem de generatori finit. Atunci:

- Oricare ar fi $G = \{v_1, \ldots, v_m\}$ sistem de generatori există $\{j_1, \ldots j_n\} \subset \{1, \ldots, m\}$ astfel încât $G' = \{v_{j_1}, \ldots, v_{j_n}\}$ este o bază.

Dimensiune

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial care admite un sistem de generatori finit. Atunci:

- Oricare ar fi $G = \{v_1, \dots, v_m\}$ sistem de generatori există $\{j_1, \dots j_n\} \subset \{1, \dots, m\}$ astfel încât $G' = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_n}\}$ este o bază.
- Oricare ar fi $I = \{u_1, \dots, u_m\}$ sistem liniar independent există vectorii $u_{m+1}, \dots, u_n$ astfel încât $I = \{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ este o bază.

Dimensiune

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial care admite un sistem de generatori finit. Atunci:

- Oricare ar fi $G = \{v_1, \dots, v_m\}$ sistem de generatori există $\{j_1, \dots j_n\} \subset \{1, \dots, m\}$ astfel încât $G' = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_n}\}$ este o bază.
- Oricare ar fi $I = \{u_1, \dots, u_m\}$ sistem liniar independent există vectorii $u_{m+1}, \dots, u_n$ astfel încât $I = \{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ este o bază.
- Oricare ar fi $G = \{v_1, \dots, v_m\}$ sistem de generatori și oricare ar fi $I = \{u_1, \dots, u_j\}$ sistem liniar independent, avem $j \leq m$.

Dimensiune

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial care admite un sistem de generatori finit. Atunci:

- Oricare ar fi $G = \{v_1, \dots, v_m\}$ sistem de generatori există $\{j_1, \dots j_n\} \subset \{1, \dots, m\}$ astfel încât $G' = \{v_{j_1}, \dots, v_{j_n}\}$ este o bază.
- Oricare ar fi $I = \{u_1, \dots, u_m\}$ sistem liniar independent există vectorii $u_{m+1}, \dots, u_n$ astfel încât $I = \{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ este o bază.
- Oricare ar fi $G = \{v_1, \dots, v_m\}$ sistem de generatori și oricare ar fi $I = \{u_1, \dots, u_j\}$ sistem liniar independent, avem $j \leq m$.

Corolar

Fie V un spațiu vectorial și $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}, B_2 = \{f_1, \dots, f_m\}$ două baze ale sale. Atunci

$$n = m.$$

Dimensiune

Dimensiune

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K care admite un sistem de generatori finit. Se numește *dimensiunea lui V peste K* numărul natural $dim_K(V)$ definit prin:

$$dim_K(V) = \text{cardinalul unei baze a lui } V.$$

Dimensiune

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K care admite un sistem de generatori finit. Se numește *dimensiunea lui* V *peste* K numărul natural $dim_K(V)$ definit prin:

$$dim_K(V) = \text{cardinalul unei baze a lui } V.$$

Exemple

Dimensiune

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K care admite un sistem de generatori finit. Se numește *dimensiunea lui V peste K* numărul natural $dim_K(V)$ definit prin:

$$dim_K(V) = \text{cardinalul unei baze a lui } V.$$

Exemple

- Fie $V = K^n$; deoarece

$$\{e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$$

este o bază, deducem $dim_K(K^n) =$

Dimensiune

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K care admite un sistem de generatori finit. Se numește *dimensiunea lui V peste K* numărul natural $dim_K(V)$ definit prin:

$$dim_K(V) = \text{cardinalul unei baze a lui } V.$$

Exemple

- Fie $V = K^n$; deoarece

$$\{e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$$

  este o bază, deducem $dim_K(K^n) = n$.

Dimensiune

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K care admite un sistem de generatori finit. Se numește *dimensiunea lui V peste K* numărul natural $dim_K(V)$ definit prin:

$$dim_K(V) = \text{cardinalul unei baze a lui } V.$$

Exemple

- Fie $V = K^n$; deoarece

$$\{e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)\}$$

  este o bază, deducem $dim_K(K^n) = n$.
- $\mathbb{C}$ este spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$ de dimensiune

Dimensiune

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K care admite un sistem de generatori finit. Se numește *dimensiunea lui V peste K* numărul natural $dim_K(V)$ definit prin:

$$dim_K(V) = \text{cardinalul unei baze a lui } V.$$

Exemple

- Fie $V = K^n$; deoarece

  $$\{e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$$

  este o bază, deducem $dim_K(K^n) = n$.
- $\mathbb{C}$ este spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$ de dimensiune *doi*

Dimensiune

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K care admite un sistem de generatori finit. Se numește *dimensiunea lui V peste K* numărul natural $dim_K(V)$ definit prin:

$$dim_K(V) = \text{cardinalul unei baze a lui } V.$$

Exemple

- Fie $V = K^n$; deoarece

  $$\{e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)\}$$

  este o bază, deducem $dim_K(K^n) = n$.
- $\mathbb{C}$ este spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$ de dimensiune *doi deoarece* $\{1, i\}$ *este o bază:* $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

Dimensiune

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K care admite un sistem de generatori finit. Se numește *dimensiunea lui V peste K* numărul natural $dim_K(V)$ definit prin:

$$dim_K(V) = \text{cardinalul unei baze a lui } V.$$

Exemple

- Fie $V = K^n$; deoarece

$$\{e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$$

  este o bază, deducem $dim_K(K^n) = n$.
- $\mathbb{C}$ este spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$ de dimensiune *doi deoarece* $\{1, i\}$ *este o bază:* $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.
- $dim_K(Mat_{m,n}(K)) =$

Dimensiune

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K care admite un sistem de generatori finit. Se numește *dimensiunea lui V peste K* numărul natural $dim_K(V)$ definit prin:

$$dim_K(V) = \text{cardinalul unei baze a lui } V.$$

Exemple

- Fie $V = K^n$; deoarece
$$\{e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)\}$$
este o bază, deducem $dim_K(K^n) = n$.
- $\mathbb{C}$ este spațiu vectorial peste $\mathbb{R}$ de dimensiune *doi deoarece* $\{1, i\}$ *este o bază:* $dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.
- $dim_K(Mat_{m,n}(K)) = mn$.

Coordonate

Definiție

Fie V un spațiu vectorial și $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V. Fie $v \in V$ arbitrar; deoarece B este bază a lui V deducem că există și sunt unici scalarii $x_1, \ldots, x_n \in K$ astfel încât

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Spunem prin definiție că $(x_1, \ldots, x_n)$ sunt *coordonatele* lui v în raport cu baza B.

Coordonate

Definiție

Fie V un spațiu vectorial și $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V. Fie $v \in V$ arbitrar; deoarece B este bază a lui V deducem că există și sunt unici scalarii $x_1, \ldots, x_n \in K$ astfel încât

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Spunem prin definiție că $(x_1, \ldots, x_n)$ sunt *coordonatele* lui v în raport cu baza B.

Exemple

Coordonate

Definiție

Fie V un spațiu vectorial și $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V. Fie $v \in V$ arbitrar; deoarece B este bază a lui V deducem că există și sunt unici scalarii $x_1, \ldots, x_n \in K$ astfel încât

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Spunem prin definiție că $(x_1, \ldots, x_n)$ sunt *coordonatele* lui v în raport cu baza B.

Exemple

- Fie $V = K^n$ în care considerăm baza canonică. Atunci coordonatele unui vector $v = (x_1, \ldots, x_n)$ sunt

Coordonate

Definiție

Fie V un spațiu vectorial și $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ o bază a lui V. Fie $v \in V$ arbitrar; deoarece B este bază a lui V deducem că există și sunt unici scalarii $x_1, \dots, x_n \in K$ astfel încât

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Spunem prin definiție că $(x_1, \dots, x_n)$ sunt *coordonatele* lui v în raport cu baza B.

Exemple

- Fie $V = K^n$ în care considerăm baza canonică. Atunci coordonatele unui vector $v = (x_1, \dots, x_n)$ sunt chiar componentele sale, $x_1, \dots, x_n$.

Coordonate

Definiție

Fie V un spațiu vectorial și $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V. Fie $v \in V$ arbitrar; deoarece B este bază a lui V deducem că există și sunt unici scalarii $x_1, \ldots, x_n \in K$ astfel încât

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Spunem prin definiție că $(x_1, \ldots, x_n)$ sunt *coordonatele* lui v în raport cu baza B.

Exemple

- Fie $V = K^n$ în care considerăm baza canonică. Atunci coordonatele unui vector $v = (x_1, \ldots, x_n)$ sunt chiar componentele sale, $x_1, \ldots, x_n$.
- $V = \mathbb{R}^3$ și baza $B = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, -2, 0), v_3 = (0, 0, 3)\}$.În raport cu această bază, coordonatele vectorului $v = (1, 2, 3)$ sunt

Coordonate

Definiție

Fie V un spațiu vectorial și $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V. Fie $v \in V$ arbitrar; deoarece B este bază a lui V deducem că există și sunt unici scalarii $x_1, \ldots, x_n \in K$ astfel încât

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Spunem prin definiție că $(x_1, \ldots, x_n)$ sunt *coordonatele* lui v în raport cu baza B.

Exemple

- Fie $V = K^n$ în care considerăm baza canonică. Atunci coordonatele unui vector $v = (x_1, \ldots, x_n)$ sunt chiar componentele sale, $x_1, \ldots, x_n$.
- $V = \mathbb{R}^3$ și baza $B = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, -2, 0), v_3 = (0, 0, 3)\}$.În raport cu această bază, coordonatele vectorului $v = (1, 2, 3)$ sunt $(1, -1, 1)$, deoarece

Coordonate

Definiție

Fie V un spațiu vectorial și $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V. Fie $v \in V$ arbitrar; deoarece B este bază a lui V deducem că există și sunt unici scalarii $x_1, \ldots, x_n \in K$ astfel încât

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Spunem prin definiție că $(x_1, \ldots, x_n)$ sunt *coordonatele* lui v în raport cu baza B.

Exemple

- Fie $V = K^n$ în care considerăm baza canonică. Atunci coordonatele unui vector $v = (x_1, \ldots, x_n)$ sunt chiar componentele sale, $x_1, \ldots, x_n$.
- $V = \mathbb{R}^3$ și baza $B = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, -2, 0), v_3 = (0, 0, 3)\}$.În raport cu această bază, coordonatele vectorului $v = (1, 2, 3)$ sunt $(1, -1, 1)$, deoarece $v = 1 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$

Definiții, exemple

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. O submulțime $V' \subset V$ se numește *subspațiu vectorial* dacă

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in V' \Rightarrow \alpha u + \beta v \in V'.$$

Definiții, exemple

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. O submulțime $V' \subset V$ se numește *subspațiu vectorial* dacă

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in V' \Rightarrow \alpha u + \beta v \in V'.$$

Exemple

Definiții, exemple

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. O submulțime $V' \subset V$ se numește *subspațiu vectorial* dacă

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in V' \Rightarrow \alpha u + \beta v \in V'.$$

Exemple

- Fie $V = \mathbb{R}^3$ și $V' = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Atunci V' este subspațiu vectorial deoarece $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și

Definiții, exemple

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. O submulțime $V' \subset V$ se numește *subspațiu vectorial* dacă

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in V' \Rightarrow \alpha u + \beta v \in V'.$$

Exemple

- Fie $V = \mathbb{R}^3$ și $V' = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Atunci V' este subspațiu vectorial deoarece $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $\forall u = (x_1, y_1, 0), v = (x_2, y_2, 0) \in V'$

Definiții, exemple

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. O submulțime $V' \subset V$ se numește *subspațiu vectorial* dacă

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in V' \Rightarrow \alpha u + \beta v \in V'.$$

Exemple

- Fie $V = \mathbb{R}^3$ și $V' = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Atunci V' este subspațiu vectorial deoarece $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $\forall u = (x_1, y_1, 0), v = (x_2, y_2, 0) \in V'$ avem

$$\alpha u + \beta v =$$

Definiții, exemple

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. O submulțime $V' \subset V$ se numește *subspațiu vectorial* dacă

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in V' \Rightarrow \alpha u + \beta v \in V'.$$

Exemple

- Fie $V = \mathbb{R}^3$ și $V' = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Atunci V' este subspațiu vectorial deoarece $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $\forall u = (x_1, y_1, 0), v = (x_2, y_2, 0) \in V'$ avem
$$\alpha u + \beta v = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0) \in V'.$$

Definiții, exemple

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. O submulțime $V' \subset V$ se numește *subspațiu vectorial* dacă

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in V' \Rightarrow \alpha u + \beta v \in V'.$$

Exemple

- Fie $V = \mathbb{R}^3$ și $V' = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Atunci V' este subspațiu vectorial deoarece $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $\forall u = (x_1, y_1, 0), v = (x_2, y_2, 0) \in V'$ avem
$$\alpha u + \beta v = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0) \in V'.$$
- Fie $V = \mathbb{R}^2$ și $V' = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}\}$. Atunci V'

Definiții, exemple

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. O submulțime $V' \subset V$ se numește *subspațiu vectorial* dacă

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in V' \Rightarrow \alpha u + \beta v \in V'.$$

Exemple

- Fie $V = \mathbb{R}^3$ și $V' = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Atunci V' este subspațiu vectorial deoarece $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $\forall u = (x_1, y_1, 0), v = (x_2, y_2, 0) \in V'$ avem
$$\alpha u + \beta v = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0) \in V'.$$
- Fie $V = \mathbb{R}^2$ și $V' = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}\}$. Atunci V' nu este subspațiu vectorial, deoarece,

Definiții, exemple

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K. O submulțime $V' \subset V$ se numește *subspațiu vectorial* dacă

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in V' \Rightarrow \alpha u + \beta v \in V'.$$

Exemple

- Fie $V = \mathbb{R}^3$ și $V' = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Atunci V' este subspațiu vectorial deoarece $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ și $\forall u = (x_1, y_1, 0), v = (x_2, y_2, 0) \in V'$ avem

$$\alpha u + \beta v = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, 0) \in V'.$$

- Fie $V = \mathbb{R}^2$ și $V' = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}\}$. Atunci V' nu este subspațiu vectorial, deoarece, de exemplu

$$\sqrt{2}(1, 1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin V'$$

Operații cu subspații vectoriale

Observație

Fie V un spațiu vectorial și $V_1, V_2 \subset V$ două subspații ale sale. Atunci $V_1 \cap V_2$ este un subspațiu vectorial al lui V.

Operații cu subspații vectoriale

Observație

Fie V un spațiu vectorial și $V_1, V_2 \subset V$ două subspații ale sale. Atunci $V_1 \cap V_2$ este un subspațiu vectorial al lui V.

Definiție

Fie V un spațiu vectorial și $V_1, V_2 \subset V$ două subspații ale sale. Definim

$$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

Remarcă. Similar, putem defini suma unei familii arbitrare de subspații $V_1, \ldots, V_n \subset V$:

$$V_1 + \cdots + V_2 = \{v_1 + v_2 + \cdots + v_n | v_i \in V_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Operații cu subspații vectoriale

Observație

Fie V un spațiu vectorial și $V_1, V_2 \subset V$ două subspații ale sale. Atunci $V_1 \cap V_2$ este un subspațiu vectorial al lui V.

Definiție

Fie V un spațiu vectorial și $V_1, V_2 \subset V$ două subspații ale sale. Definim

$$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 | v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

Remarcă. Similar, putem defini suma unei familii arbitrare de subspații $V_1, \ldots, V_n \subset V$:

$$V_1 + \cdots + V_2 = \{v_1 + v_2 + \cdots + v_n | v_i \in V_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial și $V_1, V_2 \subset V$ două subspații ale sale. Atunci $V_1 + V_2 \subset V$ este un subspațiu vectorial.

Dimensiunea subspațiilor vectoriale

Observație

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K și $U \subset V$ un subspațiu. Atunci

$$dim_K(U) \leq dim_K(V)$$

Dimensiunea subspațiilor vectoriale

Observație

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K și $U \subset V$ un subspațiu. Atunci

$$dim_K(U) \leq dim_K(V)$$

și egalitatea are loc dacă și numai dacă $U = V$.

Dimensiunea subspațiilor vectoriale

Observație

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K și $U \subset V$ un subspațiu. Atunci

$$dim_K(U) \leq dim_K(V)$$

și egalitatea are loc dacă și numai dacă $U = V$.

Teorema dimensiunii sumei a două subspații (Grassmann)

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K și $U_1, U_2 \subset V$ subspații vectoriale. Atunci

Dimensiunea subspațiilor vectoriale

Observație

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K și $U \subset V$ un subspațiu. Atunci

$$dim_K(U) \leq dim_K(V)$$

și egalitatea are loc dacă și numai dacă $U = V$.

Teorema dimensiunii sumei a două subspații (Grassmann)

Fie V un spațiu vectorial peste un corp K și $U_1, U_2 \subset V$ subspații vectoriale. Atunci

$$dim_K(U_1 + U_2) = dim_K(U_1) + dim_K(U_2) - dim_K(U_1 \cap U_2)$$

Sume directe de subspații vectoriale

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $U_1, U_2 \subset V$ două subspații vectoriale. Spunem că U_1 și U_2 se *sumează direct* (sau că sunt *sumanzi direcți*) dacă pentru orice $v \in U_1 + U_2$ există *și sunt unici* $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ astfel încât $v = u_1 + u_2$. În acest caz notăm suma subspațiilor astfel: $U_1 \oplus U_2$.

Sume directe de subspații vectoriale

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $U_1, U_2 \subset V$ două subspații vectoriale. Spunem că U_1 și U_2 se *sumează direct* (sau că sunt *sumanzi direcți*) dacă pentru orice $v \in U_1 + U_2$ există *și sunt unici* $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ astfel încât $v = u_1 + u_2$. În acest caz notăm suma subspațiilor astfel: $U_1 \oplus U_2$.

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $U_1, U_2 \subset V$ două subspații vectoriale. Atunci U_1 și U_2 sunt sumanzi direcți dacă și numai dacă

$$U_1 \cap U_2 = \{0\}.$$

Sume directe de subspații vectoriale

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $U_1, U_2 \subset V$ două subspații vectoriale. Spunem că U_1 și U_2 se *sumează direct* (sau că sunt *sumanzi direcți*) dacă pentru orice $v \in U_1 + U_2$ există *și sunt unici* $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ astfel încât $v = u_1 + u_2$. În acest caz notăm suma subspațiilor astfel: $U_1 \oplus U_2$.

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $U_1, U_2 \subset V$ două subspații vectoriale. Atunci U_1 și U_2 sunt sumanzi direcți dacă și numai dacă

$$U_1 \cap U_2 = \{0\}.$$

Corolar

Fie V un spațiu vectorial, $U_1, U_2 \subset V$ două subspații vectoriale. Dacă U_1, U_2 se sumează direct, atunci

$$dim_K(U_1 \oplus U_2) =$$

Sume directe de subspații vectoriale

Definiție

Fie V un spațiu vectorial, $U_1, U_2 \subset V$ două subspații vectoriale. Spunem că U_1 și U_2 se *sumează direct* (sau că sunt *sumanzi direcți*) dacă pentru orice $v \in U_1 + U_2$ există *și sunt unici* $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ astfel încât $v = u_1 + u_2$. În acest caz notăm suma subspațiilor astfel: $U_1 \oplus U_2$.

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $U_1, U_2 \subset V$ două subspații vectoriale. Atunci U_1 și U_2 sunt sumanzi direcți dacă și numai dacă

$$U_1 \cap U_2 = \{0\}.$$

Corolar

Fie V un spațiu vectorial, $U_1, U_2 \subset V$ două subspații vectoriale. Dacă U_1, U_2 se sumează direct, atunci

$$dim_K(U_1 \oplus U_2) = dim_K(U_1) + dim_K(U_2).$$

Caracterizarea subspațiilor vectoriale utilizând sisteme de coordonate

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ o bază fixată. Fie $U \subset V$ o submulțime. Atunci U este subspațiu vectorial dacă și numai dacă

Caracterizarea subspațiilor vectoriale utilizând sisteme de coordonate

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ o bază fixată. Fie $U \subset V$ o submulțime. Atunci U este subspațiu vectorial dacă și numai dacă există o matrice $A = (a_{ij}) \in Mat_{n,m}(K)$ astfel încât U este mulțimea *tuturor* vectorilor v de coordonate $X = (x_1, \ldots, x_n)$ (în raport cu baza B) pentru care

Caracterizarea subspațiilor vectoriale utilizând sisteme de coordonate

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ o bază fixată. Fie $U \subset V$ o submulțime. Atunci U este subspațiu vectorial dacă și numai dacă există o matrice $A = (a_{ij}) \in Mat_{n,m}(K)$ astfel încât U este mulțimea *tuturor* vectorilor v de coordonate $X = (x_1, \ldots, x_n)$ (în raport cu baza B) pentru care

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Caracterizarea subspațiilor vectoriale utilizând sisteme de coordonate

Teoremă

Fie V un spațiu vectorial, $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ o bază fixată. Fie $U \subset V$ o submulțime. Atunci U este subspațiu vectorial dacă și numai dacă există o matrice $A = (a_{ij}) \in Mat_{n,m}(K)$ astfel încât U este mulțimea *tuturor* vectorilor v de coordonate $X = (x_1, \ldots, x_n)$ (în raport cu baza B) pentru care

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarcă importantă.

În condițiile de mai sus avem $dim_K(U) = dim_K(V) - rang(A)$.

Aplicații liniare. Definiții, exemple

Definiție

Fie U, V spații vectoriale peste același corp K. O funcție $f : U \to V$ se numește *aplicație liniară* (sau *morfism de spații vectoriale*) dacă pentru orice doi vectori $u_1, u_2 \in U$ și orice doi scalari $\alpha, \beta \in K$ avem

$$f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2).$$

Aplicații liniare. Definiții, exemple

Definiție

Fie U, V spații vectoriale peste același corp K. O funcție $f : U \to V$ se numește *aplicație liniară* (sau *morfism de spații vectoriale*) dacă pentru orice doi vectori $u_1, u_2 \in U$ și orice doi scalari $\alpha, \beta \in K$ avem

$$f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2).$$

Exemple

Aplicații liniare. Definiții, exemple

Definiție

Fie U, V spații vectoriale peste același corp K. O funcție $f : U \to V$ se numește *aplicație liniară* (sau *morfism de spații vectoriale*) dacă pentru orice doi vectori $u_1, u_2 \in U$ și orice doi scalari $\alpha, \beta \in K$ avem

$$f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2).$$

Exemple

- Fie $U = V = \mathbb{R}^2$ și $f : U \to V$, $f(x_1, x_2) = 3(x_1, x_2)$.

Aplicații liniare. Definiții, exemple

Definiție

Fie U, V spații vectoriale peste același corp K. O funcție $f : U \to V$ se numește *aplicație liniară* (sau *morfism de spații vectoriale*) dacă pentru orice doi vectori $u_1, u_2 \in U$ și orice doi scalari $\alpha, \beta \in K$ avem

$$f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2).$$

Exemple

- Fie $U = V = \mathbb{R}^2$ și $f : U \to V$, $f(x_1, x_2) = 3(x_1, x_2)$.
- Putem extinde exemplul anterior astfel. Fie $A \in Mat_{22}(\mathbb{R})$ o matrice arbitrară,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Definim $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ prin

Aplicații liniare. Definiții, exemple

Definiție

Fie U, V spații vectoriale peste același corp K. O funcție $f : U \to V$ se numește *aplicație liniară* (sau *morfism de spații vectoriale*) dacă pentru orice doi vectori $u_1, u_2 \in U$ și orice doi scalari $\alpha, \beta \in K$ avem

$$f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2).$$

Exemple

- Fie $U = V = \mathbb{R}^2$ și $f : U \to V$, $f(x_1, x_2) = 3(x_1, x_2)$.
- Putem extinde exemplul anterior astfel. Fie $A \in Mat_{22}(\mathbb{R})$ o matrice arbitrară,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Definim $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ prin

$$f_A(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$$

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

$$Im(f) = \{v \in V | \exists u \in U, f(u) = v\}.$$

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

$$Im(f) = \{v \in V | \exists u \in U, f(u) = v\}.$$

- *Nucleul* lui f, $Ker(f)$, prin:

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

$$Im(f) = \{v \in V | \exists u \in U, f(u) = v\}.$$

- *Nucleul* lui f, $Ker(f)$, prin:

$$Ker(f) = \{u \in U | f(u) = 0\}.$$

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

$$Im(f) = \{v \in V | \exists u \in U, f(u) = v\}.$$

- *Nucleul* lui f, $Ker(f)$, prin:

$$Ker(f) = \{u \in U | f(u) = 0\}.$$

Teoremă

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

$$Im(f) = \{v \in V | \exists u \in U, f(u) = v\}.$$

- *Nucleul* lui f, $Ker(f)$, prin:

$$Ker(f) = \{u \in U | f(u) = 0\}.$$

Teoremă

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

- $Ker(f) \subset U$ și $Im(f) \subset V$ sunt subspații vectoriale;

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

$$Im(f) = \{v \in V | \exists u \in U, f(u) = v\}.$$

- *Nucleul* lui f, $Ker(f)$, prin:

$$Ker(f) = \{u \in U | f(u) = 0\}.$$

Teoremă

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

- $Ker(f) \subset U$ și $Im(f) \subset V$ sunt subspații vectoriale;
- f este surjectivă dacă și numai dacă $Im(f) = V$;

Nucleul și imaginea unei aplicații liniare

Definiții

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Definim:

- *Imaginea* lui f, $Im(f)$, prin:

$$Im(f) = \{v \in V | \exists u \in U, f(u) = v\}.$$

- *Nucleul* lui f, $Ker(f)$, prin:

$$Ker(f) = \{u \in U | f(u) = 0\}.$$

Teoremă

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

- $Ker(f) \subset U$ și $Im(f) \subset V$ sunt subspații vectoriale;
- f este surjectivă dacă și numai dacă $Im(f) = V$;
- f este injectivă dacă și numai dacă $Ker(f) = \{0_U\}$.

Dimensiunea nucleului și imaginii unei aplicații liniare

Teoremă ("teorema dimensiunii pentru aplicații liniare")

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

Dimensiunea nucleului și imaginii unei aplicații liniare

Teoremă ("teorema dimensiunii pentru aplicații liniare")

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

$$dim_K(Ker(f)) + dim_K(Im(f)) = dim_K(U).$$

Dimensiunea nucleului și imaginii unei aplicații liniare

Teoremă ("teorema dimensiunii pentru aplicații liniare")

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

$$dim_K(Ker(f)) + dim_K(Im(f)) = dim_K(U).$$

Corolar

Fie U, V două spații vectoriale (peste același corp K). Dacă:

Dimensiunea nucleului și imaginii unei aplicații liniare

Teoremă ("teorema dimensiunii pentru aplicații liniare")

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

$$dim_K(Ker(f)) + dim_K(Im(f)) = dim_K(U).$$

Corolar

Fie U, V două spații vectoriale (peste același corp K). Dacă:

- $dim_K(U) < dim_K(V)$ atunci

Dimensiunea nucleului și imaginii unei aplicații liniare

Teoremă ("teorema dimensiunii pentru aplicații liniare")

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

$$dim_K(Ker(f)) + dim_K(Im(f)) = dim_K(U).$$

Corolar

Fie U, V două spații vectoriale (peste același corp K). Dacă:

- $dim_K(U) < dim_K(V)$ atunci nu există nici o aplicație surjectivă liniară $f : U \to V$;

Dimensiunea nucleului și imaginii unei aplicații liniare

Teoremă ("teorema dimensiunii pentru aplicații liniare")

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

$$dim_K(Ker(f)) + dim_K(Im(f)) = dim_K(U).$$

Corolar

Fie U, V două spații vectoriale (peste același corp K). Dacă:

- $dim_K(U) < dim_K(V)$ atunci nu există nici o aplicație surjectivă liniară $f : U \to V$;
- $dim_K(U) > dim_K(V)$ atunci

Dimensiunea nucleului și imaginii unei aplicații liniare

Teoremă ("teorema dimensiunii pentru aplicații liniare")

Fie $f : U \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

$$dim_K(Ker(f)) + dim_K(Im(f)) = dim_K(U).$$

Corolar

Fie U, V două spații vectoriale (peste același corp K). Dacă:

- $dim_K(U) < dim_K(V)$ atunci nu există nici o aplicație surjectivă liniară $f : U \to V$;
- $dim_K(U) > dim_K(V)$ atunci nu există nici o aplicație injectivă liniară $f : U \to V$;

Matricea unei aplicații liniare

Definiție

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o aplicație liniară și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Se numește *matricea asociată lui f în raport cu bazele date* matricea $A = (a_{ij})$ definită prin

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Matricea unei aplicații liniare

Definiție

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o aplicație liniară și $B_U = \{e_1, \dots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \dots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Se numește *matricea asociată lui f în raport cu bazele date* matricea $A = (a_{ij})$ definită prin

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Exemplu

Fie $U = V = \mathbb{R}^2$, $B_U = B_V = \{e_1 = (1,1), e_2 = (0,2)\}$ și $f : U \to V, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Avem:

Matricea unei aplicații liniare

Definiție

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o aplicație liniară și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Se numește *matricea asociată lui f în raport cu bazele date* matricea $A = (a_{ij})$ definită prin

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Exemplu

Fie $U = V = \mathbb{R}^2$, $B_U = B_V = \{e_1 = (1,1), e_2 = (0,2)\}$ și $f : U \to V, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Avem:

$f(e_1) = (1,3) =$

Matricea unei aplicații liniare

Definiție

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o aplicație liniară și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Se numește *matricea asociată lui f în raport cu bazele date* matricea $A = (a_{ij})$ definită prin

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Exemplu

Fie $U = V = \mathbb{R}^2$, $B_U = B_V = \{e_1 = (1,1), e_2 = (0,2)\}$ și
$f : U \to V, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Avem:
$f(e_1) = (1,3) = e_1 + e_2$,

Matricea unei aplicații liniare

Definiție

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o aplicație liniară și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Se numește *matricea asociată lui f în raport cu bazele date* matricea $A = (a_{ij})$ definită prin

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Exemplu

Fie $U = V = \mathbb{R}^2$, $B_U = B_V = \{e_1 = (1,1), e_2 = (0,2)\}$ și $f : U \to V, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Avem:
$f(e_1) = (1,3) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = (-2,6) =$

Matricea unei aplicații liniare

Definiție

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o aplicație liniară și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Se numește *matricea asociată lui f în raport cu bazele date* matricea $A = (a_{ij})$ definită prin

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Exemplu

Fie $U = V = \mathbb{R}^2$, $B_U = B_V = \{e_1 = (1,1), e_2 = (0,2)\}$ și $f : U \to V, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Avem:
$f(e_1) = (1,3) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = (-2,6) = -2e_1 + 4e_2$,

Matricea unei aplicații liniare

Definiție

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o aplicație liniară și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Se numește *matricea asociată lui f în raport cu bazele date* matricea $A = (a_{ij})$ definită prin

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

Exemplu

Fie $U = V = \mathbb{R}^2$, $B_U = B_V = \{e_1 = (1,1), e_2 = (0,2)\}$ și $f : U \to V, f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_2)$. Avem: $f(e_1) = (1,3) = e_1 + e_2$, $f(e_2) = (-2,6) = -2e_1 + 4e_2$, deci matricea lui f va fi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Caracterizarea în coordonate a unei aplicații liniare

Teoremă

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o funcție, și $B_U = \{e_1, \dots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \dots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Atunci f este aplicație liniară dacă și numai dacă există o matrice A astfel încât, pentru orice $u \in U$ avem

$$Y = AX$$

unde

Caracterizarea în coordonate a unei aplicații liniare

Teoremă

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o funcție, și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Atunci f este aplicație liniară dacă și numai dacă există o matrice A astfel încât, pentru orice $u \in U$ avem

$$Y = AX$$

unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ respectiv $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix}$

sunt cordonatele lui

Caracterizarea în coordonate a unei aplicații liniare

Teoremă

Fie U, V două spații vectoriale, $f : U \to V$ o funcție, și $B_U = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset U$, $B_V = \{f_1, \ldots, f_m\} \subset V$ baze fixate. Atunci f este aplicație liniară dacă și numai dacă există o matrice A astfel încât, pentru orice $u \in U$ avem

$$Y = AX$$

unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ respectiv $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{pmatrix}$

sunt cordonatele lui u : $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ respectiv $f(u)$: $f(u) = \sum_{j=1}^{m} y_j f_j$.