$P\{[g(X_1,..,X_n), h(X_1,..,X_n)] \ni \theta\} = 1-\varepsilon$

Capitolul 7

Intervale de încredere

Definiţia 7.1 *Fie $X_1, ..., X_n$ o selecţie de volum n dintr–o populaţie caracterizată de variabila aleatoare X. Presupunem că X depinde de un parametru $\theta \in \mathbb{R}$. Considerăm două statistici $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ astfel încât $g(x_1, ..., x_n) \leq h(x_1, ..., x_n)$ pentru orice $x_1, ..., x_n$. Spunem că intervalul închis $[g, h]$ este interval de încredere cu pragul ε dacă*

$P(\{\omega \in \Omega \,|\, g(X_1(\omega), ..., X_n(\omega)) \leq \theta \leq h(X_1(\omega), ..., X_n(\omega))\}) = 1 - \varepsilon$.

Spunem de asemenea că intervalul $[g, h]$ este interval de încredere de nivel $1 - \varepsilon$.

7.1 Intervale de încredere pentru media variabilei normale dacă dispersia este cunoscută

Fie $X \sim N(m, \sigma^2)$ cu dispersia σ^2 cunoscută. Dorim să determinăm un interval de de încredere cu pragul $\varepsilon > 0$ dat pentru media m. Presupunem că avem o selecţie de volum n $X_1, ..., X_n$ dintr–o populaţie caracterizată de variabila aleatoare X. Reamintim că

$$\overline{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right), \text{ şi de aici} \qquad \overline{X} = \frac{X_1+...+X_n}{n} \tag{7.1}$$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - m}{\sigma} \sim N(0, 1). \tag{7.1'}$$

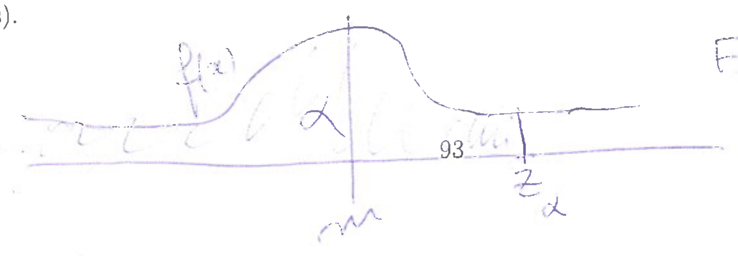
$F(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

Notăm cu F funcţia de repartiţie normală standard.

Definiţia 7.2 *Fie $\alpha \in (0, 1)$. Se numeşte cuantila de ordin α a repartiţiei normale standard valoarea $Z_\alpha = F^{-1}(\alpha)$ (inversa lui F calculată în α).*

Dacă $\alpha \geq 0,5$ valoarea Z_α se determină cu ajutorul tabelului cu repartiţia $N(0, 1)$: se caută în coloanele din dreapta valoarea β cea mai apropiată de α, apoi luăm Z_α valoarea din stânga lui β. Dacă $\alpha < 0,5$ se ia $Z_\alpha = -Z_{1-\alpha}$ din simetria graficului densităţii normale (clopotul lui Gauss).

$F(z_\alpha) = \alpha = P(X < z_\alpha)$



Exemplul 7.1 *Să se determine cuantilele de ordin* 0.65; 0.73; 0.2 *şi* 0.33.

Obţinem

$Z_{0.65} = 0,39$; $\quad Z_{0.73} = 0,61$;

$Z_{0.2} = -Z_{0.8} = -0,84$ *şi* $Z_{0.33} = -Z_{0,67} = -0,44$.

Dacă $Y \sim N(0,1)$ şi $\varepsilon > 0$ se observă că

$P\left(Z_{-\frac{\varepsilon}{2}} \le Y \le Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right) = 1-\varepsilon$. Deci

$P\left(-Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \le \sqrt{n}\cdot\frac{\overline{X}-m}{\sigma} \le Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right) = 1-\varepsilon$, şi de aici

$$P\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \le m \le \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right) = 1-\varepsilon. \tag{7.2}$$

Inervalul de încredere cu pragul ε este deci

$$I = \left[\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right]. \tag{7.3}$$

Observaţia 7.1 *Uneori în locul pragului* ε *se dă nivelul de încredere* $\alpha = 1-\varepsilon$. *În acest caz se calculează* $\varepsilon = 1-\alpha$, *apoi se determină intervalul de încredere cu pragul* ε.

Exemplul 7.2 *Se măsoară lungimea în cm a 12 bare metalice. Rezultatele sunt conform tabelului:*

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X_i	9,5	9,5	11,2	10,6	9,9	11,1	10,9	9,8	10,1	10,2	10,9	11

Se ştie că dispersia este $\sigma^2 = 4$. *Să se determine intervalul de încredere de nivel* $\alpha = 95\%$ *pentru medie.*

Avem

$\overline{X} = \frac{\sum_{j=1}^{12} X_j}{12} = \frac{9.5+9.5+\ldots+10.9+11}{12} = 10,39167$ *şi*

$\varepsilon = 1-0,95 = 0,05$.

Marginea din stânga a intervalului este

$\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}} = 10,39167 - \frac{2}{\sqrt{12}}\cdot Z_{0,975} = 10,39167 - \frac{2}{\sqrt{12}}\cdot 1.96 = 9,26006$.

Deoarece intervalul de încredere este centrat în $\overline{X}$, *marginea din dreapta este*

$2\cdot\overline{X} - 9,26006 = 2\cdot 10,39167 - 9,26006 = 11,52328$. $I = [9,26006; 11,52328]$

Lungimea unui interval de încredere cu pragul ε este $2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}$. Dacă se dau ε şi lungimea maximă a intervalului l, valoarea minimă a volumului selecţiei n se deduce din $2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \le l$.

Exemplul 7.3 *Presupunem analog exemplului anterior că* $\sigma^2 = 4$ *cunoscută. Să se determine numărul minim de măsurători pentru a construi un interval de încredere cu pragul* $\varepsilon = 5\%$ *şi lungime cel mult* $l = 0,2$.

Dacă $\overline{X} = 10$ *să se determine intervalul de încredere.*

Ecuaţia $2\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}} \le l$ *se scrie*

$\frac{4}{\sqrt{n}}\cdot 1,96 \le 0,2$.

Rezultă

$\sqrt{n} \ge 20\cdot 1,96 = 39,2$, *şi de aici*

$n \ge 39,2^2 = 1536,64$.

Deci $n = 1537$, *şi marginea din stânga este*
$10 - \frac{2}{\sqrt{1537}} \cdot 1.96 = 9.9$.
Marginea din dreapta este
$2 \cdot 10 - 9.9 = 10.1$, *şi intervalul de încredere cu pragul* $\varepsilon = 0,05$ *este*
$I = [9,9; 10.1]$.

7.2 Intervale de încredere pentru medie dacă dispersia este necunoscută

Definiţia 7.3 *Spunem că variabila aleatoare* X *are repartiţia Student cu* n *grade de libertate dacă densitatea sa de repartiţie este*
$f_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\sqrt{n}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$.

Observaţia 7.2 *Deoarece* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ *şi* $\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}$, *densitatea de repartiţie Student cu* n *grade de libertate se poate scrie*
$f_n(x) = \frac{\beta\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{n}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$.

Se poate demonstra că momentul de ordin $2k+1$, $k \geq 0$ este

$$M\left(X^{2k+1}\right) = 0, \ 2k+1 < n, \tag{7.4}$$

iar momentul de ordin $2k$ este
$M\left(X^{2k}\right) = \frac{n^k}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}-k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = n^k \cdot \frac{\prod_{j=1}^{k}\left(j-\frac{1}{2}\right)}{\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{n}{2}-j\right)}$. Rezultă

$$M\left(X^{2k}\right) = n^k \cdot \frac{\beta\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)}{\beta\left(\frac{n}{2}-k, \frac{1}{2}+k\right)} = n^k \cdot \frac{\prod_{j=1}^{k}(2j-1)}{\prod_{j=1}^{k}(n-2j)}, \ 2k < n. \tag{7.4'}$$

Momentele de ordin $k \geq n$ nu există. Deci dacă X este repartizată Student cu un grad de libertate, $M(X)$ nu există. Dacă X este repartizată Student cu două grade de libertate, $M(X) = 0$ şi $D(X) = \infty$. Dacă X este repartizată Student cu $n \geq 3$ grade de libertate avem

$$\begin{cases} M(X) = 0 \\ D(X) = \frac{n}{n-2} = 1 + \frac{2}{n-2} \end{cases}. \tag{7.5}$$

Pentru $n = \overline{1,5}$ densităţile de repartiţie Student cu n grade de libertate f_n sunt

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \\ f_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ f_3(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{3}\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^2} \\ f_4(x) = \frac{3}{8\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{5}{2}}} \\ f_5(x) = \frac{8}{3\pi\sqrt{5}\left(1+\frac{x^2}{5}\right)^3} \end{cases}. \tag{7.6}$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n = e^{x^2}$ rezultă

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{7.7}$$

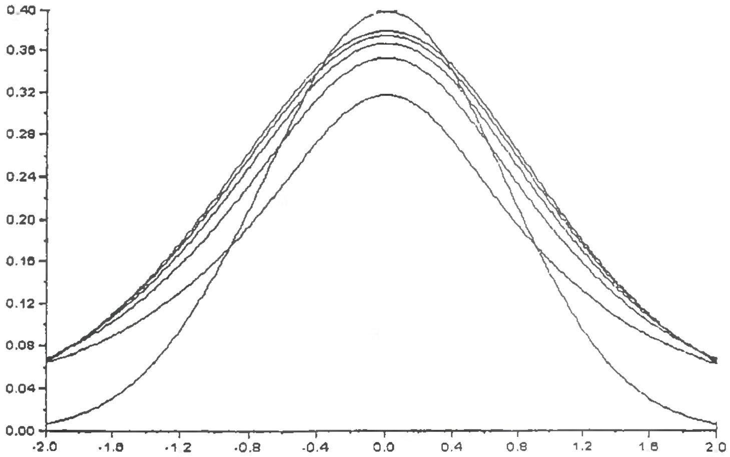


Fig. 7.1: Densitățile de repartiție Student cu n grade de libertate ($n = \overline{1,5}$), și densitatea de repartiție normală standard $N(0,1)$.

Densitatea Student cu un grad de libertate are maximul cel mai apropiat de Ox și este cea mai împrăștiată. Pe măsură ce numărul gradelor de libertate crește, maximul se depărtează de Ox, și se apropie de axa de simetrie Oy (dispersia scade). Pentru n suficient de mare graficul densității Student cu n grade de libertate se apropie de graficul densității normale (clopotul lui Gauss). Se observă de asemenea că graficele au aceeași formă.

Se pot demonstra următoarele teoreme.

Teorema 7.1 *Dacă variabila aleatoare X are repartiția $N(0,1)$ și variabila aleatoare Y are repartiția χ^2 cu n grade de libertate, atunci variabila aleatoare $Z = \sqrt{n}\cdot\frac{X}{\sqrt{Y}}$ are repartiția Student cu n grade de libertate.*

Teorema 7.2 *Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecție de volum n dintr-o populație caracterizată de variabila aleatoare $X \sim N(m, \sigma^2)$. Atunci $\sqrt{n-1}\cdot\frac{\overline{X}-m}{S}$, unde $S = \sqrt{S^2}$ este radical din dispersia de selecție, are repartiția Student cu $n-1$ grade de libertate.*

Vom nota cu t_n repartiţia Student cu n grade de libertate. Valorile funcţiilor de repartiţie t_n se găsesc în tabele pentru diferite valori ale lui n. Notăm cu F_n funcţia de repartiţie Student cu n grade de libertate.

Definiţia 7.4 *Se numeşte cuantila de ordin α a lui t_n valoarea $t_n(\alpha) = F_n^{-1}(\alpha)$.*

Deoarece graficul densităţii t_n are formă asemănătoare clopotului lui Gauss, cuantilele se determină analog celor de la repartiţia normală. Pe coloana ν se află numărul gradelor de libertate şi fiecare dintre celelalte coloane are la început (cap de tabel) ordinul cuantilei. Deci cuantila se găseşte la intersecţia dintre linia corespunzătoare numărului gradelor de libertate şi coloana corespunzătoare ordinului cuantilei. Pentru anumite valori ale lui α (valori mici) se poate aplica, analog cazului repartiţiei normale, formula $t_n(\alpha) = -t_n(1-\alpha)$.

Exemplul 7.4 *Să se calculeze $t_7(0,75)$, $t_{15}(0,95)$, $t_{22}(0,1)$ şi $t_5(0,05)$.*

Din tabelul cu repartiţia Student obţinem

$t_7(0,75) = 0,711$ *şi* $t_{15}(0,95) = 1,753$.

De asemenea, utilizând acelaşi tabel şi formula de mai sus, obţinem

$t_{22}(0,1) = -t_{22}(0,9) = -1,321$ *şi*

$t_5(0,05) = -t_5(0,95) = -2,015$.

În continuare vom determina intervalul de încredere cu pragul ε pentru medie, dacă dispersia este necunoscută. Obţinem

$\sqrt{n-1} \cdot \frac{\overline{X}-m}{S} \in \left[-t_{n-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right), t_{n-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]$.

Rezultă

$-\frac{S}{\sqrt{n-1}} \cdot t_{n-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \overline{X} - m \leq \frac{S}{\sqrt{n-1}} \cdot t_{n-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Deci dacă dispersia este necunoscută intervalul de încredere cu pragul ε este

$$I = \left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n-1}} \cdot t_{n-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right), \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n-1}} \cdot t_{n-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] \tag{7.8}$$

Se observă şi în acest caz că suma marginilor intervalului este $2 \cdot \overline{X}$, deci este suficient să calculăm un capăt a al său, celălat capăt calculându–se prin formula $b = 2 \cdot \overline{X} - a$.

Exemplul 7.5 *Să se determine intervalul de încredere cu nivelul $\alpha = 95\%$ în cazul exemplului 7.2, dacă nu cunoaştem dispersia.*

Avem $\varepsilon = 1 - \alpha = 0,05$. De asemenea

$\overline{X} = 10,39167$ *şi*

$\overline{X^2} = \frac{9,5^2+9,5^2+11,2^2+10,6^2+9,9^2+11,1^2+10.9^2+9,8^2+10,1^2+10,2^2+10.9^2+11^2}{12} = 108,3525$.

Rezultă

$S^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 108,3525 - 10,39167^2 = 0,36569$.

Marginea din stânga a intervalului de încredere este

$\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n-1}} \cdot t_{n-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) = 10,39167 - \frac{\sqrt{0.36569}}{\sqrt{11}} \cdot t_{11}(0,975) = 10,39167 - \frac{\sqrt{0,36569}}{\sqrt{11}} \cdot 2,201 = 9,99036$.

Marginea din dreapta este

$2 \cdot 10,39167 - 9,99036 = 10,79298$.

Deci dacă dispersia este necunoscută intervalul de încredere de nivel α este $I = [9,99036; 10,7929]$

$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ $D^2(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2$

Observaţia 7.3 *Dacă $n \geq 30$ putem considera că $\frac{\overline{X}-m}{S} \cdot \sqrt{n} \sim N(0,1)$, conform teoremei limită centrală.*

În acest caz intervalul de încredere cu pragul ε este

$$I = \left[\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}, \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right]. \tag{7.9}$$

Exemplul 7.6 *Se măsoară cantităţile de ciment din 120 m^3 de beton. Obţinem media de selecţie $\overline{X} = 8,4$ şi media de selecţie a pătratului cantităţii $\overline{X^2} = 72$. Să se determine intervalul de încredere cu pragul $\varepsilon = 3\%$ pentru medie.*

Dispersia de selecţie este

$S^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 72 - 8,4^2 = 1,44.$

Marginea din stânga a intervalului este

$\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}} = 8,4 - \frac{\sqrt{1,44}}{\sqrt{120}} \cdot Z_{0,985} = 8,4 - \frac{\sqrt{1,44}}{\sqrt{120}} \cdot 2,17 = 8,16229.$

Capătul din dreapta este

$2 \cdot 8,4 - 8,16229 = 8,63771.$

Deci intervalul de încredere este

$I = [8,16229; 8,63771].$

7.3 Intervale de încredere pentru dispersie

În secţiunile precedente am presupus că dispersia este cunoscută, respectiv necunoscută. Se pune problema construirii unui interval de încredere pentru dispersie cu pragul ε dat. Se poate demonstra următoarea teoremă.

Teorema 7.3 *Fie $X_1, \ldots, X_n$ o selecţie de volum n dintr-o populaţie caracterizată de variabila aleatoare $X \sim N(m, \sigma^2)$. Atunci $\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{X_j - \overline{X}}{\sigma}\right)^2$ este repartizată χ^2 cu $n-1$ grade de libertate.*

Observaţia 7.4 *Dacă în teorema 7.3 am înlocui $\overline{X}$ cu m am obţine o repartiţie χ^2 cu n grade de libertate. Un grad de libertate se pierde datorită legăturii $\sum_{j=1}^{n} X_j = n \cdot \overline{X}$.*

Aplicând teorema 7.3 obţinem

$$\frac{n \cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}. \tag{7.10}$$

Definiţia 7.5 *Se numeşte cuantila de ordin α a repartiţiei χ^2_n valoarea $\chi^2_n(\alpha) = F^{-1}(\alpha)$, unde F este funcţia de repartiţie a lui χ^2_n, iar F^{-1} este inversa lui F.*

Exemplul 7.7 *Să se determine $\chi^2_{14}(0,1)$, $\chi^2_{25}(0,75)$, $\chi^2_7(0,95)$, $\chi^2_3(0,9)$ şi $\chi^2_{30}(0,025)$.*

Utilizând tabelul cu repartiţia χ^2 obţinem

$\chi^2_{14}(0,1) = 7,78953$; $\chi^2_{25}(0,75) = 29,3389$; $\chi^2_7(0,95) = 14,0671$; $\chi^2_3(0,9) = 6.25139$ şi $\chi^2_{30}(0,025) = 16,7908$.

Aplicăm (7.10) şi obţinem
$\chi^2_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \le \frac{n\cdot S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$.
Rezultă că intervalul de încredere cu pragul ε pentru dispersie este

$$I = \left[\frac{n\cdot S^2}{\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)}, \frac{n\cdot S^2}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\right]. \tag{7.11}$$

Exemplul 7.8 *În exemplul 7.2 să se determine intervalul de încredere cu pragul $\varepsilon = 5\%$ pentru dispersie.*

Avem $\overline{X} = 10,39167$ *şi* $\overline{X^2} = 108,3525$, *conform exemplelor 7.2 şi 7.5.*
Rezultă $S^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 0,36569$.
Capătul din stânga al intervalului este
$\frac{12S^2}{\chi^2_{11}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{12S^2}{\chi^2_{11}(0,975)} = \frac{12\cdot 0,36569}{21,92} = 0,20018$.
Capătul din dreapta al intervalului este
$\frac{12S^2}{\chi^2_{11}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} = \frac{12S^2}{\chi^2_{11}(0,025)} = \frac{12\cdot 0.36569}{3,81575} = 1,15529$.
Intervalul de încredere cu pragul de 5% pentru dispersie este deci
$I = [0,20018; 1,15529]$.

7.4 Probleme propuse

1. Se măsoară cantitatea de ciment din 15 m^3 de beton. Rezultatele sunt conform tabelului:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X_i	3,6	3,9	4,5	3,8	4,4	4,9	4,2	3,8	3,52	4,51	4,4

i	12	13	14	15
X_i	3,45	4,9	5	3,2

Să se determine intervalele de încredere pentru cantitatea medie de ciment cu nivel 90%, prag 5% şi prag 1%, dacă dispersia este $\sigma^2 = 0,36$.

2. Să se rezolve problema anterioară dacă dispersia este necunoscută.

3. În cazul ultimelor două probleme, să se determine intervalele de încredere pentru dispersie.

4. Se măsoară acceleraţiile scoarţei terestre (în g) la 10 momente de timp. Rezultatele sunt conform tabelului:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	0,1	0,05	0,07	0,2	0,35	0,03	0,12	0,25	0,3	0,2

Să se determine intervalele de încredere pentru acceleraţia medie cu prag 5%, prag 3% şi prag 2%, dacă dispersia este $\sigma^2 = 0,01$.

5. Să se rezolve problema anterioară dacă dispersia este necunoscută, iar pragul în loc de 3% este 1%.

6. În cazul ultimei probleme, să se determine intervalele de încredere pentru dispersie.

Capitolul 8

Verificarea ipotezelor statistice

Fie $X_1, ..., X_n$ o selecţie de volum n dintr–o populaţie caracterizată de variabila aleatoare X, care depinde de un parametru θ. În aceste condiţii putem emite o ipoteză despre parametrul θ sau despre repartiţia variabilei aleatoare X. Această ipoteză trebuie verificată (dacă este adevărată sau falsă).

Definiţia 8.1 *Ipoteza pe care ne propunem s-o verificăm dacă este adevărată sau falsă se numeşte ipoteza nulă.*

Vom nota cu H_0 ipoteza nulă. Această ipoteză se verifică în raport cu o altă ipoteză, care este considerată adevărată dacă şi numai dacă ipoteza nulă este falsă.

Definiţia 8.2 *Ipoteza în raport cu care se verifică ipoteza nulă se numeşte ipoteza alternativă.*

Vom nota ipoteza alternativă cu H_1. De exemplu H_0 poate afirma că $\theta = \theta_0$, iar H_1 că $\theta = \theta_1$, unde $\theta_1 \neq \theta_0$, sau că $\theta \neq \theta_0$. De asemenea H_1 ar putea afirma că $\theta < \theta_0$, sau că $\theta > \theta_0$.

Definiţia 8.3 *O metodă matematică prin care verificăm dacă ipoteza nulă este adevărată se numeşte test. Dacă H_0 se referă numai la parametrul θ testul se numeşte test parametric. În caz contrar testul se numeşte test neparametric. Dacă H_0 afirmă că $\theta = \theta_0$ testul se numeşte test de semnificaţie. Dacă H_0 se referă la repartiţia variabilei aleatoare X testul se numeşte test de concordanţă.*

De exemplu dacă H_0 afirmă că media unei variabile aleatoare normale este $m = m_0$ testul este test parametric şi test de semnificaţie. Dacă H_0 afirmă că variabila aleatoare X are repartiţia normală, sau că are repartiţia $\exp(3)$ testul este test neparametric şi test de concordanţă.

Modalitatea prin care vom efectua un test este următoarea: vom calcula valoarea statisticii S cu argumentele particularizate de selecţia $X_1, ..., X_n$ şi în funcţie de valoarea sa acceptăm ipoteza nulă (spunem că H_0 este adevărată), sau o respingem (spunem că H_0 este falsă). Reamintim că o statistică este o funcţie de valorile din selecţia $X_1, ..., X_n$. Mai exact, vom considera regiunea $R_0 \subset \mathbb{R}$ şi vom accepta H_0 dacă şi numai dacă $S(X_1, ..., X_n) \in R_0$. Deoarece X_j sunt variabile aleatoare, rezultă că şi S este variabilă aleatoare.

Definiţia 8.4 *Se numeşte eroare de ordin I a unui test probabilitatea de a respinge ipoteza nulă dacă aceasta este adevărată. Eroarea de ordin I se mai numeşte şi pragul testului. Se numeşte eroarea de ordin II a unui test probabilitatea de a accepta ipoteza nulă dacă aceasta este falsă. Se numeşte puterea testului probabilitatea de a respinge ipoteza nulă dacă aceasta este falsă.*

Observaţia 8.1 *Conform definiţiei de mai sus, eroarea de ordin I este* $\varepsilon_1 = P\left(S \notin R_0 | H_0\right)$, *eroarea de ordin II este* $\varepsilon_2 = P\left(S \in R_0 | H_1\right)$ *şi puterea testului este* $\pi = 1 - \varepsilon_2$.

8.1 Teste de semnificaţie

8.1.1 Testul Z bilateral şi testele Z unilaterale pentru medie

Fie $X_1, ..., X_n$ o selecţie de volum n dintr–o populaţie caracterizată de variabila aleatoare $X \sim N\left(m, \sigma^2\right)$, unde σ^2 este cunoscută.

În toate cele trei teste prezentate în continuare ipoteza nulă va fi

$$H_0 : m = m_0, \tag{8.1}$$

unde $m_0 \in \mathbb{R}$ este un număr real dat.

Definiţia 8.5 *Se numeşte test Z bilateral testul care verifică ipoteza nulă (8.1) în raport cu ipoteza alternativă $H_1 : m \neq m_0$ cu pragul ε dat, dacă dispersia este cunoscută.*

Deoarece $\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$, dacă H_0 este adevărată $\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma} \sim N(0, 1)$.

Vom calcula

$$\boxed{\underset{calc}{Z} = \sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}.} \tag{8.2}$$

Deoarece $Z \sim N(0, 1)$ avem

$$P\left(|Z| < Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right) = F\left(Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right) - F\left(-Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \varepsilon, \tag{8.3}$$

Regula decizie Test

unde $Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}$ este cuantila de ordin $1 - \frac{\varepsilon}{2}$ a repartiţiei $N(0, 1)$.

Vom accepta H_0 dacă şi numai dacă

$$\boxed{|Z|_{calc} < Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}.} \tag{8.4}$$

Puterea testului va depinde de valoarea reală a mediei, m.

Deoarece $\sqrt{n} \cdot \frac{\overline{X} - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$ puterea testului este egală cu $P\left(|Z| > Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right)$, şi obţinem

$$\pi(m) = 1 - F\left(Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}} + \sqrt{n} \cdot \frac{m_0 - m}{\sigma}\right) + F\left(\sqrt{n} \cdot \frac{m_0 - m}{\sigma} - Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}\right). \tag{8.5}$$

Se poate demonstra că puterea este strict descrescătoare pe $(-\infty, m_0]$ şi strict crescătoare pe $[m_0, \infty)$. De asemenea

$$\begin{cases} \pi(m_0) = \varepsilon \\ \lim\limits_{m \to \pm\infty} \pi(m) = 1 \end{cases} \quad (8.6)$$

Exemplul 8.1 *Se măsoară grosimea a 10 cărămizi. Rezultatele sunt date de tabelul:*

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	9,7	10	9,5	11,25	10,75	9,5	12,5	11	10	10,75

Să se verifice ipoteza nulă $H_0 : m = 10$ în raport cu $H_1 : m \neq 10$ cu pragul $\varepsilon = 2,5\%$. Se ştie că dispersia este $\sigma^2 = 0,81$.

Media de selecţie este

$\overline{X} = \frac{9,7+10+9,5+11,25+10,75+9.5+12.5+11+10+10,75}{10} = 10,495.$

Rezultă

$Z = \sqrt{10} \cdot \frac{10,495-10}{\sqrt{0,81}} = 1,73925.$

Deoarece $Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}} = Z_{0,9875} = 2,24$ rezultă că $|Z| < Z_{1-\frac{\varepsilon}{2}}$, deci acceptăm H_0.

Definiţia 8.6 *Se numeşte test Z unilateral stânga testul care verifică ipoteza nulă $H_0 : m = m_0$ în raport cu ipoteza alternativă $H_1 : m < m_0$ cu un prag ε dat, dacă dispersia este cunoscută.*

Analog testului bilateral, vom accepta ipoteza nulă dacă şi numai dacă

Regula decizie

$$\boxed{Z > -Z_{1-\varepsilon}.} \quad (8.7)$$

calc

Puterea testului este

$$\pi(m) = F\left(\sqrt{n} \cdot \frac{m_0 - m}{\sigma} - Z_{1-\varepsilon}\right). \quad (8.8)$$

Se poate demonstra că puterea testului este strict descrescătoare în funcţie de valoarea reală a mediei, m, şi

$$\begin{cases} \lim\limits_{m \to -\infty} \pi(m) = 1 \\ \lim\limits_{m \to \infty} \pi(m) = 0 \\ \pi(m_0) = \varepsilon \end{cases} \quad (8.9)$$

Exemplul 8.2 *În condiţiile exemplului 8.1 să se verifice ipoteza $H_0 : m = 11,5$ în raport cu ipoteza $H_1 : m < 11,5$ cu pragul $\varepsilon = 2,5\%$ dacă dispersia este $\sigma^2 = 0,81$.*

$Z = \sqrt{10} \cdot \frac{10,495-11,5}{\sqrt{0,81}} = -3,53121.$

Deoarece $Z_{1-\varepsilon} = Z_{0,975} = 1,96$ rzultă

$Z < -Z_{1-\varepsilon}$, deci respingem H_0.

Definiţia 8.7 *Se numeşte test Z unilateral dreapta testul care verifică ipoteza nulă $H_0 : m = m_0$ în raport cu ipoteza alternativă $H_1 : m > m_0$ cu un prag ε dat, dacă dispersia este cunoscută.*

Vom accepta ipoteza nulă dacă şi numai dacă

Regula deciziei

$$\boxed{Z < Z_{1-\varepsilon}.} \quad (8.10)$$

calc

Puterea testului este

$$\pi(m) = 1 - F\left(\sqrt{n}\cdot\frac{m_0 - m}{\sigma} + Z_{1-\varepsilon}\right). \tag{8.11}$$

Se poate demonstra că puterea testului este strict crescătoare în funcţie de valoarea reală a mediei, m, şi

$$\begin{cases} \lim\limits_{m\to -\infty} \pi(m) = 0 \\ \lim\limits_{m\to\infty} \pi(m) = 1 \\ \pi(m_0) = \varepsilon \end{cases}. \tag{8.12}$$

Exemplul 8.3 *În condiţiile exemplelor anterioare să se verifice $H_0 : m = 10$ în raport cu $H_1 : m > 10$ cu pragul $\varepsilon = 2,5\%$ dacă dispersia este $\sigma^2 = 0,81$.*

Avem

$Z = 1,73925 < 1,96 = Z_{0,975}$, *deci acceptăm* H_0.

8.1.2 Testul student bilateral şi testele student unilaterale pentru medie

În condiţiile testelor Z presupunem acum că nu cunoaştem dispersia.

Definiţia 8.8 *Se numeşte test Student bilateral (sau test t bilateral) testul care verifică ipoteza nulă $H_0 : m = m_0$ în raport cu ipoteza alternativă $H_1 : m \neq m_0$ cu un prag ε dat, dacă dispersia este necunoscută. Se numeşte test Student unilateral stânga sau test t unilateral stânga testul care verifică ipoteza nulă $H_0 : m = m_0$ în raport cu ipoteza alternativă $H_1 : m < m_0$ cu un prag ε dat, dacă dispersia este necunoscută. Se numeşte test Student unilateral dreapta sau test t unilateral dreapta testul care verifică ipoteza nulă $H_0 : m = m_0$ în raport cu ipoteza alternativă $H_1 : m > m_0$ cu un prag ε dat, dacă dispersia este necunoscută.*

Pentru aceste teste se ţine cont că $\sqrt{n-1}\cdot\frac{\overline{X}-m_0}{S} \sim t_{n-1}$, unde $S^2 = \frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{j=1}^{n}\left(X_j - \overline{X}\right)^2$ este dispersia de selecţie a lui X şi t_{n-1} este repartiţia student cu $n-1$ grade de libertate.

Vom determina

$$\underset{calc}{T} = \sqrt{n-1}\cdot\frac{\overline{X}-m_0}{S}. \tag{8.13}$$

În cazul testului t bilateral vom accepta H_0 dacă şi numai dacă

Regula decizie

$$\boxed{\underset{calc}{|T|} < t_{n-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}, \tag{8.14}$$

unde $t_{n-1}\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ este cuantila de ordin $1-\frac{\varepsilon}{2}$ a repartiţiei Student cu $n-1$ grade de libertate.

Puterea testului este

$$\pi(m) = 1 - G_{n-1}\left(\sqrt{n-1}\cdot\tfrac{m_0-m}{S} + t_{n-1}\left(1-\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right) + G_{n-1}\left(\sqrt{n-1}\cdot\tfrac{m_0-m}{S} - t_{n-1}\left(1-\tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right). \tag{8.15}$$

unde G_{n-1} este funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare Student cu $n-1$ grade de libertate.

Datorită simetriei graficelor densităţilor de repartiţie Student şi din monotonia acestora, analog testului Z, rezultă că formula (8.6) este adevărată.

Exemplul 8.4 *Să se rezolve exemplul 8.1 dacă dispersia este necunoscută şi pragul este* $\varepsilon =$ 5%.

Momentul de selecţie de ordin 2 este
$\overline{X^2} = \frac{9,7^2+10^2+9,5^2+11,25^2+10,75^2+9,5^2+12.5^2+11^2+10^2+10,75^2}{10} = 110,95275.$
Rezultă că dispersia de selecţie este
$S^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 110,95275 - 10,495^2 = 0,80773,$ *şi*
$T = \sqrt{9} \cdot \frac{10,495}{\sqrt{0,80773}} = 1,65232.$
Dar $t_9(0,975) = 2,262.$
Rezultă $|T| < t_9\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, *deci acceptăm* H_0.

Regula decizie

În cazul testului Student unilateral stânga vom accepta ipoteza nulă dacă şi numai dacă

$$\boxed{T > -t_{n-1}(1-\varepsilon).} \tag{8.16}$$

Calc

Cu notaţiile din cazul testului t bilateral, puterea testului este

$$\pi(m) = G_{n-1}\left(\sqrt{n-1} \cdot \frac{m_0 - m}{S} - t_{n-1}(1-\varepsilon)\right). \tag{8.17}$$

Analog cazului testului bilateral, putem deduce că (8.9) este adevărată.

Exemplul 8.5 *Să se rezolve exemplul 8.2 dacă nu cunoaştem dispersia.*
Avem
$T = \sqrt{9} \cdot \frac{10,495-11.5}{\sqrt{0,80773}} = -3,3547.$
Deoarece $t_9(0,975) = 2,262$ *rezultă*
$T < -t_{n-1}(1-\varepsilon)$, *deci respingem* H_0.

În cazul testului Student unilateral dreapta vom accepta ipoteza nulă dacă şi numai dacă

$$\boxed{T < t_{n-1}(1-\varepsilon).} \tag{8.18}$$

Calc

Cu notaţiile din cazul testului t bilateral, puterea testului este

$$\pi(m) = 1 - G_{n-1}\left(\sqrt{n-1} \cdot \frac{m_0 - m}{S} + t_{n-1}(1-\varepsilon)\right). \tag{8.19}$$

Analog cazului testului bilateral, putem deduce că (8.12) este adevărată.

Exemplul 8.6 *Să se rezolve exemplul 8.3 dacă nu cunoaştem dispersia şi pragul este* $\varepsilon = 1\%$.
Avem
$T = 1,65232 < 2,821 = t_9(0,99)$, *deci acceptăm* H_0.

8.1.3 Testul χ^2 bilateral şi testele χ^2 unilaterale pentru dispersie

În testele de semnificaţie Z se presupune că ştim valoarea dispersiei σ^2, iar în cazul testelor Student se presupune că nu cunoaştem această valoare. În continuare vom defini teste de semnificaţie pentru dispersie.

Definiţia 8.9 *Se numeşte test χ^2 bilateral testul care verifică ipoteza nulă $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ în raport cu ipoteza alternativă $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ cu un prag ε dat. Se numeşte test χ^2 unilateral stânga testul care verifică ipoteza nulă $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ în raport cu ipoteza alternativă $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ cu un prag ε dat. Se numeşte test χ^2 unilateral dreapta testul care verifică ipoteza nulă $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ în raport cu ipoteza alternativă $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ cu un prag ε dat.*

Se va calcula

$$\boxed{\underset{\text{Calc}}{X} = \frac{n \cdot S^2}{\sigma_0^2}.} \tag{8.20}$$

În cazul testului bilateral vom accepta ipoteza nulă dacă şi numai dacă

Regula decizie

$$\boxed{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) < \underset{\text{Calc}}{X} < \chi^2_{n-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right).} \tag{8.21}$$

Exemplul 8.7 *În cazul exemplului 8.1 să se verifice ipoteza nulă $H_0 : \sigma^2 = 0,81$ în raport cu ipoteza alternativă $H_1 : \sigma^2 \neq 0,81$ cu pragul $\varepsilon = 2\%$.*

Deoarece $S^2 = 0,80773$ avem

$\underset{\text{calc}}{X} = \frac{10 \cdot S^2}{\sigma_0^2} = \frac{10 \cdot 0,80773}{0,81} = 9,971975.$

Dar $\chi_9^2(0,01) = 2,087912$ şi $\chi_9^2(0,99) = 21,666$.

Deci $\chi_9^2(0,01) < \underset{\text{Calc}}{X} < \chi_9^2(0,99)$, şi acceptăm ipoteza nulă.

În cazul testului unilateral stânga vom accepta ipoteza nulă dacă şi numai dacă

Regula decizie

$$\boxed{\underset{\text{Calc}}{X} > \chi^2_{n-1}(\varepsilon).} \tag{8.22}$$

Exemplul 8.8 *În cazul exemplului 8.1 să se verifice ipoteza nulă $H_0 : \sigma^2 = 0,64$ în raport cu ipoteza alternativă $H_1 : \sigma^2 < 0,64$ cu pragul $\varepsilon = 2,5\%$.*

Deoarece $S^2 = 0,80773$ avem

$\underset{\text{calc}}{X} = \frac{10 \cdot S^2}{\sigma_0^2} = \frac{10 \cdot 0,80773}{0.64} = 12,62078.$

Dar $\chi_9^2(0,025) = 2,70039$.

Deci $\underset{\text{calc}}{X} > \chi_9^2(0,025)$, şi acceptăm ipoteza nulă.

În cazul testului unilateral dreapta vom accepta ipoteza nulă dacă şi numai dacă

Regula decizie

$$\boxed{\underset{\text{calc}}{X} < \chi^2_{n-1}(1 - \varepsilon).} \tag{8.23}$$

Exemplul 8.9 *În cazul exemplului 8.1 să se verifice ipoteza nulă $H_0 : \sigma^2 = 0,81$ în raport cu ipoteza alternativă $H_1 : \sigma^2 > 0,81$ cu pragul $\varepsilon = 1\%$.*

Deoarece $S^2 = 0,80773$ avem

$\underset{\text{calc}}{X} = \frac{10 \cdot S^2}{\sigma_0^2} = \frac{10 \cdot 0,80773}{0,81} = 9,971975.$

Dar $\chi_9^2(0,99) = 21,666$.

Deci $\underset{\text{calc}}{X} < \chi_9^2(0,99)$, şi acceptăm ipoteza nulă.

Tabelul 4.3.1

H_0	H_1	Regiunea critică
$\rho_{XY} = \rho_{UV}$	$\rho_{XY} > \rho_{UV}$	$U > u_{1-\alpha}$
$\rho_{XY} = \rho_{UV}$	$\rho_{XY} < \rho_{UV}$	$U < u_{\alpha}$
$\rho_{XY} = \rho_{UV}$	$\rho_{XY} \neq \rho_{UV}$	$\lvert U\rvert > u_{1-\alpha/2}$

Algoritmul folosit este următorul:

1) **Se calculează** r_{XY} **și** r_{UV}.

2) **Se calculează**

$$U_{XY} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{XY}}{1-r_{XY}},$$

$$U_{UV} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r_{UV}}{1-r_{UV}}$$

3) Se calculează U dată de (4.3.1)

4) Din tabele se extrage cuantila corespunzătoare pragului de semnificație .

Observație Dacă m = n sau dacă m și n sunt suficient de mari, verificarea nu necesită cunoașterea lui ρ.

Complementara regiunii critice pentru verificarea ipotezei $H_0 : \rho_{XY}=\rho_{UV} = \rho$ față de $H_1 : \rho_{XY} \neq \rho_{UV}$,

$$\frac{2}{1/(n-1)-1/(m-1)}\left[(U_{XY}-U_{UV})-\sigma u_{1-\alpha/2}\right] < \rho <$$

$$< \frac{2}{1/(n-1)-1/(m-1)}\left[(U_{XY}-U_{UV})+\sigma u_{1-\alpha/2}\right]$$

unde $\sigma^2 = 1/(n-3)+1/(m-3)$, constituie un interval de încredere pentru valoarea comună ρ a coeficientului de corelație cu coeficientul de încredere 1 - α.

$\Phi(z)+\Phi(-z)=1$

Tabelul 1

Valorile funcției lui Laplace Φ(z)

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0, 6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0.7190	0.7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0.7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0.7673	0,7703	0,7734	0,7764	0.7794	0.7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0.7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0.8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0.8264	0,8289	0,8315	0.8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670

2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	$0{,}9^{2}0097$	$0{,}9^{2}0358$	$0{,}9^{2}0613$	$0{,}9^{2}0863$	$0{,}9^{2}1106$	$0{,}9^{2}1344$	$0{,}9^{2}1576$
2,4	$0{,}9^{2}1802$	$0{,}9^{2}2024$	$0{,}9^{2}2240$	$0{,}9^{2}2451$	$0{,}9^{2}2656$	$0{,}9^{2}857$	$0{,}9^{2}3053$	$0{,}9^{2}3244$	$0{,}9^{2}3431$	$0{,}9^{2}3613$
2,5	$0{,}9^{2}3790$	$0{,}9^{2}3963$	$0{,}9^{2}4132$	$0{,}9^{2}4297$	$0{,}9^{2}4457$	$0{,}9^{2}4614$	$0{,}9^{2}4766$	$0{,}9^{2}4915$	$0{,}9^{2}5060$	$0{,}9^{2}5201$
2,6	$0{,}9^{2}5339$	$0{,}9^{2}5473$	$0{,}9^{2}5604$	$0{,}9^{2}5731$	$0{,}9^{2}5855$	$0{,}9^{2}5975$	$0{,}9^{2}6093$	$0{,}9^{2}6207$	$0{,}9^{2}6319$	$0{,}9^{2}6427$
2,7	$0{,}9^{2}6533$	$0{,}9^{2}6636$	$0{,}9^{2}6736$	$0{,}9^{2}6833$	$0{,}9^{2}6928$	$0{,}9^{2}7020$	$0{,}9^{2}7110$	$0{,}9^{2}7197$	$0{,}9^{2}7282$	$0{,}9^{2}7365$
2,8	$0{,}9^{2}7445$	$0{,}9^{2}7523$	$0{,}9^{2}7599$	$0{,}9^{2}7673$	$0{,}9^{2}7744$	$0{,}9^{2}7814$	$0{,}9^{2}7882$	$0{,}9^{2}7948$	$0{,}9^{2}8012$	$0{,}9^{2}8074$
2,9	$0{,}9^{2}8134$	$0{,}9^{2}8193$	$0{,}9^{2}8250$	$0{,}9^{2}8305$	$0{,}9^{2}8359$	$0{,}9^{2}8411$	$0{,}9^{2}8462$	$0{,}9^{2}8511$	$0{,}9^{2}8559$	$0{,}9^{2}8605$
3,0	$0{,}9^{2}8650$	$0{,}9^{2}8694$	$0{,}9^{2}8736$	$0{,}9^{2}8777$	$0{,}9^{2}8817$	$0{,}9^{2}8856$	$0{,}9^{2}8893$	$0{,}9^{2}8930$	$0{,}9^{2}8965$	$0{,}9^{2}8999$
3,1	$0{,}9^{3}0324$	$0{,}9^{3}0646$	$0{,}9^{3}0957$	$0{,}9^{3}1260$	$0{,}9^{3}1553$	$0{,}9^{3}1836$	$0{,}9^{3}2112$	$0{,}9^{3}2378$	$0{,}9^{3}2636$	$0{,}9^{3}2886$
3,2	$0{,}9^{3}3129$	$0{,}9^{3}3363$	$0{,}9^{3}3590$	$0{,}9^{3}3810$	$0{,}9^{3}4024$	$0{,}9^{3}4230$	$0{,}9^{3}4429$	$0{,}9^{3}4623$	$0{,}9^{3}4810$	$0{,}9^{3}4991$
3,3	$0{,}9^{3}5166$	$0{,}9^{3}5335$	$0{,}9^{3}5499$	$0{,}9^{3}5658$	$0{,}9^{3}5811$	$0{,}9^{3}5959$	$0{,}9^{3}6103$	$0{,}9^{3}6242$	$0{,}9^{3}6376$	$0{,}9^{3}6505$
3,4	$0{,}9^{3}6631$	$0{,}9^{3}6752$	$0{,}9^{3}6869$	$0{,}9^{3}6982$	$0{,}9^{3}7091$	$0{,}9^{3}7197$	$0{,}9^{3}7299$	$0{,}9^{3}7398$	$0{,}9^{3}7493$	$0{,}9^{3}7585$
3,5	$0{,}9^{3}7674$	$0{,}9^{3}7759$	$0{,}9^{3}7842$	$0{,}9^{3}7922$	$0{,}9^{3}7999$	$0{,}9^{3}8074$	$0{,}9^{3}8146$	$0{,}9^{3}8215$	$0{,}9^{3}8282$	$0{,}9^{3}8347$
3,6	$0{,}9^{3}8409$	$0{,}9^{3}8469$	$0{,}9^{3}8527$	$0{,}9^{3}8583$	$0{,}9^{3}8637$	$0{,}9^{3}8689$	$0{,}9^{3}8739$	$0{,}9^{3}8787$	$0{,}9^{3}8834$	$0{,}9^{3}8879$
3,7	$0{,}9^{3}8922$	$0{,}9^{3}8964$	$0{,}9^{4}0039$	$0{,}9^{4}0426$	$0{,}9^{4}0799$	$0{,}9^{4}1158$	$0{,}9^{4}1504$	$0{,}9^{4}1838$	$0{,}9^{4}2159$	$0{,}9^{4}2468$
3,8	$0{,}9^{4}2765$	$0{,}9^{4}3052$	$0{,}9^{4}3327$	$0{,}9^{4}3593$	$0{,}9^{4}3848$	$0{,}9^{4}4094$	$0{,}9^{4}4331$	$0{,}9^{4}4558$	$0{,}9^{4}4777$	$0{,}9^{4}4988$
3,9	$0{,}9^{4}5190$	$0{,}9^{4}5385$	$0{,}9^{4}5573$	$0{,}9^{4}5753$	$0{,}9^{4}5926$	$0{,}9^{4}6092$	$0{,}9^{4}6253$	$0{,}9^{4}6408$	$0{,}9^{4}6554$	$0{,}9^{4}6896$
4,0	$0{,}9^{4}6833$	$0{,}9^{4}6964$	$0{,}9^{4}7090$	$0{,}9^{4}7211$	$0{,}9^{4}7327$	$0{,}9^{4}7439$	$0{,}9^{4}7546$	$0{,}9^{4}7649$	$0{,}9^{4}7748$	$0{,}9^{4}7843$

Tabelul 2

Cuantilele repartiției $\chi^2(m)$: $\chi^2_\alpha(m)$

$m \backslash \alpha$	0,005	0,010	0,025	0,05	0,95	0,975	0,990	0,99
1	392704×10^{-10}	157088×10^{-9}	982069×10^{-9}	333214×10^{4}	3,84146	5,02389	6,63490	7,87
2	0,0100251	0,0201007	0,0506356	0,102587	5,99147	7,37776	9,21034	10,55
3	0,0717212	0,114832	0,215795	0,351846	7,81473	9,34840	11,3449	12,83
4	0,206990	0,297110	0,484419	0.710721	9,48773	11,1433	13,2767	14,86
5	0,411740	0,554300	0,831211	1,145476	11,0705	12.8325	15,0863	16,74
6	0,675727	0,872085	1,237347	1,63539	12.5916	14,4494	16,8119	18,54
7	0,989265	1,239043	1,68987	2,16735	14,0671	16,0128	18,4753	20,27
8	1,344419	1,646482	2,17973	2.73264	15,5073	17,5346	20,0902	21,95
9	1,734926	2,087912	2,70039	3,32511	16,9190	19,0228	21,6660	23,58
10	2,15585	2,55821	3,24697	3,94030	18,3070	20,4831	23,2093	25,18
11	2,60321	3,05347	3,81575	4,57481	19.6751	21,9200	24,7250	26,75
12	3,07382	3,57056	4,40379	5,22603	21,0261	23,3367	26,2170	28,29
13	3,56503	4,10691	5,00874	5,89186	22.3621	24,7356	27,6883	29,81
14	4,07468	4,66043	5,62872	6,57063	23,6848	26,1190	29,1413	31,31
15	4,60094	5,22935	6,26214	7,26094	24,9958	27,4884	30,5779	32,80
16	5,14224	5,81221	6,90766	7,96164	26,2962	28,8454	31,9999	34,26
17	5,69724	6,40776	7,56418	8,67176	27,5871	30,1910	33,4087	35,71
18	6,26481	7,01491	8,23075	9,39046	28,8693	31,5264	34,8053	37,15
19	6,84398	7,63273	8,90655	10,1170	30,1435	32,8523	36,1908	38,58
20	7,43386	8,26040	9,59083	10,8508	31,4104	34,1696	37,5662	39,99

[illegible]	[illegible]	[illegible]	10,28293	11,5913	32,6705	35,4789	38,9321	41, 4010
22	8,64272	9,54249	10,9823	12,3380	33,9244	36,7807	40,2894	42,7956
23	9,26042	10,19567	11,6885	13,0905	35,1725	38,0757	41,6384	44,1813
24	9,88623	10,8564	12,4011	13,8484	36,4151	39,3641	42,9798	45,5585
25	10,5197	11,5240	13,1197	14,6114	37,6525	40,6465	44,3141	46,9278
26	11.1603	12,1981	13,8439	15,3791	38,8852	41,9232	45,6417	48,2899
27	11,8076	12,8786	14,5733	16,1513	40,1133	43,1944	46,9630	49,6449
28	12,4613	13,5648	15,3079	16,9279	41,3372	44,4607	48,2782	50,9933
29	13,1211	14,2565	16,0471	17,7083	42,5569	45,7222	49,5879	52,3356
30	13,7867	14,9535	16,7908	18,4926	43,7729	46,9792	50,8922	53,6720
40	20,7065	22,1643	24,4331	26,5093	55,7585	59,3417	63,6907	66,7659
50	27,9907	29,7067	32,3574	34,7642	67,5048	71,4202	76,1539	79,4900
60	35,5346	37,4848	40,4817	43,1879	79,0819	83,2976	88,3794	91,9517
70	43,2752	45,4418	48,7576	51,7393	90,5312	95,0231	100,425	104,215
80	51,1720	53,5400	57,1532	60,3915	101,879	106,629	112,329	116,321
90	59,1963	61,7541	65,6466	69,1260	113,145	118,136	124,116	123,299
100	67,3276	70,0648	74,2219	77,9295	124,342	129,561	135,807	140,169

Tabelul 3

Cuantilele repartiției $t(m):t_\alpha(m)$

$m \backslash \alpha$	0,750	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,816	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,718	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,694	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,690	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861

[illegible]	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,683	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
60	0,679	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Tabelul 4

Cuantilele repartiției $F(n.m) : F_p(n.m)$

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9 $p = 0,9$
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86
30	2.88	2.49	2.24	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63

$p = 0.9$

10	12	15	20	24	30	40	60	120
60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06
9.39	9.44	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48
5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14
3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78
3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12
2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74
2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49
2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32
2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18
2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08
2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00
2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93
2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88
2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83
2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79
2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75
2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67
1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64
1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62
1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60
1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57
1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56
1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54
1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53
1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51
1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50
1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42
1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35
1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.47	1.32	1.26
1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
									p= 0,95
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.0	240.5
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23	4.28	3.43	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

p=0.95 10	12	15	20	24	30	40	60	120
241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	251.2	253.3
19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49
8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55
5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66
4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40
4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70
3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27
3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97
3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75
2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58
2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45
2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34
2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25
2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18
2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11
2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06
2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01
2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97
2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93
2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90
2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87
2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84
2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81
2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79
2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77
2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75
2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73
2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71
2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70
2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68
2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58
1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47
1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35
1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9 p=0,975
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68
26	5.66	4.27	3.68	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45
60	5.29	3.93	3.34	1.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11

10	12	15	20	24	30	40	60	120
p = 0.975								
968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014
39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49
14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95
8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31
6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07
5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90
4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20
4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73
3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39
3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14
3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94
3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79
3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66
3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55
3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46
2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38
2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32
2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26
2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20
2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16
2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11
2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08
2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04
2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01
2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98
2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95
2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93
2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91
2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89
2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87
2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72
2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58
2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43
2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
									p= 0,99
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41