Geometrie computațională (I)

Mihai-Sorin Stupariu

IDD, Sem. I, 2018-2019

Geometrie computațională (I)

Mihai-Sorin Stupariu

IDD, Sem. I, 2018-2019

Introducere

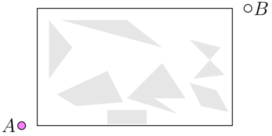
- Geometria computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]

Introducere

- Geometria computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]
- Complexitatea: memorie, timp, calcule

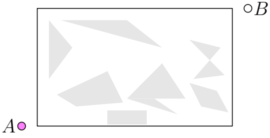
Introducere

- Geometria computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]
- Complexitatea: memorie, timp, calcule
- **Exemplu:** Cum poate fi deplasat discul din A în B fără a atinge obstacolele?



Introducere

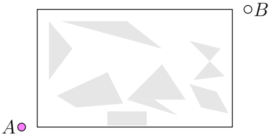
- Geometria computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]
- Complexitatea: memorie, timp, calcule
- **Exemplu:** Cum poate fi deplasat discul din A în B fără a atinge obstacolele?



- Probleme abordate: acoperiri convexe, proximitate, intersecții, căutare, etc.

Introducere

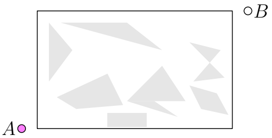
- Geometria computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]
- Complexitatea: memorie, timp, calcule
- **Exemplu:** Cum poate fi deplasat discul din A în B fără a atinge obstacolele?



- Probleme abordate: acoperiri convexe, proximitate, intersecții, căutare, etc.
- Tehnici utilizate: construcții incrementale, divide et impera, plane-sweep, transformări geometrice, etc.

Introducere

- Geometria computațională: *complexitatea computațională a problemelor geometrice în contextul analizei algoritmilor* [Lee & Preparata, 1984]
- Complexitatea: memorie, timp, calcule
- **Exemplu:** Cum poate fi deplasat discul din A în B fără a atinge obstacolele?



- Probleme abordate: acoperiri convexe, proximitate, intersecții, căutare, etc.
- Tehnici utilizate: construcții incrementale, divide et impera, plane-sweep, transformări geometrice, etc.
- Domenii de aplicabilitate: grafică pe calculator, pattern recognition, robotică , statistică, cercetări operaționale

Bibliografie

- M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars si O. Schwarzkopf, *Computational Geometry, Algorithms and Applications*, Springer, 2008.
  (Site: http://www.cs.uu.nl/geobook/)

Bibliografie

- M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars si O. Schwarzkopf, *Computational Geometry, Algorithms and Applications*, Springer, 2008.
  (Site: http://www.cs.uu.nl/geobook/)
- F. Preparata si M. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction*, Springer, 1985.

Bibliografie

- M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars si O. Schwarzkopf, *Computational Geometry, Algorithms and Applications*, Springer, 2008.
  (Site: http://www.cs.uu.nl/geobook/)
- F. Preparata si M. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction*, Springer, 1985.
- S. Devadoss, J. O'Rourke, *Discrete and Computational Geometry*, Princeton University Press, 2011.
  (Site: http://cs.smith.edu/˜orourke/DCG/)

Bibliografie

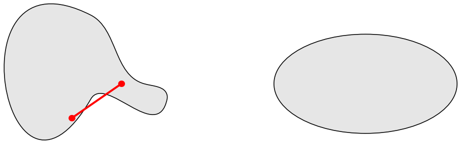
- M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars si O. Schwarzkopf, *Computational Geometry, Algorithms and Applications*, Springer, 2008.
  (Site: http://www.cs.uu.nl/geobook/)
- F. Preparata si M. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction*, Springer, 1985.
- S. Devadoss, J. O'Rourke, *Discrete and Computational Geometry*, Princeton University Press, 2011.
  (Site: http://cs.smith.edu/˜orourke/DCG/)
- D. Lee, F. Preparata, *Computational Geometry - A Survey*, IEEE Transactions on Computers, **33** (1984), 1072-1101.

Mulțimi convexe: generalități

- **Conceptul de mulțime convexă:**
  O mulțime $M \subset \mathbf{R}^m$ este convexă dacă oricare ar fi $p, q \in M$, segmentul $[pq]$ este inclus în M.

Mulțimi convexe: generalități

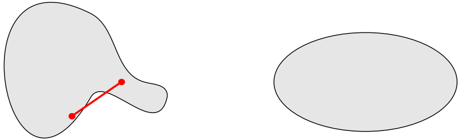
- **Conceptul de mulțime convexă:**
  O mulțime $M \subset \mathbf{R}^m$ este convexă dacă oricare ar fi $p, q \in M$, segmentul $[pq]$ este inclus în M.

- 

  Mulțimea din stânga nu este convexă, întrucât **există** două puncte, pentru care segmentul determinat nu este inclus în mulțime (punctele cu această proprietate nu sunt unice!).

Mulțimi convexe: generalități

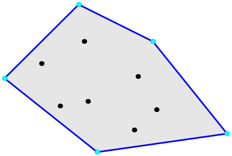
- **Conceptul de mulțime convexă:**
  O mulțime $M \subset \mathbf{R}^m$ este convexă dacă oricare ar fi $p, q \in M$, segmentul $[pq]$ este inclus în M.

- 

  Mulțimea din stânga nu este convexă, întrucât **există** două puncte, pentru care segmentul determinat nu este inclus în mulțime (punctele cu această proprietate nu sunt unice!).

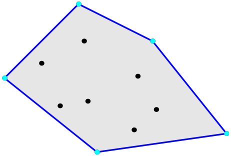
- **Problematizare:**
  Mulțimile finite cu cel puțin două elemente nu sunt convexe $\longrightarrow$ necesară **acoperirea convexă**.

Acoperire convexă a unei mulțimi finite $\mathcal{P}$ (formal)



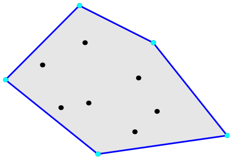
- Cea mai "mică" (în sensul incluziunii) mulțime convexă care conține $\mathcal{P}$.

Acoperire convexă a unei mulțimi finite $\mathcal{P}$ (formal)



- Cea mai "mică" (în sensul incluziunii) mulțime convexă care conține $\mathcal{P}$.
- Intersecția tuturor mulțimilor convexe care conțin $\mathcal{P}$.

Acoperire convexă a unei mulțimi finite $\mathcal{P}$ (formal)



- Cea mai "mică" (în sensul incluziunii) mulțime convexă care conține $\mathcal{P}$.
- Intersecția tuturor mulțimilor convexe care conțin $\mathcal{P}$.
- Mulțimea tuturor combinațiilor convexe ale punctelor din $\mathcal{P}$.

Acoperire convexă a unei mulțimi finite $\mathcal{P}$ (practic)

- De fapt, dacă $\mathcal{P}$ este finită, acoperirea sa convexă, $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ este un poligon convex.

Acoperire convexă a unei mulțimi finite $\mathcal{P}$ (practic)

- De fapt, dacă $\mathcal{P}$ este finită, acoperirea sa convexă, $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ este un poligon convex.
- **Problemă:**
  Cum determinăm, algoritmic, vârfurile acestui poligon?

Acoperire convexă a unei mulțimi finite $\mathcal{P}$ (practic)

- De fapt, dacă $\mathcal{P}$ este finită, acoperirea sa convexă, $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ este un poligon convex.
- **Problemă:**
  Cum determinăm, algoritmic, vârfurile acestui poligon?
- **Convenție:** Sensul de parcurgere a frontierei este cel trigonometric.

Algoritmul "lent": idee de lucru

- Sunt considerate **muchiile orientate**.

Algoritmul "lent": idee de lucru

- Sunt considerate **muchiile orientate**.
- **Q:** Cum se decide dacă o muchie orientată fixată este pe **frontieră**?

Algoritmul "lent": idee de lucru

- Sunt considerate **muchiile orientate**.
- **Q:** Cum se decide dacă o muchie orientată fixată este pe **frontieră**?
- **A:** Toate celelalte puncte sunt "în stanga" ei.

Algoritmul "lent": comentarii

- Complexitatea: $O(n^3)$

Algoritmul "lent": comentarii

- Complexitatea: $O(n^3)$
- Complexitate algebrică: polinoame de gradul II

Algoritmul "lent": comentarii

- Complexitatea: $O(n^3)$
- Complexitate algebrică: polinoame de gradul II
- Tratarea cazurilor degenerate: poate fi adaptat.

Algoritmul ”lent”: comentarii

- Complexitatea: $O(n^3)$
- Complexitate algebrică: polinoame de gradul II
- Tratarea cazurilor degenerate: poate fi adaptat.
- Robustețea: datorită erorilor de rotunjire este posibil ca algoritmul să nu returneze o listă coerentă de muchii.

Graham's scan: idee de lucru

- Punctele sunt mai întâi sortate și renumerotate **lexicografic**.

Graham's scan: idee de lucru

- Punctele sunt mai întâi sortate și renumerotate **lexicografic**.
- Algoritmul este de tip **incremental**, punctele fiind adăugate unul câte unul, fiind apoi eliminate anumite puncte.

Graham's scan: idee de lucru

- Punctele sunt mai întâi sortate și renumerotate **lexicografic**.
- Algoritmul este de tip **incremental**, punctele fiind adăugate unul câte unul, fiind apoi eliminate anumite puncte.
- **Q:** Cum se decide dacă trei puncte sunt vârfuri consecutive ale acoperirii convexe?

Graham's scan: idee de lucru

- Punctele sunt mai întâi sortate și renumerotate **lexicografic**.
- Algoritmul este de tip **incremental**, punctele fiind adăugate unul câte unul, fiind apoi eliminate anumite puncte.
- **Q:** Cum se decide dacă trei puncte sunt vârfuri consecutive ale acoperirii convexe?
- **A:** Se efectuează un "viraj la stânga" în punctul din mijloc.

Graham's scan: comentarii

- Complexitatea: $O(n \log n)$.

Graham's scan: comentarii

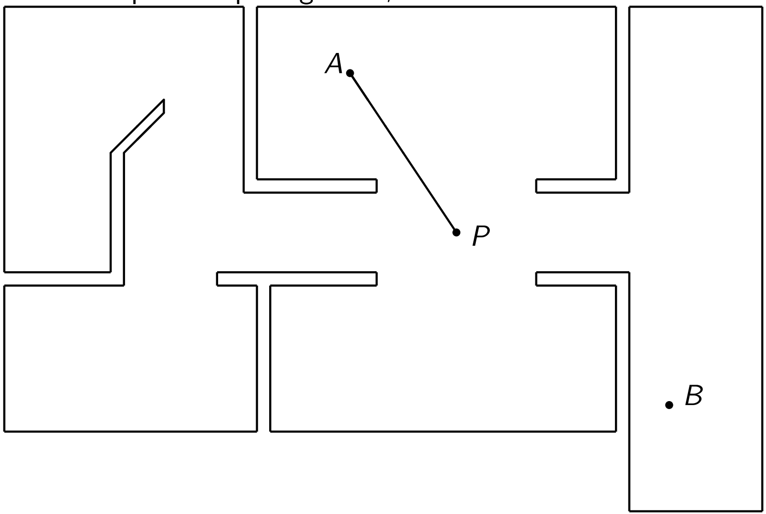
- Complexitatea: $O(n \log n)$.
- Tratarea cazurilor degenerate: corect.

Graham's scan: comentarii

- Complexitatea: $O(n \log n)$.
- Tratarea cazurilor degenerate: corect.
- Robustețea: datorită erorilor de rotunjire este posibil ca algoritmul să returneze o listă eronată (dar coerentă) de muchii.

Supravegherea unei galerii de artă

Camera din P poate supraveghea A, dar nu B.



Formalizare

- O galerie de artă poate fi interpretată (în contextul acestei probleme) ca un poligon simplu $\mathcal{P}$ (adică un poligon fără autointersecții) având n vârfuri.

Formalizare

- O galerie de artă poate fi interpretată (în contextul acestei probleme) ca un poligon simplu $\mathcal{P}$ (adică un poligon fără autointersecții) având n vârfuri.
- O cameră video (vizibilitate 360^0) poate fi identificată cu un punct din interiorul lui $\mathcal{P}$; ea poate supraveghea acele puncte cu care poate fi unită printr-un segment inclus în interiorul poligonului.

Formalizare

- O galerie de artă poate fi interpretată (în contextul acestei probleme) ca un poligon simplu $\mathcal{P}$ (adică un poligon fără autointersecții) având n vârfuri.
- O cameră video (vizibilitate 360^0) poate fi identificată cu un punct din interiorul lui $\mathcal{P}$; ea poate supraveghea acele puncte cu care poate fi unită printr-un segment inclus în interiorul poligonului.
- **Problema galeriei de artă:** *câte camere video sunt necesare pentru a supraveghea o galerie de artă și unde trebuie amplasate acestea?*

Numărul de camere vs. forma poligonului

- Se dorește exprimarea numărului de camere necesare pentru supraveghere în funcție de n (sau controlarea acestuia de către n).

Numărul de camere vs. forma poligonului

- Se dorește exprimarea numărului de camere necesare pentru supraveghere în funcție de n (sau controlarea acestuia de către n).
- Pentru a supraveghea un spațiu având forma unui poligon convex, este suficientă o singură cameră.

Numărul de camere vs. forma poligonului

- Se dorește exprimarea numărului de camere necesare pentru supraveghere în funcție de n (sau controlarea acestuia de către n).
- Pentru a supraveghea un spațiu având forma unui poligon convex, este suficientă o singură cameră.
- Numărul de camere depinde și de forma poligonului: cu cât forma este mai "complexă", cu atât numărul de camere va fi mai mare.

Numărul de camere vs. forma poligonului

- Se dorește exprimarea numărului de camere necesare pentru supraveghere în funcție de n (sau controlarea acestuia de către n).
- Pentru a supraveghea un spațiu având forma unui poligon convex, este suficientă o singură cameră.
- Numărul de camere depinde și de forma poligonului: cu cât forma este mai "complexă", cu atât numărul de camere va fi mai mare.
- **Principiu:** Poligonul considerat: descompus în triunghiuri (triangulare).

Definiție formală

- Fie $\mathcal{P}$ un poligon plan.

Definiție formală

- Fie $\mathcal{P}$ un poligon plan.
- (i) O **diagonală** a lui $\mathcal{P}$ este un segment ce unește două vârfuri ale acestuia și care este situat în interiorul lui $\mathcal{P}$.

Definiție formală

- Fie $\mathcal{P}$ un poligon plan.
- (i) O **diagonală** a lui $\mathcal{P}$ este un segment ce unește două vârfuri ale acestuia și care este situat în interiorul lui $\mathcal{P}$.
- (ii) O **triangulare** $\mathcal{T}_P$ a lui $\mathcal{P}$ este o descompunere a lui $\mathcal{P}$ în triunghiuri, dată de o mulțime maximală de diagonale ce nu se intersectează.

Rezultate

- **Lemă.** Orice poligon simplu admite o diagonală.

Rezultate

- **Lemă.** Orice poligon simplu admite o diagonală.
- **Teoremă.** *Orice poligon simplu admite o triangulare. Orice triangulare a unui poligon cu* n *vârfuri conține exact* $n-2$ *triunghiuri.*

Rezovlarea problemei galeriei de artă

- Amplasarea camerelor se poate face în vârfurile poligonului.

Rezovlarea problemei galeriei de artă

- Amplasarea camerelor se poate face în vârfurile poligonului.
- Dată o pereche $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_P)$ se consideră o 3-colorare a acesteia: fiecărui vârf îi corepunde o culoare dintr-un set de 3 culori și pentru fiecare triunghi, cele 3 vârfuri au culori distincte.

Rezovlarea problemei galeriei de artă

- Amplasarea camerelor se poate face în vârfurile poligonului.
- Dată o pereche $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_P)$ se consideră o 3-colorare a acesteia: fiecărui vârf îi corepunde o culoare dintr-un set de 3 culori și pentru fiecare triunghi, cele 3 vârfuri au culori distincte.
- **Observație.** Dacă $\mathcal{P}$ este simplu, o astfel de colorare există, deoarece graful asociat perechii $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_P)$ este arbore.

Teorema galeriei de artă

- **Teoremă.** [Chvátal, 1975; Fisk, 1978] *Pentru un poligon cu n vârfuri,* $\left[\frac{n}{3}\right]$ *camere sunt* **uneori necesare** *și întotdeauna* **suficiente** *pentru ca fiecare punct al poligonului să fie vizibil din cel puțin una din camere.*