1 Considerăm

- x, y, z, u, v variabile,
- a, b, c simboluri de constantă,
- $h, g, (\_)^{-1}$ simboluri de funcţie de aritate 1,
- $f, *, +$ simboluri de funcţie de aritate 2,
- p simbol de funcţie de aritate 3.

Aplicaţi algoritmul de unificare pentru a găsi un unificator pentru termenii:

1) $p(a, x, h(g(y)))$ şi $p(z, h(z), h(u))$
2) $f(h(a), g(x))$ şi $f(y, y)$
3) $p(a, x, g(x))$ şi $p(a, y, y)$
4) $p(x, y, z)$ şi $p(u, f(v, v), u)$
5) $f(x, f(x, x))$ şi $f(g(y), f(z, g(a)))$
6) $x + (y * y)$ şi $(y * y) + z$
7) $(x * y) * z$ şi $u * u^{-1}$
8) $x * y$ şi $u * u^{-}1$
9) $x * y$ şi $x * (y * (u * v)^{-1})$
10) $x * y$ şi $y * (u * v)^{-}1$
11) $f(g(x), x)$ şi $f(y, y)$
12) $p(x, z, z)$ şi $p(y, y, b)$
13) $p(a, u, h(x))$ şi $p(y, f(y, z), z)$
14) $f(x, f(b, x))$ şi $f(f(y, a), f(b, f(z, z)))$
15) $p(x, b, x)$ şi $p(y, y, c)$
16) $f(x, y)$, $f(h(x), x)$ şi $f(x, b)$
17) $f(x, f(x, g(y)))$, $f(u, z)$ şi $f(g(y), y)$
18) $f(f(x, y), x)$, $f(g(y), z)$ şi $f(u, h(z))$
19) $f(f(x, y), x)$, $f(v, u)$ şi $f(u, h(z))$
20) $f(f(x, y), x)$, $f(v, u)$ şi $f(u, z)$
21) $f(f(g(x), h(y)), h(z))$, $f(f(u, h(h(x))), h(y))$ şi $f(v, w)$
22) $p(x, x, z)$, $p(f(a, a), y, y)$ şi $p(f(x, a), b, z)$
23) $p(x, x, z)$, $p(f(a, a), y, y)$ şi $p(x, b, z)$
24) $p(x, x, z)$, $p(f(a, a), y, y)$ şi $p(x, f(a, a), z)$
25) $p(f(x, a), g(y), z)$, $p(f(a, a), z, u)$ şi $p(v, u, z)$

2

```
q(a).
q(b).
r(c).
r(d).
s(e).
top(X,Y) :- p(X,Y).
top(X,X) :- s(X).
p(X,Y) :- q(X), r(Y).
p(X,Y) :- s(X), r(Y).
```

Desenaţi arborele de execuţie pentru întrebarea

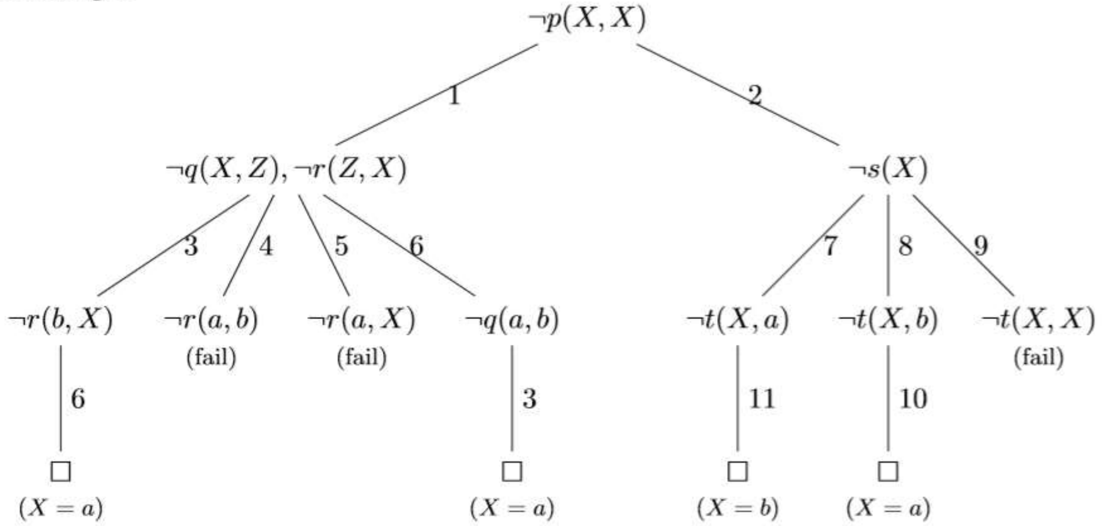
```
?- top(X,Y).
```

3

Desenaţi arborele SLD pentru programul Prolog de mai jos şi ţinta `?- p(X,X).`

```
1.  p(X,Y) :- q(X,Z), r(Z,Y).        7.  s(X) :- t(X,a).
2.  p(X,X) :- s(X).                  8.  s(X) :- t(X,b).
3.  q(X,b).                          9.  s(X) :- t(X,X).
4.  q(b,a).                          10. t(a,b).
5.  q(X,a) :- r(a,X).                11. t(b,a).
6.  r(b,a).
```

Demonstraţie:



4

1) $\forall x \exists y (R(x,y) \to R(y,x)) \to \exists x R(x,x)$

2) $\neg P(x) \to \neg \forall y \exists x R(x,y)$

3) $\exists x R(x,y) \leftrightarrow \forall y Q(x,y)$

Forme prenex pentru aceste formule:

1)

$$\forall x \exists y (R(x,y) \to R(y,x)) \to \exists x R(x,x)$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ \forall x \exists y (R(x,y) \to R(y,x)) \to \exists z R(z,z) \quad \text{(redenumim variabile)}$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ \neg \forall x \exists y (\neg R(x,y) \vee R(y,x)) \vee \exists z R(z,z)$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ \exists x \forall y (R(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \vee \exists z R(z,z)$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ \exists z (\exists x \forall y (R(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \vee R(z,z))$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ \exists z \exists x (\forall y (R(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \vee R(z,z))$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ \exists z \exists x \forall y ((R(x,y) \wedge \neg R(y,x)) \vee R(z,z))$$

2)

$$\neg P(x) \to \neg \forall y \exists x R(x,y)$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ \neg P(z) \to \neg \forall y \exists x R(x,y) \quad \text{(redenumim variabile)}$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ P(z) \vee \neg \forall y \exists x R(x,y)$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ P(z) \vee \exists y \forall x \neg R(x,y)$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ \exists y (P(z) \vee \forall x \neg R(x,y))$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ \exists y \forall x (P(z) \vee \neg R(x,y))$$

3)

$$\exists x R(x,y) \leftrightarrow \forall y Q(x,y)$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ \exists x R(x,u) \leftrightarrow \forall y Q(v,y) \quad \text{(redenumim variabile)}$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ (\exists x R(x,u) \to \forall y Q(v,y)) \wedge (\forall y Q(v,y) \to \exists x R(x,u))$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ (\exists x R(x,u) \to \forall y Q(v,y)) \wedge (\forall y' Q(v,y') \to \exists x' R(x',u)) \quad \text{(redenumim variabile)}$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ (\neg \exists x R(x,u) \vee \forall y Q(v,y)) \wedge (\neg \forall y' Q(v,y') \vee \exists x' R(x',u))$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ (\forall x \neg R(x,u) \vee \forall y Q(v,y)) \wedge (\exists y' \neg Q(v,y') \vee \exists x' R(x',u))$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ \forall x \forall y (\neg R(x,u) \vee Q(v,y)) \wedge \exists y' \exists x' (\neg Q(v,y') \vee R(x',u))$$
$$\mathrel{\exists\!\vdash}\ \forall x \forall y \exists y' \exists x' ((\neg R(x,u) \vee Q(v,y)) \wedge (\neg Q(v,y') \vee R(x',u)))$$

5 Găsiţi forme Skolem pentru următoarele formule în formă prenex:

1) $\forall x \exists y \forall z \exists w (R(x,y) \wedge (R(y,z) \rightarrow (R(z,w) \wedge R(w,w))))$

2) $\forall x_1 \forall y_1 \exists y_2 \exists x_2 ((\neg R(x_1,y_2) \vee Q(b,y_1)) \wedge (\neg Q(x_1,y_2) \vee R(x_2,b)))$

3) $\exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 (P(y_1) \vee R(x_1,x_2))$

Rezolvare.

1) $\varphi_1 = \forall x \forall z \exists w (R(x,f(x)) \wedge (R(f(x),z) \rightarrow (R(z,w) \wedge R(w,w))))$ $\quad (y \mapsto f(x))$
$\varphi_2 = \forall x \forall z (R(x,f(x)) \wedge (R(f(x),z) \rightarrow (R(z,g(x,z)) \wedge R(g(x,z),g(x,z)))))$ $\quad (w \mapsto g(x,z))$

2) $\varphi_1 = \forall x_1 \forall y_1 \exists x_2 ((\neg R(x_1,f(x_1,y_1)) \vee Q(b,y_1)) \wedge (\neg Q(x_1,f(x_1,y_1)) \vee R(x_2,b)))$ $\quad (y_2 \mapsto f(x_1,y_1))$
$\varphi_2 = \forall x_1 \forall y_1 ((\neg R(x_1,f(x_1,y_1)) \vee Q(b,y_1)) \wedge (\neg Q(x_1,f(x_1,y_1)) \vee R(g(x_1,y_1),b)))$ $\quad (x_2 \mapsto g(x_1,y_1))$

3) $\varphi_1 = \forall y_1 \exists x_2 (P(y_1) \vee R(c,x_2))$ $\quad (x_1 \mapsto c)$
$\varphi_2 = \forall y_1 (P(y_1) \vee R(c,f(y_1)))$ $\quad (x_2 \mapsto f(y_1))$

6 Considerăm următoarea mulţime de clauze în logica de ordinul I:

$$\mathcal{C} = \{\, \{\neg P(f(a)), Q(y)\},\ \{P(y)\},\ \{\neg Q(b)\}\,\}$$

Arătaţi că $\mathcal{C}$ nu este satisfiabilă.

7 Găsiţi o derivare prin rezoluţie a $\square$ pentru următoarea mulţime de clauze:

$C_1 = \{\neg P(x),\ R(x,f(x))\}$
$C_2 = \{\neg R(a,x), Q(x)\}$
$C_3 = \{P(a)\}$
$C_4 = \{\neg Q(f(x))\}$

unde P, Q, R sunt simboluri de relaţii, f e simbol de funţie, a este o constantă, x, y sunt variabile.

Rezolvare:

$C_5 = \{R(a,f(a))\}$ din $Rez, C_1, C_3, \theta = \{x \leftarrow a\}$
$C_4' = \{\neg Q(f(z))\}$ redenumire
$C_6 = \{\neg R(a,f(z))\}$ din $Rez, C_4', C_2, \theta = \{y \leftarrow f(z)\}$
$\square$ din $Rez, C_6, C_5, \theta = \{z \leftarrow a\}$ $\square$

$\{\cancel{\neg P(x)}, R(x,f(x))\}$, $\{\neg R(a,y), Q(y)\}$, $\{\cancel{P(a)}\}$, $\{\neg Q(f(z))\}$ $\quad \{x/a\}$

$\{R(a,f(a))\}$, $\{\neg R(a,y), \cancel{Q(y)}\}$, $\{\cancel{\neg Q(f(z))}\}$ $\quad \{y/f(z)\}$

$\{\cancel{R(a,f(a))}\}$, $\{\cancel{\neg R(a,f(z))}\}$ $\quad \{z/a\}$

8 Avem următorul raţionament:

"Există elevi cărora le plac toate lecturile. Nici unui elev nu îi plac lucrurile plictisitoare. În consecinţă, nici o lectură nu este plictisitoare."

Definim predicatele
$E(x)$ "x este elev"
$L(x)$ "x este lectură"
$P(x)$ "x este plictisitor"
$R(x,y)$ "x place y"

1) Folosind predicatele E, L, P, R, exprimaţi fiecare afirmaţie în logica de ordinul I.

2) Demonstraţi prin rezoluţie că raţionamentul este corect.

Rezolvare

$\varphi_1 := \exists x(E(x) \land \forall y(L(y) \to R(x,y)))$
$\varphi_2 := \forall x(E(x) \to \forall y(P(y) \to \neg R(x,y)))$
$\psi := \forall x(L(x) \to \neg P(x))$
Calculăm formele clauzale pentru φ_1, φ_2 şi $\neg\psi$:
pt φ_1: $\mathcal{C}_1 = \{\{E(a)\}, \{\neg L(y), R(a,y)\}\}$
pt φ_2: $\mathcal{C}_2 = \{\{\neg E(x), \neg P(y), \neg R(x,y)\}\}$
pt $\neg\psi$: $\mathcal{C} = \{\{L(b)\}, \{P(b)\}\}$
unde a, b sunt constantele care apar din Skolemizare.
$\{\varphi_1, \varphi_2\} \vDash \psi$ ddacă există o derivare pentru $\square$ din $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}$.

$\{\neg L(y), R(a,y)\}$
$\{L(b)\}$
$\{R(a,b)\}$ $\quad Rez, \theta = \{y \leftarrow b\}$
$\{\neg E(x), \neg P(y), \neg R(x,y)\}$
$\{P(b)\}$

$\{\neg E(x), \neg R(x,b)\}$ $\quad Rez, \theta = \{y \leftarrow b\}$
$\{E(a)\}$
$\{\neg R(a,b)\}$ $\quad Rez, \theta = \{x \leftarrow a\}$
$\square$

9 Găsiţi o SLD-respingere pentru următoarele programe Prolog şi ţinte:

(a)
```
1. r :- p,q.      5. t.      ?- w.
2. s :- p,q.      6. q.
3. v :- t,u.      7. u.
4. w :- v,s.      8. p.
```

(b)
```
1. q(X,Y) :- q(Y,X), q(Y,f(f(Y))).      ?- q(f(Z),a).
2. q(a,f(f(X))).
```

(c)
```
1. p(X) :- q(X,f(Y)), r(a).      4. r(X) :- q(X,Y).      ?- p(X), q(Y,Z).
2. p(X) :- r(X).                 5. r(f(b)).
3. q(X,Y) :- p(Y).
```

Rezolvare:

(a)

$G_0 = \neg w$		{¬p, ¬q,r}, {¬p, ¬q,s}, {¬t, ¬u,v}, {¬v, ¬s,~~w~~}, {t}, {q}, {u}, {p}, {~~¬w~~}
$G_1 = \neg v \vee \neg s$	(4)	{¬p, ¬q,r}, {¬p, ¬q,s}, {¬t, ¬u,~~v~~}, {~~¬v~~, ¬s}, {t}, {q}, {u}, {p}
$G_2 = \neg t \vee \neg u \vee \neg s$	(3)	{¬p, ¬q,r}, {¬p, ¬q,s}, {~~¬t~~, ¬u, ¬s}, {~~t~~}, {q}, {u}, {p}
$G_3 = \neg u \vee \neg s$	(5)	{¬p, ¬q,r}, {¬p, ¬q,s}, {~~¬u~~, ¬s}, {q}, {~~u~~}, {p}
$G_4 = \neg s$	(7)	{¬p, ¬q,r}, {¬p, ¬q,~~s~~}, {~~¬s~~}, {q}, {p}
$G_5 = \neg p \vee \neg q$	(2)	{¬p, ¬q,r}, {¬p, ~~¬q~~}, {~~q~~}, {p}
$G_6 = \neg q$	(8)	{¬p, ¬q,r}, {~~¬p~~}, {~~p~~}
$G_7 = \square$	(6)	{¬p, ¬q,r}, $\square$

(b)

$G_0 = \neg q(f(Z), a)$	
$G_1 = \neg q(a, f(Z)) \vee \neg q(a, f(f(a)))$	(1 cu $\theta(X) = f(Z)$ şi $\theta(Y) = a$)
$G_2 = \neg q(a, f(Z))$	(2 cu $\theta(X) = a$)
$G_3 = \square$	(2 cu $\theta(Z) = f(X)$)

(c)

$G_0 = \neg p(X) \vee \neg q(Y, Z)$	
$G_1 = \neg r(X_1) \vee \neg q(Y, Z)$	(2 cu $\theta(X) = X_1$)
$G_2 = \neg q(Y, Z)$	(5 cu $\theta(X_1) = f(b)$)
$G_3 = \neg p(Z_1)$	(3 cu $\theta(X) = Y_1$ şi $\theta(Y) = Z_1$)
$G_4 = \neg r(X)$	(2 cu $\theta(Z_1) = X$)
$G_5 = \square$	(5 cu $\theta(X) = f(b)$)

(b) {┐q(Y,X), ┐q(Y,f(f(Y))), ~~q(X,Y)~~}, {q(a,f(f(V)))}, {~~┐q(f(Z),a)~~}

{X/f(Z), Y/a}

{┐q(a,f(Z)), ~~┐q(a,f(f(a)))~~}, {~~q(a,f(f(V)))~~}, {q(a,f(f(V)))} (putem duplica o clauza)

{V/a}

{~~┐q(a,f(Z))~~ }, {~~q(a,f(f(V)))~~}

{Z/f(V)}

$\square$

(c) {┐q(X,f(Y)), ┐r(a), p(X)}, {┐r(V), p(V)}, {┐p(Y), q(U,Y)}, {┐q(W,Z), r(W)}, {r(f(b))}, {┐p(S), ┐q(S,Y)}