Determinanţi

Dacă R este un inel comutativ, notăm cu $M_n(R)$, inelul de matrici cu n linii şi n coloane şi cu coeficienţi din inelul R. Determinantul matricii $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ este numărul

$$detA = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

Mai folosim şi notaţia

$$detA = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Formula determinantului pentru $n = 2$ este $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$

Proprietăţi ale determinantului:

1) Determinantul unei matrici nu se schimbă dacă la o linie a matricii se adună o altă linie a matricii înmulţită cu un număr din inelul R.

2) Determinantul unei matrici nu se schimbă dacă la o coloană a matricii se adună o altă coloană a matricii înmulţită cu un număr din inelul R.

3) Determinantul unei matrici care are o linie (coloană) formată doar din zerouri este zero.

4) Dacă permutăm două linii (coloane) ale unei matrici, determinantul matricii îşi schimbă semnul.

5) Dacă $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, avem că

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} det(A_{i,j}),$$

unde $A_{i,j}$ este matricea obţinută din A prin tăierea liniei i şi a coloanei j din matricea A. Formula de mai sus se numeşte dezvoltarea după linia i a matricii A.

6) Dacă $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, avem că

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j} det(A_{i,j}),$$

unde $A_{i,j}$ este matricea obţinută din A prin tăierea liniei i şi a coloanei j din matricea A. Formula de mai sus se numeşte dezvoltarea după coloana j a matricii A.

7) $det(AB) = det(A)det(B)$, pentru orice $A, B \in M_n(R)$.

Exemplu de calcul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

În cele de mai sus am scăzut din linia a doua prima linie, din linia a treia am scăzut prima linie înmulţită cu 2; apoi am dezvoltat după prima coloană.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Mai sus am adunat la primele două linii linia a treia, am dezvoltat după prima coloană şi am folosit formula pentru determinant în cazul $n = 2$.

Exerciţii:

1) Calculaţi

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2) Calculaţi

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix},$$

unde a, b sunt numere reale (pe diagonala principală este $a + b$, deasupra diagonalei principale este ab, dedesubtul diagonalei principale este 1 şi în rest sunt zerouri).