FMI, Info, 2018/2019, Anul I, ID
Logică matematică şi computaţională

Partea 3
Exerciţii

(S3.1) Să se aducă următoarele formule la cele două forme normale prin transformări sintactice:

(i) $((v_0 \rightarrow v_1) \wedge v_1) \rightarrow v_0$;

(ii) $(v_1 \vee \neg v_4) \rightarrow (\neg v_2 \rightarrow v_3)$.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
((v_0 \rightarrow v_1) \wedge v_1) \rightarrow v_0 &\sim \neg((\neg v_0 \vee v_1) \wedge v_1) \vee v_0 && \text{(înlocuirea implicaţiei)} \\
&\sim \neg(\neg v_0 \vee v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 && \text{(de Morgan)} \\
&\sim (\neg\neg v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 && \text{(de Morgan)} \\
&\sim (v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0, && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned}
(v_0 \wedge \neg v_1) \vee \neg v_1 \vee v_0 &\sim ((v_0 \vee \neg v_1) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_1)) \vee v_0 && \text{(distributivitate)} \\
&\sim (v_0 \vee \neg v_1 \vee v_0) \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_1 \vee v_0) && \text{(distributivitate)} \\
&\sim (v_0 \vee \neg v_1) \wedge (\neg v_1 \vee v_0), && \text{(idempotenţă)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC. De asemenea, ultima formulă este echivalentă şi cu:

$$v_0 \vee \neg v_1,$$

care este şi în FND, şi în FNC.

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
(v_1 \vee \neg v_4) \rightarrow (\neg v_2 \rightarrow v_3) &\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee (\neg\neg v_2 \vee v_3) && \text{(înlocuirea implicaţiilor)}\\
&\sim \neg(v_1 \vee \neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(reducerea dublei negaţii)}\\
&\sim (\neg v_1 \wedge \neg\neg v_4) \vee v_2 \vee v_3 && \text{(de Morgan)}\\
&\sim (\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3, && \text{(reducerea dublei negaţii)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FND. Mai departe, obţinem:

$$\begin{aligned}
(\neg v_1 \wedge v_4) \vee v_2 \vee v_3 &\sim ((\neg v_1 \vee v_2) \wedge (v_4 \vee v_2)) \vee v_3 && \text{(distributivitate)}\\
&\sim (\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_4 \vee v_2 \vee v_3), && \text{(distributivitate)}
\end{aligned}$$

iar ultima formulă este în FNC.

□

(S3.2) Să se testeze dacă următoarele mulţimi de clauze sunt satisfiabile:

(i) $\{\{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_2, \neg v_1\}, \{v_0, v_2\}, \{v_0\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$;

(ii) $\{\{v_0, v_1\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, v_2, v_3\}\}$.

Demonstraţie:

(i) Presupunem că am avea un model e al mulţimii de clauze. Atunci $e(v_0) = e(v_2) = e(v_3) = 1$. Cum $e \vDash \{\neg v_0, v_1, \neg v_3\}$, avem că $e(v_1) = 1$. Dar atunci $e \nvDash \{\neg v_2, \neg v_1\}$. Am obţinut o contradicţie. Rămâne că mulţimea de clauze din enunţ este nesatisfiabilă.

(ii) Fie evaluarea $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ astfel încât $e(v_0) = 1$, $e(v_1) = 0$, şi $e(v_i) = 1$ pentru orice $i \geq 2$. Atunci e satisface fiecare clauză din mulţime, deci este model pentru mulţimea de clauze. Aşadar, mulţimea de clauze din enunţ este satisfiabilă.

□

(S3.3) Să se determine mulţimea $Res(C_1, C_2)$ în fiecare din următoarele cazuri:

(i) $C_1 := \{v_1, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{v_4, v_5, v_6\}$;

(ii) $C_1 := \{v_3, \neg v_4, v_5\}$; $C_2 := \{\neg v_3, v_1, v_6, v_4\}$;

(iii) $C_1 := \{v_1, \neg v_3\}$; $C_2 := \{v_1, \neg v_2\}$.

Demonstraţie:

(i) Putem alege doar $L := \neg v_4$, deci există un singur rezolvent, anume $\{v_1, v_5, v_6\}$.

(ii) Putem rezolva clauzele, pe rând, după $L := v_3$ şi $L := \neg v_4$, obţinând aşadar

$$Res(C_1, C_2) = \{\{\neg v_4, v_5, v_1, v_6, v_4\}, \{v_3, v_5, \neg v_3, v_1, v_6\}\}.$$

(iii) Nu există L astfel încât $L \in C_1$ şi $L^c \in C_2$, deci $Res(C_1, C_2) = \emptyset$.

$\square$

(S3.4) Derivaţi prin rezoluţie clauza $C := \{v_0, \neg v_2, v_3\}$ din mulţimea

$$\mathcal{S} := \{\{v_0, v_4\}, \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\}, \{\neg v_4, v_0, v_1\}, \{\neg v_0, v_3\}\}.$$

Demonstraţie: Notăm:

$$\begin{array}{ll}
C_1 := \{v_0, v_4\} & \\
C_2 := \{\neg v_1, \neg v_2, v_0\} & \\
C_3 := \{\neg v_4, v_0, v_1\} & \\
C_4 := \{\neg v_0, v_3\} & \\
C_5 := \{v_0, v_1\} & \text{(rezolvent al } C_1,\ C_3) \\
C_6 := \{\neg v_1, \neg v_2, v_3\} & \text{(rezolvent al } C_2,\ C_4) \\
C_7 := \{v_0, \neg v_2, v_3\} & \text{(rezolvent al } C_5,\ C_6)
\end{array}$$

Avem, aşadar, că secvenţa $(C_1, C_2, \ldots, C_6, C_7 = C)$ este o derivare prin rezoluţie a lui C din $\mathcal{S}$. $\square$

(S3.5) Să se deriveze prin rezoluţie clauza $C := \{\neg v_0, v_2\}$ din forma clauzală a unei formule în FNC echivalente semantic cu:

$$\varphi := ((v_0 \wedge v_1) \to v_2) \wedge (v_0 \to v_1)$$

Demonstraţie: Înlocuind implicaţiile şi aplicând legile de Morgan, obţinem că:

$$\begin{aligned}\varphi &\sim (\neg(v_0 \land v_1) \lor v_2) \land (\neg v_0 \lor v_1)\\ &\sim (\neg v_0 \lor \neg v_1 \lor v_2) \land (\neg v_0 \lor v_1),\end{aligned}$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ', a cărei formă clauzală este

$$\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1 := \{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, C_2 := \{\neg v_0, v_1\}\}.$$

Din faptul că $v_1 \in C_2$ şi $\neg v_1 \in C_1$, avem că

$$C := (C_1 \setminus \{\neg v_1\}) \cup (C_2 \setminus \{v_1\}) = \{\neg v_0, v_2\}$$

este un rezolvent al clauzelor C_1 şi C_2. Cum C_1 şi C_2 sunt în $\mathcal{S}_{\varphi'}$, avem aşadar că (C_1, C_2, C) este o derivare prin rezoluţie a lui C din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, forma clauzală a lui φ', formulă în FNC echivalentă semantic cu φ. $\square$

(S3.6) Să se arate, folosind rezoluţia, că formula:

$$\varphi := (v_0 \lor v_2) \land (v_2 \to v_1) \land \neg v_1 \land (v_0 \to v_4) \land \neg v_3 \land (v_4 \to v_3)$$

este nesatisfiabilă.
Demonstraţie: Înlocuind implicaţiile, obţinem că:

$$\varphi \sim (v_0 \lor v_2) \land (\neg v_2 \lor v_1) \land \neg v_1 \land (\neg v_0 \lor v_4) \land \neg v_3 \land (\neg v_4 \lor v_3),$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ'. Notând:

$$\begin{aligned}C_1 &:= \{v_0, v_2\}\\ C_2 &:= \{\neg v_2, v_1\}\\ C_3 &:= \{\neg v_1\}\\ C_4 &:= \{\neg v_0, v_4\}\\ C_5 &:= \{\neg v_3\}\\ C_6 &:= \{\neg v_4, v_3\}\end{aligned}$$

se observă că $\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$. Notând mai departe:

$$\begin{aligned}C_7 &:= \{\neg v_2\} && \text{(rezolvent al } C_2,\ C_3\text{)}\\ C_8 &:= \{v_0\} && \text{(rezolvent al } C_1,\ C_7\text{)}\\ C_9 &:= \{v_4\} && \text{(rezolvent al } C_4,\ C_8\text{)}\\ C_{10} &:= \{v_3\} && \text{(rezolvent al } C_6,\ C_9\text{)}\\ C_{11} &:= \square && \text{(rezolvent al } C_5,\ C_{10}\text{)}\end{aligned}$$

avem că secvenţa $(C_1, C_2, \ldots, C_{11})$ este o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, de unde, aplicând Teorema 1.93, rezultă că $\mathcal{S}_{\varphi'}$ este nesatisfiabilă. Din Propoziţia 1.87, rezultă că φ' este nesatisfiabilă, deci şi φ, care este echivalentă semantic cu φ', este nesatisfiabilă. $\square$

(S3.7) Să se ruleze algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea:

$$\{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_6\}\}.$$

Demonstraţie: Notând mulţimea de clauze de mai sus cu $\mathcal{S}$, obţinem următoarea rulare:

$$\begin{array}{ll}
 & i := 1 \\
 & \mathcal{S}_1 := \mathcal{S} \\
P1.1. & x_1 := v_0 \\
 & T_1^1 := \{\{v_0\}\} \\
 & T_1^0 := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_0, v_3\}\} \\
P1.2. & U_1 := \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\} \\
P1.3. & \mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\} \\
P1.4. & i := 2;\ \text{goto } P2.1 \\
P2.1. & x_2 := v_1 \\
 & T_2^1 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}\} \\
 & T_2^0 := \{\{\neg v_1, v_2\}\} \\
P2.2. & U_2 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
P2.3. & \mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
P2.4. & i := 3;\ \text{goto } P3.1 \\
P3.1. & x_3 := v_2 \\
 & T_3^1 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\} \\
 & T_3^0 := \{\{\neg v_2, v_6\}\} \\
P3.2. & U_3 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\} \\
P3.3. & \mathcal{S}_4 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_6\}\} \\
P3.4. & i := 4;\ \text{goto } P4.1 \\
P4.1. & x_4 := v_3 \\
 & T_4^1 := \{\{v_3\}\} \\
 & T_4^0 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}
\end{array}$$

$P4.2.$	$U_4 := \{\{v_4, v_6\}\}$
$P4.3.$	$\mathcal{S}_5 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\}$
$P4.4.$	$i := 5;$ goto $P5.1$
$P5.1.$	$x_5 := v_4$
	$T_5^1 := \{\{v_4, v_6\}\}$
	$T_5^0 := \{\{\neg v_4, v_5\}\}$
$P5.2.$	$U_5 := \{\{v_5, v_6\}\}$
$P5.3.$	$\mathcal{S}_6 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$
$P5.4.$	$i := 6;$ goto $P6.1$
$P6.1.$	$x_6 := v_5$
	$T_6^1 := \{\{v_5, v_6\}\}$
	$T_6^0 := \{\{\neg v_5, v_6\}\}$
$P6.2.$	$U_6 := \{\{v_6\}\}$
$P6.3.$	$\mathcal{S}_7 := \{\{\neg v_6\}, \{v_6\}\}$
$P6.4.$	$i := 7;$ goto $P7.1$
$P7.1.$	$x_7 := v_6$
	$T_7^1 := \{\{v_6\}\}$
	$T_7^0 := \{\{\neg v_6\}\}$
$P7.2.$	$U_7 := \{\square\}$
$P7.3.$	$\mathcal{S}_8 := \{\square\}$
$P7.4.$	$\square \in \mathcal{S}_8 \Rightarrow \mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

$\square$