

Partea 2

Exerciții

(S2.1) Fie următoarele propoziții exprimate în limbaj natural:

- (i) Merg în parc dacă îmi termin treaba și nu apare altceva.
- (ii) Treci examenul la logică numai dacă înțelegi subiectul.

Transpuneți-le în formule ale limbajului formal al logicii propoziționale.

(S2.2) Să se arate că pentru orice formulă φ , numărul parantezelor deschise care apar în φ coincide cu numărul parantezelor închise care apar în φ .

(S2.3) Să se demonstreze că pentru orice x_0, x_1, x_3, x_4 din $\{0, 1\}$ avem:

- (i) $((x_0 \rightarrow x_1) \rightarrow x_0) \rightarrow x_0 = 1$;
- (ii) $(x_3 \rightarrow x_4) \rightarrow ((x_4 \rightarrow x_1) \rightarrow (x_3 \rightarrow x_1)) = 1$.

(S2.4) Să se găsească câte un model pentru fiecare din formulele:

- (i) $v_0 \rightarrow v_2$;
- (ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

(S2.5) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ ,

- (i) φ este tautologie dacă și numai dacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.
- (ii) φ este nesatisfiabilă dacă și numai dacă $\neg\varphi$ este tautologie.

(S2.6) Arătați că pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in Form$, avem:

- (i) $\psi \models \varphi \rightarrow \psi$;

- (ii) $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \models \varphi \rightarrow \chi$;
- (iii) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$;
- (iv) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$;
- (v) $\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi)$;
- (vi) $\models \neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow (\psi \leftrightarrow \varphi))$.

(S2.7) Să se arate că

$$\{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\} \models (v_3 \rightarrow v_2) \vee (\neg v_1 \rightarrow v_2)$$

(S2.8) Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Să se demonstreze:

- (i) Dacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \models \psi$.
- (ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ dacă și numai dacă $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.
- (iii) $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ dacă și numai dacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \psi$.

(S2.9) (Metoda reducerii la absurd)

Să se arate că pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi) \Rightarrow \Gamma \vdash \psi.$$

(S2.10) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ ,

- (i) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$;
- (ii) $\vdash \neg\psi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$;
- (iii) $\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$;
- (iv) $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$.

(S2.11) (“Reciproca” axiomei 3)

Să se arate că pentru orice formule φ, ψ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi).$$

(S2.12) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ ,

$$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \rightarrow \varphi).$$