Derivate partiale. Functii diferentiabile

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ unde $D \subset \mathbb{R}^n$ este o multime deschisa si fie $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$. Functia f este derivabila partial in punctul a in raport cu x_k daca limita

$$\lim_{x_k \to a_k} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{x_k - a_k}$$

exista si este finita. Daca exista, valoarea acestei limite se numeste derivata partiala a functiei f in raport cu x_k in punctul a si se noteaza cu $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$.

Daca f este derivabila partial in raport cu x_k in orice punct din D, atunci se obtine o functie

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \to \mathbb{R}, \quad \text{definita prin } a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_k}(a), \quad a \in D.$$

Spunem ca f este diferentiabila (sau derivabila) in a daca exista o aplicatie liniara $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (i.e. $T(x+y) = T(x) + T(y)$ si $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, si orice $x, y \in \mathbb{R}^n$) astfel ca

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x - a\|} = 0$$

Daca T exista atunci este unica, se noteaza cu $df(a)$ sau $f'(a)$ si se numeste diferentiala lui f in a. Se poate verifica (exercitiu) cu usurinta ca

Propozitie. Daca f este diferentiabila in a atunci este continua in a.

Propozitie. Daca f este diferntiabila in a atunci exista $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ si

$$df(a)(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n.$$

Demonstratie. Fie e_k vectorul din $\mathbb{R}^n$ care are 1 pe pozitia k si zero in rest. Intrucat f este diferentiabila rezulta ca

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a) - df(a)(te_k)}{|t|} = 0$$

sau echivalent

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a) - df(a)(te_k)}{t} = 0,$$

ceea ce arata ca f are derivata partiala si

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_k) - f(a)}{t} = df(a)(e_k)$$

Daca $u = (u_1, \dots, u_n)$, $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \cdots + u_n e_n$ si atunci

$$df(a)(u_1, u_2, \dots, u_n) = u_1 df(e_1) + u_2 df(e_2) + \cdots + u_n df(e_n)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n.$$

Se poate verifica imediat ca

Propozitie. Orice functie liniara $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este diferentiabila in orice a si

$$df(a) = f.$$

In particular, aplicatiile $\mathrm{pr}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definite prin

$$\mathrm{pr}_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_i, \text{ pentru orice } (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

sunt liniare, si deci

$$d\mathrm{pr}_i(a) = \mathrm{pr}_i, \quad \text{pentru orice } i = 1, 2, \ldots, n,$$

fapt care ne indreptateste sa introducem notatia

$$\mathrm{pr}_i = dx_i$$

Cu acesta notatie avem

$$df(a)(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\mathrm{pr}_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\mathrm{pr}_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1(u_1, u_2, \ldots, u_n) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

pentru orice $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ si deci

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n.$$

Teorema (Conditie suficienta de diferentiabilitate)**.** Fie D o multime deschisa din $\mathbb{R}^n$, fie $f : D \to \mathbb{R}$ si $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$. Daca exista o vecinatate V a lui a cu proprietatea ca exista toate derivatele partiale in orice punct din V si acestea sunt continue in a, atunci f este diferentiabila in a si

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_+ \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n.$$

Demonstratie. Fara a restrange generalitate, putem presupune ca vecinatatea V lui a este $B(a,r) = \{x \in D : \|x-a\| < r\}$ bila deschisa cu centrul in a si raza $r > 0$, pe care avand in vedere ca D este multime deschisa, o putem considera inclusa in D. Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$. Definim functiile $g_1, g_2, \ldots, g_n$ astfel

$$\begin{aligned}
&g_1 : [a_1, x_1] \to \mathbb{R},\ g_1(t) = f(t, x_2, x_3 \ldots, x_n)\\
&g_2 : [a_2, x_2] \to \mathbb{R},\ g_2(t) = f(a_1, t, x_3, \ldots, x_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&g_n : [a_n, x_n] \to \mathbb{R},\ g_n(t) = f(a_1, a_2, a_3 \ldots, t)
\end{aligned}$$

Atunci

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} (g_i(x_i) - g_i(a_i))$$

Fiecare din functiile g_i satisface ipotezele teoremei lui Lagrange referitoare la o functie reala de variabila reala continua pe un compact si derivabila pe interiorul acelui interval. Prin urmare exista $\xi_i \in (x_i, a_i)$ astfel incat

$$g_i(x_i) - g_i(a_i) = (x_i - a_i) g_i'(\xi_i)$$

Atunci

$$\begin{aligned}
&g_1(x_1) - g_1(a_1) = (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\\
&g_2(x_2) - g_2(a_2) = (x_2 - a_2)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2, x_3, \ldots, x_n)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&g_n(x_n) - g_n(a_n) = (x_n - a_n)\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, \xi_n)
\end{aligned}$$

Definim aplicatia liniara $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ prin

$$T(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) u_i.$$

Obtinem

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} =\\
&\frac{x_1 - a_1}{\|x_1 - a_1\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\right) +\\
&\frac{x_2 - a_2}{\|x_2 - a_2\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2, x_3, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, a_2, x_3, \ldots, x_n)\right) +\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{x_n - a_n}{\|x_n - a_n\|}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, \xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)\right)
\end{aligned}$$

Deoarece

$$\frac{|x_1 - a_1|}{\|x_1 - a_1\|} \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

deducem ca

$$\begin{aligned} &\frac{|f(x) - f(a) - T(x-a)|}{\|x - a\|} \leq \\ &\left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \right| + \\ &\left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \xi_2, x_3, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \right| + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, \xi_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \right| \end{aligned} \tag{1}$$

Deoarece derivatele partiale ale functiei f sunt continue in a, exista limita termenilor din membrul doi a inegalitatii (1) pentru $x \to a$ si aceasta este egala cu zero. Prin urmare

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x - a\|} = 0$$

Asadar f este diferentiabila in a si

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

Exemplu. Fie $f(x, y, z) = xe^y + xyz + z^2$. Atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + yz, \; \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + xz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + 2z.$$

Deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, 2) = 1, \; \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, 2) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 2) = (4)$$

si atunci

$$df(1, 0, 2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0, 2)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0, 2)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(1, 0, 2)dz = dx + 3dy + 4dz$$

Pentru $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avem $df(1, 0, 2)(a, b, c) = a + 3b + 4c$.

Fie $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$ multimi deschise si fie $u_1, \ldots, u_m : E \to \mathbb{R}$ functii cu derivate partiale continue si astfel incat pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$

$$(u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in F.$$

Daca $\varphi : F \to \mathbb{R}$ admite derivate partiale continue pe D atunci functia $f : F \to \mathbb{R}$ definita prin

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

admite derivate partiale continue si

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \left(u_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Vom scrie

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Exemplu. Daca $f(x, y, z) = \varphi(xyz, x^2 + y^2 + z^2, x + yz)$ atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} yz + \frac{\partial \varphi}{\partial v} 2x + \frac{\partial \varphi}{\partial w}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} xz + \frac{\partial \varphi}{\partial v} 2y + \frac{\partial \varphi}{\partial w} z$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} xy + \frac{\partial \varphi}{\partial v} 2x + \frac{\partial \varphi}{\partial w} y$$

Derivate partiale si diferentiale de ordin superior

Fie D o multime deschisa din $\mathbb{R}^n$ si $f : D \to \mathbb{R}$ o functie care admite derivate partiale $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ pe D. La randul ei functia $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ poate avea derivata partiala in raport cu x_i notata

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ adica } \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

si numita derivata partiala de ordinul al doilea a lui f.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ cu } i \neq j \text{ se numesc derivate partiale mixte de ordinul 2}$$

In mod similar se definesc derivatele partiale de ordinul $n \geq 3$.

Teorema (Schwarz)**.** Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si $a \in D$. Daca derivatele partiale mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ exista intr-o vecinatate a lui a si acestea sunt continue in a, atunci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ unde D este o multime deschisa. Daca f admite derivate partiale de ordinul doi continue pe o vecinatate a punctului $a \in D$, functia $d^2 f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita prin

$$d^2 f(a)(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} u_i v_j$$

unde $u, v \in \mathbb{R}^n$, se numeste diferentiala de ordinul doi a lui f in a. Similar, daca f admite derivate partiale de ordinul 3 continue pe o vecinatate a punctului $a \in D$, functia $d^3 f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita prin

$$d^3 f(a)(u, v, w) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} u_i v_j w_k,$$

unde $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ se numeste diferentiala de ordinul doi a lui f in a. Similar se defineste diferentiala de ordinul k. Vom folosi notatia

$$\begin{aligned}
&d^2 f(u, u) = d^2 f(u)^2 \\
&d^3 f(u, u) = d^2 f(u)^3 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&d^k f(u, \ldots, u) = d^k f(u)^k
\end{aligned}$$

Teorema (Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange in cazul n dimensional)**.** Daca D este o multime deschisa si convexa din $\mathbb{R}^k$ si $f : D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ este o functie care admite derivate partiale de ordinul $n + 1$ continue pe multim D si atunci pentru orice $a \in D$ si orice $x \in D$ exista $\xi \in [a, x] = \{tx + (1 - t)a, 0 \le t \le 1\}$ astfel incat

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} df(a)(x - a) + \frac{1}{2!} d^2 f(a)(x - a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} d^n f(a)(x - a)^n +$$

$$+ \frac{1}{(n + 1)!} d^{n+1} f(\xi)(x - a)^{n+1}$$

Extreme locale pentru functii de mai multe variabile

Fie $f : A \to \mathbb{R}$, unde $A \subset \mathbb{R}^n$. Un punct $a \in A$ se numeste punct de maxim local (relativ) daca exista vecinatate U al lui a astfel incat $f(x) \le f(a)$ pntru orice $x \in U \cap A$ (adica daca exista $r > 0$ astfel incat $f(x) \le f(a)$ pntru orice $x \in B(a, r) \cap A$).

Un punct $a \in D$ se numeste punct de minim local (relativ) daca exista o vecinatate U al lui a astfel incat $f(x) \ge f(a)$ pntru orice $x \in U \cap A$, (adica daca exista $r > 0$ astfel incat $f(x) \ge f(a)$ pntru orice $x \in B(a, r) \cap A$). Punctele de maxim local si cele de minim local se numesc puncte de extrem local.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$. Spunem ca $a \in D$ este punct critic (stationar) pentru f daca f este diferentiabila in a si $df(a) = 0$.

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o multime deschisa si $f : D \to \mathbb{R}$ o functie diferentiabila in $a \in D$. Matricea cu n linii si n coloane

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

se numeste matricea hessiana a functie f in punctul a.

Observam ca

$$d^2 f(a)(u,u) = u^t H_f(a) u, \text{ unde } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{si } u^t = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

.

Teorema (Fermat)**.** Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o functie diferentiabila in $a \in D$. Daca f este diferentiabila in a atunci $df(a) = 0$ (adica $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$).

Fie $a = (a_1, a_2, \ldots)$ ca in enunt. Consideram $r > 0$ astfel incat $B(a,r) \subset D$ si $f(x) - f(a)$ are semn constant pentru orice $x \in B(a,r)$. Fie

$$\varphi : (-r, r) \to \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = f(a_1 + t, a_2, \ldots, a_n).$$

Atunci $\varphi(t) - \varphi(a)$ are semn constant pe $(-r, r)$. Cum φ este derivabila pe $(-r, r)$ aplicand Teorema lui Fermat pentru functii de o variabila reala rezulta ca $\varphi(0) = 0$. In consecinta, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. Similar aratam ca $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pentru $i = 2, \ldots, n$.

Teorema (Criteriu de stabilire a punctelor de extrem pentru functii de mai multe variabile)**.** Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o functie care admite derivate partiale de ordinul doi continue pe D si $a \in D$ un punct critic al sau.

(1) Daca $d^2 f(u,u) > 0$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ atunci a este punct de minim local

(2) Daca $d^2 f(u,u) < 0$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ atunci a este punct de maxim local

(3) Daca exista $u, \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ astfel incat $d^2 f(u,u) > 0$ si $d^2 f(u,u) < 0$ atunci a nu este punct de extrem local

Demonstratie. Fie $\alpha > 0$ astfel incat $d^2(a)(u,u) \geq \alpha$ pentru orice $u \in \mathbb{R}^n$ cu $\|u\| = 1$. Cum functia are derivate partiale de ordinul doi continue rezulta ca exista $\delta > 0$ astfel incat pentru orice $c \in \mathbb{R}^n$ cu $\|c - a\| < \delta$ si orice $u \in \mathbb{R}^n$ cu $\|u\| = 1$ sa avem

$$d^2(a)(u,u) \geq \frac{\alpha}{2}.$$

Conform formulei lui Taylor din cazul n-dimesnional rezulta ca exista b pe segmentul $[a, a + tu]$ astfel incat

$$f(a + tu) = f(a) + df(a)(tu) + \frac{1}{2}d^2f(b)(tu, tu)$$

In concluzie

$$f(a + tu) - f(a) = \frac{t^2}{2}d^2f(b)(u, u) \geq 0$$

De aici rezulta ca a este punct de minim local al lui f.

Celelalte afirmatii se demonsteaza utilizand argumente similare (vezi pag 242-244 din carte !).

Corolar. Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie care admite derivate partiale de ordinul doi continue pe D si $(x_0, y_0) \in D$ un punct critic al sau. Fie

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Notam $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ si $\Delta_2 = \det H_f(x_0, y_0)$.

(1) Daca $\Delta_1 > 0$ si $\Delta_2 > 0$ atunci (x_0, y_0) este punct de minim local;

(2) Daca $\Delta_1 < 0$ si $\Delta_2 > 0$ atunci (x_0, y_0) este punct de maxim local;

(3) Daca $\Delta_2 < 0$ atunci (x_0, y_0) nu este punct de extrem local

Exemplu. Determinati punctele de extrem local ale functiei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Avem

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12$$

Obtinem punctele critice $(1, 2), (-1, -2), (2, 1), (-2. - 1)$. Matricea Hesiana este

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$$

$$H_f(1, 2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 < 0 \Rightarrow (1, 2) \text{ nu este punct de extrem local}$$

$$H_f(-1, -2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 < 0 \Rightarrow (1, 2) \text{ nu este punct de extrem local}$$

$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 12 > 0,\ \Delta_2 = 108 > 0 \Rightarrow (1,2)$ este punct de minim local

$H_f(-2,-1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -12 < 0,\ \Delta_2 = 108 > 0 \Rightarrow (1,2)$ este pct de maxim local

Corolar. Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ functie care admite derivate partiale de ordinul doi continue pe D si $a \in D$ un punct critic. Fie

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

unde $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

(1) Daca $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ atunci a este punct de minim local

(3) Daca $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0$ atunci a este punct de maxim local

(3) Daca $\Delta_1 \geq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, \Delta_n \geq 0$ sau $\Delta_1 \leq 0, \Delta_2 \geq 0, \dots, (-1)^n \Delta_n \geq 0$ dar exista j astfel incat $\Delta_j = 0$ atunci nu se poate trage nicio concluzie

(4) In celelate cazuri a nu este punct de extrem local al lui f.

Exercitii

1) Calculati derivatele partiale de ordinul I, derivatele partiale de ordinul II si $df(2,1)$ pentru urmatoarele functii:

(1) $f(x,y) = \frac{x+y}{2x-y}$

(2) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

2) Calculati derivatele partiale de ordinul I, derivatele partiale de ordinul II si $df(1,-1,1)$ pentru urmatoarele functii:

(1) $f(x,y,z) = xz + x^2 z + \sin(x + 2y + z)$

(2) $f(x,y,z) = z \ln(x + y^2) + e^{x+yz}$

3) Determinati punctele de extrem local ale functiilor

(1) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy + 2$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 2xy - 1$

(3) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 2y$

(4) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 2$

(5) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 - xy$

(6) $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y$

(7) $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

(8) $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + 4xy + z^4 - 4z$

(9) $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z^3 + 3zy^2 - 15z - 12y + x^2 - 2x$

Integrala Riemann pentru functii de o variabila reala

Fie $[a,b]$ un interval inchis si marginit din $\mathbb{R}$. Se numeste diviziune a intervalului $[a,b]$ un sistem de puncte

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Vom nota cu $D[a,b]$ multimea diviziunilor intervalului $[a,b]$. Numarul

$$\|\Delta\| = \max_{1 \le i \le n} |x_i - x_{i-1}|$$

se numeste norma diviziunii Δ. Spunem ca diviziunea Δ' este mai fina decat diviziunea Δ si notam $\Delta \prec \Delta'$ daca Δ' contine punctele diviziunii Δ. Un sistem de n puncte $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ se numeste sistem de puncte intermediare asociat diviziunii Δ. Suma

$$\sigma_\Delta(f,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

se numeste suma Riemann asociata diviziunii Δ si sistemului de puncte intermediare ξ.

Definitie. O functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se numeste integrabila Riemann daca exista un numar real I astfel incat pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $\eta_\varepsilon > 0$ astfel incat

$$|\sigma_\Delta(f,\xi) - I| < \varepsilon$$

oricare ar fi diviziunea Δ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ si oricare ar fi sistemul de puncte intermediare ξ asociat lui Δ. Numarul I este unic determinat, se numeste integrala lui f pe $[a,b]$ si se noteaza $\int_a^b f(x)dx$.

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie marginita si fie

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

o diviziune a intervalului $[a,b]$. Fie

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

Definim

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ suma Darboux inferioara}$$

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \text{ suma Darboux superioara}$$

Lema. Daca $\Delta \prec \Delta'$ atunci $s_\Delta(f) \le s_{\Delta'}(f) \le S_{\Delta'}(f) \le S_\Delta(f)$

Lema. Pentu oricare diviziuni Δ si Δ' $s_\Delta(f) \le S_{\Delta'}(f)$

Fie $\underline{\int_a^b} f = \sup\limits_\Delta s_\Delta(f)$ si $\overline{\int_a^b} f = \inf\limits_\Delta S_\Delta(f)(f)$. Din lemele anterioare rezulta ca

$$\underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f$$

Teorema 1. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie marginita. Atunci urmatoarele afirmatii sunt echivalente

(i) f este integrabila Riemann

(ii) $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$

(iii) pentru orice $\varepsilon > 0$ exista o diviziunea Δ a intervalului $[a,b]$ astfel incat $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

(iv) pentru orice $\varepsilon > 0$ exista $\eta_\varepsilon > 0$ astfel incat oricare ar fi diviziunea Δ a intervalului $[a,b]$, cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ sa avem $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$.

Teorema. Daca $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o functie monotona, atunci este integrabila Riemann.

Demonstratie. Sa presupunem ca f este crescatoare si nu este o functie constanta. Fie $\varepsilon > 0$ si fie

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

o diviziune a intervalului $[a,b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$ unde $\eta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ Deoarece f este crescatoare, avem $m_i = f(x_{i-1})$ si $M_i = f(x_i)$. Atunci avem

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Din Teorema 1, deducem ca f este integrabila.

Teorema. Daca $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ este o functie continua pe $[a,b]$, atunci este integrabila Riemann.

Demonstratie. Fie $\varepsilon > 0$. Functia f fiind continua pe $[a,b]$, este uniform continua pe $[a,b]$. Rezulta ca exista $\eta_\varepsilon > 0$ astfel incat oricare ar fi $x, y \in [a,b]$ cu $|x-y| < \eta_\varepsilon$ avem $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Fie $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ cu $\|\Delta\| < \eta_\varepsilon$. Deoarece o functie continua pe un interval constanat este marginita si isi atinge marginile rezulta ca exista $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ astfel incat $m_i = f(\xi_i)$ si $M_i = f(\eta_i)$. Atunci

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}(f(\eta_i) - f(\xi_i))(x_i - x_{i-1})$$

si deci

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n}(f(\eta_i) - f(\xi_i))(x_i - x_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Aplicand Teorema 1 rezulta ca f este integrabila.

Definitie. Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subset \mathbb{R}$ este un interval. Functia $F \to \mathbb{R}$ se numeste primitiva a functiei f pe intervalul I, daca F este derivabila pe I si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$.

Teorema. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ o functie continua si fie $F(x) = \int_a^x f(t)dy$, $x \in [a,b]$. Atunci F este o primitiva a lui f, adica F este derivabila pe $[a,b]$ si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$.

Demonstratie. Fie $x_0 \in [a,b]$ si $\varepsilon > 0$. Deoarece f este continua in x_0, exista $\delta > 0$ astfel incat

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ pentru orice } x \in U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b]$$

Daca $x \in J$, $x < x_0$ atunci

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_x^{x_0}(f(t) - f(x_0))}{x_0 - x}\right| < \varepsilon.$$

Similar se arata ca daca $x \in J$, $x < x_0$,

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Deci
$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)=f(x_0)$$
si atunci F este derivabila in x_0 si $F'(x_0)=f(x_0)$.

Teorema. Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o functie continua si fie F o primitiva a ei. Atunci
$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Demonstratie. Fie
$$G(x)=\int_a^x f(t)dt.$$
Rezulta ca $G'(x)=f(x)$ si deci $(F-G)'=0$. In consecinta F si G difera printr-o constanta C. Asadar $F(x)=G(x)+C$ pentru orice $x\in[a,b]$ Dar $G(a)=0$ si deci $F(a)=C$ si atunci $F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)dt$.

Teorema. Fie $g:[a,b]\to J$ o functie derivabila si cu derivata continua pe $[a,b]$. Daca $f:J\to\mathbb{R}$ este continua atunci
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

Demonstratie. Pentru $x\in J$, fie
$$F(x)=\int_{g(a)}^x f(u)du$$
Deoarece f este continua, rezulta ca F este derivabila si $F'=f$ pe J. Atunci $F\circ g$ este derivabila si
$$(F\circ g)'=f\circ g\cdot g'$$
Functia $f\circ g\cdot g'$ este integrabila (fiind continua) si avem
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=F\circ g(b)-F\circ g(a)=F(g(b))-F(g(a))=\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.$$

Integrale improprii pe intervale nemarginite

Definitie. Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ o functie integrabila pe orice interval $[a,c]$ cu $c>a$. Daca exista $\lim\limits_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx$ aceasta limita se numeste integrala improprie a functie f pe $[a,\infty)$ si se noteaza cu $\int_a^\infty f(x)dx$, adica
$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx$$

Daca limita este finita spunem ca integrala este convergenta. Daca limita este infinita sau nu exista, integrala este divergenta. Analog, daca $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ este integrabila pe orice interval $[a, c]$ cu $c < b$ si daca exista $\lim\limits_{c\to\infty} \int_a^c f(x)dx$ aceasta limita se numeste integrala improprie a functie f pe $[a, \infty)$ si se noteaza cu $\int_a^\infty f(x)dx$, adica

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)dx$$

Daca limita este infinita sau nu exista, integrala este divergenta. Daca $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si daca integralele $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ si $\int_c^\infty f(x)dx$ sunt convergente atunci $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ este convergenta si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

unde c este orice numar real.

Exemplu. Studiati coonvergenta integralei

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx$$

Pentru $c > 0$ aven

$$\int_0^c \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan c$$

Deoarece

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{c\to\infty} \arctan c = \frac{\pi}{2}$$

Deci integrala este convergenta si

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplu. Studiati coonvergenta integralei

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx$$

Pentru $c < 0$ aven

$$\int_c^0 e^x dx = e^x|_c^0 = 1 - e^c$$

si atunci

$$\lim_{c\to-\infty} \int_c^0 e^x dx = \lim_{c\to\infty} (1 - e^c) = 1.$$

Deci integrala este convergenta si

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = 1.$$

Exemplu. Integrala improprie

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\lambda}dx, \quad a > 0$$

este convergenta daca si numai daca $\lambda > 1$.

Pentru $\lambda = 1$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to\infty}\int_a^c \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to\infty}(\ln c - \ln a) = \infty$$

Pentru $\lambda \neq 1$

$$\lim_{c\to\infty}\int_a^c \frac{1}{x^\lambda}dx = \lim_{c\to\infty}\frac{a}{1-\lambda}(c^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}) = \begin{cases} +\infty & \text{daca } \lambda < 1 \\ \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1} & \text{daca } \lambda > 1. \end{cases}$$

Asadar,

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\lambda}dx = \begin{cases} +\infty & \text{daca } \lambda \leq 1 \\ \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1} & \text{daca } \lambda > 1. \end{cases}$$

Integrale improprii pentru functii nemarginite

Definitie. Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ astfel incat $\lim\limits_{x\nearrow b}|f(x)| = \infty$. Daca f este integrabila pe orice interval $[a, c]$ cu $c < b$ si daca exista $\lim\limits_{c\nearrow b}\int_a^c f(x)dx$ aceasta limita se numeste integrala improprie a functie f pe $[a, b)$ si se noteaza cu $\int_a^b f(x)dx$, adica

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\nearrow b}\int_a^c f(x)dx$$

Daca limita este finita spunem ca integrala este convergenta. Daca limita este infinita sau nu exista, integrala este divergenta. Analog, daca $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ este integrabila pe orice interval $[c, b]$ cu $c > a$ si daca exista $\lim\limits_{c\searrow a}\int_c^b f(x)dx$ aceasta limita se numeste integrala improprie a functie f pe (a, b) si se noteaza cu $\int_c^b f(x)dx$, adica

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\searrow a}\int_c^b f(x)dx$$

Daca limita este infinita sau nu exista, integrala este divergenta.

Exemplu. Integrala improprie

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}dx,$$

este convergenta daca si numai daca $\lambda > 1$.

Pentru $\lambda = 1$

$$\int_a^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{c\searrow 0\infty} \int_c^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{c\searrow 0}(\ln 1 - \ln c) = \infty$$

Daca $\lambda \neq 1$

$$\lim_{c\searrow 0} \int_c^1 \frac{1}{x^\lambda}dx = \lim_{c\searrow \infty} \frac{a}{1-\lambda}(1 - c^{1-\lambda}) = \begin{cases} +\infty & \text{daca } \lambda > 1 \\ \frac{1}{1-\lambda} & \text{daca } \lambda > 1. \end{cases}$$

Asadar,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\lambda}dx = \begin{cases} +\infty & \text{daca } \lambda \leq 1 \\ \frac{1}{\lambda-1} & \text{daca } \lambda > 1. \end{cases}$$

Exemplu. Studiati coonvergenta integralei

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Deoarece

$$\lim_{c\nearrow 1} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{c\nearrow 1} \arcsin c = \frac{\pi}{2}.$$

Rezulta ca integrala este convergenta si

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2}$$

Functiile Beta si Gama ale lui Euler

Teorema. Integrala improprie $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ este convergenta pentru orice $p, q > 0$.

Integrala $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{x-1}dx$ este convergenta pentru orice $p > 0$

Funcria $B : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ se nuemste functia Beta a lui Euler si functia $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ se numeste functia Gama a lui Euler.

Propozitie. (1) $\Gamma(1) = 1$

(2) $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p),\ \forall p > 0\ \ \Gamma(n+1) = n!,\ \forall n \in \mathbb{N}$

(3) $B(p,q) = B(q,p)$

(4) $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\ \forall p, q > 0$ si $B(p,q) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!},\ \forall m, n \in \mathbb{N}^*$

Exercitii. Sa se studieze natura urmtoarelor integrale improprii si sa se determine valorile acestora, in caz de convergenta

(1) $\int_0^\infty \sin x dx$

(2) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx$

(3) $\int_1^\infty \frac{1}{x^4} dx$

(4) $\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$

(5) $\int_0^\infty x e^{-x} dx$

(6) $\int_3^\infty \frac{1}{x^2-3x+2} dx$

(7) $\int_0^\infty x^2 e^{-x^3} dx$

(8) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

Serii de puteri

Se numeste serie de puteri o serie de forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Numarul

$$R = \sup\left\{ r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \text{ este convergenta} \right\}$$

se numeste raza de convergenta a seriei de puteri. Intervalul $(-R, R)$ se numeste intervalul de convergenta al seriei de puteri. Multimea A a punctelor in care seria de puteri este convergenta se numeste multimea de convergenta a seriei de puteri.

Teorema. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri. Daca exista $\omega = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \text{daca} \quad 0 < \omega < \infty \\ 0 & \text{daca} \quad \omega = \infty \\ \infty & \text{daca} \quad \omega = 0 \end{cases}$$

Daca exista $\omega = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ atunci

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\omega} & \text{daca} \quad 0 < \omega < \infty \\ 0 & \text{daca} \quad \omega = \infty \\ \infty & \text{daca} \quad \omega = 0 \end{cases}$$

Teorema (Teorema I a lui Abel)**.** Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serie de puteri cu raza de convergenta R. Atunci

(i) pentru orice $x \in (-R, R)$ seria este absolut convergenta.

(ii) pentru orice $x \notin [-R, R]$ seria este divergenta.

Corolar. Cu notatiile de mai sus, daca $0 < R < \infty$, atunci $(-R, R) \subset A \subset [-R, R]$

Exercitiu. Determinati multimea de convergenta pentru urmatoarele serii de puteri

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+1} x^n \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^3} x^n \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^3} x^n \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n$$
$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} x^n \quad (6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$$

Teorema. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenta $R > 0$. Atunci functia $s : (-R, R) \to \mathbb{R}$ definita prin

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

este continua pe $(-R, R)$.

Teorema (Teorema a II-a a lui Abel)**.** Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenta $R > 0$ si multimea de convergenta A. Daca seria de puteri este convergenta in punctul R (respectiv $-R$) atunci suma s a seriei, adica functia $s : A \to \mathbb{R}$ definita prin

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

este o functie continua in R (respectiv $-R$).

Teorema. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenta R. Atunci seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ are aceasi raza de convergenta R. Daca $R > 0$, atunci functia $s : (-R, R) \to \mathbb{R}$

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

este derivabila si

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

pentru orice $x \in (-R, R)$.

Teorema. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenta R. Atunci seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ obtinuta prin integrarea termen cu termen a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are aceasi raza de convergenta R. Daca $R > 0$, atunci functia $S : (-R, R) \to \mathbb{R}$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

este o primitiva a functiei $s : (-R, R) \to \mathbb{R}$,

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

adica $S'(x) = s(x)$ pentru orice $x \in (-R, R)$.

Fie I un interval deschis astfel incat $0 \in I$ si fie $f \in C^\infty(I)$. Seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!} x^n + \cdots$$

se numeste seria Taylor asociata functiei f in punctul 0. Cu aceste notatii avem

Teorema. Seria Taylor a functiei f in punctul 0 este convergenta in punctul $x \in I$ si suma ei este egala cu $f(x)$ daca si numai daca valorile in x ale resturilor R_n ale formulelor lui Taylor formeaza un sir $(R_n(x))_{n \geq 1}$ convergent catre 0.

Exemplu. Folosind teorema de mai sus sa se arate ca:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sa consideram $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Intrucat $f^{(n)}(0) = 1$ pentru orice $n \geq 1$, polinomul Taylor de grad n asociat lui f in punctul 0 este

$$T_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

iar seria Taylor corespunzatoare este

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Fie $x \in \mathbb{R}$. Folosind Formula lui Taylor cu restul lui Lagrange, obtinem $0 < \theta_x < x$ astfel incat

$$f(x) = T_n(x) + e^{\theta_x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Deoarece $|\theta_x| < |x|$ avem $|e_x^\theta| \leq e^{|\theta_x|} < e^{|x|}$ si atunci

$$\lim_{n\to\infty} \left| e^{\theta_x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \lim_{n\to\infty} e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Asadar, pentru orice $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - T_n(x)| = 0$$

si in concluzie

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pentru sin si cos se procedeaza similar (exercitiu !)

Exemplu. Este binecunoscut faptul ca pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

si in consecinta, daca $x \in (-1, 1)$, trecand la limita cu $n \to \infty$ rezulta ca

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}. \tag{1}$$

Inlocuind pe x cu $-x$ in relatia de mai sus, pentru $x \in (-1, 1)$ avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x}. \tag{2}$$

Exemplu. Sa se dezvolte in serie de puteri ale lui x functia $f(x) = \arctan x$ si sa se precizeze intervalul pe care dezvoltare este valabila.

Evident

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Inlocuind pe x cu x^2 in relatia (2), rezulata ca

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \cdots + (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1) \tag{3}$$

De aici prin integrare termen cu termen obtinem

$$\arctan x = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

Facand acum $x = 0$ rezulta ca $c = 0$ si deci

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

Pentru $x = 1$ seria din membru stang devine

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots .$$

Cu criteriul lui Leibniz deducem ca aceasta serie este convergenta si atunci din Teorema I lui Abel pentru serii de puteri obtinem

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \arctan x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots .$$

In mod similar avem

$$-\frac{\pi}{4} = \lim_{\substack{x \to -11 \\ x > 1}} \arctan x = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1} + \cdots .$$

Asadar

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

Exercitiu. Sa se dezvolte in serie de puteri ale lui x functia $f(x) = \ln(1 - x)$, $x > -1$ si sa se precizeze intervalul pe care dezvoltarea este valabila.

Procedand ca in exemplul anterior se obtine

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \forall x \in (-1, 1]$$

Integrale duble

Pe parcursul intregului curs D va fi o multime din plan marginita de o curba inchisa si neteda pe portiuni.

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ si fie $\Delta = \{D_i, i = 1, \ldots, n\}$ o acoperire a multimii D (adica $D \subset \cup_i D_i$) cu multimi de forma dreptunghiulara (sau mai general avand forma de paralelograme) astfel incat

$$\begin{cases} D \cap D_i \neq \varnothing \text{ pentru } i = 1, \ldots, n \\ \text{interior}(D_i) \cap \text{interior}(D_k) = \varnothing \text{ pentru } i \neq k \end{cases}$$

Fie

$$\text{diam}(D_i) = \sup\left\{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} : (x, y), (x', y') \in D_i\right\}$$

diametrul multimii A si fie

$$\|\Delta\| = \max\{\text{diam}(D_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$$

norma acoperirii. Daca $(x_i, y_i) \in D_i$ si definim suma Riemann

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\text{aria}(D_i)$$

Integrala functiei f este prin definitie

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f)$$

cu conditia ca limita sa existe si sa fie finita. In acest caz spunem ca f este integrabila pe D.

Clase de functii integrabile

1) Daca D este o multime compacta si f este continua pe D atunci este integrabila pe D.
2) Daca functia f este marginita si are discontinuitati pe un numar finit de curbe netede atunci ea este integrabila.

Interpretare geometrica a integralei duble

1) Daca $f \geq 0$, atunci $\iint_D f(x, y)dxdy$ reprezinta volumul cuprins intre graficul functiei si planul XOY;
2) $\iint_D dxdy$ preprezinta aria multimii D.

Poprietati ale integralei duble

1) Daca f este integrabil pe D si $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci αf este integrabila pe D si avem

$$\iint_D \alpha f(x,y)dxdy = \iint_D \alpha f(x,y)dxdy$$

2) Daca f si g sunt functii integrabile pe D si atunci $f+g$ este integrabila pe D si avem

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y,x)dxdy$$

3) Daca f este integrabile pe D si D' iar D si D' nu au puncte interioare comune atunci F este integrabile pe $D \cup D'$ si avem

$$\iint_{D\cup D'} f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_{D'} \alpha f(x,y)dxdy.$$

4) Daca $f \geq 0$ este o functie integrabila pe D atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0.$$

Reducerea integralei duble la o integrala iterata

1) Fie $D = [a,b] \times [c,d]$ si $f : D \to \mathbb{R}$ o functie integrabila pe D. Atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

2) Fie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ unde $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt continue. O astfel de multime se numeste domeniu simplu in raport cu Oy. Daca $f : D \to \mathbb{R}$ este o functie integrabila pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

3) Fie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq x \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$ unde $\varphi, \psi : [c,d] \to \mathbb{R}$ sunt continue. O astfel de multime se numeste domeniu simplu in raport cu axa Ox . Daca $f : D \to \mathbb{R}$ este o functie integrabila pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Example 2. Sa se calculze integrala

$$\iint_D (2x+y)dxdy, \text{ unde } D = [0,1] \times [0,2]$$

$$\iint_D (2x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 (x+y)dy\right) dx = \int_0^1 \left(x^2+xy\right)\Big|_0^2 \; dx = \int_0^1 (4+2x)dx = 5$$

Example 3. Sa se calculze

$$\iint_D (3x+y)dx$$

unde D este multimea marginita de curbele $y = x^2+1 \quad y = -x^2 \quad x = 0 \quad x = 3.$

$$\iint_D (3x+2y)dx = \int_0^3 (3xy+y^2)|_{-x^2}^{x^2+1} dx = \int_0^3 (6x^3+3x+2x^2+1)dx$$

Schimbarea de Variabila in integrala dubla

Fie $T : \Omega \to D$, o aplicatie bijectiva de clasa C^1, definita prin

$$T : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

astfel incat

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } \Omega.$$

Cu aceste notatii,

Formula de schimbare de variabila

Fie f este o functie integrabila pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(x(u,v), y(u,v) \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv.$$

Fie $A_1(u,v),\ A_2(u+\Delta u, v),\ A_3(u+\Delta u, v+\Delta v),\ A_4(u, v+\Delta v)$ un dreptunghi infinitezimal din Ω. Fie $P_1P_2P_3P_4$ imaginea dreptunghiului $A_1A_2A_3A_4$ prin transformarea T. Aria patrulateriu curbiliniu $P_1P_2P_3P_4$ poate fi aporximata cu aria paralelogramului $B_1B_2B_3B_4$, unde

$B_1(x(u,v), y(u,v))$,
$B_2(x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u,\ y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u)$,
$B_3(x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v,\ y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v)$
$B_4(x(u,v) + \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v,\ y(u,v) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v)$,

Aria triunghiului $B_1B_2B_4$ este egala cu

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x(u,v) & y(u,v) & 1 \\ x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u & y(u,v)+\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u & 1 \\ x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v & y(u,v)+\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v & 1 \end{vmatrix}$$

$$\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v \end{vmatrix}$$

$$\pm\frac{1}{2}\left|\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)-\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right|\Delta u\Delta v.$$

Cum aceasi arie o are si triunghiul $B_2B_3B_4$, rezulta ca

$$\text{aria}(B_1B_2B_3B_4)=\left|\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)-\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right|\Delta u\Delta v.$$

Daca (s,t) este un punct din dreptunghiul $A_1A_2A_3A_4$, atunci

$$\text{aria}(P_1P_2P_3P_4)\approx\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(s,t)\right|\text{aria}(A_1A_2A_3A_4).$$

Fie $\Delta=\{A_1,A_2,\dots A_n\}$ o acoperire a multimii Ω cu multimi de forma dreptunghiulara. Notam cu P_i imaginea multimii $R_i\cup\Omega$ prin transformarea T. Fie $P=\{P_1,\dots,P_n\}$. Observam ca $\|P\|\to 0$ daca si numai $\|\Delta\|\to 0$. Atunci

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_i f(x_i,y_i)\text{aria}(P_i)\\ &= \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_i f(x(s_i,t_i),y(s_i,t_i)\text{aria}\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}(s_i,t_i)\right|\text{aria}(A_i)\\ &= \iint_\Omega f(x(u,v),y(u,v)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv.\end{aligned}$$

Trecerea de la coordonate polare la coordonate carteziene

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta & \rho\in[0,\infty) \\ y=\rho\sin\theta & \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$$

In acest caz, avem

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\rho$$

Trecerea de la coordonate polare generalizate la coordonate carteziene

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta & \rho \in [0, \infty) \\ y = b\rho\sin\theta & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

In acest caz, avem

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = ab\rho$$

Example 4. 1) Calculati

$$\iint_D y dx dy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$$

Trecem la coordonate polare

$$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$$

si atunci domeniul D devine

$$\rho \in [0,2], \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Cum $dxdy = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho d\rho d\theta$, avem

$$\iint_D y dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin\theta d\theta \right) d\rho = \int_0^2 (-\rho^2\cos\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho = \int_0^2 \rho^2 d\rho = \frac{8}{3}$$

2) Calculati

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} dx dy, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$$

Trecem la coordonate polare generalizate

$$x = 2\rho\cos\theta, y = 3\rho\sin\theta$$

In coordonate polare generalizate domesniul D devine

$$\rho \in [0,1], \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Avem

$$dxdy = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = 6\rho d\rho d\theta,$$

si atunci

$$\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} 6\rho\sqrt{1-\rho^2} \right) d\rho = 4\pi.$$

Integrale tripla

In cele ce urmeaza multimea V va fi o multime din plan marginita de o suprafata inchisa si neteda pe portiuni.

Fie $f : V \to \mathbb{R}$ si fie $\Delta = \{V_i : \ i = 1, 2, \ldots, n\}$ o acoperire a multimii V (adica $V \subset \cup_i V_i$) cu multimi de forma paralelipipedica astfel incat

$$\begin{cases} V \cap V_i \neq \varnothing \\ \text{interior}(V_i) \cap \text{interior}(V_j) = \varnothing \text{ pentru } i \neq j \end{cases}$$

Fie

$$\text{diam}(V_i) = \max \left\{ \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (y-y')^2} : (x,y,z), (x',y',z') \in V_i \right\}$$

diametrul multimii A si fie

$$\|\Delta\| = \max\{\text{diam}(V_i), i = 1, 2, \ldots, n\}$$

norma acoperirii. Daca $(x_i, y_i, z_i) \in V_i \cap V$ definim suma Riemann

$$\sigma_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\text{vol}(V_i)$$

Integrala functiei f pe domeniul V este prin definitie

$$\iiint_V f(x,y)dxdy = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(f)$$

cu conditia ca limita sa existe si sa fie finita. In acest caz spunem ca f este integrabila pe V.

Clase de functii integrabile

1) Daca V este o multime compacta iar f este continua pe V atunci este integrabila pe V.
2) Daca functia f este marginita si are discontinuitati pe un numar finit de suprafete netede atunci ea este integrabila.

Interpretare geometrica a integralei triple

$\iint_V dxdy$ preprezinta volumul multimii $V \subset \mathbb{R}^3$

Poprietati ale integralei triple

1) Daca f este integrabila pe V si $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci αf este integrabila pe V si avem

$$\iiint_V \alpha f(x,y,z)dxdydz = \alpha \iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

2) Daca f si g sunt functii integrabile pe V si atunci $f+g$ este integrabila pe V si avem

$$\iiint_V (f(x,y,z)+g(x,y,z))dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + \iiint_V g(x,y,z)dxdydz$$

3) Daca f este integrabile pe V si V' iar V si V' nu au puncte interioare comune atunci F este integrabile pe $V \cup V'$ si avem

$$\iiint_{V\cup V'} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V'} \alpha f(x,y,z)dxdydz.$$

4) Daca $f \geq 0$ este o functie integrabila pe V atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$$

Metode de calcul

1) Daca $V = [a,b] \times [c,d] \times [k,p]$

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_k^p f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

2) Domeniul V este cuprins ntre planele $z=a$ si $z=b$. Notam cu V_z proiectia pe planul XOY a intersectiei lui V cu planul $z=z_0$ unde $a \leq z_0 \leq b$, Daca

$$V_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z_0) \in V\}.$$

Atunci,

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{V_z} f(x,y,z)dxdy \right) dz.$$

3) Domeniul V este simplu in raport cu Oz, adica este limitat de o suprafata laterala

cilindrica cu generatoarele paralele cu axa Oz si marginita de suprafetele $z = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in D$ si $z = \psi(x,y)$, $(x,y) \in D$. Asadar

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y), (x,y) \in D\}.$$

Atunci,

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_D \left(\iint_{S_i(x,y)}^{S_s(x,y)} f(x,y,z)dxdy \right) dz.$$

Example 5. Calculati

$$\iiint_V xdxdydz,\ V: x+y+z\le 1,\ x,y,z\ge 0$$

Observam ca

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 0\le z\le 1-x-y,\ \ (x,y)\in D\}$$

unde D, proiectia lui V pe planul xOy este

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2), x+y\le 1,\ x,y\ge 0\}$$

Atunci

$$\begin{aligned}\iiint_V zdxdydz &= \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} xdz\right)dxdy = \iint_D x(1-x-y)dxdy\\ &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}(x-x^2-xy)dy\right)dx = \int_0^1 \left(xy-x^2y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x} dx\\ &= \int_0^1\left[x(1-x)-x^2(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right]dx = \cdots\end{aligned}$$

Example 6. Calculati

$$\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz,\ V: x^2+y^2\le z^2,\ 0\le z\le 3$$

Observam ca

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 3,\ \ (x,y)\in D\}$$

unde unde D, proiectia lui V pe planul xOy este

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 9\}$$

Deci,

$$\iiint_V zdxdydz=\iint_D\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^3 (x^2+y^2)dz\right)dxdy=\iint_D (x^2+y^2)(3-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

Trecand la coordonate polare

$$\begin{cases} x=\rho cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

domeniul D devine

$$D':\begin{cases}0\le\rho\le 3\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

Cum

$$dxdy = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}\ dxdy = \rho\ d\rho d\theta$$

avem

$$\iint_D (x^2+y^2)(3-\sqrt{x^2+y^2})dxdy = \iint_{D'} \rho^3(3-\rho)d\rho d\theta = \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi}(3\rho^3-\rho^4)d\theta\right)d\rho$$

$$= 2\pi\int_0^3 (3\rho^3-\rho^4)d\rho = \frac{243}{10}\pi.$$

Schimbarea de variabila in integrala tripla

Fie $T:\Omega\to V$, o aplicatie bijectiva de clasa C^1, definita prin

$$T:\begin{cases} x = x(u,v,w)\\ y = y(u,v,w)\\ z = z(u,v,w)\end{cases}$$

astfel incat

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } \Omega$$

Cu aceste notatii,

Formula de schimbare de variabila

Daca f este o functie integrabila pe V, atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Omega f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw.$$

Coordonate sferice

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi\\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi\\ z = \rho\cos\theta\end{cases} \qquad \rho\in[0,\infty),\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi]$$

In acest caz, avem

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta$$

Coordonate sferice generalizate

$$\begin{cases} x = a\rho \sin\theta\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\rho\cos\theta \end{cases} \qquad \rho \in [0,\infty),\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi]$$

In acest caz, avem

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & a\rho\cos\theta\cos\varphi & -a\rho\sin\theta\sin\varphi \\ b\sin\theta\sin\varphi & b\rho\cos\theta\sin\varphi & b\rho\sin\theta\cos\varphi \\ c\cos\theta & -c\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = abc\rho^2\sin\theta$$

Calculati integrala

$$\iiint_V \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\right)dxdydz, \quad V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\leq 1, z\geq 0\}$$

$$\begin{cases} x = 2\rho \sin\theta\cos\varphi \\ y = 3\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \qquad \rho \in [0,1]\ \theta\in[0,\pi/2],\ \varphi\in[0,\pi]$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = 6\rho^2\sin\theta.$$

Prin aceasta transformare domeniul V define $V' = [0,1]\times[0,\pi/2]\times[0,\pi]$ Avem

$$\iiint_V \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2\right)dxdydz = \iiint_{V'} \rho^2\cdot 6\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi = \iiint_{V'} 6\rho^4\sin\theta\cdot d\rho d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi} 6\rho^4\sin\theta d\varphi\right)d\theta\right)d\rho = \int_0^1 2\pi\cdot 6\rho^4 d\rho = \int_0^1 12\pi\rho^3 d\rho = 12\pi/5$$

Exercitii

Calculati integralele

(1) $\iint\limits_D (2xy + e^x)dxdy$ unde $D = [0, 1] \times [0, 4]$

(2) $\iint\limits_D (x + \sin(2y))dxdy$ unde D este marginit de curbele $y = x - 1,\ y = -x + 1, x = 0$

(3) $\iint\limits_D (3x^2y - 1)dxdy$ unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$

(4) $\iint\limits_D (2xy + x^2 - y^2)dxdy$ unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R} | x^2 + y^2 \leq 9, x - y \leq 0, x + y \geq 0\}$

(5) $\iiint\limits_V (y \sin^2 z + x \cos 2z)dxdydz,$ unde $V = [2, 4] \times [1, 3] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

(6) $\iiint\limits_V (x + z)dxdydz,$ unde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, x, y \geq 0, z \leq 0\}$

(7) $\iiint\limits_V (xz + y)dxdydz,$ unde $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, y, z \geq\ 0\}.$

(8) $\iint_D (x + xy)dxdy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 9,\ x \geq y\}$

(9) $\iint_D (x^2 + y)dxdy, \quad D$ este limiat de curbele $y = x^2, x = y^2$

(10) $\iint_D \frac{1}{(y + x)^2} dxdy,\ D$ este limitat de dreptele $y - 2x = 0, y + 2x = 0, y = 1,\ y = 2$

11) $\iiint_V (xy + z)dxdydz, \quad V = [0, 1] \times [0, 2] \times [1, 3]$

12) $\iiint_V (z + 1)dxdydz, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y + z = 6,\ x, y, z \geq 0\}$

13) $\iiint_V (x^2 + y^2)dxdydz, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2z,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 2\}$

14) $\iiint_V xydxdydz, \quad V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 2\}$

15) $\iiint_V (x + y + xz^2)dxdydz, \quad V = [0, 1] \times [1, 3] \times [0, 2]$