FMI, Info, 2018/2019, Anul I, ID
Logică matematică şi computaţională

Partea 2
Exerciţii

(S2.1) Fie următoarele propoziţii exprimate în limbaj natural:

(i) Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva.

(ii) Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul.

Transpuneţi-le în formule ale limbajului formal al logicii propoziţionale.
Demonstraţie:

(i) Fie φ = Merg în parc dacă îmi termin treaba şi nu apare altceva. Considerăm propoziţiile atomice:

$p =$ Merg în parc. $\quad q =$ Îmi termin treaba. $\quad r =$ Apare altceva.

Atunci $\varphi = (q \wedge (\neg r)) \to p$.

(ii) Fie θ = Treci examenul la logică numai dacă înţelegi subiectul. Considerăm propoziţiile atomice:

$w =$ Treci examenul la logică. $\quad z =$ Înţelegi subiectul.

Atunci $\theta = w \to z$.

$\square$

(S2.2) Să se arate că pentru orice formulă φ, numărul parantezelor deschise care apar în φ coincide cu numărul parantezelor închise care apar în φ.
Demonstraţie: Notăm, pentru orice $\varphi \in Form$, cu $l(\varphi)$ numărul parantezelor deschise şi cu $r(\varphi)$ numărul parantezelor închise care apar în φ. Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \boldsymbol{P} \text{ dacă şi numai dacă } l(\varphi) = r(\varphi).$$

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ folosind Principiul inducţiei pe formule. Avem următoarele cazuri:

- Formula φ este în V, deci există $n \in \mathbb{N}$ cu $\varphi = v_n$. Atunci $l(\varphi) = l(v_n) = 0 = r(v_n) = r(\varphi)$.
- Există $\psi \in Form$ cu $\varphi = (\neg\psi)$. Presupunem că ψ satisface $\boldsymbol{P}$. Obţinem
$$l(\varphi) = l(\psi) + 1 = r(\psi) + 1 = r(\varphi).$$
- Există $\psi, \chi \in Form$ cu $\varphi = (\psi \to \chi)$. Presupunem că ψ, χ satisfac $\boldsymbol{P}$. Obţinem
$$l(\varphi) = l(\psi) + l(\chi) + 1 = r(\psi) + r(\chi) + 1 = r(\varphi).$$

$\square$

(S2.3) Să se demonstreze că pentru orice x_0, x_1, x_3, x_4 din $\{0, 1\}$ avem:

(i) $((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0 = 1$;

(ii) $(x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)) = 1$.

Demonstraţie:

(i)

x_0	x_1	$x_0 \to x_1$	$(x_0 \to x_1) \to x_0$	$((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

(ii) Notăm $f(x_1, x_3, x_4) := (x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1))$.

x_1	x_3	x_4	$x_3 \to x_4$	$x_4 \to x_1$	$x_3 \to x_1$	$(x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)$	$f(x_1, x_3, x_4)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

$\square$

(S2.4) Să se găsească câte un model pentru fiecare din formulele:

(i) $v_0 \to v_2$;

(ii) $v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4$.

Demonstraţie:

(i) Fie funcţia $e : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_2 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$e^+(v_0 \to v_2) = e^+(v_0) \to e^+(v_2) = e(v_0) \to e(v_2) = 0 \to 1 = 1.$$

(ii) Fie funcţia $e : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_3 \\ 0, & \text{dacă } x = v_4 \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} e^+(v_0 \wedge v_3 \wedge \neg v_4) &= e^+(v_0) \wedge e^+(v_3) \wedge \neg e^+(v_4) \\ &= e(v_0) \wedge e(v_3) \wedge \neg e(v_4) \\ &= 1 \wedge 1 \wedge \neg 0 \\ &= 1 \wedge 1 \wedge 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\square$

(S2.5) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ,

(i) φ este tautologie dacă şi numai dacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

(ii) φ este nesatisfiabilă dacă şi numai dacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$
\begin{aligned}
\varphi \text{ este tautologie} &\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ \neg e^+(\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ e^+(\neg\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ \text{nu avem că } \ e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \text{nu avem că există } e: V \to \{0,1\} \text{ cu } \ e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \text{nu avem că } \neg\varphi \text{ e satisfiabilă} \\
&\iff \neg\varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\
&\iff \neg\varphi \text{ e nesatisfiabilă.}
\end{aligned}
$$

(ii) Avem:

$$
\begin{aligned}
\varphi \text{ este nesatisfiabilă} &\iff \varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\
&\iff \text{nu avem că } \varphi \text{ e satisfiabilă} \\
&\iff \text{nu avem că există } e: V \to \{0,1\} \text{ cu } \ e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ \text{nu avem că } \ e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ \neg e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e: V \to \{0,1\},\ e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \neg\varphi \text{ este tautologie.}
\end{aligned}
$$

□

(S2.6) Arătaţi că pentru orice φ, ψ, $\chi \in Form$, avem:

(i) $\psi \vDash \varphi \to \psi$;

(ii) $(\varphi \to \psi) \land (\psi \to \chi) \vDash \varphi \to \chi$;

(iii) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \land \psi) \to \chi$;

(iv) $\varphi \lor (\varphi \land \psi) \sim \varphi$;

(v) $\varphi \land \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \lor (\psi \to \chi)$;

(vi) $\vDash \neg\varphi \to (\neg\psi \to (\psi \leftrightarrow \varphi))$.

Demonstraţie: Vom folosi în demonstraţii următoarele: pentru orice $a, b \in \{0, 1\}$,

$$\begin{array}{rcl} a \rightarrow b = 1 & \iff & a \leq b, \\ 1 \rightarrow a = a, & & a \rightarrow 1 = 1 \\ 0 \rightarrow a = 1, & & a \rightarrow 0 = \neg a \\ 1 \wedge a = a, & & 0 \wedge a = 0, \\ 1 \vee a = 1, & & 0 \vee a = a. \end{array}$$

(i) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e^+(\psi) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Dar:

$$e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi) = e^+(\varphi) \rightarrow 1 = 1.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \to \chi) = 1$. Avem că

$$1 = e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) = (e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)) \wedge (e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi)),$$

de unde tragem concluzia că $e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi) = 1$ şi $e^+(\psi) \rightarrow e^+(\chi) = 1$. Prin urmare, $e^+(\varphi) \leq e^+(\psi)$ şi $e^+(\psi) \leq e^+(\chi)$. Obţinem atunci, din tranzitivitatea lui $\leq$, că $e^+(\varphi) \leq e^+(\chi)$. Aşadar,

$$e^+(\varphi \to \chi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\chi) = 1.$$

(iii) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi) = 1 \text{ dacă şi numai dacă } e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) = 1,$$

ceea ce este echivalent cu a arăta că $e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) = e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi)$.

Metoda 1: Ne folosim de următorul tabel:

$e^+(\varphi)$	$e^+(\psi)$	$e^+(\chi)$	$e^+(\psi \to \chi)$	$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi))$	$e^+(\varphi \wedge \psi)$	$e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Metoda 2: Raţionăm direct. Observăm că

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) &= e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)), \\ e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) &= e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi). \end{aligned}$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= 0 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = 1, \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) &= 0 \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) = 0 \to e^+(\chi) = 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= 1 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = e^+(\psi) \to e^+(\chi), \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) &= 1 \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) = e^+(\psi) \to e^+(\chi). \end{aligned}$$

(iv) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = e^+(\varphi), \quad \text{deci că} \quad e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = e^+(\varphi).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee (1 \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee e^+(\psi) = 1.$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee (0 \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee 0 = 0.$$

(v) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) = e^+((\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)),$$

deci că

$$(e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) = (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= 1 \to e^+(\chi) = e^+(\chi), \\ (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= (1 \to e^+(\chi)) \vee (1 \to e^+(\chi)) \\ &= e^+(\chi) \vee e^+(\chi) = e^+(\chi). \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= (0 \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) \\ &= 0 \to e^+(\chi) = 1, \\ (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= (0 \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) \\ &= 1 \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = 1. \end{aligned}$$

(c) $e^+(\psi) = 0$. Similar cu cazul precedent.

(vi) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară.

$$e^+(\neg\varphi \to (\neg\psi \to (\psi \leftrightarrow \varphi))) = \neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ şi, prin urmare,

$$\begin{aligned} \neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= 0 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} \neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= \neg 0 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0)) \\ &= 1 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0)) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0) \\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow \neg e^+(\psi) \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

(S2.7) Să se arate că

$$\{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\} \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$$

Demonstraţie:

Fie $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e \vDash \{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\}$. Atunci $e^+(v_0) = 1$ (deci $e(v_0) = 1$) şi $e^+(\neg v_0 \vee v_1 \vee v_2) = 1$. Aşadar,

$$1 = \neg e(v_0) \vee e(v_1) \vee e(v_2) = \neg 1 \vee e(v_1) \vee e(v_2) = 0 \vee e(v_1) \vee e(v_2) = e(v_1) \vee e(v_2).$$

Conform definiţiei lui $\vee$, avem că $v_1 \vee v_2 = \neg v_1 \to v_2$, deci

$$e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_1 \vee v_2) = e(v_1) \boldsymbol{\vee} e(v_2) = 1.$$

Prin urmare,

$$e^+((v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)) = e^+(v_3 \to v_2) \boldsymbol{\vee} e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_3 \to v_2) \boldsymbol{\vee} 1 = 1,$$

adică $e \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$. □

(S2.8) Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Să se demonstreze:

(i) Dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vDash \psi$.

(ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

Demonstraţie:

(i) Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui ψ. Cum $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \varphi \to \psi$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Deoarece $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = 1 \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = e^+(\psi)$, rezultă că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(ii) "$\Rightarrow$" Fie e un model al lui Γ. Vrem să arătăm că e este model al lui $\varphi \to \psi$. Avem două cazuri:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $e^+(\varphi \to \psi) = 0 \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

(b) $e^+(\varphi) = 1$, deci $e \vDash \varphi$. Atunci $e \vDash \Gamma \cup \{\varphi\}$, şi prin urmare, $e \vDash \psi$, adică $e^+(\psi) = 1$. Rezultă că $e^+(\varphi \to \psi) = 1 \boldsymbol{\to} 1 = 1$, deci $e \vDash \varphi \to \psi$.

"$\Leftarrow$" Fie e un model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Atunci $e^+(\varphi) = 1$ şi $e \vDash \Gamma$, deci, din ipoteză, $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Obţinem atunci, ca la (i), că $e^+(\psi) = 1$, adică $e \vDash \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1 \iff$ pentru orice model e al lui Γ, avem $e \vDash \varphi$ şi $e \vDash \psi \iff \Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \psi$.

□

(S2.9) (Metoda reducerii la absurd)
Să se arate că pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

Demonstraţie:

Avem

(1)	$\Gamma \cup \{\neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	Ipoteză
(2)	Γ	$\vdash \neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	Teorema deducţiei
(3)	Γ	$\vdash (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)) \to ((\varphi \to \varphi) \to \psi)$	(A3) şi Propoziţia 1.25.(i)
(4)	Γ	$\vdash (\varphi \to \varphi) \to \psi$	(MP): (2), (3)
(5)	Γ	$\vdash \varphi \to \varphi$	Propoziţiile 1.30 şi 1.26.(ii)
(6)	Γ	$\vdash \psi$	(MP): (4), (5).

□

(S2.10) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

(i) $\{\psi, \neg\psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi)$;

(iii) $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$;

(iv) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$.

Demonstraţie: Demonstrăm (i):

(1)		$\vdash \neg\psi \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$	(A1)
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi \to \neg\psi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$	(A3) şi Propoziţia 1.25.(i)
(4)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	Teorema deducţiei.

Punctul (ii) se obţine din (i) aplicând de două ori Teorema deducţiei:

(1)	$\{\psi, \neg\psi\}$	$\vdash \varphi$	(i)
(2)	$\{\neg\psi\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \chi)$	Teorema deducţiei.

Demonstrăm în continuare (iii).

(1)	$\{\neg\varphi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	(i)
(2)	$\{\neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(1) şi (S2.9)
(3)		$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$.	Teorema deducţiei.

Demonstrăm (iv):

(1)	$\vdash \neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	(iii) cu $\varphi := \neg\varphi$
(2)	$\vdash (\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	(A3)
(3)	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (2).

□

(S2.11) ("Reciproca" axiomei 3)
Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).$$

Demonstraţie:

(1)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi \to \psi$	Propoziţia 1.25.(ii)
(2)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziţia 1.25.(ii)
(3)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	Propoziţia 1.25.(ii)
(4)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(S2.10).(iii) şi Propoziţia 1.26.(ii)
(5)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \neg(\varphi \to \varphi))$	(S2.10).(ii) şi Propoziţia 1.26.(ii)
(8)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \psi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (2), (7)
(9)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (6), (8)
(10)	$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$	$\vdash \neg\varphi$	(9) şi (S2.9)
(11)	$\{\varphi \to \psi\}$	$\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	Teorema deducţiei
(12)		$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	Teorema deducţiei.

$\square$

(S2.12) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ,

$$\{\psi, \neg\varphi\} \vdash \neg(\psi \to \varphi).$$

Demonstraţie: Avem

(1)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \psi$	Propoziţia 1.25.(ii)
(2)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\varphi$	Propoziţia 1.25.(ii)
(3)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \to \varphi)$	Propoziţia 1.25.(ii)
(4)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\neg(\psi \to \varphi) \to (\psi \to \varphi)$	(S2.10).(iii) şi Prop. 1.26.(ii)
(5)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \psi \to \varphi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi))$	(S2.10).(ii) şi Prop. 1.26.(ii)
(8)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (2), (7)
(9)	$\{\psi, \neg\varphi, \neg\neg(\psi \to \varphi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \varphi)$	(MP): (6), (8)
(10)	$\{\psi, \neg\varphi\}$	$\vdash \neg(\psi \to \varphi)$	(9) şi (S2.9).

$\square$