Sisteme de ecuaţii liniare.

Scopul acestei lecţii este acela de a vorbi despre sistemele de ecuaţii liniare cu coeficienţi într-un corp comutativ K. Corpul va fi, de cele mai multe ori, corpul numerelor reale.

Analizăm sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots a_{2,n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots a_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

Vom nota cu A matricea $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ şi cu A_j matricea obţinută din A prin înlocuirea coloanei j cu coloana termenilor liberi $(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Formulele lui Cramer: Presupunem că $\det A = \det(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \neq 0$. Atunci au loc următoarele formule:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \forall\, j = \overline{1,n}.$$

Ce facem când $\det A = 0$? Avem nevoie de conceptul de rang al unei matrici.

Definiţie: Spunem că rangul matricii A este egal cu r dacă există o matrice obţinută din intersecţia a r linii şi r coloane din matricea A care are determinant nenul; în plus, orice matrice obţinută din intersecţia a $r+1$ linii şi $r+1$ coloane din matricea A are determinant zero.

Teoremă Kronecker-Capelli: Sistemul (1) are soluţii dacă şi numai dacă rangul matricii A coincide cu rangul matricii extinse a lui A (obţinută prin alipirea la A a coloanei termenilor liberi). Aceasta înseamnă că dacă rangul lui A este r, atunci orice matrice formată din intersecţia a $r+1$ linii din A şi $r+1$ coloane din cele ale lui A şi coloana termenilor liberi, are determinant zero. În cazul când are loc condiţia din teoremă, atunci sistemul se rezolvă ca mai jos. Pentru uşurinţa notaţiilor, voi presupune că $\det(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq r} \neq 0$, unde r este rangul matricii A. Atunci $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_n$ pot lua orice valori din corpul K iar $x_1, x_2, \dots x_r$ se calculează cu formulele lui Cramer, folosind primele r ecuaţii ale sistemului.

Aplicaţie: Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$mx + my + z = m$$

$$x + my + z = 1$$

$$x + y + mz = m,$$

unde m este un număr real.

Calculăm determinantul sistemului:

$$\begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - m^2 - m + 1 = (m-1)^2(m+1).$$

Dacă $m \neq \pm 1$, atunci putem aplica formulele lui Cramer. Avem

$$x = \frac{1}{(m-1)^2(m+1)} \begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \end{vmatrix} = 1,$$

$$y = \frac{1}{(m-1)^2(m+1)} \begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \end{vmatrix} = \frac{-(m-1)^2}{(m-1)^2(m+1)} = -\frac{1}{m+1},$$

$$z = \frac{1}{(m-1)^2(m+1)} \begin{vmatrix} m & m & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \frac{m^3 - 2m^2 + m}{(m-1)^2(m+1)} = \frac{m}{m+1}.$$

Cazul $m = -1$. Nu există soluţii în acest caz. Acest lucru se poate observa uşor dacă ne uităm la prima ecuaţie şi la a treia.

$$-x - y + z = -1,$$

$$x + y - z = -1.$$

La aceeaşi concluzie ajungem şi dacă aplicăm teorema Kronecker-Capelli. Rangul matricii este 2 iar rangul matricii extinse este 3. Înlocuim coloana a treia cu coloana termenilor liberi şi obţinem:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4;$$

deci rangul matricii extinse este 3. Deoarece $2 \neq 3$, teorema invocată ne asigură că sistemul nu are soluţii.

Cazul $m = 1$. Toate cele trei ecuaţii se reduc la una singură: $x + y + z = 1$. Soluţia generală este $y, z \in \mathbb{R}, x = 1 - y - z$.