# PARTEA 1

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019 · ID

# PRELIMINARII

Fie $A$, $B$, $T$ mulţimi a.î. $A, B \subseteq T$.

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{x \in T \mid x \in A \text{ sau } x \in B\} \\
A \cap B &= \{x \in T \mid x \in A \text{ şi } x \in B\} \\
A \setminus B &= \{x \in T \mid x \in A \text{ şi } x \notin B\} \\
C_T A &= T \setminus A = \{x \in T \mid x \notin A\}
\end{aligned}
$$

$C_T A$ se mai notează şi $\overline{A}$ când $T$ este clar din context.

**Notaţii.**

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ este mulţimea numerelor naturale
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{Z}$ este mulţimea numerelor întregi
- $\mathbb{Q}$ este mulţimea numerelor raţionale.
- $\mathbb{R}$ este mulţimea numerelor reale

Mulţimea părţilor lui $T$ este $\mathcal{P}(T) = \{A \mid A \subseteq T\}$.

Se mai notează şi $2^T$.

**Exemple.**

- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$,
- $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
- $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Dacă $T$ are $n$ elemente, atunci $2^T$ are $2^n$ elemente.

Notăm cu $(a, b)$ perechea ordonată formată din $a$ şi $b$ (care sunt componentele lui $(a, b)$).

Observaţii.

- dacă $a \neq b$, atunci $(a, b) \neq (b, a)$
- $(a, b) \neq \{a, b\}$
- $(7, 7)$ este o pereche ordonată validă
- două perechi ordonate $(a, b)$ şi $(c, d)$ sunt egale ddacă $a = c$ şi $b = d$.

**Definiţie.**
Produsul cartezian a două mulţimi $A$ şi $B$ este definit astfel:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}$$

**Exerciţiu.**

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

**Definiţie.**
O relaţie binară între $A$ şi $B$ este o submulţime a lui $A \times B$.

O relaţie binară pe $A$ este o submulţime a lui $A \times A$.

**Exemple.**

- $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$<= \{(k, n) \mid \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } m \neq 0 \text{ şi } m + k = n\}$$

- $| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$| = \{(k, n) \mid \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } mk = n\}$$

**Definiţie.**

- Dacă $R \subseteq A \times B$, atunci relaţia inversă $R^{-1} \subseteq B \times A$ este definită astfel:
$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$
- Dacă $R \subseteq A \times B$ şi $Q \subseteq B \times C$, atunci compunerea lor $Q \circ R \subseteq A \times C$ este definită astfel:
$$Q \circ R = \{(a, c) \mid \text{ există } b \in B \text{ a.î. } (a, b) \in R \text{ şi } (b, c) \in Q\}.$$
- Diagonala lui $A$ este $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

**Exerciţiu.**

- Compunerea relaţiilor este asociativă.
- Dacă $R \subseteq A \times B$ atunci $R \circ \Delta_A = R$ şi $\Delta_B \circ R = R$.

**Definiţie.**
O funcţie este un triplet $(A, B, R)$, unde $A$ şi $B$ sunt mulţimi, iar $R \subseteq A \times B$ este o relaţie cu proprietatea că pentru orice $a \in A$ există un unic $b \in B$ cu $(a, b) \in R$.

Vom nota o funcţie $(A, B, R)$ prin $f : A \to B$, simbolul $f$ având semnificaţia: fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un singur element $f(x) \in B$ a.î. $(x, f(x)) \in R$.

Spunem că $f : A \to B$ este definită pe $A$ cu valori în $B$, $A$ se numeşte domeniul de definiţie al funcţiei $f$ şi $B$ domeniul valorilor lui $f$.

**Definiţie.**
O funcţie parţială de la $A$ la $B$ este o funcţie $f : C \to B$, unde $C$ este o submulţime a lui $A$.

**Notaţie.**

- $B^A$ este mulţimea funcţiilor de la $A$ la $B$.
- Fie $f : A \to B$ o funcţie, $X \subseteq A$ şi $Y \subseteq B$.
  - $f(A)$ este imaginea lui $f$.
  - $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este imaginea directă a lui $X$ prin $f$
  - $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ este imaginea inversă a lui $Y$ prin $f$.

**Definiţie.**
Fie $f : A \to B$ o funcţie.

- $f$ este injectivă dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- $f$ este surjectivă dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- $f$ este bijectivă dacă $f$ este injectivă şi surjectivă.

**Definiţie.**
Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ două funcţii. Compunerea lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru orice } x \in A.$$

Funcţia identitate a lui $A$ este funcţia $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$.

**Definiţie.**

O funcţie $f : A \to B$ este inversabilă dacă există $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$.

**Exerciţiu.**

O funcţie este bijectivă ddacă este inversabilă.

**Definiţie.**

Spunem că $A$ este echipotentă cu $B$ dacă există o bijecţie $f : A \to B$.
Notăm acest fapt prin $A \sim B$.

**Exerciţiu.**

$A$ este echipotentă cu $B$ ddacă $B$ este echipotentă cu $A$.
De aceea, spunem de obicei că $A$ şi $B$ sunt echipotente.

**Definiţie.**

Fie $A, T$ mulţimi a.î. $A \subseteq T$. Funcţia caracteristică a lui $A$ în raport cu $T$ este definită astfel:

$$\chi_A : T \to \{0,1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

**Proprietăţi.**

Dacă $A, B \subseteq T$ şi $x \in T$ atunci

$$\begin{aligned} \chi_{A\cap B}(x) &= \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \\ \chi_{A\cup B}(x) &= \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \\ \chi_{\overline{A}}(x) &= 1 - \chi_A(x). \end{aligned}$$

Fie $I$ o mulţime nevidă.

**Definiţie.**

Fie $A$ o mulţime. O familie de elemente din $A$ indexată de $I$ este o funcţie $f : I \to A$. Notăm cu $(a_i)_{i\in I}$ familia $f : I \to A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$. Vom scrie şi $(a_i)_i$ sau $(a_i)$ atunci când $I$ este dedusă din context.

**Definiţie.**

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulţime $A_i$, obţinem o familie (indexată) de mulţimi $(A_i)_{i\in I}$.

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulţimi ale unei mulţimi $T$. Reuniunea şi intersecţia familiei $(A_i)_{i\in I}$ sunt definite astfel:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i\in I} A_i &= \{x \in T \mid \text{ există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\} \\ \bigcap_{i\in I} A_i &= \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\} \end{aligned}$$

Fie $I$ o mulţime nevidă şi $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi.

**Definiţie.**

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i\in I}$ se defineşte astfel:

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I} A_i &= \left\{f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\right\}\\ &= \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.\end{aligned}$$

Pentru orice $j \in I$, funcţia $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j, \pi_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$ se numeşte proiecţie canonică a lui $\prod_{i\in I} A_i$. $\pi_j$ este surjectivă.

**Exerciţiu.**

Fie $I$, $J$ mulţimi nevide. Atunci

$$\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j \text{ şi } \bigcap_{i\in I} A_i \times \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j.$$

Fie $n \geq 1$ un număr natural, $I = \{1, \ldots, n\}$ şi $A_1$, ..., $A_n \subseteq T$.

- $(x_i)_{i \in I} = (x_1, \ldots, x_n)$, un $n$-tuplu (ordonat)
- $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ şi $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- $\displaystyle\prod_{i \in I} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$ şi $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n}$

**Definiţie.**

O relaţie $n$-ară între $A_1$, ..., $A_n$ este o submulţime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^{n} A_i$. Dacă $R$ este o relaţie $n$-ară, spunem că $n$ este aritatea lui $R$.

O relaţie $n$-ară pe $A$ este o submulţime a lui $A^n$.

Fie $A$ o mulţime nevidă şi $R \subseteq A \times A$ o relaţie binară pe $A$.

**Notaţie.**
Scriem $xRy$ în loc de $(x, y) \in R$ şi $\neg(xRy)$ în loc de $(x, y) \notin R$.

**Definiţie**

- $R$ este reflexivă dacă $xRx$ pentru orice $x \in A$.
- $R$ este ireflexivă dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- $R$ este simetrică dacă pentru orice $x, y \in A$, $xRy$ implică $yRx$.
- $R$ este antisimetrică dacă pentru orice $x, y \in A$,

  $xRy$ şi $yRx$ implică $x = y$.
- $R$ este tranzitivă dacă pentru orice $x, y, z \in A$,

  $xRy$ şi $yRz$ implică $xRz$.
- $R$ este totală dacă pentru orice $x, y \in A$, $xRy$ sau $yRx$.

**Definiţie.**

Fie $A$ o mulţime nevidă. O relaţie binară $R \subseteq A \times A$ se numeşte relaţie de echivalenţă dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

**Exemplu.**

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Definim relaţia $\equiv(\text{mod } n) \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ astfel:

$$\equiv(\text{mod } n) = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \text{ divide } (x - y)\}.$$

Relaţia $\equiv(\text{mod } n)$ se numeşte congruenţa modulo $n$. Folosim notaţia $x \equiv y(\text{mod } n)$ pentru $(x, y) \in \equiv(\text{mod } n)$.

**Exemplu.**

Fie $f : A \to B$ o funcţie. Definim relaţia $\ker f \subseteq A \times A$ astfel:

$$\ker f = \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid f(a_1) = f(a_2)\}.$$

$\ker f$ se numeşte nucleul lui $f$.

**Notaţii.**

Vom nota relaţiile de echivalenţă cu $\sim$.
Scriem $x \sim y$ dacă $(x, y) \in \sim$ şi $x \not\sim y$ dacă $(x, y) \notin \sim$.

Fie $A$ o mulţime nevidă şi $\sim \subseteq A \times A$ o relaţie de echivalenţă.

**Definiţie.**

Pentru orice $x \in A$, clasa de echivalenţă $[x]$ a lui $x$ este definită astfel:

$$[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}.$$

**Definiţie.**

Mulţimea tuturor claselor de echivalenţă distincte ale elementelor lui $A$ se numeşte mulţimea cât a lui $A$ prin $\sim$ şi se notează $A/\sim$.

Aplicaţia $\pi : A \to A/\sim, \quad \pi(x) = [x]$ se numeşte funcţia cât.

**Exemplu.**
Considerăm congruenţa modulo 2, $\equiv$(mod 2):

- $[0] = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $[1] = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$
- $[2n] = [0]$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$
- $[2n + 1] = [1]$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$

Mulţimea cât este $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$.

**Propoziţie.**
Fie $A$ o mulţime nevidă şi $\sim \subseteq A \times A$ o relaţie de echivalenţă. Atunci

- $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.
- $[x] = [y]$ ddacă $x \sim y$.
- $[x] \cap [y] = \emptyset$ ddacă $x \not\sim y$ ddacă $[x] \neq [y]$.

**Demonstraţie.** Exerciţiu.

Fie $A$ o mulţime nevidă şi $\sim \subseteq A \times A$ o relaţie de echivalenţă.

**Definiţie.**
Un sistem de reprezentanţi pentru $\sim$ este o submulţime $X \subseteq A$ care satisface: pentru orice $a \in A$ există un unic $x \in X$ a.î. $a \sim x$.

**Exemplu.**
Considerăm congruenţa modulo 2, $\equiv \pmod 2$.

Mulţimea cât este $\mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$.

Sisteme de reprezentanţi: $X = \{0, 1\}$, $X = \{2, 5\}$, $X = \{999, 20\}$.

**Propoziţie.**
Fie $X$ un sistem de reprezentanţi pentru $\sim$.
Atunci $A = \bigcup_{x \in X}[x]$ şi $A/\!\sim = \{[x] \mid x \in X\}$.

**Demonstraţie.** Exerciţiu.

Fie $A$ o mulţime nevidă.

**Definiţie.**
O partiţie a lui $A$ este o familie $(A_i)_{i \in I}$ de submulţimi nevide ale lui $A$ care verifică proprietăţile:

- $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ şi
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j$.

Partiţia $(A_i)_{i \in I}$ se numeşte finită dacă $I$ este finită.

Fie $A$ o mulţime nevidă.

**Propoziţie.**
Există o bijecţie între mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe $A$ şi mulţimea partiţiilor lui $A$:

- $(A_i)_{i\in I}$ partiţie a lui $A \mapsto$ relaţia de echivalenţă pe $A$ definită prin:

$$x \sim y \ \text{ ddacă } \ \text{există } i \in I \ \text{ a.î. } x, y \in A_i.$$

- $\sim$ relaţie de echivalenţă pe $A \mapsto$ partiţia $([x])_{x\in X}$, unde $X \subseteq A$ este un sistem de reprezentanţi pentru $\sim$.

**Definiţie.**
Fie $A$ o mulţime nevidă. O relaţie binară $R$ pe $A$ este relaţie de

- ordine parţială dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.
- ordine strictă dacă este ireflexivă şi tranzitivă.
- ordine totală dacă este antisimetrică, tranzitivă şi totală.

**Notaţii.**
Vom nota relaţiile de ordine parţială şi totală cu $\leq$, iar relaţiile de ordine strictă cu $<$.

**Definiţie.**
Dacă $\leq$ este o relaţie de ordine parţială (totală) pe $A$, spunem că $(A, \leq)$ este mulţime parţial (total) ordonată.

**Propoziţie.**
Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată.

- Orice relaţie de ordine totală este reflexivă. Prin urmare, orice mulţime total ordonată este mulţime parţial ordonată.
- Relaţia $<$ definită prin $x < y \iff (x \leq y \text{ şi } x \neq y)$ este relaţie de ordine strictă.
- Dacă $\emptyset \neq S \subseteq A$, atunci $(S, \leq)$ este mulţime parţial ordonată.

**Demonstraţie.** Exerciţiu.

Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată şi $\emptyset \neq S \subseteq A$.

**Definiţie.**

Un element $e \in S$ se numeşte

- element minimal al lui $S$ dacă pentru orice $a \in S$, $a \leq e$ implică $a = e$;
- element maximal al lui $S$ dacă pentru orice $a \in S$, $e \leq$ a implică $a = e$;
- cel mai mic element (sau minim) al lui $S$ dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- cel mai mare element (sau maxim) al lui $S$ dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$.

**Propoziţie.**

Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată şi $\emptyset \neq S \subseteq A$.

- Atât minimul, cât şi maximul lui $S$ sunt unice (dacă există).
- Orice minim (maxim) este element minimal (maximal). Reciproca nu este adevărată.
- $S$ poate avea mai multe elemente maximale sau minimale.

**Demonstraţie.** Exerciţiu.

Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată şi $\emptyset \neq S \subseteq A$.

**Definiţie.**

Un element $e \in A$ se numeşte

- majorant al lui $S$ dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$;
- minorant al lui $S$ dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- supremumul lui $S$, notat $\sup S$, dacă $e$ este cel mai mic majorant al lui $S$;
- infimumul lui $S$, notat $\inf S$, dacă $e$ este cel mai mare minorant al lui $S$.

**Proprietăţi.**

- Atât mulţimea majoranţilor, cât şi mulţimea minoranţilor lui $S$ pot fi vide.
- Atât supremumul, cât şi infimumul lui $S$ sunt unice (dacă există).

Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată.

**Definiţie.**

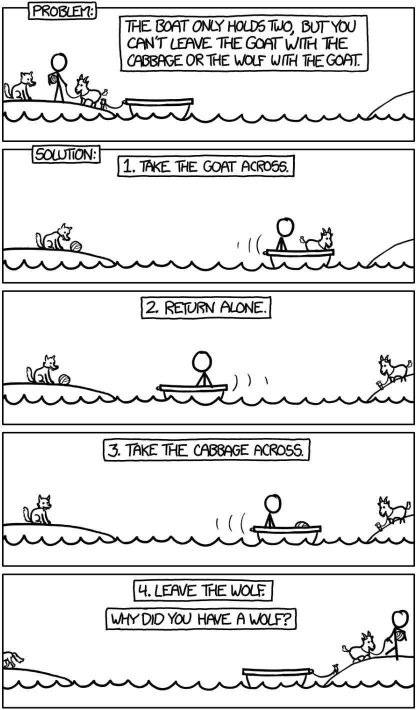
Spunem că $(A, \leq)$ este mulţime bine ordonată dacă orice submulţime nevidă a lui $A$ are minim. În acest caz, $\leq$ se numeşte relaţie de bună ordonare pe $A$.

**Exemple.**

$(\mathbb{N}, \leq)$ este bine ordonată, dar $(\mathbb{Z}, \leq)$ nu este bine ordonată.

**Observaţie.**

Orice mulţime bine ordonată este total ordonată.




Pe data viitoare!

Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.

Comic-ul aparţine xkcd.