Geometrie computațională (II)

Mihai-Sorin Stupariu

IDD, Sem. I, 2018-2019

Problematizare

- Cursul anterior: triangularea unui poligon convex (listă ordonată de puncte $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$).

Problematizare

- Cursul anterior: triangularea unui poligon convex (listă ordonată de puncte $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$).
- Are sens să vorbim de triangulare pentru <u>mulțimea</u> $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$?

Problematizare

- Cursul anterior: triangularea unui poligon convex (listă ordonată de puncte $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$).
- Are sens să vorbim de triangulare pentru multimea $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$?
- **Definiție.** O **triangulare** a unei mulțimi $\mathcal{P}$ este o subdivizare maximală a acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ a lui $\mathcal{P}$ cu triunghiuri ale căror vârfuri sunt elemente ale lui $\mathcal{P}$ (fără autointersecții!)

Problematizare

- Cursul anterior: triangularea unui poligon convex (listă ordonată de puncte $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$).
- Are sens să vorbim de triangulare pentru <u>mulțimea</u> $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$?
- **Definiție.** O **triangulare** a unei mulțimi $\mathcal{P}$ este o subdivizare maximală a acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ a lui $\mathcal{P}$ cu triunghiuri ale căror vârfuri sunt elemente ale lui $\mathcal{P}$ (fără autointersecții!)
- Trebuie făcută distincție între triangulare a unui poligon $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ și triangulare a mulțimii subdiacente $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ (coincid dacă poligonul este convex!)

Problematizare

- Cursul anterior: triangularea unui poligon convex (listă ordonată de puncte $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$).
- Are sens să vorbim de triangulare pentru mulțimea $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$?
- **Definiție.** O **triangulare** a unei mulțimi $\mathcal{P}$ este o subdivizare maximală a acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$ a lui $\mathcal{P}$ cu triunghiuri ale căror vârfuri sunt elemente ale lui $\mathcal{P}$ (fără autointersecții!)
- Trebuie făcută distincție între triangulare a unui poligon $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ și triangulare a mulțimii subdiacente $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ (coincid dacă poligonul este convex!)
- **Comentariu:** Triangulările mulțimilor de puncte sunt esențiale în grafica pe calculator.

Elemente ale unei triangulări

- Dată o mulțime de puncte $\mathcal{P}$ și o triangulare $\mathcal{T}_P$ a sa: **vârfuri, muchii, triunghiuri**.

Elemente ale unei triangulări

- Dată o mulțime de puncte $\mathcal{P}$ și o triangulare $\mathcal{T}_P$ a sa: **vârfuri, muchii, triunghiuri**.
- Legătură între aceste elemente?

Elemente ale unei triangulări

- Dată o mulțime de puncte $\mathcal{P}$ și o triangulare $\mathcal{T}_P$ a sa: **vârfuri, muchii, triunghiuri**.
- Legătură între aceste elemente?
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{P}$ o mulțime de n puncte din plan nesituate toate pe o aceeași dreaptă. Notăm cu k numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$. Orice triangulare a lui $\mathcal{P}$ are $(2n-k-2)$ triunghiuri și $(3n-k-3)$ muchii.*

Elemente ale unei triangulări

- Dată o mulțime de puncte $\mathcal{P}$ și o triangulare $\mathcal{T}_P$ a sa: **vârfuri, muchii, triunghiuri**.
- Legătură între aceste elemente?
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{P}$ o mulțime de n puncte din plan nesituate toate pe o aceeași dreaptă. Notăm cu k numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$. Orice triangulare a lui $\mathcal{P}$ are $(2n-k-2)$ triunghiuri și $(3n-k-3)$ muchii.*
- **Demonstrație:** Se bazează pe formula lui Euler.

Elemente ale unei triangulări

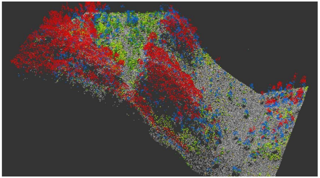
- Dată o mulțime de puncte $\mathcal{P}$ și o triangulare $\mathcal{T}_P$ a sa: **vârfuri, muchii, triunghiuri**.
- Legătură între aceste elemente?
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{P}$ o mulțime de n puncte din plan nesituate toate pe o aceeași dreaptă. Notăm cu k numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe $\mathrm{Conv}(\mathcal{P})$. Orice triangulare a lui $\mathcal{P}$ are $(2n-k-2)$ triunghiuri și $(3n-k-3)$ muchii.*
- **Demonstrație:** Se bazează pe formula lui Euler.
- **Exemplu:** Cazul unui poligon convex.

Problematizare

- **Problemă.** Se fac măsurători ale altitidinii pentru un teren. Se dorește reprezentarea tridimensională (cât mai sugestivă) . Alternativ: se dorește generarea unui teren pentru o aplicație.

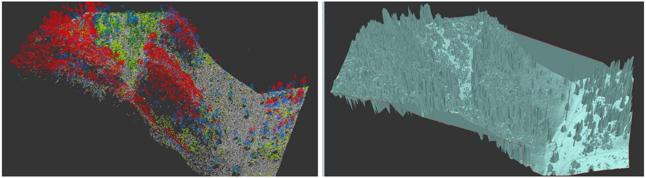
Problematizare

- **Problemă.** Se fac măsurători ale altitidinii pentru un teren. Se dorește reprezentarea tridimensională (cât mai sugestivă) . Alternativ: se dorește generarea unui teren pentru o aplicație.



Problematizare

- **Problemă.** Se fac măsurători ale altitidinii pentru un teren. Se dorește reprezentarea tridimensională (cât mai sugestivă) . Alternativ: se dorește generarea unui teren pentru o aplicație.

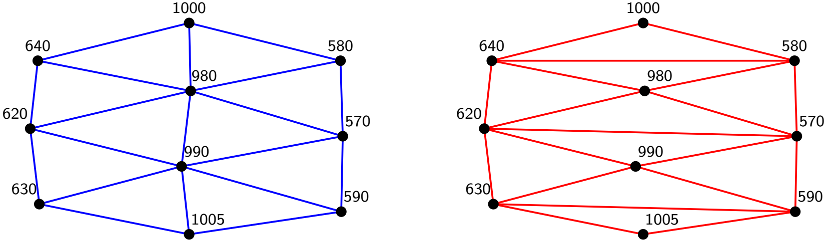


Problematizare - continuare

- **Problemă (reformulată).** Cum "comparăm triangulările" unei mulțimi de puncte fixate?

Problematizare - continuare

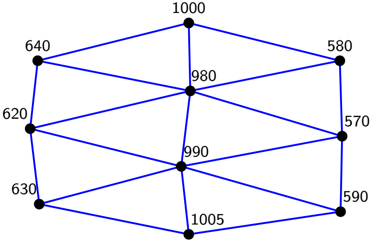
- **Problemă (reformulată).** Cum ”comparăm triangulările” unei mulțimi de puncte fixate?
- **Exemplu.** Măsurători ale altitudinii.



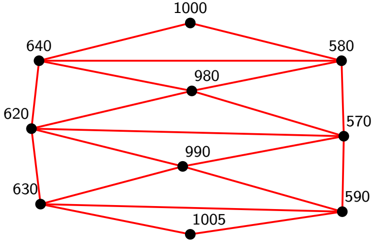
Triangulare 1 Triangulare 2

Problematizare - continuare

- **Problemă (reformulată).** Cum "comparăm triangulările" unei mulțimi de puncte fixate?
- **Exemplu.** Măsurători ale altitudinii.



Triangulare 1



Triangulare 2

- **Întrebări naturale:** (i) Există o triangulare "convenabilă" a unei mulțimi de puncte? (ii) Cum poate fi determinată eficient o astfel de triangulare?

Terminologie

- Fixată: o mulțime de puncte $\mathcal{P}$.

Terminologie

- Fixată: o mulțime de puncte $\mathcal{P}$.
- **Vectorul unghiurilor unei triangulări a lui** $\mathcal{P}$

Terminologie

- Fixată: o mulțime de puncte $\mathcal{P}$.
- **Vectorul unghiurilor unei triangulări a lui** $\mathcal{P}$
- **Relație de ordine pe mulțimea triangulărilor lui** $\mathcal{P}$

Terminologie

- Fixată: o mulțime de puncte $\mathcal{P}$.
- **Vectorul unghiurilor unei triangulări a lui $\mathcal{P}$**
- **Relație de ordine pe mulțimea triangulărilor lui $\mathcal{P}$**
- **Triangulare unghiular optimă**

Terminologie

- Fixată: o mulțime de puncte $\mathcal{P}$.
- **Vectorul unghiurilor unei triangulări a lui $\mathcal{P}$**
- **Relație de ordine pe mulțimea triangulărilor lui $\mathcal{P}$**
- **Triangulare unghiular optimă**
- **Muchie ilegală**

Terminologie

- Fixată: o mulțime de puncte $\mathcal{P}$.
- **Vectorul unghiurilor unei triangulări a lui $\mathcal{P}$**
- **Relație de ordine pe mulțimea triangulărilor lui $\mathcal{P}$**
- **Triangulare unghiular optimă**
- **Muchie ilegală**
- **Triangulare legală**

Triangulări unghiular optime vs. triangulări legale

- **Propoziție.** *Fie* $\mathcal{P}$ *o mulțime de puncte din plan.*
  (i) Orice triangulare unghiular optimă este legală.
  (ii) Dacă $\mathcal{P}$ *este în poziție generală (oricare patru puncte nu sunt conciclice), atunci există o unică triangulare legală, iar aceasta este unghiular optimă.*

Problema oficiiilor poștale

- Se consideră o mulțime de puncte (oficiile poștale) din plan. Care este cel mai apropiat?

Problema oficiiilor poștale

- Se consideră o mulțime de puncte (oficiile poștale) din plan. Care este cel mai apropiat?
- Ideea de a delimita "zone de influență" a apărut cu multă vreme în urmă (de exemplu în lucrările lui Descartes, dar și în legătură cu alte probleme; este utilizată în mod curent în varii domenii. În plus, astfel de "împărțiri" apar în natură.

Formalizare

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.

Formalizare

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.
- **Diagrama Voronoi** a lui $\mathcal{P}$ (notată $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului $\mathbb{R}^2$ în n celule $\mathcal{V}(P_1), \ldots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j),\ \forall j = 1, \ldots, n.$$

Formalizare

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.
- **Diagrama Voronoi** a lui $\mathcal{P}$ (notată $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului $\mathbb{R}^2$ în n celule $\mathcal{V}(P_1), \ldots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j),\ \forall j = 1, \ldots, n.$$

- Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intesecție a muchiilor).

Formalizare

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.
- **Diagrama Voronoi** a lui $\mathcal{P}$ (notată $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului $\mathbb{R}^2$ în n celule $\mathcal{V}(P_1), \ldots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j),\ \forall j = 1, \ldots, n.$$

- Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intesecție a muchiilor).
- **Atenție!** Vârfurile lui $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ sunt diferite de punctele din $\mathcal{P}$.

Formalizare

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.
- **Diagrama Voronoi** a lui $\mathcal{P}$ (notată $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului $\mathbb{R}^2$ în n celule $\mathcal{V}(P_1), \ldots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j),\ \forall j = 1, \ldots, n.$$

- Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intesecție a muchiilor).
- **Atenție!** Vârfurile lui $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ sunt diferite de punctele din $\mathcal{P}$.
- Uneori, prin abuz de limbaj, este precizată doar împărțirea în muchii / vârfuri.

Formalizare

- Fie $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.
- **Diagrama Voronoi** a lui $\mathcal{P}$ (notată $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$) este o divizare a planului $\mathbb{R}^2$ în n celule $\mathcal{V}(P_1), \ldots, \mathcal{V}(P_n)$ cu proprietatea că

$$P \in \mathcal{V}(P_i) \Leftrightarrow d(P, P_i) \leq d(P, P_j),\ \forall j = 1, \ldots, n.$$

- Două celule adiacente au în comun o *muchie* sau un *vârf* (punct de intesecție a muchiilor).
- **Atenție!** Vârfurile lui $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ sunt diferite de punctele din $\mathcal{P}$.
- Uneori, prin abuz de limbaj, este precizată doar împărțirea în muchii / vârfuri.
- Diagrame Voronoi pot fi construite pentru diverse funcții distanță (e.g. distanța Manhattan); forma celulelor depinde de forma "cercului" în raport cu funcția distanță respectivă.

Proprietăți elementare

- Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane. Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.

Proprietăți elementare

- Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane. Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.
- Structura unei diagrame Voronoi.

Proprietăți elementare

- Celula asociată unui punct este o intersecție de semiplane. Aplicabilitate: algoritm (lent) de determinare a diagramei Voronoi.
- Structura unei diagrame Voronoi.
- Legătură între numărul de vârfuri, respectiv de muchii și numărul de puncte ($n_v \leq 2n - 5,\ n_m \leq 3n - 6$).

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$
  - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună $\Longrightarrow$

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$
  - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună $\Longrightarrow$
  - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$
  - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună $\Longrightarrow$
  - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$. Atunci $\mathcal{T}$ este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din $\mathcal{T}$ cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui $\mathcal{P}$.*

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$
  - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună $\Longrightarrow$
  - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$. Atunci $\mathcal{T}$ este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din $\mathcal{T}$ cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui $\mathcal{P}$.*
- **Teoremă.** *O triangulare este legală dacă și numai dacă este o triangulare Delaunay.*

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$
  - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună $\Longrightarrow$
  - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$. Atunci $\mathcal{T}$ este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din $\mathcal{T}$ cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui $\mathcal{P}$.*
- **Teoremă.** *O triangulare este legală dacă și numai dacă este o triangulare Delaunay.*
- **Teoremă.** *Orice triangulare unghiular optimă este o triangulare Delaunay. Orice triangulare Delaunay maximizează cel mai mic unghi, comparativ cu toate triangulările lui $\mathcal{P}$.*

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$
  - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună $\Longrightarrow$
  - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$. Atunci $\mathcal{T}$ este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din $\mathcal{T}$ cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui $\mathcal{P}$.*
- **Teoremă.** *O triangulare este legală dacă și numai dacă este o triangulare Delaunay.*
- **Teoremă.** *Orice triangulare unghiular optimă este o triangulare Delaunay. Orice triangulare Delaunay maximizează cel mai mic unghi, comparativ cu toate triangulările lui $\mathcal{P}$.*
- **Întrebare:** Cum "funcționează" această construcție când punctele din $\mathcal{P}$ sunt (de exemplu) vârfurile unui pătrat?

Legătura cu triangulările legale / unghiular optime

- Construcție:
  - Mulțime de puncte $\mathcal{P}$ în planul $\mathbb{R}^2 \Longrightarrow$
  - Diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P}) \Longrightarrow$
  - Graful dual $\mathcal{G}(\mathcal{P})$. **Noduri:** fețele diagramei Voronoi (siturile). **Arce:** dacă celulele (fețele diagramei Voronoi corespunzătoare) au o muchie comună $\Longrightarrow$
  - Triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ (numită **triangulare Delaunay**)
- **Propoziție.** *Fie $\mathcal{T}$ o triangulare a lui $\mathcal{P}$. Atunci $\mathcal{T}$ este o triangulare Delaunay dacă și numai dacă pentru orice triunghi din $\mathcal{T}$ cercul circumscris nu conține în interiorul său niciun punct al lui $\mathcal{P}$.*
- **Teoremă.** *O triangulare este legală dacă și numai dacă este o triangulare Delaunay.*
- **Teoremă.** *Orice triangulare unghiular optimă este o triangulare Delaunay. Orice triangulare Delaunay maximizează cel mai mic unghi, comparativ cu toate triangulările lui $\mathcal{P}$.*
- **Întrebare:** Cum "funcționează" această construcție când punctele din $\mathcal{P}$ sunt (de exemplu) vârfurile unui pătrat?
- Exemple:
  http://www.cs.cornell.edu/info/people/chew/Delaunay.html
  http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/teaching/projects.pr.98/tesson/taxi/taxivoro.html

Algoritmul lui Fortune (1987)

- Metodă clasică (și eficientă) de determinare a diagramei Voronoi pentru o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.

Algoritmul lui Fortune (1987)

- Metodă clasică (și eficientă) de determinare a diagramei Voronoi pentru o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.
- Bazat pe paradigma dreptei de baleiere (*sweep line*).

Algoritmul lui Fortune (1987)

- Metodă clasică (și eficientă) de determinare a diagramei Voronoi pentru o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.
- Bazat pe paradigma dreptei de baleiere (*sweep line*).
- Complexitate: $O(n \log n)$.

Algoritmul lui Fortune (1987)

- Metodă clasică (și eficientă) de determinare a diagramei Voronoi pentru o mulțime de puncte din planul $\mathbb{R}^2$.
- Bazat pe paradigma dreptei de baleiere (*sweep line*).
- Complexitate: $O(n \log n)$.
- Detalii: http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-voronoi