Exerciţii şi probleme

Geometrie computaţională, IDD, Sem. I, 2019-2020

Mihai Sorin Stupariu

1. Produs vectorial. Testul de orientare. Acoperiri convexe

1.1 Calculaţi produsul vectorial $v \times w$ pentru vectorii $v = (1, -1, 0)$, $w = (-2, 1, 3)$.

1.2 Fie $P = (2, 2), Q = (4, 4)$. Stabiliţi, folosind testul de orientare, poziţia relativă a punctelor $R_1 = (8, 8), R_2 = (6, 0), R_3 = (-2, -1)$ faţă de muchia orientată $\overrightarrow{PQ}$. Care este poziţia aceloraşi puncte faţă de muchia orientată $\overrightarrow{QP}$?

1.3 Daţi exemplu de puncte coplanare P, Q, R_1, R_2 din $\mathbb{R}^3$, nesituate într-un plan de coordonate, astfel ca R_1 şi R_2 să fie de o parte şi de alta a segmentului $[PQ]$.

1.4 Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \ldots, P_7\}$, unde $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (2, 7)$, $P_3 = (3, 6)$, $P_4 = (4, 5)$, $P_5 = (7, 7)$, $P_6 = (9, 7)$, $P_7 = (11, 1)$. Scrieţi cum evoluează, pe parcursul aplicării Graham's scan, lista $\mathcal{L}_i$ a vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, parcursă în sens trigonometric. Aceeaşi cerinţă pentru marginea superioară $\mathcal{L}_s$.

1.5 Considerăm punctele $A = (-6, 6)$, $B = (1, 6)$, $C = (1, -1)$, $D = (-6, 0)$, $E = (6, 0)$, $F = (3, 2)$, $G = (-4, -2)$, $H = (-1, -2)$, $I = (-2, -2)$. Precizaţi care este numărul maxim de elemente pe care îl conţine $\mathcal{L}$ pe parcursul parcurgerii Graham's scan, indicând explicit punctele respective din $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ este lista vârfurilor care determină frontiera acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, iar punctul ”intern” considerat este O). Justificaţi!

1.6 Daţi un exemplu de mulţime $\mathcal{M}$ din planul $\mathbb{R}^2$ pentru care, la final, $\mathcal{L}_i$ are 3 elemente, dar, pe parcursul algoritmului, numărul maxim de elemente al lui $\mathcal{L}_i$ este egal cu 5 ($\mathcal{L}_i$ este lista vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew). Justificaţi!

2. Triangularea poligoanelor. Teorema galeriei de artă

2.1 Fie $\mathcal{P}$ poligonul dat de punctele $P_1 = (6,0)$, $P_2 = (2,2)$, $P_3 = (0,7)$, $P_4 = (-2,2)$, $P_5 = (-8,0)$, $P_6 = (-2,-2)$, $P_7 = (0,-6)$, $P_8 = (2,-2)$. Indicaţi o triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ a lui $\mathcal{P}$ şi construiţi graful asociat perechii $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$.

2.2 Aplicaţi metoda din demonstraţia teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului $P_1P_2\dots P_{10}$, unde $P_1 = (4,5), P_2 = (6,6), P_3 = (4,7), P_4 = (4.8), P_5 = (6,10)$, iar punctele $P_6,\dots,P_{10}$ sunt respectiv simetricele punctelor $P_5,\dots,P_1$ faţă de axa Oy.

2.3 Fie poligonul $\mathcal{P} = (P_1P_2P_3P_4P_5P_6)$, unde $P_1 = (5,0)$, $P_2 = (3,2)$, $P_3 = (-1,2)$, $P_4 = (-3,0)$, $P_5 = (-1,-2)$, $P_6 = (3,-2)$. Arătaţi că Teorema Galeriei de Artă poate fi aplicată în două moduri diferite, aşa încât în prima variantă să fie suficientă o singură cameră, iar în cea de-a doua variantă să fie necesare şi suficiente două camere pentru supravegeherea unei galerii având forma poligonului $\mathcal{P}$.

3. Triangularea mulţimilor de puncte

3.1 Fie $n \geq 2$ un număr natural par fixat. Considerăm mulţimea $\mathcal{M} = \{A_0,\dots,A_n, B_0,\dots,B_n, C_0,\dots,C_n, D_0,\dots,D_n\}$, unde $A_i = (i,0)$, $B_i = (0,i)$, $C_i = (i,i)$, $D_i = (n-i,i)$, pentru orice $i = 0,\dots,n$. Determinaţi numărul de triunghiuri şi numărul de muchii ale unei triangulări a lui $\mathcal{M}$.

3.2 Daţi exemplu de mulţime de puncte din $\mathbb{R}^2$ care să admită o triangulare având 3 triunghiuri şi 7 muchii.

3.3 Daţi exemplu de mulţime $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ din $\mathbb{R}^2$ astfel ca $\mathcal{M}$ să admită o triangulare ce conţine 14 muchii.

4. Diagrame Voronoi

4.1 Determinaţi, folosind metoda diagramelor Voronoi, triangularea Delaunay pentru mulţimea formată din punctele $A = (3,5)$, $B = (6,6)$, $C = (6,4)$, $D = (9,5)$ şi $E = (9,7)$.

4.2 Determinaţi numărul de semidrepte conţinute în diagrama Voronoi asociată mulţimii de puncte $\mathcal{M} = \{A_0,\dots,A_5, B_0,\dots,B_5, C_0,\dots,C_5\}$, unde $A_i = (i+1, i+1)$, $B_i = (-i,i)$ şi $C_i = (0,i)$, pentru $i = 0,\dots,5$.

4.3 Daţi exemplu de mulţimi $\mathcal{M}_1$ şi $\mathcal{M}_2$ din $\mathbb{R}^2$, fiecare având câte 4 puncte, astfel ca, pentru fiecare dintre ele, diagrama Voronoi asociată să conţină exact 3 semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ să conţină exact 6 semidrepte.

4.4 Demonstraţi că dacă punctele din mulţtimea $\mathcal{P}$ nu sunt coliniare, diagrama Voronoi $\mathrm{Vor}(\mathcal{P})$ nu poate conţine drepte.