FMI, Info, Anul II, 2017-2018
Programare logică

Exerciţii

Teorie pentru E.1

O *substituţie* este o funcţie parţială de la variabile la termeni, adică $\sigma : V \to Trm_{\mathcal{L}}$. Un *unificator* pentru doi termeni t_1 şi t_2 este o substituţie θ astfel încât $\theta(t_1) = \theta(t_2)$. Un unificator ν pentru t_1 şi t_2 este un *cel mai general unificator* dacă pentru orice alt unificator ν' pentru t_1 şi t_2, există o substituţie μ astfel încât $\nu' = \nu; \mu$.

Algoritmul de unificare:

	Lista soluţie S	Lista de rezolvat R
Iniţial	$\emptyset$	$t_1 \doteq t'_1, \ldots, t_n \doteq t'_n$
SCOATE	S	$R',\, t \doteq t$
	S	R'
DESCOMPUNE	S	$R',\, f(t_1, \ldots, t_n) \doteq f(t'_1, \ldots, t'_n)$
	S	$R',\, t_1 \doteq t'_1, \ldots t_n \doteq t'_n$
REZOLVĂ	S	$R',\, x \doteq t$ sau $t \doteq x$, x nu apare în t
	$x \doteq t,\, S[x \leftarrow t]$	$R'[x \leftarrow t]$
Final	S	$\emptyset$

Algoritmul *se termină normal* dacă $R = \emptyset$ (în acest caz, în S are un unificator pentru termenii din lista iniţială R).

Algoritmul este oprit cu concluzia *inexistenţei unui unificator* dacă:

(i) În R există o ecuaţie de forma $f(t_1, \ldots, t_n) \doteq g(t'_1, \ldots, t'_k)$ cu $f \neq g$. Simbolurile de constantă se consideră simboluri de funcţie de aritate 0.

(ii) În R există o ecuaţie de forma $x \doteq t$ sau $t \doteq x$ şi variabila x apare în termenul t.

(E.1) Considerăm

- x, y, z, u, v variabile,
- a, b, c simboluri de constantă,
- $h, g, (\_)^{-1}$ simboluri de funcţie de aritate 1,
- $f, *, +$ simboluri de funcţie de aritate 2,
- p simbol de funcţie de aritate 3.

Aplicaţi algoritmul de unificare de mai sus pentru a găsi un unificator pentru termenii:

1) $p(a, x, h(g(y)))$ şi $p(z, h(z), h(u))$
2) $f(h(a), g(x))$ şi $f(y, y)$
3) $p(a, x, g(x))$ şi $p(a, y, y)$
4) $p(x, y, z)$ şi $p(u, f(v, v), u)$
5) $f(x, f(x, x))$ şi $f(g(y), f(z, g(a)))$
6) $x + (y * y)$ şi $(y * y) + z$
7) $(x * y) * z$ şi $u * u^{-1}$
8) $x * y$ şi $u * u^{-}1$
9) $x * y$ şi $x * (y * (u * v)^{-1})$
10) $x * y$ şi $y * (u * v)^{-}1$
11) $f(g(x), x)$ şi $f(y, y)$
12) $p(x, z, z)$ şi $p(y, y, b)$
13) $p(a, u, h(x))$ şi $p(y, f(y, z), z)$
14) $f(x, f(b, x))$ şi $f(f(y, a), f(b, f(z, z)))$
15) $p(x, b, x)$ şi $p(y, y, c)$
16) $f(x, y)$, $f(h(x), x)$ şi $f(x, b)$
17) $f(x, f(x, g(y)))$, $f(u, z)$ şi $f(g(y), y)$
18) $f(f(x, y), x)$, $f(g(y), z)$ şi $f(u, h(z))$
19) $f(f(x, y), x)$, $f(v, u)$ şi $f(u, h(z))$

20) $f(f(x,y),x)$, $f(v,u)$ şi $f(u,z)$

21) $f(f(g(x),h(y)),h(z))$, $f(f(u,h(h(x))),h(y))$ şi $f(v,w)$

22) $p(x,x,z)$, $p(f(a,a),y,y)$ şi $p(f(x,a),b,z)$

23) $p(x,x,z)$, $p(f(a,a),y,y)$ şi $p(x,b,z)$

24) $p(x,x,z)$, $p(f(a,a),y,y)$ şi $p(x,f(a,a),z)$

25) $p(f(x,a),g(y),z)$, $p(f(a,a),z,u)$ şi $p(v,u,z)$

Demonstraţie: Nu trebuie rezolvate toate exerciţiile; o parte se pot lăsa şi ca studiu individual pentru studenţi. □

(E.2) Găsiţi răspunsul dat de Prolog la următoarele întrebări:

?- 'Luke' = luke.
?- Luke = luke.
?- jedi(luke) = luke.
?- jedi(luke) = X.
?- jedi(luke) = jedi(X).
?- father(vader, A) = father(B, luke).
?- heroes(han, X, luke) = heroes(Y, ben, X).
?- heroes(han, X, luke) = heroes(Y, ben).
?- jedi(X) = X.
?- characters(hero(luke), villain(vader)) = characters(X, Y).
?- characters(hero(luke), X) = characters(X, villain(vader))

Teorie pentru E.3:

O formulă φ este în **formă rectificată** dacă:

(i) nici o variabilă nu apare şi liberă şi legată;

(ii) cuantificatori distincţi leagă variabile distincte.

Intuitiv, forma rectificată a unei formule se obţine prin redenumirea variabilelor astfel încât să nu apară conflicte.

O **formulă prenex** este o formulă de forma $Q_1x_1\, Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\, \varphi$ unde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ pentru orice $i \in \{1,\ldots,n\}$, $x_1,\ldots,x_n$ sunt variabile distincte şi φ nu conţine cuantificatori.

Pentru o formulă rectificată putem obţine o formulă echivalentă în formă prenex astfel:

- Se înlocuiesc $\rightarrow$ şi $\leftrightarrow$:

$$\begin{aligned}\varphi \rightarrow \psi &\;\;\models\!\!\!\dashv\;\; \neg\varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi &\;\;\models\!\!\!\dashv\;\; (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)\end{aligned}$$

- Se aplică următoarele echivalenţe:

$$\begin{aligned}\neg\exists x\,\neg\varphi &\;\;\models\!\!\!\dashv\;\; \forall x\,\varphi & \forall x\,\varphi \wedge \forall x\,\psi &\;\;\models\!\!\!\dashv\;\; \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \\ \neg\forall x\,\neg\varphi &\;\;\models\!\!\!\dashv\;\; \exists x\,\varphi & \exists x\,\varphi \vee \exists x\,\psi &\;\;\models\!\!\!\dashv\;\; \exists x\,(\varphi \vee \psi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg\exists x\,\varphi &\;\;\models\!\!\!\dashv\;\; \forall x\,\neg\varphi & \forall x\,\forall y\,\varphi &\;\;\models\!\!\!\dashv\;\; \forall y\,\forall x\,\varphi \\ \neg\forall x\,\varphi &\;\;\models\!\!\!\dashv\;\; \exists x\,\neg\varphi & \exists x\,\exists y\,\varphi &\;\;\models\!\!\!\dashv\;\; \exists y\,\exists x\,\varphi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x\,\varphi \vee \psi &\;\;\models\!\!\!\dashv\;\; \forall x\,(\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi) \\ \forall x\,\varphi \wedge \psi &\;\;\models\!\!\!\dashv\;\; \forall x\,(\varphi \wedge \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi) \\ \exists x\,\varphi \vee \psi &\;\;\models\!\!\!\dashv\;\; \exists x\,(\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi) \\ \exists x\,\varphi \wedge \psi &\;\;\models\!\!\!\dashv\;\; \exists x\,(\varphi \wedge \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)\end{aligned}$$

(E.3) Considerăm un limbaj de ordinul I cu $\mathbf{R} = \{P, R, Q\}$ cu $ari(P) = 1$ şi $ari(R) = ari(Q) = 2$. Găsiţi formele echivalente prenex pentru următoarele formule:

1) $\forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \rightarrow \exists x R(x, x)$

2) $\neg P(x) \rightarrow \neg\forall y \exists x R(x, y)$

3) $\exists x R(x, y) \leftrightarrow \forall y Q(x, y)$

Demonstraţie:

1)

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \rightarrow \exists x R(x, x) \\ \models\!\!\!\dashv\;\; & \forall x \exists y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \rightarrow \exists z R(z, z) \qquad \text{(redenumim variabile)} \\ \models\!\!\!\dashv\;\; & \neg\forall x \exists y (\neg R(x, y) \vee R(y, x)) \vee \exists z R(z, z) \\ \models\!\!\!\dashv\;\; & \exists x \forall y (R(x, y) \wedge \neg R(y, x)) \vee \exists z R(z, z) \\ \models\!\!\!\dashv\;\; & \exists z (\exists x \forall y (R(x, y) \wedge \neg R(y, x)) \vee R(z, z)) \\ \models\!\!\!\dashv\;\; & \exists z \exists x (\forall y (R(x, y) \wedge \neg R(y, x)) \vee R(z, z)) \\ \models\!\!\!\dashv\;\; & \exists z \exists x \forall y ((R(x, y) \wedge \neg R(y, x)) \vee R(z, z)) \end{aligned}$$

2)

$$
\begin{array}{ll}
 & \neg P(x) \to \neg\forall y \exists x R(x,y) \\
\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & \neg P(z) \to \neg\forall y \exists x R(x,y) \quad \text{(redenumim variabile)} \\
\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & P(z) \vee \neg\forall y \exists x R(x,y) \\
\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & P(z) \vee \exists y \forall x \neg R(x,y) \\
\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & \exists y (P(z) \vee \forall x \neg R(x,y)) \\
\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & \exists y \forall x (P(z) \vee \neg R(x,y))
\end{array}
$$

3)

$$
\begin{array}{lll}
 & \exists x R(x,y) \leftrightarrow \forall y Q(x,y) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & \exists x R(x,u) \leftrightarrow \forall y Q(v,y) & \text{(redenumim variabile)} \\
\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & (\exists x R(x,u) \to \forall y Q(v,y)) \wedge (\forall y Q(v,y) \to \exists x R(x,u)) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & (\exists x R(x,u) \to \forall y Q(v,y)) \wedge (\forall y' Q(v,y') \to \exists x' R(x',u)) & \text{(redenumim variabile)} \\
\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & (\neg\exists x R(x,u) \vee \forall y Q(v,y)) \wedge (\neg\forall y' Q(v,y') \vee \exists x' R(x',u)) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & (\forall x \neg R(x,u) \vee \forall y Q(v,y)) \wedge (\exists y' \neg Q(v,y') \vee \exists x' R(x',u)) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & \forall x \forall y (\neg R(x,u) \vee Q(v,y)) \wedge \exists y' \exists x' (\neg Q(v,y') \vee R(x',u)) & \\
\mathrel{\text{⫤}\!\vDash} & \forall x \forall y \exists y' \exists x' ((\neg R(x,u) \vee Q(v,y)) \wedge (\neg Q(v,y') \vee R(x',u))) &
\end{array}
$$

□

Teorie pentru E.4:

Fie φ enunţ în formă prenex. Definim φ^{sk} o **formă Skolem** a lui φ şi $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$ astfel:

- dacă φ este liberă de cuantificatori, atunci $\varphi^{sk} = \varphi$ şi $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \mathcal{L}$,
- dacă φ este universală[1], atunci $\varphi^{sk} = \varphi$ şi $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \mathcal{L}$,
- dacă $\varphi = \exists x\, \psi$ atunci introducem un nou simbol de constantă c şi considerăm $\varphi^1 = \psi[x/c]$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$.
- dacă $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \exists x\, \psi$ atunci introducem un nou simbol de funcţie f de aritate k şi considerăm $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$,

$$\varphi^1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \psi[x/f(x_1 \ldots x_k)]$$

În ambele cazuri, φ^1 are cu un cuantificator existenţial mai puţin decât φ. Dacă φ^1 este liberă de cuantificatori sau universală, atunci $\varphi^{sk} = \varphi^1$. Dacă φ^1 nu este universală, atunci formăm $\varphi^2, \varphi^3, \ldots$, până ajungem la o formulă universală şi aceasta este φ^{sk}.

[1] Un enunţ se numeşte **universal** dacă conţine doar cuantificatori universali.

(E.4) Consideram un limbaj de ordinul I cu $\mathbf{C} = \{b\}$ şi $\mathbf{R} = \{P, R, Q\}$ cu $ari(P) = 1$ şi $ari(R) = ari(Q) = 2$. Găsiţi formele Skolem pentru următoarele formule în formă prenex:

1) $\forall x \exists y \forall z \exists w (R(x, y) \wedge (R(y, z) \rightarrow (R(z, w) \wedge R(w, w))))$
2) $\forall x_1 \forall y_1 \exists y_2 \exists x_2 ((\neg R(x_1, y_2) \vee Q(b, y_1)) \wedge (\neg Q(x_1, y_2) \vee R(x_2, b)))$
3) $\exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 (P(y_1) \vee R(x_1, x_2))$

Demonstraţie:

1) $\varphi_1 = \forall x \forall z \exists w (R(x, f(x)) \wedge (R(f(x), z) \rightarrow (R(z, w) \wedge R(w, w))))$ $\quad (y \mapsto f(x))$
   $\varphi_2 = \forall x \forall z (R(x, f(x)) \wedge (R(f(x), z) \rightarrow (R(z, g(x, z)) \wedge R(g(x, z), g(x, z)))))$ $\quad (w \mapsto g(x, z))$

2) $\varphi_1 = \forall x_1 \forall y_1 \exists x_2 ((\neg R(x_1, f(x_1, y_1)) \vee Q(b, y_1)) \wedge (\neg Q(x_1, f(x_1, y_1)) \vee R(x_2, b)))$ $\quad (y_2 \mapsto f(x_1, y_1))$
   $\varphi_2 = \forall x_1 \forall y_1 ((\neg R(x_1, f(x_1, y_1)) \vee Q(b, y_1)) \wedge (\neg Q(x_1, f(x_1, y_1)) \vee R(g(x_1, y_1), b)))$ $\quad (x_2 \mapsto g(x_1, y_1))$

3) $\varphi_1 = \forall y_1 \exists x_2 (P(y_1) \vee R(c, x_2))$ $\quad (x_1 \mapsto c)$
   $\varphi_2 = \forall y_1 (P(y_1) \vee R(c, f(y_1)))$ $\quad (x_2 \mapsto f(y_1))$

$\square$

Teorie pentru E.5:

Fie φ un enunţ în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$.

- Definim **universul Herbrand al formulei** φ, notat $T(\varphi)$, astfel:
  - dacă c este o constantă care apare în φ atunci $c \in T(\varphi)$,
  - dacă φ nu conţine nicio constantă atunci alegem o constantă arbitrară c şi considerăm că $c \in T(\varphi)$,
  - dacă f este un simbol de funcţie care apare în φ cu $ari(f) = n$ şi $t_1, \ldots, t_n \in T(\varphi)$ atunci $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\varphi)$.

- Definim **expansiunea Herbrand** a lui φ astfel

$$\mathcal{H}(\varphi) = \{\psi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n] \mid t_1, \ldots, t_n \in T(\varphi)\}.$$[2]

(E.5) Considerăm un limbaj de ordinul I cu $\mathbf{F} = \{f, g\}$ cu $ari(f) = 2$ şi $ari(g) = 1$, $\mathbf{C} = \{b, c\}$ şi $\mathbf{R} = \{P, Q\}$ cu $ari(P) = 3, ari(Q) = 2$.

(a) Descrieţi termenii din universul Herbrand.

(b) Descrieţi formulele din expansiunea Herbrand a următoarelor formule:

1) $\varphi := \forall x \forall y\, P(c, f(x, b), g(y))$

2) $\psi := \forall x \forall y\, (Q(x, b) \vee Q(x, g(y)))$

Demonstraţie:

(a) Universul Herbrand

$$T(\varphi) =$$
$$\{b, c, g(b), g(c), g(g(b)), g(g(c)), \ldots, f(b, c), f(b, g(b)), f(b, g(c)), f(g(c), b), f(g(c), g(c)), \ldots\}$$
$$T(\psi) = \{b, g(b), g(g(b)), g(g(g(b))), g(g(g(g(b)))), \ldots\}$$

(b) Expansiunea Herbrand

$$\mathcal{H}(\varphi) = \{P(c, f(b, b), g(b)), P(c, f(b, b), g(c)), P(c, f(c, b), g(b)), P(c, f(g(b), b), g(g(g(b)))), \ldots\}$$

$$\mathcal{H}(\psi) = \{Q(b, b) \vee Q(b, g(b)),\ Q(b, b) \vee Q(b, g(g(b))),\ Q(g(b), b) \vee Q(g(b), g(b)),$$
$$Q(g(b), b) \vee Q(g(b), g(g(b))),\ Q(g(g(b)), b) \vee Q(g(g(b)), g(b)), \ldots\}$$

$\square$

Teorie pentru E.6

Rezoluţia pentru clauze închise în logica de ordinul I

- În logica de ordinul I un literal este o formulă atomică sau negaţia unei formule atomice.

$$literal := \ P(t_1, \ldots, t_n) \mid \neg P(t_1, \ldots, t_n)$$

unde $P \in \mathbf{R}, ari(P) = n,$ şi $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni.

[2] Reamintim că $\psi[x/t]$ este formula obţinută înlocuind în ψ toate apariţiile libere ale lui x cu t.

- Pentru un literal L vom nota cu L^c literalul complement.

  De exemplu, dacă $L = \neg P(x)$ atunci $L^c = P(x)$ şi invers.

- O formulă φ este formă clauzală dacă

$$\varphi := \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi \text{ unde } \psi \text{ este FNC}$$

- Pentru orice formulă φ din logica de ordinul I există o formă clauzală φ^{fc} astfel încât

$$\varphi \text{ este satisfiabilă dacă şi numai dacă } \varphi^{fc} \text{ este satisfiabilă}$$

- Pentru o formulă φ, forma clauzală φ^{fc} se poate calcula astfel:

  (i) se determină forma rectificată

  (ii) se cuantifică universal variabilele libere

  (iii) se determină forma prenex

  (iv) se determină forma Skolem
  în acest moment am obţinut o formă Skolem $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$

  (v) se determină o FNC ψ' astfel încât $\psi \boxminus \psi'$

  (vi) φ^{fc} este $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi'$

- Fie C o clauză. Spunem că C' este o instaţă a lui C dacă există o substituţie $\theta : V \to Trm_{\mathcal{L}}$ astfel încât $C' = \theta(C)$.

  Spunem că C' este o instanţă închisă a lui C dacă există o substituţie $\theta : V \to T_{\mathcal{L}}$ such that $C' = \theta(C)$ (C' se obţine din C înlocuind variabilele cu termeni din universul Herbrand)

- Fie $\mathcal{C}$ o mulţime de clauze. Definim

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}) := \{\theta(C) \mid C \in \mathcal{C}, \theta : V \to T_{\mathcal{L}}\}$$

  O mulţime de clauze $\mathcal{C}$ este nesatisfiabilă dacă şi numai dacă există o submulţime finită a lui $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ care este nesatisfiabilă.

  $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ este mulţimea instanţelor închise ale clauzelor din $\mathcal{C}$.

- Rezoluţia pe clauze închise păstrează satisfiabilitaea

$$Rez \ \frac{C_1 \cup \{L\}, C_2 \cup \{\neg L\}}{C_1 \cup C_2}$$

  unde C_1, C_2 clauze închise, iar L este o formulă atomică închisă astfel încât $\{L, \neg L\} \cap C_1 = \emptyset$ şi $\{L, \neg L\} \cap C_2 = \emptyset$

(E.6) Considerăm următoarea mulţime de clauze în logica de ordinul I:

$$\mathcal{C} = \{ \{\neg P(f(a)), Q(y)\}, \{P(y)\}, \{\neg Q(b)\} \}$$

Arătaţi că $\mathcal{C}$ nu este satisfiabilă prin următoarele metode:

1) Găsiţi o submulţime finită nesatisfiabilă lui $\mathcal{H}(\mathcal{C})$.

2) Găsiţi o derivare pentru $\square$ folosind rezoluţia pe clauze închise.

Demonstraţie:

1) $\mathcal{H}(\mathcal{C}) = \{ \{\neg Q(b)\}, \{\neg P(f(a)), Q(a)\}, \{\neg P(f(a)), Q(b)\}, \{P(a)\}, \{P(b)\}, \{P(f(a))\}, \cdots \}$
   Submulţimea nesatisfiabilă este
   $\{\{\neg P(f(a)), Q(b)\}, \{P(f(a))\}, \{\neg Q(b)\}\}$
   (se face tabelul)

2) Derivare pentru $\square$:
   $\{\neg P(f(a)), Q(b)\}$
   $\{P(f(a))\}$
   $\{Q(b)\}$
   $\{\neg Q(b)\}$
   $\square$

$\square$

$\boxed{\textbf{Teorie pentru E.7, E.8:}}$

Regula rezoluţiei pentru clauze arbitrare

- Regula rezolu ctiei păstrează satisfiabilitatea:

$$Rez \ \frac{C_1, C_2}{(\sigma C_1 \setminus \sigma Lit_1) \cup (\sigma C_2 \setminus \sigma Lit_2)}$$

  dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:

  (i) C_1, C_2 clauze care nu au variabile comune,

(ii) $Lit_1 \subseteq C_1$ şi $Lit_2 \subseteq C_2$ sunt mulţimi de literali,

(iii) σ este un cgu pentru Lit_1 şi Lit_2^c, adică
σ unifică toţi literalii din Lit_1 şi Lit_2^c.

- O clauză C se numeşte rezolvent pentru C_1 şi C_2 dacă există o redenumire de variabile $\theta : V \to V$ astfel încât C_1 şi θC_2 nu au variabile comune şi C se obţine din C_1 şi θC_2 prin Rez.

- Fie $\mathcal{C}$ o mulţime de clauze. O derivare prin rezoluţie din mulţimea $\mathcal{C}$ pentru o clauză C este o secvenţă $C_1, \ldots, C_n$ astfel încât $C_n = C$ şi, pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, $C_i \in \mathcal{C}$ sau C_i este un rezolvent pentru două cauze C_j, C_k cu $j, k < i$.

- O mulţime de clauze $\mathcal{C}$ este nesatisfiabilă dacă şi numai dacă există o derivare a clauzei vide $\square$ din $\mathcal{C}$ prin Rez.

(E.7) Găsiţi doi rezolvenţi pentru următoarele clauze:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{P(x), P(g(y)), Q(x)\} \\ C_2 &= \{\neg P(x), R(f(x), a)\} \end{aligned}$$

unde P, Q, R sunt simboluri de relaţii, a este o constantă, x, y sunt variabile.

Demonstraţie: Se redenumeste $C_2' = \{\neg P(z), R(f(z), a)\}$

Rezolvent 1: $L_1 = \{P(x)\}$, $L_2 = \{\neg P(z)\}$, substituţie $\theta = \{z \leftarrow x\}$,
rezolvent $C = \{P(g(y)), Q(x), R(f(x), a)\}$

Rezolvent 2: $L_1 = \{P(x), P(g(y))\}$, $L_2 = \{\neg P(z)\}$, substituţie $\theta = \{z \leftarrow g(y), x \leftarrow g(y)\}$,
rezolvent $C = \{Q(g(y)), R(f(g(y)), a)\}$

$\square$

(E.8) Găsiţi o derivare prin rezoluţie a $\square$ pentru următoarea mulţime de clauze:

$C_1 = \{\, \neg P(x),\ R(x, f(x))\, \}$
$C_2 = \{\, \neg R(a, x), Q(x)\, \}$
$C_3 = \{P(a)\}$
$C_4 = \{\neg Q(f(x))\}$

unde P, Q, R sunt simboluri de relaţii, f e simbol de funţie, a este o constantă, x, y sunt variabile.
Demonstraţie:

$C_5 = \{R(a, f(a))\}$ din $Rez, C_1, C_3, \theta = \{x \leftarrow a\}$
$C'_4 = \{\neg Q(f(z))\}$ redenumire
$C_6 = \{\neg R(a, f(z))\}$ din $Rez, C'_4, C_2, \theta = \{y \leftarrow f(z)\}$
$\square$ din $Rez, C_6, C_5, \theta = \{z \leftarrow a\}$ $\square$

Teorie pentru E.9,E.10:

Deducţie şi satisfiabilitate

- Dacă $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$sunt formule (în logica propoziţională sau calculul cu predicate) atunci:

  $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \models \varphi$ este echivalent cu

  $\models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \varphi$ este echivalent cu

  $\models \neg\varphi_1 \vee \ldots \neg\varphi_n \vee \varphi$ este echivalent cu

  $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \wedge \neg\varphi$ este satisfiabilă.

- În particular, $\models \varphi$ dacăşi numai dacă există o derivare pentru $\square$ din forma clauzală a lui $\neg\varphi$.

- Pentru a cerceta satisfiabilitatea este suficient să studiem forme clauzale.

(E.9) Folosind rezoluţia, arătaţi că următoarea formulă este validă în logica de ordinul I:

$$\varphi := (\forall x\, (P(x) \to Q(x))) \to ((\exists x\, P(x)) \to (\exists x\, Q(x)))$$

Indicaţie: se găseşte o derivare pentru $\square$ din forma clauzală a lui $\neg\varphi$.

Demonstraţie: Forma clauzală este $\square$

$\mathcal{C} = \{\, \{\neg P(x), Q(x)\},\ \{P(c)\},\ \{\neg Q(x)\}\, \}$
Derivare prin rezoluţie pentru $\square$:
$C_1 = \{\neg P(x), Q(x)\}$
$C_2 = \{P(c)\}$
$C_3 = \{Q(c)\}$
$C_4 = \{\neg Q(x)\}$
$C_5 = \square$ $Rez, C_3, C_4, \theta = \{x \leftarrow c\}$

(E.10) Avem următorul raţionament:

"Există elevi cărora le plac toate lecturile. Nici unui elev nu îi plac lucrurile plictisitoare. În consecinţă, nici o lectură nu este plictisitoare."

Definim predicatele
$E(x)$ "x este elev"
$L(x)$ "x este lectură"
$P(x)$ "x este plictisitor"
$R(x,y)$ "x place y"

1) Folosind predicatele E, L, P, R, exprimaţi fiecare afirmaţie în logica de ordinul I.

2) Demonstraţi prin rezoluţie că raţionamentul este corect.

Demonstraţie:
$\varphi_1 := \exists x(E(x) \wedge \forall y(L(y) \rightarrow R(x,y)))$
$\varphi_2 := \forall x(E(x) \rightarrow \forall y(P(y) \rightarrow \neg R(x,y)))$
$\psi := \forall x(L(x) \rightarrow \neg P(x))$
Calculăm formele clauzale pentru φ_1, φ_2 şi $\neg\psi$:
pt φ_1: $\mathcal{C}_1 = \{\, \{E(a)\}, \{\neg L(y), R(a,y)\}\, \}$
pt φ_2: $\mathcal{C}_2 = \{\, \{\neg E(x), \neg P(y), \neg R(x,y)\}\, \}$
pt $\neg\psi$: $\mathcal{C} = \{\, \{L(b)\}, \{P(b)\}\, \}$
unde a, b sunt constantele care apar din Skolemizare.
$\{\varphi_1, \varphi_2\} \vDash \psi$ ddacă există o derivare pentru $\square$ din $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}$.

$\{\neg L(y), R(a,y)\}$
$\{L(b)\}$
$\{R(a,b)\} \quad Rez, \theta = \{y \leftarrow b\}$
$\{\neg E(x), \neg P(y), \neg R(x,y)\}$
$\{P(b)\}$
$\{\neg E(x), \neg R(x,b)\} \quad Rez, \theta = \{y \leftarrow b\}$
$\{E(a)\}$
$\{\neg R(a,b)\} \quad Rez, \theta = \{x \leftarrow a\}$
$\square$ $\square$

Teorie pentru E.11:

- O *clauză definită* este o formulă de forma:
  - $P(t_1, \ldots, t_n)$ (formulă atomică), unde P este un simbol de predicat, iar $t_1, \ldots, t_n$ termeni
  - $P_1 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$, unde toate P_i, Q sunt formule atomice.

- O regulă din Prolog $\mathtt{Q} :- \mathtt{P_1}, \ldots, \mathtt{P_n}$ este o clauză $P_1 \land \ldots \land P_n \to Q$, iar un fapt din Prolog $\mathtt{P}(\mathtt{t_1}, \ldots, \mathtt{t_n})$ este o formulă atomică $P(t_1, \ldots, t_n)$.
- O clauză definită $P_1 \land \ldots \land P_n \to Q$ poate fi gândită ca formula $Q \lor \neg P_1 \lor \ldots \lor \neg P_n$.
- Pentru o mulţime de clauze definite T, *regula rezolutiei SLD* este

$$\text{SLD}\ \boxed{\frac{\neg P_1 \lor \cdots \lor \neg P_i \lor \cdots \lor \neg P_n}{(\neg P_1 \lor \cdots \lor \neg Q_1 \lor \cdots \lor \neg Q_m \lor \cdots \lor \neg P_n)\theta}}$$

  unde $Q \lor \neg Q_1 \lor \cdots \lor \neg Q_m$ este o clauză definită din T (în care toate variabilele au fost redenumite) şi θ este c.g.u pentru P_i şi Q.

- Fie T o mulţime de clauze definite şi $P_1 \land \ldots \land P_m$ o ţintă, unde P_i sunt formule atomice. O derivare din T prin rezoluţie SLD este o secvenţă $G_0 := \neg P_1 \lor \ldots \lor \neg P_m$, G_1, ..., G_k, ... în care G_{i+1} se obţine din G_i prin regula SLD. Dacă există un k cu $G_k = \Box$ (clauza vidă), atunci derivarea se numeşte *SLD-respingere*.

Teorema 1 (Completitudinea SLD-rezoluţiei)**.** *Sunt echivalente:*

(i) există o SLD-respingere a lui $P_1 \land \ldots \land P_m$ *din* T*,*

(ii) $T \vDash P_1 \land \cdots \land P_m$.

(E.11) Găsiţi o SLD-respingere pentru următoarele programe Prolog şi ţinte:

(a)
```
1.  r :- p,q.     5.  t.      ?- w.
2.  s :- p,q.     6.  q.
3.  v :- t,u.     7.  u.
4.  w :- v,s.     8.  p.
```

(b)
```
1.  q(X,Y) :- q(Y,X), q(Y,f(f(Y))).     ?- q(f(Z),a).
2.  q(a,f(f(X))).
```

(c)
```
1.  p(X) :- q(X,f(Y)), r(a).     4.  r(X) :- q(X,Y).     ?- p(X), q(Y,Z).
2.  p(X) :- r(X).                5.  r(f(b)).
3.  q(X,Y) :- p(Y).
```

Demonstraţie:

(a)

$G_0 = \neg w$
$G_1 = \neg v \vee \neg s$ (4)
$G_2 = \neg t \vee \neg u \vee \neg s$ (3)
$G_3 = \neg u \vee \neg s$ (5)
$G_4 = \neg s$ (7)
$G_5 = \neg p \vee \neg q$ (2)
$G_6 = \neg q$ (8)
$G_7 = \square$ (6)

(b)
$G_0 = \neg q(f(Z), a)$
$G_1 = \neg q(a, f(Z)) \vee \neg q(a, f(f(a)))$ (1 cu $\theta(X) = f(Z)$ şi $\theta(Y) = a$)
$G_2 = \neg q(a, f(Z))$ (2 cu $\theta(X) = a$)
$G_3 = \square$ (2 cu $\theta(Z) = f(X)$)

(c)
$G_0 = \neg p(X) \vee \neg q(Y, Z)$
$G_1 = \neg r(X_1) \vee \neg q(Y, Z)$ (2 cu $\theta(X) = X_1$)
$G_2 = \neg q(Y, Z)$ (5 cu $\theta(X_1) = f(b)$)
$G_3 = \neg p(Z_1)$ (3 cu $\theta(X) = Y_1$ şi $\theta(Y) = Z_1$)
$G_4 = \neg r(X)$ (2 cu $\theta(Z_1) = X$)
$G_5 = \square$ (5 cu $\theta(X) = f(b)$)

$\square$

Teorie pentru E.12:

Fie T o mulţime de clauze definite şi o ţintă $G_0 = \neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_m$. Un *arbore SLD* este definit astfel:

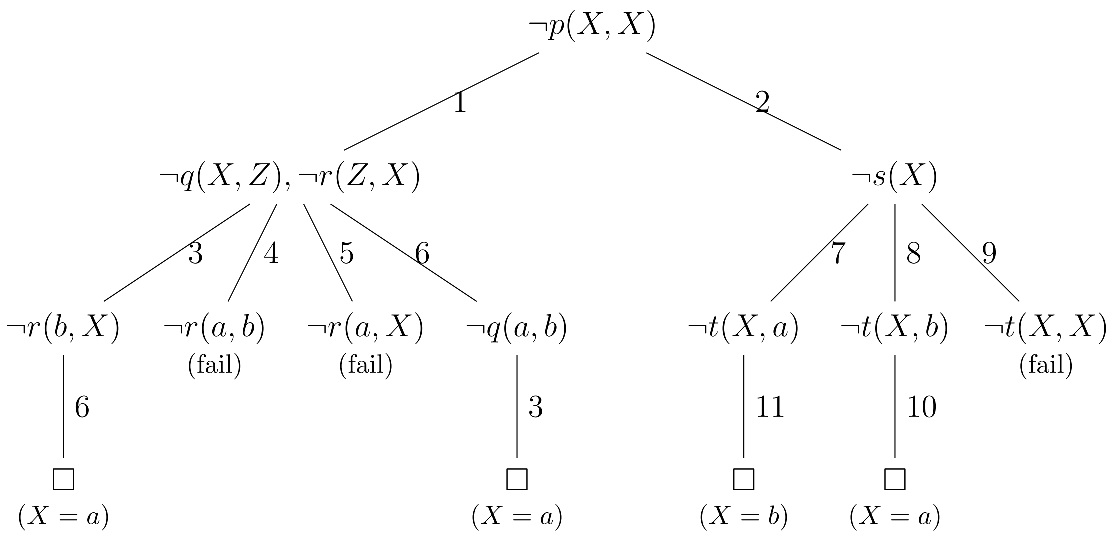
- Fiecare nod al arborelui este o ţintă (posibil vidă)
- Rădăcina este G_0
- Dacă arborele are un nod G_i, iar G_{i+1} se obţine din G_i folosind regula SLD folosind o clauză $C_i \in T$, atunci nodul G_i are copilul G_{i+1}. Muchia dintre G_i şi G_{i+1} este etichetată cu C_i.

Dacă un arbore SLD cu rădăcina G_0 are o frunză $\square$ (clauza vidă), atunci există o SLD-respingere a lui G_0 din T.

(E.12) Desenaţi arborele SLD pentru programul Prolog de mai jos şi ţinta `?- p(X,X).`

```
1.  p(X,Y) :- q(X,Z), r(Z,Y).
2.  p(X,X) :- s(X).
3.  q(X,b).
4.  q(b,a).
5.  q(X,a) :- r(a,X).
6.  r(b,a).
7.  s(X) :- t(X,a).
8.  s(X) :- t(X,b).
9.  s(X) :- t(X,X).
10.  t(a,b).
11.  t(b,a).
```

Demonstraţie:



$\square$