Generarea variabilelor neuniforme

Curs 6

December 9, 2020

Repartiția Beta

Fie X o variabilă aleatoare cu densitatea de repartiție:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & \text{dacă } x \in [0,1] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases} \quad (1)$$

unde

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx, \quad B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

este funcția beta.
Atunci variabila X are o distribuție $Beta(a,b)$ și se poate genera folosind următoarea teoremă:

Teoremă

Dacă $X_1 \sim Gama(0, 1, a)$, $X_2 \sim Gama(0, 1, b)$ *sunt două variabile independente, atunci variabila:*

$$X = \frac{X_1}{X_1 + X_2} \tag{2}$$

este o variabilă $Beta(a, b)$.

Dem:

Densitatea comună de repartiție a variabilelor X_1, X_2 este:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x_1^{a-1} x_2^{b-1} e^{-(x_1+x_2)}.$$

Făcând transformarea de variabile:

$$U = \frac{X_1}{X_1 + X_2}, \quad V = X_2,$$

densitatea comună a variabilelor U și V este

$$g(u, v) = f(x_1(u, v), x_2(u, v)) \cdot J$$

cu

$$J = det\left(\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial u \partial v}\right) = \frac{v}{(1-u)^2}, \quad 0 < u < 1.$$

Avem

$$g(u, v) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{u^{a-1} v^{a+b-1}}{(1-u)^{a+1}} e^{-\frac{v}{1-u}}$$

cu $0 < v < \infty$. Densitatea de repartiție a variabilei U este

$$h(u) = \int_0^\infty g(u, v) dv = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^\infty \frac{u^{a-1} v^{a+b-1}}{(1-u)^{a+1}} e^{-\frac{v}{1-u}} dv$$

adică

$$h(u) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1} (1-u)^{b-1},$$

ceea ce demonstrează teorema.

Prin urmare, un algoritm de generare a unei variabile *Beta* este dat de relația (2). Acest algoritm ar presupune generarea a două variabile *Gama* și acest lucru implică o complexitate mare. De aceea în cazuri particulare se aplică algoritmi rezultați din următoarele teoreme.

Teoremă

Fie $a, b \in \mathbb{N}_+$, $n = a + b - 1$ *și fie* $U_1, U_2, ..., U_n$ *variabile aleatoare uniforme pe* $[0, 1]$, *independente. Fie* $U_{(1)} < U_{(2)} < ... < U_{(n)}$ *statisticile de ordine obținute prin ordonarea valorilor* $U_1, U_2, ..., U_n$. *Atunci* $U_{(a)} \sim Beta(a, b)$.

Teoremă

Fie $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ *și* U_1, U_2 *variabile aleatoare uniforme pe* $[0, 1]$ *independente. Dacă* $V = U_1^{\frac{1}{a}}$, $T = U_2^{\frac{1}{b}}$, *atunci repartiția variabilei* $X = \frac{V}{V+T}$ *condiționată de* $V + T < 1$ *este* $Beta(a, b)$.

Algoritmul rezultat este următorul:

Algoritm Beta3

Intrare: $0 < a, b < 1$

P1: Se generează $U_1, U_2 \sim U(0,1)$ independente;

P2: $V = U_1^{\frac{1}{a}}$, $T = U_2^{\frac{1}{b}}$;

P3: Dacă $V + T < 1$ mergi la P4, altfel mergi la P1;

P4: $X := \frac{V}{V+T}$;

Ieșire: Variabila aleatoare X.

Probabilitatea de acceptare a acestui algoritm de respingere este:

$$p_a = P(V + T < 1) = \frac{ab}{a+b} B(a,b).$$

Teoremă

Fie $0 < a < 1$, $b > 1$ și U_1, U_2 variabile aleatoare uniforme pe $[0,1]$ independente. Dacă $V = U_1^{\frac{1}{a}}$, $T = U_2^{\frac{1}{b-1}}$, atunci repartiția variabilei V condiționată de $V + T < 1$ este $Beta(a,b)$.

Dem:

Observăm că pentru $x \in [0,1]$ avem:

$$F(x) = P(V < x) = P(U^{\frac{1}{a}} < x) = P(U < x^a) = x^a.$$

De unde rezultă că densitatea de repartiție a lui V este

$$f(x) = ax^{a-1}, \quad x \in [0,1].$$

Asemănător, densitatea de repartiție a lui T este:

$$h(y) = (b-1)y^{b-2}, \quad y \in [0,1].$$

Prin urmare, densitatea comună de repartiție a variabilelor V, T, independente este:

$$g(x, y) = a(b-1)x^{a-1}y^{b-2}.$$

De unde rezultă că:

$$P(V+T<1) = a(b-1)\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} y^{b-2}dy\right) x^{a-1}dx = aB(a,b).$$

Deci densitatea comună a variabilelor V, T condiționată de $V+T<1$ este:

$$p(x, y) = \frac{b-1}{B(a,b)}x^{a-1}y^{b-2}, \quad x \in [0,1],\ y \in [0,1].$$

Atunci densitatea lui V condiționată de $V+T<1$ este

$$q(x) = \int_0^{1-x} p(x,y)dy = \frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1},$$

ceea ce demonstrează teorema.

Algoritmul de generare rezultat este asemănător cu algoritmul de generare rezultat din teorema precedentă și are probabilitatea de acceptare:

$$p_a = P(V+T<1) = aB(a,b).$$

Repartiția normală

Fie X o variabilă normală $N(0,1)$. Atunci X are densitatea de repartiție:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dacă Y este o variabilă normală $N(m,\sigma)$, atunci are densitatea de repartiție:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-m)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

iar relația dintre Y și X este:

$$Y = m + \sigma X.$$

Prin urmare, pentru a-l genera pe Y este suficient sa stim sa-l generăm pe X.

Vom prezenta algoritmi de simulare pentru $X \sim N(0,1)$.

1. Metoda bazată pe teorema limită centrală
(a fost prezentată).

2. O metodă de compunere-respingere

Fie X_1 variabila aleatoare cu densitatea:

$$f_1(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ dacă } x \geq 0 \\ 0, \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$$

Fie $X_2 = -X_1$, atunci densitatea de repartiție a variabilei X_2 este:

$$f_2(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ dacă } x < 0 \\ 0, \text{ dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

Prin urmare densitatea variabilei aleatoare $X \sim N(0,1)$ se poate scrie:

$$f(x) = \frac{1}{2} f_1(x) + \frac{1}{2} f_2(x)$$

adică $f(x)$ este o compunere discretă a densităților $f_1(x)$ și $f_2(x)$.

Pentru generarea variabilei aleatoare X_1 folosim următoarea teoremă:

Teoremă

Fie $h(x)$ densitatea de repartiție a unei variabile aleatoare $Exp(1)$. Atunci dacă înfășurăm $f_1(x)$ cu $h(x)$ avem

$$\frac{f_1(x)}{h(x)} \leq \alpha = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}.$$

Dem:
Observăm că:

$$r(x) = \frac{f_1(x)}{h(x)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}+x},$$

iar ecuația $r'(x) = 0$ are soluția $x_0 = 1$ care este un punct de maxim pentru $r(x)$, adică

$$r(x) \leq r(x_0) = \sqrt{\frac{2e}{\pi}}$$

ceea ce demonstrează teorema.

Deci un algoritm pentru generarea variabilei $X \sim N(0,1)$ este următorul:

Algoritm Norm2
Intrare:
P1: Se generează $U \sim U(0,1)$;
P2: Se generează $Y \sim Exp(1)$;
P3: Dacă $U \leq e^{-\frac{Y^2}{2}+Y-0.5}$ mergi la P4, altfel mergi la P1;
P4: $X_1 := Y$;
P5: Se generează $U \sim U(0,1)$;
P6: Dacă $U \leq 0.5$ atunci $s = 1$, altfel $s := -1$;
P7: $X := sX_1$.
Ieșire: Variabila aleatoare X.

Se observă că probabilitatea de acceptare este:

$$p_a = \sqrt{\frac{\pi}{2e}} \approx 0.72$$

adică în medie, din patru perechi (U, Y) trei sunt acceptate pentru a genera un X_1.

3. Metoda polară

Teoremă

Dacă variabilele U_1, U_2 sunt uniforme pe $[0,1]$ și independente, atunci variabilele aleatoare

$$Z_1 = V_1\sqrt{\frac{-2\log S}{S}}, \quad Z_2 = V_2\sqrt{\frac{-2\log S}{S}} \tag{3}$$

cu

$$V_1 = 2U_1 - 1, \quad V_2 = 2U_2 - 1, \quad S = V_1^2 + V_2^2, \quad S < 1$$

sunt variabile $N(0,1)$ independente.

Dem:
Trebuie să arătăm că repartiția bidimensională comună a variabilelor Z_1 și Z_2 condiționată de $\{S < 1\}$ este repartiția comună a două variabile normale independente.

Observăm că (V_1, V_2) este un vector aleator uniform pe suprafața mărginită de pătratul $I^2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$ iar V_1, V_2 sunt uniforme pe $[-1, 1]$ și independente. Condiția $S < 1$ face ca repartiția vectorului (V_1, V_2) condiționată de $\{S < 1\}$ să fie vector uniform pe suprafața mărginită de cercul unitate. De accea putem să-i scriem pe V_1 și V_2 în funcție de coordonatele polare:

$$V_1 = R\cos\theta, \quad V_2 = R\sin\theta$$

cu R și θ variabile aleatoare $0 \leq R \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Identificând aceste relații cu (3) rezultă că:

$$S = R^2, \quad Z_1 = \sqrt{-2\log S}\cos\theta, \quad Z_2 = \sqrt{-2\log S}\sin\theta \qquad (4)$$

Dar și Z_1, Z_2 se pot exprima în coordonate polare:

$$Z_1 = R' \cos\theta', \quad Z_2 = R' \sin\theta' \tag{5}$$

cu R', θ' variabile aleatoare, $R' \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Din (4) și (5) rezultă că:

$$\theta' = \theta, \quad R' = \sqrt{-2\log S}$$

și pentru că V_1, V_2 sunt independente pe I^2, atunci și perechile R, θ și R', θ' sunt independente.
Deoarece (V_1, V_2) are o repartiție uniformă pe cercul unitate rezultă că $\theta = \theta'$ are o repartiție uniformă pe $[0, 2\pi]$, adică are densitatea:

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \text{ dacă } \theta \in [0, 2\pi] \\ 0, \text{ altfel.} \end{cases}$$

Repartiția lui R' este:

$$F(r) = P(R' \leq r) = P(\sqrt{-2\log S} \leq r).$$

Dar $S = R^2$ este uniformă pe $[0, 1]$. Atunci rezultă că:

$$F(r) = P(S \geq e^{-\frac{r^2}{2}}) = 1 - e^{-\frac{r^2}{2}}.$$

Prin urmare densitatea de repartiție a variabilei R' este:

$$\psi(r) = re^{-\frac{r^2}{2}}, \quad r \in [0, 1].$$

Vom determina acum funcția comună de repartiție a variabilelor Z_1, Z_2 condiționată de $S < 1$. Pentru aceasta considerăm domeniile:

$$D_{(r,\theta)} = \{(r, \theta) | r\cos\theta \leq z_1, r\sin\theta \leq z_2\}$$

$$D_{(x,y)} = \{(x, y) | x \leq z_1, y \leq z_2\}.$$

Atunci

$$F(z_1, z_2) = P(Z_1 \leq z_1, Z_2 \leq z_2) = \int\int_{D_{(r,\theta)}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta.$$

Facem schimbările de variabile:

$$\theta = arctg\left(\frac{x}{y}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

și rezultă că:

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{D_{(x,y)}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

ceea ce demonstrează teorema.

Algoritmul de generare se deduce ușor din teoremă și el produce simultan două valori de selecție ale unor variabile $N(0,1)$ independente.

Observăm că se resping valorile pentru care $S \geq 1$ iar probabilitatea de acceptare este:

$$p_a = \frac{\text{aria cercului } C(0,1)}{\text{aria pătratului } [-1,1] \times [-1,1]} = \frac{\pi}{4}$$

Din demonstrația teoremei rezultă că variabilele Z_1, Z_2 pot fi simulate și cu formulele:

$$Z_1 = \sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2), \quad Z_2 = \sqrt{-2 \log U_1} \sin(2\pi U_2) \quad (6)$$

În acest caz nu se fac respingeri, dar complexitatea algoritmului poate fi mai mare decât în cazul (3) din cauza funcțiilor trigonometrice și a funcției logaritm.