

PARTEA 2

Logică Matematică și Computațională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019 · ID

LOGICĂ PROPOZIȚIONALĂ

LIMBAJUL LOGICII PROPOZIȚIONALE

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe **propoziții** sau **enunțuri declarative**.

Propoziții declarative

- Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime.
(Conjectura lui Goldbach).
- Andrei este deștept.
- Martienilor le place pizza.

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe **propoziții** sau **enunțuri declarative**.

Propoziții declarative

- Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- Andrei este deștept.
- Martienilor le place pizza.

Propoziții care nu sunt declarative

- Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- Pleacă!

LITERELE GRECEȘTI

Αα

ALPHA [a]
ἄλφα

Ββ

BETA [b]
βῆτα

Γγ

GAMMA [g]
γάμμα

Δδ

DELTA [d]
δέλτα

Εε

EPSILON [e]
ἒ ψιλόν

Ζζ

ZETA [dz]
ζῆτα

Ηη

ETA [ɛː]
ἦτα

Θθ

THETA [tʰ]
θῆτα

Ιι

IOTA [i]
ἰῶτα

Κκ

KAPPA [k]
κάππα

Λλ

LAMBDA [l]
λάμβδα

Μμ

MU [m]
μῦ

Νν

NU [n]
νῦ

Ξξ

XI [ks]
ξεῖ

Οο

OMICRON [o]
ὀ μικρόν

Ππ

PI [p]
πεῖ

Ρρ

RHO [r]
ῥῶ

Σσς

SIGMA [s]
σίγμα

Ττ

TAU [t]
ταῦ

Υυ

UPSILON [u]
ῥ ψιλόν

Φφ

PHI [pʰ]
φεῖ

Χχ

CHI [kʰ]
χεῖ

Ψψ

PSI [ps]
ψεῖ

Ωω

OMEGA [ɔː]
ὦ μέγα

Considerăm anumite propoziții ca fiind **atomice** și le notăm cu p, q, r, \dots sau cu p_1, p_2, p_3, \dots

Exemplu.

- p = Numărul 2 este par.
- q = Mâine plouă.
- r = Sunt obosit.

Considerăm anumite propoziții ca fiind **atomice** și le notăm cu p, q, r, \dots sau cu p_1, p_2, p_3, \dots

Exemplu.

- p = Numărul 2 este par.
- q = Mâine plouă.
- r = Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate $\varphi, \psi, \chi, \dots$) folosind conectorii logici:

- \neg (negația),
- \rightarrow (implicația),
- \vee (disjuncția),
- \wedge (conjuncția),
- \leftrightarrow (echivalența).

Exemplu.

p = Numărul 2 este par.

q = Mâine plouă.

r = Sunt obosit.

$\neg p$ =

Exemplu.

p = Numărul 2 este par.

q = Mâine plouă.

r = Sunt obosit.

$\neg p$ = Numărul 2 **nu** este par.

$p \vee q$ =

Exemplu.

p = Numărul 2 este par.

q = Mâine plouă.

r = Sunt obosit.

$\neg p$ = Numărul 2 **nu** este par.

$p \vee q$ = Numărul 2 este par **sau** mâine plouă.

$p \wedge q$ =

Exemplu.

p = Numărul 2 este par.

q = Mâine plouă.

r = Sunt obosit.

$\neg p$ = Numărul 2 **nu** este par.

$p \vee q$ = Numărul 2 este par **sau** mâine plouă.

$p \wedge q$ = Numărul 2 este par **și** mâine plouă.

$p \rightarrow q$ =

Exemplu.

p = Numărul 2 este par.

q = Mâine plouă.

r = Sunt obosit.

$\neg p$ = Numărul 2 **nu** este par.

$p \vee q$ = Numărul 2 este par **sau** mâine plouă.

$p \wedge q$ = Numărul 2 este par **și** mâine plouă.

$p \rightarrow q$ = **Dacă** numărul 2 este par, **atunci** mâine plouă.

$p \leftrightarrow q$ =

Exemplu.

p = Numărul 2 este par.

q = Mâine plouă.

r = Sunt obosit.

$\neg p$ = Numărul 2 **nu** este par.

$p \vee q$ = Numărul 2 este par **sau** mâine plouă.

$p \wedge q$ = Numărul 2 este par **și** mâine plouă.

$p \rightarrow q$ = **Dacă** numărul 2 este par, **atunci** mâine plouă.

$p \leftrightarrow q$ = Numărul 2 este par **dacă și numai dacă** mâine plouă.

Exemplu.

p = Numărul 2 este par.

q = Mâine plouă.

r = Sunt obosit.

$\neg p$ = Numărul 2 **nu** este par.

$p \vee q$ = Numărul 2 este par **sau** mâine plouă.

$p \wedge q$ = Numărul 2 este par **și** mâine plouă.

$p \rightarrow q$ = **Dacă** numărul 2 este par, **atunci** mâine plouă.

$p \leftrightarrow q$ = Numărul 2 este par **dacă și numai dacă** mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele (,).

Exemplu.

$\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$

Exemplu.

Fie propoziția:

φ = *Azi este 27 octombrie, deci avem curs de logică.*

Exemplu.

Fie propoziția:

φ = *Azi este 27 octombrie, deci avem curs de logică.*

Considerăm propozițiile atomice

- p = *Azi este 27 octombrie.*
- q = *Avem curs de logică.*

Atunci φ =

Exemplu.

Fie propoziția:

φ = *Azi este 27 octombrie, deci avem curs de logică.*

Considerăm propozițiile atomice

- p = *Azi este 27 octombrie.*
- q = *Avem curs de logică.*

Atunci $\varphi = p \rightarrow q$. Cine este $\neg\varphi$?

Exemplu.

Fie propoziția:

φ = *Azi este 27 octombrie, deci avem curs de logică.*

Considerăm propozițiile atomice

- p = *Azi este 27 octombrie.*
- q = *Avem curs de logică.*

Atunci $\varphi = p \rightarrow q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$ = *Azi este 27 octombrie și nu avem curs de logică.*

Exemplu.

Fie propoziția:

φ = *Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară,
atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propozițiile atomice

Exemplu.

Fie propoziția:

φ = *Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară,
atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propozițiile atomice

- p = *Trenul întârzie.*
- q = *Sunt taxiuri la gară.*
- r = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci φ =

Exemplu.

Fie propoziția:

φ = Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară,
atunci Ion întârzie la întâlnire.

Considerăm propozițiile atomice

- p = Trenul întârzie.
- q = Sunt taxiuri la gară.
- r = Ion întârzie la întâlnire.

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

Exemplu.

Fie propoziția:

φ = *Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară,
atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propozițiile atomice

- p = *Trenul întârzie.*
- q = *Sunt taxiuri la gară.*
- r = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate și r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q ?

Exemplu.

Fie propoziția:

φ = *Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară,
atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propozițiile atomice

- p = *Trenul întârzie.*
- q = *Sunt taxiuri la gară.*
- r = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate și r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q ? **q este adevărată.**

Definiție 1.1

Limbajul logicii propoziționale (LP) este format din:

- o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de **variabile**
- conectori logici: \neg (se citește **non**), \rightarrow (se citește **implică**)
- paranteze: $(,)$.

Mulțimea **Sim** a **simbolurilor** lui LP este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}.$$

Notăm variabilele cu $v, u, w, x, y, v_0, v_1, v_2, \dots$

Definiția 1.2

Mulțimea *Expr* a *expresiilor* lui *LP* este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui *LP*.

- Expresia vidă se notează λ .
- *Lungimea* unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ .
- Sim^n este mulțimea șirurilor de simboluri ale lui *LP* de lungime n .
- Prin convenție, $Sim^0 = \{\lambda\}$.
- Atunci $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n$.

Exemplu.

$((((v_1, \quad v_1 \neg \rightarrow (v_2), \quad \neg v_1 v_2, \quad ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))), \quad (\neg(v_1 \rightarrow v_2)))$

Definiția 1.3

Formulele lui LP sunt expresiile lui LP definite astfel:

- (F0) Orice variabilă propozițională este formulă.
- (F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.
- (F2) Dacă φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ este formulă.

Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.

Mulțimea formulelor se notează *Form*. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \dots$

Observații.

- Definiția formulelor este un exemplu de **definiție inductivă**.
- Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- **$Form \subseteq Expr$** . Formulele sunt expresiile "bine formate".
- Pentru orice formulă φ , notăm cu **$Var(\varphi)$** mulțimea variabilelor care apar în φ .

Exemplu.

- $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule .
- $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$ sunt formule.

Exemplu.

- $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule .
- $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$ sunt formule.

Citire unică (*Unique readability*)

Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Exemplu.

- $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule .
- $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$ sunt formule.

Citire unică (*Unique readability*)

Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Propoziția 1.4

Mulțimea *Form* a formulelor lui *LP* este numărabilă.

Conectorii derivați \vee (se citește **sau**), \wedge (se citește **și**), \leftrightarrow (se citește **dacă și numai dacă**) sunt introduși prin abrevierile:

$$(\varphi \vee \psi) \quad := \quad ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$$

$$(\varphi \wedge \psi) \quad := \quad (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \quad := \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).$$

Conectorii derivați \vee (se citește **sau**), \wedge (se citește **și**), \leftrightarrow (se citește **dacă și numai dacă**) sunt introduși prin abrevierile:

$$(\varphi \vee \psi) \quad := \quad ((\neg\varphi) \rightarrow \psi)$$

$$(\varphi \wedge \psi) \quad := \quad (\neg(\varphi \rightarrow (\neg\psi)))$$

$$(\varphi \leftrightarrow \psi) \quad := \quad ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)).$$

Convenții.

- În practică, renunțăm la parantezele exterioare; le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi$, dar scriem $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi$.
- Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
 - \neg are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
 - \wedge, \vee au precedență mai mare decât $\rightarrow, \leftrightarrow$.
- Prin urmare, formula $((\varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \rightarrow \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.

Propoziția 1.5 (Principiul inducției pe formule)

Fie P o proprietate. Presupunem că:

- (0) Orice variabilă are proprietatea P .
- (1) Pentru orice formulă φ , dacă φ are proprietatea P , atunci și $(\neg\varphi)$ are proprietatea P .
- (2) Pentru orice formule φ, ψ , dacă φ și ψ au proprietatea P , atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ are proprietatea P .

Atunci orice formulă φ are proprietatea P .

Propoziția 1.5 (Principiul inducției pe formule)

Fie P o proprietate. Presupunem că:

- (0) Orice variabilă are proprietatea P .
- (1) Pentru orice formulă φ , dacă φ are proprietatea P , atunci și $(\neg\varphi)$ are proprietatea P .
- (2) Pentru orice formule φ, ψ , dacă φ și ψ au proprietatea P , atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ are proprietatea P .

Atunci orice formulă φ are proprietatea P .

Demonstrație. Pentru orice formulă φ , notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ .

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$Q(n)$ e adevărată ddacă orice formulă φ cu $c(\varphi) \leq n$ are proprietatea P .

Demonstrăm prin inducție că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ ,
 $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v
are proprietatea P .

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ , $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea P .

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ , $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea P .

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n + 1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n + 1$.

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ , $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea P .

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea P , conform (0).

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ , $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea **P**.

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea **P**, conform (0).
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ are proprietatea **P**. Aplicînd ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea **P**.

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ , $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea P .

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea P , conform (0).
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ are proprietatea P . Aplicând ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea P .
- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ au proprietatea P . Rezultă din (2) că φ are proprietatea P .

PRINCIPIUL INDUCȚIEI PE FORMULE

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ , $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea P .

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea P , conform (0).
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ are proprietatea P . Aplicînd ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea P .
- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ au proprietatea P . Rezultă din (2) că φ are proprietatea P .

Așadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă φ există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea P .

Propoziția 1.6 (Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- $V \subseteq \Gamma$;
- Γ este închisă la \neg , adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- Γ este închisă la \rightarrow , adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = \text{Form}$.

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

Definiția 1.7

Fie φ o formulă a lui LP . O **subformulă** a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ .

Notăție.

Mulțimea subformulelor lui φ se notează $SubForm(\varphi)$.

Definiția 1.7

Fie φ o formulă a lui LP . O **subformulă** a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ .

Notăție.

Mulțimea subformulelor lui φ se notează $SubForm(\varphi)$.

Exemplu.

Fie $\varphi = ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$. Atunci

$$SubForm(\varphi) =$$

Definiția 1.7

Fie φ o formulă a lui LP . O **subformulă** a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ .

Notăție.

Mulțimea subformulelor lui φ se notează $SubForm(\varphi)$.

Exemplu.

Fie $\varphi = ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$. Atunci

$$SubForm(\varphi) = \{v_1, v_2, v_1 \rightarrow v_2, \neg v_1, \varphi\}.$$

Definiție alternativă.

Mulțimea $SubForm(\varphi)$ poate fi definită și recursiv:

$$SubForm(v) = \{v\}$$

$$SubForm(\neg\varphi) = SubForm(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}$$

$$SubForm(\varphi \rightarrow \psi) = SubForm(\varphi) \cup SubForm(\psi) \cup \{\varphi \rightarrow \psi\}.$$

SEMANTICA LOGICII PROPOZIȚIONALE

Valori de adevăr.

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr posibile:

- 1 pentru **adevărat** și
- 0 pentru **fals**.

Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$.

Tabele de adevăr.

Definim următoarele operații pe $\{0, 1\}$ folosind **tabelele de adevăr**.

$$\neg : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\} \quad \rightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$$

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că

$$\neg p = 1 \iff p = 0.$$

$$p \rightarrow q = 1 \iff p \leq q.$$

Operațiile

- $\vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$,
- $\wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ și
- $\leftrightarrow : \{0, 1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$

se definesc astfel:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observație.

Pentru orice $p, q \in \{0, 1\}$, $p \vee q = \neg p \rightarrow q$, $p \wedge q = \neg(p \rightarrow \neg q)$ și $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Definiția 1.8

O **evaluare** (sau **interpretare**) este o funcție $e : V \rightarrow \{0, 1\}$.

Definiția 1.8

O **evaluare** (sau **interpretare**) este o funcție $e : V \rightarrow \{0, 1\}$.

Teorema 1.9

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ există o unică funcție

$$e^+ : Form \rightarrow \{0, 1\}$$

care verifică următoarele proprietăți:

- $e^+(v) = e(v)$ pentru orice $v \in V$.
- $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in Form$,
- $e^+(\varphi \rightarrow \psi) = e^+(\varphi) \rightarrow e^+(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in Form$.

Propoziția 1.10

Dacă $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este o evaluare, atunci pentru orice formule φ, ψ ,

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi),$$

$$e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi),$$

$$e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi).$$

Propoziția 1.11

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi). \quad (*)$$

Propoziția 1.11

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi). \quad (*)$$

Demonstrație. Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ ,

φ are proprietatea **P** dacă pentru orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,
 φ satisface (*).

Propoziția 1.11

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi). \quad (*)$$

Demonstrație. Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ ,

φ are proprietatea **P** dacă pentru orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,
 φ satisface (*).

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea **P** folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

Propoziția 1.11

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in \text{Var}(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi). \quad (*)$$

Demonstrație. Definim următoarea proprietate **P**: pentru orice formulă φ ,

φ are proprietatea **P** dacă pentru orice evaluări $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$,
 φ satisface (*).

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea **P** folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

· $\varphi = v$. Atunci $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$.

Demonstrație. (continuare)

- $\varphi = (\neg\psi)$ și ψ satisface P . Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$.

Demonstrație. (continuare)

- $\varphi = (\neg\psi)$ și ψ satisface **P**. Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$. Deoarece $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\psi)$. Așadar, aplicând **P** pentru ψ , obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$.

Demonstrație. (continuare)

- $\varphi = (\neg\psi)$ și ψ satisface P . Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$. Deoarece $\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\psi)$. Așadar, aplicând P pentru ψ , obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface P .

Demonstrație. (continuare)

- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ și ψ, χ satisfac **P**. Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$.

Demonstrație. (continuare)

- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ și ψ, χ satisfac **P**. Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$. Deoarece $\text{Var}(\psi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$ și $\text{Var}(\chi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\psi) \cup \text{Var}(\chi)$. Așadar, aplicând **P** pentru ψ și χ , obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ și $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$.

Demonstrație. (continuare)

- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$ și ψ, χ satisfac **P**. Fie $e_1, e_2 : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\varphi)$. Deoarece $\text{Var}(\psi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$ și $\text{Var}(\chi) \subseteq \text{Var}(\varphi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in \text{Var}(\psi) \cup \text{Var}(\chi)$. Așadar, aplicând **P** pentru ψ și χ , obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ și $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$. Rezultă că

$$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \rightarrow e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \rightarrow e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

deci φ satisface **P**.



Definiția 1.12

Fie φ o formulă.

- O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$.

Notăție: $e \models \varphi$.

Definiția 1.12

Fie φ o formulă.

- O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$.

Notăție: $e \models \varphi$.

- φ este **satisfiabilă** dacă admite un model.

Definiția 1.12

Fie φ o formulă.

- O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$.

Notăție: $e \models \varphi$.

- φ este **satisfiabilă** dacă admite un model.
- Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem și că φ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.

Definiția 1.12

Fie φ o formulă.

- O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$.

Notăție: $e \models \varphi$.

- φ este **satisfiabilă** dacă admite un model.
- Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem și că φ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.
- φ este **tautologie** dacă orice evaluare este model al lui φ .

Notăție: $\models \varphi$.

Mulțimea tuturor modelelor lui φ se notează **$Mod(\varphi)$** .

Definiția 1.12

Fie φ o formulă.

- O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$.

Notăție: $e \models \varphi$.

- φ este **satisfiabilă** dacă admite un model.
- Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem și că φ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.
- φ este **tautologie** dacă orice evaluare este model al lui φ .

Notăție: $\models \varphi$.

Mulțimea tuturor modelelor lui φ se notează $Mod(\varphi)$.

Propoziția 1.13

- (i) φ este tautologie ddacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.
- (ii) φ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Demonstrație. **Exercițiu.**

Fie φ o formulă arbitrară și $\text{Var}(\varphi) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e^+(\varphi)$ depinde doar de $e(x_1), \dots, e(x_k)$, conform Propoziției 1.12.

Fie φ o formulă arbitrară și $\text{Var}(\varphi) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e^+(\varphi)$ depinde doar de $e(x_1), \dots, e(x_k)$, conform Propoziției 1.12.

Așadar, $e^+(\varphi)$ depinde doar de restricția lui e la $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$:

$$e' : \{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Sunt 2^k astfel de funcții posibile $e'_1, e'_2, \dots, e'_{2^k}$.

Fie φ o formulă arbitrară și $\text{Var}(\varphi) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e^+(\varphi)$ depinde doar de $e(x_1), \dots, e(x_k)$, conform Propoziției 1.12.

Așadar, $e^+(\varphi)$ depinde doar de restricția lui e la $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$:

$$e' : \{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Sunt 2^k astfel de funcții posibile $e'_1, e'_2, \dots, e'_{2^k}$. Asociem fiecăreia o linie într-un tabel:

x_1	x_2	\dots	x_k	\dots subformule ale lui $\varphi \dots$	φ
$e'_1(x_1)$	$e'_1(x_2)$	\dots	$e'_1(x_k)$	\dots	$e'^+_1(\varphi)$
$e'_2(x_1)$	$e'_2(x_2)$	\dots	$e'_2(x_k)$	\dots	$e'^+_2(\varphi)$
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
$e'_{2^k}(x_1)$	$e'_{2^k}(x_2)$	\dots	$e'_{2^k}(x_k)$	\dots	$e'^+_{2^k}(\varphi)$

Pentru orice i , $e'^+_i(\varphi)$ se definește similar cu Teorema 1.10

Fie φ o formulă arbitrară și $\text{Var}(\varphi) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$, $e^+(\varphi)$ depinde doar de $e(x_1), \dots, e(x_k)$, conform Propoziției 1.12.

Așadar, $e^+(\varphi)$ depinde doar de restricția lui e la $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$:

$$e' : \{x_1, \dots, x_k\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Sunt 2^k astfel de funcții posibile $e'_1, e'_2, \dots, e'_{2^k}$. Asociem fiecăreia o linie într-un tabel:

x_1	x_2	\dots	x_k	\dots subformule ale lui $\varphi \dots$	φ
$e'_1(x_1)$	$e'_1(x_2)$	\dots	$e'_1(x_k)$	\dots	$e'^+_1(\varphi)$
$e'_2(x_1)$	$e'_2(x_2)$	\dots	$e'_2(x_k)$	\dots	$e'^+_2(\varphi)$
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots	\vdots
$e'_{2^k}(x_1)$	$e'_{2^k}(x_2)$	\dots	$e'_{2^k}(x_k)$	\dots	$e'^+_{2^k}(\varphi)$

Pentru orice i , $e'^+_i(\varphi)$ se definește similar cu Teorema 1.10

φ este tautologie ddacă $e'^+_i(\varphi) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \dots, 2^k\}$.

Exemplu.

Fie $\varphi = v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2))$. Vrem să demonstrăm că $\models \varphi$.

Exemplu.

Fie $\varphi = v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2))$. Vrem să demonstrăm că $\models \varphi$.

$$\text{Var}(\varphi) = \{v_1, v_2\}$$

Exemplu.

Fie $\varphi = v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2))$. Vrem să demonstrăm că $\models \varphi$.

$$\text{Var}(\varphi) = \{v_1, v_2\}$$

v_1	v_2	$v_1 \wedge v_2$	$v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2)$	$v_1 \rightarrow (v_2 \rightarrow (v_1 \wedge v_2))$
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Definiția 1.14

Fie φ, ψ două formule. Spunem că

- φ este **consecință semantică** a lui ψ dacă $\text{Mod}(\psi) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$.

Notăție: $\psi \models \varphi$.

- φ și ψ sunt **(logic) echivalente** dacă $\text{Mod}(\psi) = \text{Mod}(\varphi)$.

Notăție: $\varphi \sim \psi$.

Definiția 1.14

Fie φ, ψ două formule. Spunem că

- φ este **consecință semantică** a lui ψ dacă $\text{Mod}(\psi) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$.

Notăție: $\psi \models \varphi$.

- φ și ψ sunt **(logic) echivalente** dacă $\text{Mod}(\psi) = \text{Mod}(\varphi)$.

Notăție: $\varphi \sim \psi$.

Observație.

Relația \sim este o relație de echivalență pe mulțimea *Form* a formulelor.

Definiția 1.14

Fie φ, ψ două formule. Spunem că

- φ este **consecință semantică** a lui ψ dacă $\text{Mod}(\psi) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$.

Notăție: $\psi \models \varphi$.

- φ și ψ sunt **(logic) echivalente** dacă $\text{Mod}(\psi) = \text{Mod}(\varphi)$.

Notăție: $\varphi \sim \psi$.

Observație.

Relația \sim este o relație de echivalență pe mulțimea *Form* a formulelor.

Propoziția 1.15

Fie φ, ψ formule. Atunci

- (i) $\psi \models \varphi$ ddacă $\models \psi \rightarrow \varphi$.
- (ii) $\psi \sim \varphi$ ddacă $(\psi \models \varphi \text{ și } \varphi \models \psi)$ ddacă $\models \psi \leftrightarrow \varphi$.

Demonstrație. **Exercițiu.**

Propoziția 1.16

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

terțul exclus

$$\models \varphi \vee \neg \varphi$$

(1)

Propoziția 1.16

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

terțul exclus

$$\models \varphi \vee \neg \varphi \quad (1)$$

modus ponens

$$\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi \quad (2)$$

Propoziția 1.16

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

terțul exclus

$$\models \varphi \vee \neg \varphi \quad (1)$$

modus ponens

$$\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi \quad (2)$$

afirmarea concluziei

$$\psi \models \varphi \rightarrow \psi \quad (3)$$

Propoziția 1.16

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

terțul exclus

$$\models \varphi \vee \neg \varphi \quad (1)$$

modus ponens

$$\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi \quad (2)$$

afirmarea concluziei

$$\psi \models \varphi \rightarrow \psi \quad (3)$$

contradicția

$$\models \neg(\varphi \wedge \neg \varphi) \quad (4)$$

Propoziția 1.16

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

terțul exclus

$$\models \varphi \vee \neg \varphi \quad (1)$$

modus ponens

$$\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi \quad (2)$$

afirmarea concluziei

$$\psi \models \varphi \rightarrow \psi \quad (3)$$

contradicția

$$\models \neg(\varphi \wedge \neg \varphi) \quad (4)$$

dubla negație

$$\varphi \sim \neg \neg \varphi \quad (5)$$

Propoziția 1.16

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

terțul exclus

$$\models \varphi \vee \neg \varphi \quad (1)$$

modus ponens

$$\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi \quad (2)$$

afirmarea concluziei

$$\psi \models \varphi \rightarrow \psi \quad (3)$$

contradicția

$$\models \neg(\varphi \wedge \neg \varphi) \quad (4)$$

dubla negație

$$\varphi \sim \neg \neg \varphi \quad (5)$$

contrapозиția

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \psi \rightarrow \neg \varphi \quad (6)$$

Propoziția 1.16

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

terțul exclus

$$\models \varphi \vee \neg \varphi \quad (1)$$

modus ponens

$$\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi \quad (2)$$

afirmarea concluziei

$$\psi \models \varphi \rightarrow \psi \quad (3)$$

contradicția

$$\models \neg(\varphi \wedge \neg \varphi) \quad (4)$$

dubla negație

$$\varphi \sim \neg \neg \varphi \quad (5)$$

contrapозиția

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \psi \rightarrow \neg \varphi \quad (6)$$

negarea premisei

$$\neg \varphi \models \varphi \rightarrow \psi \quad (7)$$

Propoziția 1.16

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

$$\text{terțul exclus} \quad \models \varphi \vee \neg\varphi \quad (1)$$

$$\text{modus ponens} \quad \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi \quad (2)$$

$$\text{afirmarea concluziei} \quad \psi \models \varphi \rightarrow \psi \quad (3)$$

$$\text{contradicția} \quad \models \neg(\varphi \wedge \neg\varphi) \quad (4)$$

$$\text{dubla negație} \quad \varphi \sim \neg\neg\varphi \quad (5)$$

$$\text{contrapозиția} \quad \varphi \rightarrow \psi \sim \neg\psi \rightarrow \neg\varphi \quad (6)$$

$$\text{negarea premisei} \quad \neg\varphi \models \varphi \rightarrow \psi \quad (7)$$

$$\text{modus tollens} \quad \neg\psi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \neg\varphi \quad (8)$$

Propoziția 1.16

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

terțul exclus	$\models \varphi \vee \neg \varphi$	(1)
modus ponens	$\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \psi$	(2)
afirmarea concluziei	$\psi \models \varphi \rightarrow \psi$	(3)
contradicția	$\models \neg(\varphi \wedge \neg \varphi)$	(4)
dubla negație	$\varphi \sim \neg \neg \varphi$	(5)
contrapозиția	$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \psi \rightarrow \neg \varphi$	(6)
negarea premisei	$\neg \varphi \models \varphi \rightarrow \psi$	(7)
modus tollens	$\neg \psi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \models \neg \varphi$	(8)
tranzitivitatea implicației	$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \models \varphi \rightarrow \chi$	(9)

legile lui de Morgan

$$\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)) \quad (10)$$

$$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi)) \quad (11)$$

legile lui de Morgan

$$\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)) \quad (10)$$

$$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi)) \quad (11)$$

exportarea și importarea

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \quad (12)$$

legile lui de Morgan

$$\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)) \quad (10)$$

$$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi)) \quad (11)$$

exportarea și importarea

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \quad (12)$$

idempotența

$$\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi \quad (13)$$

legile lui de Morgan

$$\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)) \quad (10)$$

$$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi)) \quad (11)$$

exportarea și importarea

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \quad (12)$$

idempotența

$$\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi \quad (13)$$

slăbirea

$$\models \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \quad \models \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi \quad (14)$$

legile lui de Morgan $\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))$ (10)

$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi))$ (11)

exportarea și importarea $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \varphi \wedge \psi \rightarrow \chi$ (12)

idempotența $\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$ (13)

slăbirea $\models \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \quad \models \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ (14)

comutativitatea $\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi \quad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$ (15)

legile lui de Morgan $\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))$ (10)

$$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi)) \quad (11)$$

exportarea și importarea $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \varphi \wedge \psi \rightarrow \chi$ (12)

idempotența $\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$ (13)

slăbirea $\models \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \quad \models \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ (14)

comutativitatea $\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi \quad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$ (15)

asociativitatea $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ (16)

$$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi \quad (17)$$

legile lui de Morgan	$\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))$	(10)
	$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi))$	(11)
exportarea și importarea	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \varphi \wedge \psi \rightarrow \chi$	(12)
idempotența	$\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$	(13)
slăbirea	$\models \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \quad \models \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$	(14)
comutativitatea	$\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi \quad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$	(15)
asociativitatea	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$	(16)
	$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi$	(17)
absorbția	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$	(18)
	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$	(19)

legile lui de Morgan $\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))$ (10)

$$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi)) \quad (11)$$

exportarea și importarea $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \varphi \wedge \psi \rightarrow \chi$ (12)

idempotența $\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$ (13)

slăbirea $\models \varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi \quad \models \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ (14)

comutativitatea $\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi \quad \varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$ (15)

asociativitatea $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$ (16)

$$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi \quad (17)$$

absorbția $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$ (18)

$$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi \quad (19)$$

distributivitatea $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ (20)

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \quad (21)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \quad (25)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \quad (25)$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \quad (26)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \quad (25)$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \quad (26)$$

$$\neg \varphi \sim \varphi \rightarrow \neg \varphi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (27)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \quad (25)$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \quad (26)$$

$$\neg \varphi \sim \varphi \rightarrow \neg \varphi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (27)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg \psi) \quad (28)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \quad (25)$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \quad (26)$$

$$\neg \varphi \sim \varphi \rightarrow \neg \varphi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (27)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg \psi) \quad (28)$$

$$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg \varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \quad (29)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \quad (25)$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \quad (26)$$

$$\neg \varphi \sim \varphi \rightarrow \neg \varphi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (27)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg \psi) \quad (28)$$

$$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg \varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \quad (29)$$

$$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \quad (30)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \quad (25)$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \quad (26)$$

$$\neg \varphi \sim \varphi \rightarrow \neg \varphi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (27)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg \psi) \quad (28)$$

$$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg \varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \quad (29)$$

$$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \quad (30)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg \varphi \rightarrow \psi) \quad (31)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \quad (25)$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \quad (26)$$

$$\neg \varphi \sim \varphi \rightarrow \neg \varphi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (27)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg \psi) \quad (28)$$

$$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg \varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \quad (29)$$

$$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \quad (30)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg \varphi \rightarrow \psi) \quad (31)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (32)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \quad (25)$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \quad (26)$$

$$\neg \varphi \sim \varphi \rightarrow \neg \varphi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (27)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg \psi) \quad (28)$$

$$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg \varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \quad (29)$$

$$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \quad (30)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg \varphi \rightarrow \psi) \quad (31)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (32)$$

$$\models \neg \varphi \rightarrow (\neg \psi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \quad (33)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \quad (25)$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \quad (26)$$

$$\neg \varphi \sim \varphi \rightarrow \neg \varphi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (27)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg \psi) \quad (28)$$

$$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg \varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \quad (29)$$

$$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \quad (30)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg \varphi \rightarrow \psi) \quad (31)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (32)$$

$$\models \neg \varphi \rightarrow (\neg \psi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \quad (33)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \quad (34)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \wedge \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \chi) \quad (22)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vee \chi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \chi) \quad (23)$$

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \vee (\psi \rightarrow \chi) \quad (24)$$

$$\varphi \vee \psi \rightarrow \chi \sim (\varphi \rightarrow \chi) \wedge (\psi \rightarrow \chi) \quad (25)$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \sim \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \quad (26)$$

$$\neg \varphi \sim \varphi \rightarrow \neg \varphi \sim (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (27)$$

$$\varphi \rightarrow \psi \sim \neg \varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg \psi) \quad (28)$$

$$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg \varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \quad (29)$$

$$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \quad (30)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\neg \varphi \rightarrow \psi) \quad (31)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \vee (\varphi \rightarrow \neg \psi) \quad (32)$$

$$\models \neg \varphi \rightarrow (\neg \psi \leftrightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \quad (33)$$

$$\models (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (((\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \quad (34)$$

Demonstrăm $(1) \models \varphi \vee \neg\varphi$.

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$.

Demonstrăm $(1) \models \varphi \vee \neg\varphi$.

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Observăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$. Putem demonstra că $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ în două moduri.

Demonstrăm (1) $\models \varphi \vee \neg\varphi$.

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Observăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$. Putem demonstra că $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ în două moduri.

I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

Demonstrăm $(1) \models \varphi \vee \neg\varphi$.

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Observăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$. Putem demonstra că $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ în două moduri.

I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

II. Raționând direct.

Avem două cazuri:

- $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.

Demonstrăm $(1) \models \varphi \vee \neg\varphi$.

Fie $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Observăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$. Putem demonstra că $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ în două moduri.

I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

II. Raționând direct.

Avem două cazuri:

- $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.
- $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 1$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$. □

De multe ori este convenabil să avem o tautologie canonică și o formulă nesatisfiabilă canonică.

Observație.

$v_0 \rightarrow v_0$ este tautologie și $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$ este nesatisfiabilă.

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

De multe ori este convenabil să avem o tautologie canonică și o formulă nesatisfiabilă canonică.

Observație.

$v_0 \rightarrow v_0$ este tautologie și $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$ este nesatisfiabilă.

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

Notății.

- Notăm $v_0 \rightarrow v_0$ cu \top și o numim **adevărul**.
- Notăm $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$ cu \perp și o numim **falsul**.

De multe ori este convenabil să avem o tautologie canonică și o formulă nesatisfiabilă canonică.

Observație.

$v_0 \rightarrow v_0$ este tautologie și $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$ este nesatisfiabilă.

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

Notății.

- Notăm $v_0 \rightarrow v_0$ cu \top și o numim **adevărul**.
- Notăm $\neg(v_0 \rightarrow v_0)$ cu \perp și o numim **falsul**.

Observație.

- φ este tautologie ddacă $\varphi \sim \top$.
- φ este nesatisfiabilă ddacă $\varphi \sim \perp$.

Notății

- Scriem $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ în loc de $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$.
- Similar, scriem $\varphi \vee \psi \vee \chi$ în loc de $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$.
- Fie $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formule. Pentru $n \geq 3$, notăm

$$\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \dots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$$

$$\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n := ((\dots (\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \dots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.$$

- $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ se mai scrie și $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$.

- $\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n$ se mai scrie și $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$.

Propoziția 1.17

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$,

- $e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru **orice** $i \in \{1, \dots, n\}$.
- $e^+(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru **un** $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

Propoziția 1.17

Pentru orice evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$,

- $e^+(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru **orice** $i \in \{1, \dots, n\}$.
- $e^+(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru **un** $i \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

Propoziția 1.18

$$\neg(\varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \wedge \dots \wedge \neg\varphi_n$$

$$\neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$$

Demonstrație. [Exercițiu.](#)

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 1.19

- O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \models \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$).

Notăție: $e \models \Gamma$.

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 1.19

- O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \models \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$).

Notăție: $e \models \Gamma$.

- Γ este **satisfiabilă** dacă are un model.

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 1.19

- O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \models \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$).

Notăție: $e \models \Gamma$.

- Γ este **satisfiabilă** dacă are un model.
- Γ este **finit satisfiabilă** dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 1.19

- O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \models \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$).

Notăție: $e \models \Gamma$.

- Γ este **satisfiabilă** dacă are un model.
- Γ este **finit satisfiabilă** dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.
- Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem și că Γ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.

Mulțimea tuturor modelelor lui Γ se notează $Mod(\Gamma)$.

Notăm $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$.

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 1.19

- O evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ este **model** al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \models \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$).

Notăție: $e \models \Gamma$.

- Γ este **satisfiabilă** dacă are un model.
- Γ este **finit satisfiabilă** dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.
- Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem și că Γ este **nesatisfiabilă** sau **contradictorie**.

Mulțimea tuturor modelelor lui Γ se notează $Mod(\Gamma)$.

Notăm $Mod(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})$.

$$Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi).$$

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

Definiția 1.20

O formulă φ este **consecință semantică** a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$.

Notăție: $\Gamma \models \varphi$.

Notăm cu **$Cn(\Gamma)$** mulțimea consecințelor semantice ale lui Γ . Așadar,

$$Cn(\Gamma) = \{\varphi \in Form \mid \Gamma \models \varphi\}.$$

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

Definiția 1.20

O formulă φ este **consecință semantică** a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$.

Notăție: $\Gamma \models \varphi$.

Notăm cu **$Cn(\Gamma)$** mulțimea consecințelor semantice ale lui Γ . Așadar,

$$Cn(\Gamma) = \{\varphi \in Form \mid \Gamma \models \varphi\}.$$

Definiția 1.21

- Δ este **consecință semantică** a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta)$.

Notăție: $\Gamma \models \Delta$.

- Γ și Δ sunt **(logic) echivalente** dacă $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$.

Notăție: $\Gamma \sim \Delta$.

Teorema 1.22 (Teorema de compacitate)

Pentru orice mulțime Γ de formule,

Γ este satisfiabilă dacă Γ este finit satisfiabilă.

SINTAXA LOGICII PROPOZIȚIONALE

Axiomele logice.

Mulțimea Axm a **axiomelor** lui LP constă în toate formulele de forma:

$$(A1) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(A2) \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(A3) \quad (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

unde φ , ψ și χ sunt formule.

Axiomele logice.

Mulțimea *Axm* a **axiomelor** lui *LP* constă în toate formulele de forma:

$$(A1) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(A2) \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(A3) \quad (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$$

unde φ , ψ și χ sunt formule.

Regula de deducție.

Pentru orice formule φ , ψ ,

din φ și $\varphi \rightarrow \psi$ se inferă ψ (**modus ponens** sau **(MP)**):

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$$

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția Γ -teoremelor este un nou exemplu de **definiție inductivă**.

Definiția 1.23

Γ -teoremele sunt formulele lui LP definite astfel:

(T0) Orice axiomă este Γ -teoremă.

(T1) Orice formulă din Γ este Γ -teoremă.

(T2) Dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ sunt Γ -teoreme, atunci ψ este Γ -teoremă.

Numai formulele obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ -teoreme.

Dacă φ este Γ -teoremă, atunci spunem și că φ este **dedusă din ipotezele** Γ .

Notății.

$Thm(\Gamma)$	$:=$	mulțimea Γ -teoremelor
Thm	$:=$	$Thm(\emptyset)$
$\Gamma \vdash \varphi$	\Leftrightarrow	φ este Γ -teoremă
$\vdash \varphi$	\Leftrightarrow	$\emptyset \vdash \varphi$
$\Gamma \vdash \Delta$	\Leftrightarrow	$\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.

Notății.

$Thm(\Gamma)$	$:=$	mulțimea Γ -teoremelor
Thm	$:=$	$Thm(\emptyset)$
$\Gamma \vdash \varphi$	\Leftrightarrow	φ este Γ -teoremă
$\vdash \varphi$	\Leftrightarrow	$\emptyset \vdash \varphi$
$\Gamma \vdash \Delta$	\Leftrightarrow	$\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.

Definiția 1.24

O formulă φ se numește **teoremă** a lui LP dacă $\vdash \varphi$.

Reformulând condițiile (T0), (T1), (T2) folosind notația \vdash , obținem:

Propoziția 1.25

- (i) dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;
- (iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.

Definiția Γ -teoremelor dă naștere la metoda de demonstrație prin **inducție după Γ -teoreme**.

Inducție după Γ -teoreme

Fie P o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ -teoremă satisface P astfel:

- (i) demonstrăm că orice axiomă are proprietatea P ;
- (ii) demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea P ;
- (iii) demonstrăm că dacă φ și $\varphi \rightarrow \psi$ au proprietatea P , atunci ψ are proprietatea P .

Propoziția 1.26

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

- (i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\Gamma \vdash \varphi$ implică $\Delta \vdash \varphi$.

Propoziția 1.26

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

- (i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\Gamma \vdash \varphi$ implică $\Delta \vdash \varphi$.
- (ii) $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\vdash \varphi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$.

Propoziția 1.26

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

- (i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\Gamma \vdash \varphi$ implică $\Delta \vdash \varphi$.
- (ii) $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\vdash \varphi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$.
- (iii) Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\Delta \vdash \varphi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$.

Propoziția 1.26

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

- (i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\Gamma \vdash \varphi$ implică $\Delta \vdash \varphi$.
- (ii) $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\vdash \varphi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$.
- (iii) Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $\Delta \vdash \varphi$ implică $\Gamma \vdash \varphi$.
- (iv) $Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ ,
 $Thm(\Gamma) \vdash \varphi$ ddacă $\Gamma \vdash \varphi$.

Demonstrație. **Exercițiu.**

Definiția 1.27

O Γ -demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) este o secvență de formule $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \dots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

- (i) θ_i este axiomă;
- (ii) $\theta_i \in \Gamma$;
- (iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \rightarrow \theta_i$.

O \emptyset -demonstrație se va numi simplu demonstrație.

Definiția 1.28

Fie φ o formulă. O Γ -demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește lungimea Γ -demonstrației.

Definiția 1.28

Fie φ o formulă. O Γ -demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ -demonstrație $\theta_1, \dots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește lungimea Γ -demonstrației.

Propoziția 1.29

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ -demonstrație a lui φ .

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

Propoziția 1.30

Pentru orice formulă φ , $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Demonstrație.

$$(1) \quad \vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$$

Propoziția 1.30

Pentru orice formulă φ , $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Demonstrație.

- (1) $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$
- (A2) (cu φ , $\psi := \varphi \rightarrow \varphi$, $\chi := \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

Propoziția 1.30

Pentru orice formulă φ , $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Demonstrație.

- (1) $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$
(A2) (cu φ , $\psi := \varphi \rightarrow \varphi$, $\chi := \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

Propoziția 1.30

Pentru orice formulă φ , $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Demonstrație.

- (1) $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$
(A2) (cu φ , $\psi := \varphi \rightarrow \varphi$, $\chi := \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu φ , $\psi := \varphi \rightarrow \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

Propoziția 1.30

Pentru orice formulă φ , $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Demonstrație.

- (1) $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$
(A2) (cu φ , $\psi := \varphi \rightarrow \varphi$, $\chi := \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu φ , $\psi := \varphi \rightarrow \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

Propoziția 1.30

Pentru orice formulă φ , $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Demonstrație.

- (1) $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$
(A2) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi, \chi := \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(1), (2) și Propoziția 1.25.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

Propoziția 1.30

Pentru orice formulă φ , $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Demonstrație.

- (1) $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$
(A2) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi, \chi := \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(1), (2) și Propoziția 1.25.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)
- (4) $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$

Propoziția 1.30

Pentru orice formulă φ , $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Demonstrație.

- (1) $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$
(A2) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi, \chi := \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(1), (2) și Propoziția 1.25.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)
- (4) $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)

Propoziția 1.30

Pentru orice formulă φ , $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Demonstrație.

- (1) $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$
(A2) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi, \chi := \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(1), (2) și Propoziția 1.25.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)
- (4) $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (5) $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$

$$\vdash \varphi \rightarrow \varphi$$

Propoziția 1.30

Pentru orice formulă φ , $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$.

Demonstrație.

- (1) $\vdash (\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$
(A2) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi, \chi := \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (2) $\vdash \varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi \rightarrow \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (3) $\vdash (\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(1), (2) și Propoziția 1.25.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)
- (4) $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)$
(A1) (cu $\varphi, \psi := \varphi$) și Propoziția 1.25.(i)
- (5) $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$
(MP): (3), (4)



Teorema deducției este unul din cele mai utile instrumente pentru a arăta că o formulă e teoremă.

Teorema deducției 1.31

Fie $\Gamma \subseteq \text{Form}$ și $\varphi, \psi \in \text{Form}$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

Teorema deducției este unul din cele mai utile instrumente pentru a arăta că o formulă e teoremă.

Teorema deducției 1.31

Fie $\Gamma \subseteq \text{Form}$ și $\varphi, \psi \in \text{Form}$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

Demonstrație. Dacă $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, atunci:

- (1) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ($\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$)
- (2) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$ ($\varphi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$)
- (3) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (MP): (1), (2)

Teorema deducției este unul din cele mai utile instrumente pentru a arăta că o formulă e teoremă.

Teorema deducției 1.31

Fie $\Gamma \subseteq \text{Form}$ și $\varphi, \psi \in \text{Form}$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi.$$

Demonstrație. Dacă $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$, atunci:

- (1) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ($\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{\varphi\}$)
- (2) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$ ($\varphi \in \Gamma \cup \{\varphi\}$)
- (3) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ (MP): (1), (2)

Presupunem că $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ și demonstrăm că $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Demonstrație. (cont.)

Fie $\psi_1, \dots, \psi_n = \psi$ o demonstrație pentru ψ din ipotezele $\Gamma \cup \{\varphi\}$.
Demonstrăm că $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_i$ prin inducție după $1 \leq i \leq n$.

Demonstrație. (cont.)

Fie $\psi_1, \dots, \psi_n = \psi$ o demonstrație pentru ψ din ipotezele $\Gamma \cup \{\varphi\}$.

Demonstrăm că $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_i$ prin inducție după $1 \leq i \leq n$.

Dacă $i = 1$, atunci ψ_1 este axiomă sau $\psi_1 \in \Gamma \cup \{\varphi\}$. Dacă $\psi_1 = \varphi$, atunci $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \varphi$ deoarece $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$. Dacă $\psi_1 \in \Gamma$ sau ψ_1 este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \psi_1$ și avem:

- (1) $\Gamma \vdash \psi_1$
- (2) $\Gamma \vdash \psi_1 \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi_1)$ (A1)
- (3) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_1$ (MP): (1), (2)

Demonstrație. (cont.)

Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_k$ oricare $k < i$. Dacă ψ_i este axiomă sau $\psi_i \in \Gamma \cup \{\varphi\}$ atunci demonstrăm ca mai sus. Altfel, există $j, k < i$ astfel încât $\psi_j = \psi_k \rightarrow \psi_i$. Rezultă:

- (1) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow (\psi_k \rightarrow \psi_i)$ (ip. de inducție)
- (2) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_k$ (ip. de inducție)
- (3) $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow (\psi_k \rightarrow \psi_i)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi_k) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi_i))$ (A3)
- (4) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi_i$ (1), (2), $2 \times$ MP.

Pentru $i = n$ obținem $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$. □

Propoziția 1.32

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)). \quad (35)$$

Demonstrație.

Propoziția 1.32

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)). \quad (35)$$

Demonstrație. Folosind teorema deducției observăm că

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

\Updownarrow

Propoziția 1.32

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)). \quad (35)$$

Demonstrație. Folosind teorema deducției observăm că

$$\begin{array}{c} \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ \Downarrow \\ \{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \\ \Downarrow \end{array}$$

Propoziția 1.32

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)). \quad (35)$$

Demonstrație. Folosind teorema deducției observăm că

$$\begin{aligned} & \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi \\ & \quad \Updownarrow \end{aligned}$$

Propoziția 1.32

Pentru orice formule φ, ψ, χ ,

$$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)). \quad (35)$$

Demonstrație. Folosind teorema deducției observăm că

$$\begin{aligned} & \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi\} \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi) \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi\} \vdash \varphi \rightarrow \chi \\ & \quad \Updownarrow \\ & \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi. \end{aligned}$$

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

$$(1) \quad \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \qquad \text{Propoziția 1.25.(ii)}$$

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

$$(1) \quad \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \quad \text{Propoziția 1.25.(ii)}$$

$$(2) \quad \{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \text{Propoziția 1.25.(ii)}$$

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

- (1) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ Propoziția 1.25.(ii)
- (2) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ Propoziția 1.25.(ii)
- (3) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (MP): (1), (2)

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

- (1) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ Propoziția 1.25.(ii)
- (2) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ Propoziția 1.25.(ii)
- (3) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ (MP): (1), (2)
- (4) $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$ Propoziția 1.25.(ii)

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

- | | | |
|-----|--|----------------------|
| (1) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi$ | Propoziția 1.25.(ii) |
| (2) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | Propoziția 1.25.(ii) |
| (3) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi$ | (MP): (1), (2) |
| (4) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \psi \rightarrow \chi$ | Propoziția 1.25.(ii) |
| (5) | $\{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi, \varphi\} \vdash \chi$ | (MP): (3), (4). |



Propoziția 1.33

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi. \quad (36)$$

Demonstrație.

$$(1) \quad \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \text{ipoteză}$$

Propoziția 1.33

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi. \quad (36)$$

Demonstrație.

- (1) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ipoteză
- (2) $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$

Propoziția 1.33

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi. \quad (36)$$

Demonstrație.

- (1) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ipoteză
- (2) $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ P. 1.32 și P. 1.25.(ii)

Propoziția 1.33

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi. \quad (36)$$

Demonstrație.

- (1) $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ ipoteză
- (2) $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ P. 1.32 și P. 1.25.(ii)
- (3) $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$

Propoziția 1.33

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi. \quad (36)$$

Demonstrație.

- | | | |
|-----|---|-------------------------|
| (1) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | ipoteză |
| (2) | $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ | P. 1.32 și P. 1.25.(ii) |
| (3) | $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ | (MP): (1), (2) |

Propoziția 1.33

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi. \quad (36)$$

Demonstrație.

- | | | |
|-----|---|-------------------------|
| (1) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | ipoteză |
| (2) | $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ | P. 1.32 și P. 1.25.(ii) |
| (3) | $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ | (MP): (1), (2) |
| (4) | $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi$ | ipoteză |

Propoziția 1.33

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi. \quad (36)$$

Demonstrație.

- | | | |
|-----|---|-------------------------|
| (1) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | ipoteză |
| (2) | $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ | P. 1.32 și P. 1.25.(ii) |
| (3) | $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ | (MP): (1), (2) |
| (4) | $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi$ | ipoteză |
| (5) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ | |

Propoziția 1.33

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ ,

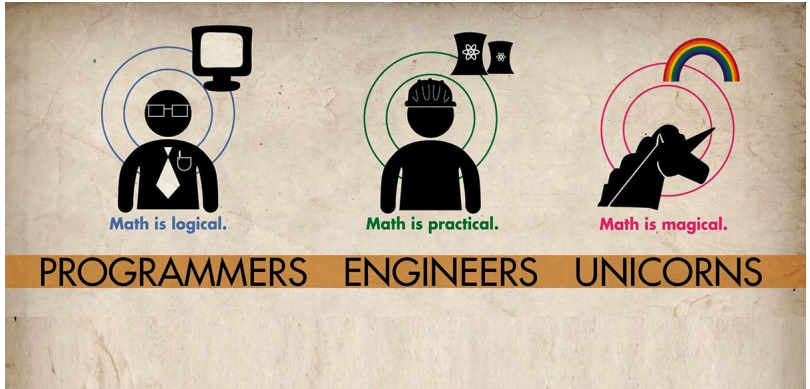
$$\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi. \quad (36)$$

Demonstrație.

- | | | |
|-----|---|-------------------------|
| (1) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$ | ipoteză |
| (2) | $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$ | P. 1.32 și P. 1.25.(ii) |
| (3) | $\Gamma \vdash (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)$ | (MP): (1), (2) |
| (4) | $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \chi$ | ipoteză |
| (5) | $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \chi$ | (MP): (3), (4). |



Pe data viitoare!



Conținutul tehnic al acestui curs se regăsește în cursul de *Logică Matematică și Computațională* al prof. Laurențiu Leuștean din anul universitar 2017/2018.