Curs ID2

Cuprins

Logica de ordinul I - sintaxa

Limbaj de ordinul I $\mathcal{L}$

- unic determinat de $\tau = (\mathbf{R}, \mathbf{F}, \mathbf{C}, ari)$

Termenii lui $\mathcal{L}$, notați $Trm_{\mathcal{L}}$, sunt definiți inductiv astfel:

- orice variabilă este un termen;
- orice simbol de constantă este un termen;
- dacă $f \in \mathbf{F}$, $ar(f) = n$ și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $f(t_1, \ldots, t_n)$ este termen.

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt definite astfel:

- dacă $R \in \mathbf{R}$, $ar(R) = n$ și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $R(t_1, \ldots, t_n)$ este formulă atomică.

Formulele lui $\mathcal{L}$ sunt definite astfel:

- orice formulă atomică este o formulă
- dacă φ este o formulă, atunci $\neg\varphi$ este o formulă
- dacă φ și ψ sunt formule, atunci $\varphi \vee \psi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ sunt formule
- dacă φ este o formulă și x este o variabilă, atunci $\forall x\, \varphi$, $\exists x\, \varphi$ sunt formule

Logica de ordinul I - semantica

O structură este de forma $\mathcal{A} = (A, \mathbf{F}^{\mathcal{A}}, \mathbf{R}^{\mathcal{A}}, \mathbf{C}^{\mathcal{A}})$, unde

- A este o mulțime nevidă
- $\mathbf{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathbf{F}\}$ este o mulțime de operații pe A; dacă f are aritatea n, atunci $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$.
- $\mathbf{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathbf{R}\}$ este o mulțime de relații pe A; dacă R are aritatea n, atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^n$.
- $\mathbf{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathbf{C}\}$.

O interpretare a variabilelor lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$-interpretare) este o funcție $I : V \to A$.

Inductiv, definim interpretarea termenului t în $\mathcal{A}$ sub I notat $t_I^{\mathcal{A}}$.

Inductiv, definim când o formulă este adevărată în $\mathcal{A}$ în interpretarea I notat $\mathcal{A}, I \vDash \varphi$. În acest caz spunem că $(\mathcal{A}, I)$ este model pentru φ.

O formulă φ este adevărată într-o structură $\mathcal{A}$, notat $\mathcal{A} \vDash \varphi$, dacă este adevărată în $\mathcal{A}$ sub orice interpretare. Spunem că $\mathcal{A}$ este model al lui φ.

O formulă φ este adevărată în logica de ordinul I, notat $\vDash \varphi$, dacă este adevărată în orice structură. O formulă φ este validă dacă $\vDash \varphi$.

O formulă φ este satisfiabilă dacă există o structură $\mathcal{A}$ și o $\mathcal{A}$-interpretare I astfel încât $\mathcal{A}, I \vDash \varphi$.

Consecință logică

Definiție

O formulă φ este o consecință logică a formulelor $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, notat

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vDash \varphi,$$

dacă pentru orice structură $\mathcal{A}$

$$\text{dacă } \mathcal{A} \vDash \varphi_1 \text{ și } \ldots \text{ și } \mathcal{A} \vDash \varphi_n, \text{ atunci } \mathcal{A} \vDash \varphi$$

Problemă semidecidabilă!

Nu există algoritm care să decidă mereu dacă o formula este sau nu consecință logică a altei formule în logica de ordinul I!

Formule echivalente

- Fie φ și ψ două formule. Notăm prin

$$\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \psi$$

faptul că $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, adică φ și ψ au aceleași modele.

Exemplu

Dacă P este un simbol de relație de aritate 1 și x și y sunt variabile distincte, atunci $\forall x\, P(x) \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} \forall y\, P(y)$ și $P(x) \mathrel{\text{⫤}\!\!\models} P(y)$

Propoziție

O formulă φ este validă dacă și numai dacă $\neg\varphi$ nu este satisfiabilă.

Pentru a verifica validitatea/satisfiabilitatea unei formule o vom prelucra sintactic, rezultatele ulterioare necesitând forme particulare.

Variabile libere. Variabile legate. Enunțuri

Apariții libere sau legate

Fie φ o formulă și $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ.

- Orice apariție a unei variabile x într-o formula $\forall x\, \varphi$ sau $\exists x\, \varphi$ se numește legată. Celelalte apariții se numesc libere.

Exemplu

Fie limbajul $\mathcal{L}_r$ cu un singur simbol de relație R de aritate 2.

Fie următoarea formulă

$$\forall y\, \underline{(\forall y\, \underline{(R(y,x) \vee R(y,z))} \to \forall x\, \underline{R(x,y)})}$$

- Prima aparitie a lui x este liberă,
- dar a doua apariție a lui x este legată de apariția lui $\forall x$.
- Primele două apariții ale lui y sunt legate de a doua apariție a lui $\forall y$,
- iar a treia apariție a lui y este legată de prima apariție a lui $\forall y$.
- z este liberă.

Forma rectificată

- O formulă φ este în formă rectificată dacă:
  1. nici o variabilă nu apare și liberă și legată
  2. cuantificatori distincți leagă variabile distincte
- Pentru orice formulă φ există o formulă φ^r în formă rectificată astfel încât $\varphi \mathrel{\text{⫤}\!\models} \varphi^r$.
- Intuitiv, forma rectificată a unei formule se obține prin redenumirea variabilelor astfel încât să nu apară conflicte.

Exemplu

$$\forall x\, P(x) \land \exists x\, \forall y\, R(x,y) \land S(x) \mathrel{\text{⫤}\!\models} \forall x\, P(x) \land \exists x_1\, \forall y\, R(x_1,y) \land S(x_2)$$

În continuare vom presupune că
toate formulele sunt în formă rectificată.

Variabile libere. Variabile legate. Enunțuri

Fie φ o formulă și $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ.

- Variabilele libere ale unei formule φ sunt variabilele care nu sunt cuantificate.
- Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită prin inducție după formule:

$$\begin{array}{lcll} FV(\varphi) & = & Var(\varphi), & \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică} \\ FV(\neg\varphi) & = & FV(\varphi) & \\ FV(\varphi \circ \psi) & = & FV(\varphi) \cup FV(\psi), & \text{dacă } \circ \in \{\rightarrow, \vee, \wedge\} \\ FV(\forall x\, \varphi) & = & FV(\varphi) - \{x\} & \\ FV(\exists x\, \varphi) & = & FV(\varphi) - \{x\} & \end{array}$$

- O variabilă $v \in Var(\varphi)$ care nu este liberă se numește legată în φ.
- Un enunț este o formulă fără variabile libere.
- Pentru orice structură $\mathcal{A}$ și orice enunț φ, o $\mathcal{A}$-interpretare I nu joacă niciun rol în a determina dacă $\mathcal{A}, I \vDash \varphi$.

Variabile libere. Varibile legate. Enunțuri

Exemplu

Fie limbajul $\mathcal{L}_r$ cu un singur simbol de relație R de aritate 2.

Care din următoarele formule sunt enunțuri?

1. $\forall x \, \forall y \, R(x, y)$ - enunț
2. $\forall x \, \forall y (R(x, y) \vee R(x, z))$
3. $\forall x \, \forall y (R(x, y) \vee \forall z \, R(x, z))$ - enunț
4. $\forall x \, R(x, y)$

Enunțuri

Fie φ o formulă și $FV(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Propozitie

Pentru orice structură $\mathcal{A}$ avem

$$\mathcal{A} \vDash \varphi \text{ dacă și numai dacă } \mathcal{A} \vDash \forall x_1 \cdots \forall x_n\, \varphi.$$

Demonstrație

Exercițiu!

A verifica validitatea unei formule revine la
a verifica validitatea enunțului asociat.

Substituții

- Substituțiile înlocuiesc variabilele libere cu termeni.
- O substituție aplicată unui termen întoarce un alt termen.
- Ce se întâmpla când aplicăm o substituție unei formule?
  - Fie φ formula $P(z,z) \wedge \exists y\,(\neg P(x,y))$
  - $\{x \leftarrow y\}\varphi$ este $P(z,z) \wedge \exists y\,(\neg P(y,y))$

  Atenție! substituțiile afectează satisfiabilitatea formulei.

  - Fie φ o formulă și $t_1, \ldots, t_n$ termeni care nu conțin variabile din φ. Notăm $\varphi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$ formula obținută din φ substituind toate aparițiile libere ale lui $x_1, \ldots, x_n$ cu $t_1, \ldots, t_n$.

$$\varphi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n] = \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}\varphi$$

Forma prenex

Forma prenex

O formulă prenex este o formulă de forma

$$Q_1x_1\, Q_2x_2 \ldots Q_nx_n\, \varphi$$

unde $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile distincte și φ nu conține cuantificatori.

Exemplu

Fie R este un simbol de relație de aritate 2. Formula

$$\forall x\, \exists y\, \forall z((R(x,y) \vee \neg R(x,z)) \wedge R(x,x))$$

este în formă prenex.

Teorema de formă prenex

Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă prenex astfel încât $\varphi \mathrel{\text{⫤⊨}} \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Cum calculăm forma prenex?

- Se înlocuiesc $\rightarrow$ și $\leftrightarrow$:

$$\varphi \rightarrow \psi \quad \boxminus \quad \neg\varphi \vee \psi$$
$$\varphi \leftrightarrow \psi \quad \boxminus \quad (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi)$$

- Se aplică următoarele echivalențe:

$$\neg\exists x\, \neg\varphi \quad \boxminus \quad \forall x\, \varphi \qquad\qquad \forall x\, \varphi \wedge \forall x\, \psi \quad \boxminus \quad \forall x\, (\varphi \wedge \psi)$$
$$\neg\forall x\, \neg\varphi \quad \boxminus \quad \exists x\, \varphi \qquad\qquad \exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi \quad \boxminus \quad \exists x\, (\varphi \vee \psi)$$

$$\neg\exists x\, \varphi \quad \boxminus \quad \forall x\, \neg\varphi \qquad\qquad \forall x\, \forall y\, \varphi \quad \boxminus \quad \forall y\, \forall x\, \varphi$$
$$\neg\forall x\, \varphi \quad \boxminus \quad \exists x\, \neg\varphi \qquad\qquad \exists x\, \exists y\, \varphi \quad \boxminus \quad \exists y\, \exists x\, \varphi$$

$$\forall x\, \varphi \vee \psi \quad \boxminus \quad \forall x\, (\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$
$$\forall x\, \varphi \wedge \psi \quad \boxminus \quad \forall x\, (\varphi \wedge \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$
$$\exists x\, \varphi \vee \psi \quad \boxminus \quad \exists x\, (\varphi \vee \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$
$$\exists x\, \varphi \wedge \psi \quad \boxminus \quad \exists x\, (\varphi \wedge \psi) \text{ dacă } x \notin FV(\psi)$$

Forma prenex

Exemplu

Fie R un simbol de relație de aritate 2.

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \forall x\, \neg(\exists y\, R(x,y) \to \exists x\, R(x,y))\\
&\mathrel{\text{H}} \forall x\, \neg(\exists v\, R(x,v) \to \exists z\, R(z,y))\\
&\mathrel{\text{H}} \forall x\, \neg(\neg\exists v\, R(x,v) \vee \exists z\, R(z,y))\\
&\mathrel{\text{H}} \forall x\, (\exists v\, R(x,v) \wedge \neg\exists z\, R(z,y))\\
&\mathrel{\text{H}} \forall x\, \exists v\, (R(x,v) \wedge \neg\exists z\, R(z,y))\\
&\mathrel{\text{H}} \forall x\, \exists v\, (R(x,v) \wedge \forall z\, \neg R(z,y))\\
&\mathrel{\text{H}} \forall x\, \exists v\, \forall z\, (R(x,v) \wedge \neg R(z,y))
\end{aligned}
$$

Forma Skolem

Forma Skolem

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul.

Skolemizarea este o procedură prin care se elimină cuantificatorii existențiali din formule de ordinul întâi în formă normală prenex, prin introducere de noi simboluri de funcții/constante, numite simboluri de funcții/constante Skolem.

În continuare φ este un enunț în formă prenex:

$$\varphi = Q_1 x_1 \, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \, \theta,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile distincte două câte două și θ este formulă liberă de cuantificatori.

Vom asocia lui φ un enunț universal φ^{sk} într-un limbaj extins $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$.

- Un enunț se numește universal dacă conține doar cuantificatori universali.

Forma Skolem

Fie φ enunț în formă prenex. Definim φ^{sk} și $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$ astfel:

- dacă φ este liberă de cuantificatori, atunci $\varphi^{sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \mathcal{L}$,
- dacă φ este universală, atunci $\varphi^{sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \mathcal{L}$,
- dacă $\varphi = \exists x\, \psi$ atunci introducem un nou simbol de constantă c și considerăm $\varphi^1 = \psi[x/c]$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$.
- dacă $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \exists x\, \psi$ atunci introducem un nou simbol de funcție f de aritate k și considerăm $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$,

$$\varphi^1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k\, \psi[x/f(x_1 \ldots x_k)]$$

În ambele cazuri, φ^1 are cu un cuantificator existențial mai puțin decât φ. Dacă φ^1 este liberă de cuantificatori sau universală, atunci $\varphi^{sk} = \varphi^1$. Dacă φ^1 nu este universală, atunci formăm $\varphi^2, \varphi^3, \ldots$, până ajungem la o formulă universală și aceasta este φ^{sk}.

Definiție

φ^{sk} este o formă Skolem a lui φ.

Forma Skolem

Exemplu

Fie P un simbol de relație de aritate 1 și $\varphi = \exists x\, P(x)$.
Atunci

$$\varphi^1 = (P(x))[x/c] = P(c),$$

unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț liber de cuantificatori, rezultă că $\varphi^{sk} = \varphi^1 = P(c)$.

Exemplu

Fie R un simbol de relație de aritate 3 și $\varphi = \exists x\, \forall y\, \forall z\, R(x, y, z)$. Atunci

$$\varphi^1 = (\forall y\, \forall z\, R(x, y, z))[x/c] = \forall y\, \forall z\, R(c, y, z),$$

unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{sk} = \varphi^1 = \forall y\, \forall z\, R(c, y, z)$.

Forma Skolem

Exemplu

Fie P un simbol de relatie de aritate 2 și $\varphi = \forall y\, \exists z\, P(y,z)$. Atunci

$$\varphi^1 = (\forall y\, P(y,z))[z/f(y)] = \forall y\, P(y, f(y))$$

unde f este un simbol nou de funcție unară. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{sk} = \varphi^1 = \forall y\, P(y, f(y))$.

Forma Skolem

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj și $P, R \in \mathbf{R}$, $f \in \mathbf{F}$, $ari(P) = ari(R) = 2$ și $ari(f) = 1$. Determinați forma Skolem pentru:

$$\varphi := \forall y\, \exists z\, \forall u\, \exists v (R(y, z) \wedge P(f(u), v)).$$

$$\begin{aligned}
\varphi^1 &= \forall y\ (\forall u\, \exists v\, (R(y, z) \wedge P(f(u), v)))[z/g(y)]) \\
&= \forall y\, \forall u\, \exists v\, (R(y, g(y)) \wedge P(f(u), v)), \\
&\quad \text{unde } g \text{ este un nou simbol de funcție unară} \\
\varphi^2 &= \forall y\, \forall u\, (R(y, g(y)) \wedge P(f(u), v))[v/h(y, u)] \\
&= \forall y\, \forall u\, (R(y, g(y)) \wedge P(f(u), h(y, u))), \\
&\quad \text{unde } h \text{ este un nou simbol de funcție binară.}
\end{aligned}$$

Deoarece φ^2 este un enunț universal, rezultă că

$$\varphi^{sk} = \varphi^2 = \forall y\, \forall u\, (R(y, g(y)) \wedge P(f(u), h(y, u))).$$

Forma Skolem

Teorema de formă Skolem

Fie φ un enunț în formă prenex.

1. $\models \varphi^{sk} \to \varphi$, deci $\varphi^{sk} \models \varphi$ în $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$.
2. φ este satisfiabilă dacă și numai dacă φ^{sk} este satisfiabilă.

Demonstrație [schiță]

1. Folosind următoarele proprietăți

   $\models \varphi(x/t) \to \exists x\, \varphi$

   $\models \varphi$ implică $\models \forall x\, \varphi$ și

   $\models \forall x\, (\varphi \to \psi) \to (\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi)$

   putem demonstra că $\models \varphi^1 \to \varphi$, $\models \varphi^2 \to \varphi^1$, etc.
2. "$\Leftarrow$" Se aplică (1).

   "$\Rightarrow$" exercițiu. $\square$

Forma Skolem

Observație

În general, φ și φ^{sk} nu sunt logic echivalente ca enunțuri în $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$.

Exemplu

Fie $\mathcal{L} = \{R\}$ unde R este simbol de relație de aritate 2 și $\varphi = \forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2)$.

Atunci $\varphi^{sk} = \forall v_1 R(v_1, f(v_1))$ (unde f este un nou simbol de funcție unară) și $\mathcal{L}^{sk}(\varphi) = \{f, R\}$.

Fie $\mathcal{L}^{sk}(\varphi)$-structura $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, <, f^{\mathcal{A}})$, unde $f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \varphi$, deoarece pentru orice număr întreg m există un număr întreg n astfel încât $m < n$. Pe de altă parte, $\mathcal{A} \not\vDash \varphi^{sk}$, deoarece pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, avem că $n \geq f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$. $\square$

- Cercetarea validității poate fi redusă la cercetarea satisfiabilității.
- Cercetarea satisfiabilității unei formule poate fi redusă la cercetarea satisfiabilității unui enunț în forma Skolem.

Vom arăta că pentru a verifica validitatea/satisfiabilitatea este suficient să ne uităm la o singură structură.

Modele Herbrand

Universul Herbrand

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I.

- Presupunem că are cel puțin un simbol de constantă!
- Dacă nu are, adăugăm un simbol de constantă.

Universul Herbrand este mulțimea $T_{\mathcal{L}}$ a tututor termenilor fără variabile.

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție f de aritate 2 și două simboluri de constantă a și b.

Universul Herbrand pentru limbajul $\mathcal{L}$ este mulțimea:

$$a, b, f(a, b), f(f(a, b), b), f(f(a, a), f(b, b)), \dots$$

Structură Herbrand

O structură Herbrand este o structură $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{R}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$, unde

- pentru orice simbol de constantă c, $c^{\mathcal{H}} = c$
- pentru orice simbol de funcție f de aritate n,
  $f^{\mathcal{H}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$

Atenție! Într-o structură Herbrand nu fixăm o definiție pentru relații: pentru orice simbol de relație R de aritate n, $R^{\mathcal{H}}(t_1, \ldots, t_n) \subseteq (T_{\mathcal{L}})^n$

Structură Herbrand

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție f de aritate 1, un simbol de constantă a și un simbol de relație R de aritate 2.

O structură Herbrand $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{R}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$ unde

- $T_{\mathcal{L}} = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$
- $a^{\mathcal{H}} = a \in T_{\mathcal{L}}$
- $f_{\mathcal{H}}^{T}(t) = f(t)$
- $R^{\mathcal{H}} = \{(a, a), (f(a), f(a)), (f(f(a)), f(f(a))), \ldots\}$

Model Herbrand

- O interpretare Herbrand este o interpretare $H : V \to T_{\mathcal{L}}$
- O structură Herbrand $\mathcal{H}$ este model al unei formule φ dacă $\mathcal{H} \vDash \varphi$. În acest caz spunem că $\mathcal{H}$ este model Herbrand al lui φ.

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție f de aritate 1, un simbol de constantă a și un simbol de relație R de aritate 2.

O structură Herbrand $\mathcal{H} = (T_{\mathcal{L}}, \mathbf{F}^{\mathcal{H}}, \mathbf{R}^{\mathcal{H}}, \mathbf{C}^{\mathcal{H}})$ unde

- $T_{\mathcal{L}} = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$
- $a^{\mathcal{H}} = a \in T_{\mathcal{L}}$
- $f_{\mathcal{H}}^{T}(t) = f(t)$
- $R^{\mathcal{H}} = \{(a, a), (f(a), f(a)), (f(f(a)), f(f(a))), \ldots\}$

$\mathcal{H} \vDash \forall x\, R(x, x)$.

Model Herbrand

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I cu un simbol de funcție f de aritate 1, un simbol de constantă a și un simbol de relație R de aritate 2.

O structură Herbrand $\mathcal{H} = (T_\mathcal{L}, \mathbf{F}^\mathcal{H}, \mathbf{R}^\mathcal{H}, \mathbf{C}^\mathcal{H})$ unde

- $T_\mathcal{L} = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$
- $a^\mathcal{H} = a \in T_\mathcal{L}$
- $f_\mathcal{H}^T(t) = f(t)$
- $R^\mathcal{H} = \{(a, f(a)), (f(a), f(f(a))), (f(f(a)), f(f(f(a)))), \ldots\}$

$\mathcal{H} \not\models \forall x\, R(x, x)$.

Model Herbrand

Exemplu

- Considerăm structura Herbrand în care toate simbolurile de relație sunt adevărate peste tot, adică
- pentru orice simbol de relație R de aritate n, $R^{\mathcal{H}} = (T_{\mathcal{L}})^n$.
- Această structură este model pentru orice mulțime de formule atomice.
- Exercițiu: De ce?

Interpretări

Fie φ este o formulă, $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile și $x \in V$.

Reamintim că $\varphi[x/t]$ este formula obținută înlocuind în φ toate aparițiile libere ale lui x cu t, i.e. $\varphi[x/t] = \{x \leftarrow t\}\varphi$.

Propoziția 1

Fie $\mathcal{A}$ o structură, $I : V \to A$ o interpretare și $a = t_I^{\mathcal{A}}$. Atunci

1. pentru orice termen u avem $u[x/t]_I^{\mathcal{A}} = u_{I_{x \leftarrow a}}^{\mathcal{A}}$
2. pentru orice formulă φ avem

$$\mathcal{A}, I \vDash \varphi[x/t] \text{ dacă și numai dacă } \mathcal{A}, I_{x \leftarrow a} \vDash \varphi$$

Intuitiv, a schimba evaluarea I atribuind variabilei x valoarea $a \in A$ este același lucru cu a înlocui variabila x cu un termen t a cărui interpretare prin I este a.

Interpretări Herbrand

Propoziția 2

Fie $\mathcal{H}$ o structură Herbrand, $H : V \to T_{\mathcal{L}}$ o interpretare Herbrand, $x \in V$ și $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile. Sunt adevărate:

1. $t_H^{\mathcal{H}} = t$
2. $\mathcal{H}, H \vDash \varphi[x/t]$ dacă și numai dacă $\mathcal{H}, H_{x \leftarrow t} \vDash \varphi$

Demonstrație

1. prin inducție structurală pe termeni.
2. Următoarele echivalențe sunt adevărate

$$\mathcal{H}, H \vDash \varphi[x/t] \text{ ddacă } \mathcal{H}, H_{x \leftarrow t_H^{\mathcal{H}}} \vDash \varphi \text{ ddacă } \mathcal{H}, H_{x \leftarrow t} \vDash \varphi$$

Prima echivalență rezultă din Propoziția 1, iar a doua rezultă din punctul 1.

Teorema lui Herbrand

Teorema lui Herbrand

Fie $n \geq 0$ și $\varphi = \forall x_k \ldots \forall x_1 \, \psi$ un enunț în forma Skolem.
Atunci φ are un model dacă și numai dacă are un model Herbrand.

Demonstrație

Dacă φ are un model Herbrand atunci este, evident, satisfiabilă. Vom demonstra afirmația inversă.

Fie $\mathcal{A}$ un model pentru φ, adică $\mathcal{A} \vDash \varphi$. Vrem să construim un model Herbrand $\mathcal{H}$ pentru φ, ceea ce revine la a da o interpretare pentru simbolurile de relații.

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

Dacă $R \in \mathbf{R}$ și $ari(R) = n$ definim

$$(t_1, \ldots, t_n) \in R^{\mathcal{H}} \text{ dacă și numai dacă } \mathcal{A} \vDash R(t_1, \ldots, t_n) \qquad (*)$$

Demonstrăm prin inducție după $k \geq 0$ că

oricare ar fi $\varphi = \forall x_k \ldots \forall x_1\, \psi$ un enunț în forma Skolem,
$\mathcal{A} \vDash \varphi$ implică $\mathcal{H} \vDash \varphi$

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- Pasul de bază $k = 0$. În acest caz $\varphi = \psi$ și φ nu are variabile libere. Deci φ este formată din formule atomice care conțin doar termeni fără variabile. Aplicând $(*)$ rezultă că $\mathcal{A} \vDash \varphi$ implică $\mathcal{H} \vDash \varphi$.

- Presupunem afirmația adevărată pentru $k-1$ și o demonstrăm pentru k. Dacă notăm $\alpha = \forall x_{k-1} \ldots \forall x_1 \psi$ atunci $\varphi = \forall x_k \alpha$.

  Observăm că α nu satisface ipoteza de inducție deoarece poate conține x_k ca variabilă liberă.

  Fie $t \in T_{\mathcal{L}}$ un termen fără variabile. Observăm că $\alpha[x_k/t]$ este enunț în formă Skolem, deci $\mathcal{A} \vDash \alpha[x_k/t]$ implică $\mathcal{H} \vDash \alpha[x_k/t]$ din ipoteza de inducție.

Teorema lui Herbrand

Demonstrație (cont.)

- $\mathcal{A} \vDash \varphi$ implică
- $\mathcal{A}, I \vDash \varphi$ pentru orice interpretare I, ceea ce implică
- $\mathcal{A}, I_{x_k \leftarrow a} \vDash \alpha$ pentru orice $a \in A$. Aplicând Propoziția 1 obținem
- $\mathcal{A}, I \vDash \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Deoarece I a fost o interpretare arbitrară, am demonstrat că
- $\mathcal{A} \vDash \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$.
- Aplicând ipoteza de inducție obținem
- $\mathcal{H} \vDash \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$, adică
- $\mathcal{H}, H \vDash \alpha[x_k/t]$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$ și orice interpretarea H.
- Folosind Propoziția 2 obținem
- $\mathcal{H}, H_{x_k \leftarrow t} \vDash \alpha$ pentru orice $t \in T_{\mathcal{L}}$ și orice interpretare H, deci
- $\mathcal{H}, H \vDash \forall x_k\, \alpha$ pentru orice interpretare H, adică $\mathcal{H} \vDash \varphi$ $\square$

Teorema lui Herbrand

Teorema lui Herbrand

Fie $n \geq 0$ și $\varphi = \forall x_k \ldots \forall x_1 \, \psi$ un enunț în forma Skolem.
Atunci φ are un model dacă și numai dacă are un model Herbrand.

Teorema lui Herbrand reduce problema satisfiabilității la găsirea unui model Herbrand.

Teorema lui Herbrand

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj cu $\mathbf{R} = \{P, R\}$, $\mathbf{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ și $ari(P) = ari(R) = 1$.
Cercetați satisfiabilitatea formulelor:

- $\varphi = \forall x \, \forall y \, (P(x) \land R(y) \to P(y))$

  Știm că este suficient să găsim un model Herbrand.

  Considerăm structura Herbrand $\mathcal{H}$ cu
  - $T_{\mathcal{L}} = \{c_1, c_2, c_3\}$
  - $P^{\mathcal{H}} = \{c_1\}$ și $R^{\mathcal{H}} = \{c_1\}$

  Se observă că $\mathcal{H} \vDash \varphi$, deci φ este satisfiabilă.

Teorema lui Herbrand

Exemplu (cont.)

- $\psi = (P(c_1) \to R(c_3)) \wedge (\neg P(c_1) \to P(c_2))$.
  Formulele atomice sunt asemănătoare variabilelor din calculul propozițional. Putem scrie interpretările Herbrand într-un tabel

$P(c_1)$	$R(c_3)$	$P(c_2)$	ψ
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
...	...	...	...

  Observăm că formula este adevărată într-o interpretare în care $P(c_2)$ este adevărată, iar $P(c_1)$ și $R(c_3)$ sunt false.

  Considerăm structura Herbrand $\mathcal{H}$ cu
  - $T_{\mathcal{L}} = \{c_1, c_2, c_3\}$
  - $P^{\mathcal{H}} = \{c_2\}$ și $R^{\mathcal{H}} = \{c_2\}$

  Se observă că $\mathcal{H} \vDash \psi$, deci ψ este satisfiabilă.

Teorema lui Herbrand

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj cu $\mathbf{R} = \{P, R\}$, $\mathbf{C} = \emptyset$ și $ari(P) = ari(R) = 1$. Cercetați validitatea formulei

$$\chi = \forall x \, \forall y \, \forall z \, (\neg(P(x) \to R(z)) \vee \neg(\neg P(x) \to P(y)))$$

- A cerceta validitatea lui χ este echivalent cu a cerceta satisfiabilitatea lui $\neg\chi$

$$\neg\chi = \exists x \, \exists y \, \exists z \, ((P(x) \to R(z)) \wedge (\neg P(x) \to P(y)))$$

- Determinăm forma Skolem: $\mathcal{L}^{sk} = \mathcal{L} \cup \{c_1, c_2, c_3\}$

$$(\neg\chi)^{sk} = (P(c_1) \to R(c_3)) \wedge (\neg P(c_1) \to P(c_2))$$

- Din exercițiul anterior știm că $(\neg\chi)^{sk}$ este satisfiabilă, deci $\neg\chi$ este satisfiabilă. În concluzie, χ nu este adevărată în logica de ordinul I, i.e $\not\models \chi$.

Universul Herbrand al unei formule

Fie φ un enunț în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi$.

- Definim $T(\varphi)$, universul Herbrand al formulei φ, astfel:
  - dacă c este o constantă care apare în φ atunci $c \in T(\varphi)$,
  - dacă φ nu conține nicio constantă atunci alegem o constantă arbitrară c și considerăm că $c \in T(\varphi)$,
  - dacă f este un simbol de funcție care apare în φ cu $ari(f) = n$ și $t_1, \ldots, t_n \in T(\varphi)$ atunci $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\varphi)$.

Exemplu

- pt. $\varphi_1 = \forall x \forall y (P(x) \wedge R(y) \rightarrow P(y))$ avem $T(\varphi_1) = \{c\}$
- pt. $\varphi_2 = \forall x(\neg P(x) \wedge P(f(c)))$ avem $T(\varphi_2) = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots\}$

Intuitiv, $T(\varphi)$ este mulțimea termenilor care se pot construi folosind simbolurile de funcții care apar în φ.

Expansiunea Herbrand a unei formule

Fie φ un enunț în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \psi$.

- Definim expansiunea Herbrand a lui φ astfel

$$\mathcal{H}(\varphi) = \{\psi[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n] \mid t_1, \ldots, t_n \in T(\varphi)\}$$

Exemplu

- $\varphi_1 = \forall x \, \forall y \, (P(x) \land R(y) \to P(y))$
  $T(\varphi_1) = \{c\}$
  $\mathcal{H}(\varphi_1) = \{P(c) \land R(c) \to P(c)\}$

- $\varphi_2 = \forall x(\neg P(x) \land P(f(c)))$
  $T(\varphi_2) = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots\}$
  $\mathcal{H}(\varphi_2) = \{\neg P(c) \land P(f(c)), \neg P(f(c)) \land P(f(c)), \neg P(f(f(c))) \land P(f(c)), \neg P(f(f(f(c)))) \land P(f(c)), \ldots\}$

Expansiunea Herbrand al unei formule

Fie φ un enunț în forma Skolem, adică $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \psi$.

Teoremă

Sunt echivalente:

- φ este satisfiabilă,
- φ are un model Herbrand $\mathcal{H}$ cu proprietatea că $\mathbf{R}^{\mathcal{H}} \subseteq T(\varphi)^n$ pentru orice relație $R \in \mathbf{R}$ cu $ari(R) = n$ care apare în φ,
- mulțimea de formule $\mathcal{H}(\varphi)$ este satisfiabilă.

Expansiunea Herbrand al unei formule

Exemplu

- $\varphi_1 = \forall x \forall y (P(x) \land R(y) \to P(y))$
  $T(\varphi_1) = \{c\}$
  $\mathcal{H}(\varphi_1) = \{P(c) \land R(c) \to P(c)\}$

  $\mathcal{H}(\varphi_1)$ este satisfiabilă: $P^{\mathcal{H}} = R^{\mathcal{H}} = \{c\}$

- $\varphi_2 = \forall x(\neg P(x) \land P(f(c)))$
  $T(\varphi_2) = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots\}$
  $\mathcal{H}(\varphi_2) = \{\neg P(c) \land P(f(c)), \neg P(f(c)) \land P(f(c)),$
  $\neg P(f(f(c))) \land P(f(c)), \neg P(f(f(f(c)))) \land P(f(c)), \ldots\}$

  $\mathcal{H}(\varphi_2)$ nu este satisfiabilă: conține formula $\neg P(f(c)) \land P(f(c))$.

Logica de ordinul I

- Cercetarea validității poate fi redusă la cercetarea satisfiabilității.
- Cercetarea satisfiabilității unei formule poate fi redusă la cercetarea satisfiabilității unui enunț în forma Skolem.
- Teorema lui Herbrand reduce verificarea satisfiabilitătii unui enunț în forma Skolem la verificarea satisfiabilității în universul Herbrand.
- În situații particulare Teorema lui Herbrand ne dă o procedură de decizie a satisfiabilității, dar acest fapt nu este adevărat în general:

  dacă limbajul $\mathcal{L}$ conține cel putin o constantă și cel puțin un simbol de funcție f cu $ari(f) \geq 1$ atunci universul Herbrand $T_{\mathcal{L}}$ este infinit.

Decidabilitate și semi-decidabilitate

Probleme decidabile și semi-decidabile

- O problemă de decizie este o problemă cu răspuns binar T/F.

  Este n număr prim?

- O problemă de decizie $\mathfrak{D}(x)$ este decidabilă dacă există un algoritm care, pentru orice intrare x, întoarce T când $\mathfrak{D}(x)$ este adevărată și F când $\mathfrak{D}(x)$ este falsă.

- O problemă de decizie $\mathfrak{D}(x)$ este semi-decidabilă (recursiv enumerabilă) dacă există un algoritm care, pentru orice intrare x, întoarce T când $\mathfrak{D}(x)$ este adevărată, dar este posibil să nu se termine când $\mathfrak{D}(x)$ este falsă.

  $\mathfrak{D}(n) =$ "n este număr prim" este decidabilă.

Problema validității [1]

Vom analiza problema validității în logica de ordinul I, adică:

$$\mathfrak{D}(\varphi) = \text{"}\varphi \text{ este validă"}$$

- În logica de ordinul I, problema validității $\mathfrak{D}(\varphi)$ este semi-decidabilă.
- În logica de ordinul I, problema validității $\mathfrak{D}(\varphi)$ nu este decidabilă.

[1] Referințe
M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science, 2009
http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html

Semi-decidabilitatea validității în logica de ordinul I

$$\mathfrak{D}(\varphi)\ ?$$

Teorema de compactitate - cazul propozițional

În calculul propozițional o mulțime de formule Γ este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

Corolar

Fie φ un enunț în forma Skolem (în logica de ordinul I) și $\mathcal{H}(\varphi)$ expansiunea Herbrand. Sunt echivalente:

- φ nu este satisfiabilă,
- există o submulțime finită a lui $\mathcal{H}(\varphi)$ care nu este satisfiabilă.

Semi-decidabilitatea validității în logica de ordinul I

$$\mathfrak{D}(\varphi)\ ?$$

Procedură de semi-decidabilitate pentru validitate

Intrare: φ enunț

1. se determina ψ forma Skolem pentru $\neg\varphi$ (ψ este $(\neg\phi)^{sk}$)
2. fie $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots\}$ o enumerare pentru $\mathcal{H}(\psi)$
3. pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$ execută
   dacă $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ nu este satisfiabilă atunci
   { **Ieșire:** φ este valid;
   stop }

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

- Problema corespondenței lui Post (PCP)

  Fie $\mathbf{P} = \{(w_1, w_1'), \ldots, (w_k, w_k')\}$ cu $w_i, w_i' \in \{0,1\}^+$. O soluție pentru $\mathbf{P}$ este o secvență de indici $i_1, i_2, \ldots, i_n$ cu $n \geq 1$ astfel încât

  $$w_{i_1} \cdots w_{i_n} = w'_{i_1} \cdots w'_{i_n}.$$

Exemplu

$\mathbf{P}$: $\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 101 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 10 \\ \hline 00 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 011 \\ \hline 11 \\ \hline\end{array}$

Secvența (1,3,2,3) este soluție:

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 101 \\ \hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline 011 \\ \hline 11 \\ \hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline 10 \\ \hline 00 \\ \hline\end{array}\begin{array}{|c|}\hline 011 \\ \hline 11 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{c} 101110011 \\ 101110011 \end{array}$$

- PCP este nedecidabiă (E.Post, 1946)

Nedecidabilitatea validității în logica de ordinul I

Teorema Church-Turing

Problema validității în logica de ordinul I este nedecidabilă.

Demonstrație (schiță)

Vom arăta că problema validității poate fi redusă la PCP:

fiind dată o problemă de corespondență $\mathbf{P} = \{(w_1, w_1'), \ldots, (w_k, w_k')\}$ *există o formulă* $\varphi_{\mathbf{P}}$ *astfel încât*

$$\mathbf{P} \text{ are o soluție dacă și numai dacă } \models \varphi_{\mathbf{P}}.$$

- În logica de ordinul I, problema validității este semi-decidabilă.
- În logica de ordinul I, problema validității nu este decidabilă.