PARTEA 3

Logică Matematică şi Computaţională

FMI · Denisa Diaconescu · An universitar 2018/2019 · ID

LOGICĂ PROPOZIŢIONALĂ

RECAP - SEMANTICA

Definiţia 1.8

O evaluare (sau interpretare) este o funcţie $e : V \to \{0,1\}$.

Teorema 1.9

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$ există o unică funcţie

$$e^+ : Form \to \{0,1\}$$

care verifică următoarele proprietăţi:

- $e^+(v) = e(v)$ pentru orice orice $v \in V$.
- $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in Form$,
- $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in Form$.

Fie φ o formulă şi Γ, Δ mulţimi de formule.

- O evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$.
  Notaţie: $e \vDash \varphi$.
- O evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \vDash \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$).
  Notaţie: $e \vDash \Gamma$.
- φ (Γ) este satisfiabilă dacă admite un model.
- φ este tautologie dacă orice evaluare este model al lui φ.
  Notaţie: $\vDash \varphi$.
- O formulă φ este consecinţă semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$.
  Notaţie: $\Gamma \vDash \varphi$.
- Δ este consecinţă semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta)$.
  Notaţie: $\Gamma \vDash \Delta$.
- Γ şi Δ sunt (logic) echivalente dacă $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$.
  Notaţie: $\Gamma \sim \Delta$.

FORMA NORMALĂ CONJUNCTIVĂ/DISJUNCTIVĂ

Definiţia 2.1

Un literal este o

- variabilă (caz în care spunem că este literal pozitiv) sau
- negaţia unei variabile (caz în care spunem că este literal negativ).

Exemplu.

- v_1, v_2, v_{10} literali pozitivi
- $\neg v_0, \neg v_{100}$ literali negativi

Definiţia 2.2

O formulă φ este în formă normală disjunctivă (FND) dacă φ este o disjuncţie de conjuncţii de literali.

φ este în FND ddacă $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Definiţia 2.3

O formulă φ este în formă normală conjunctivă (FNC) dacă φ este o conjuncţie de disjuncţii de literali.

φ este în FNC ddacă $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Exemple.

- $(v_0 \vee v_1) \wedge (v_3 \vee v_5) \wedge (\neg v_{20} \vee \neg v_{15} \vee \neg v_{34})$ este în FNC
- $(\neg v_9 \wedge v_1) \vee v_{24} \vee (v_2 \wedge \neg v_1 \wedge v_2)$ este în FND
- $v_1 \wedge \neg v_5 \wedge v_4$ este atât în FND cât şi în FNC
- $\neg v_{10} \vee v_{20} \vee v_4$ este atât în FND cât şi în FNC
- $(v_1 \vee v_2) \wedge ((v_1 \wedge v_3) \vee (v_4 \wedge v_5))$ nu este nici în FND, nici în FNC

Notaţie. Dacă L este literal, atunci $L^c := \begin{cases} \neg v & \text{dacă } L = v \in V \\ v & \text{dacă } L = \neg v. \end{cases}$

Propoziţia 2.4

(i) Fie φ o formulă în FNC, $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FND.

(ii) Fie φ o formulă în FND, $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FNC.

Demonstraţie.

(i) Aplicând Propoziţia 1.18, obţinem

$$\begin{aligned} \neg\varphi &\sim \neg \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right) \sim \bigvee_{i=1}^{n} \neg \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right) \\ &\sim \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} \neg L_{i,j} \right) \sim \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right). \end{aligned}$$

(ii) Exerciţiu. $\square$

Teorema 2.5
Orice formulă φ este echivalentă cu o formulă φ^{FND} în FND şi cu o formulă φ^{FNC} în FNC.

Algoritm pentru a aduce o formulă la FNC/FND:

Pasul 1. Se înlocuiesc implicaţiile şi echivalenţele, folosind:

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \quad \text{şi} \quad \varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi).$$

Pasul 2. Se înlocuiesc dublele negaţii, folosind $\neg\neg\psi \sim \psi$, şi se aplică regulile De Morgan pentru a înlocui

$$\neg(\varphi \vee \psi) \text{ cu } \neg\varphi \wedge \neg\psi \quad \text{şi} \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \text{ cu } \neg\varphi \vee \neg\psi.$$

Pasul 3.

Pentru FNC, se aplică distributivitatea lui $\vee$ faţa de $\wedge$, pentru a înlocui

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \text{ cu } (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \quad \text{şi} \quad (\psi \wedge \chi) \vee \varphi \text{ cu } (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi).$$

Pentru FND, se aplică distributivitatea lui $\wedge$ faţa de $\vee$, pentru a înlocui

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \text{ cu } (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \quad \text{şi} \quad (\psi \vee \chi) \wedge \varphi \text{ cu } (\psi \wedge \varphi) \vee (\chi \wedge \varphi).$$

Exemplu.

Considerăm formula $\varphi := (\neg v_0 \to \neg v_2) \to (v_0 \to v_2)$.

$$
\begin{array}{lll}
\varphi & \sim & \neg(\neg v_0 \to \neg v_2) \vee (v_0 \to v_2) \quad \text{Pasul 1} \\
& \sim & \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (v_0 \to v_2) \quad \text{Pasul 1} \\
& \sim & \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) \quad \text{Pasul 1} \\
& \sim & \neg(v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) \quad \text{Pasul 2} \\
& \sim & (\neg v_0 \wedge \neg\neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) \quad \text{Pasul 2} \\
& \sim & (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2 \quad \text{Pasul 2.}
\end{array}
$$

Putem lua $\varphi^{FND} := (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2$.

Pentru a obţine FNC, continuăm cu Pasul 3:

$$
\begin{array}{lll}
\varphi & \sim & (\neg v_0 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) \\
& \sim & (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2).
\end{array}
$$

Putem lua $\varphi^{FNC} := (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2)$. Se observă, folosind idempotenţa ($v \vee v \sim v$) şi comutativitatea ($v_1 \vee v_2 \sim v_2 \vee v_1$) lui $\vee$, că $\varphi^{FNC} \sim \neg v_0 \vee v_2$.

REZOLUŢIA

Problema satisfiabilităţii (SAT)

Fiind dată o formulă φ (în forma normală conjunctivă) există o evaluare $e : Var \to \{0,1\}$ astfel încât $f_e(\varphi) = 1$?

Teorema Cook-Levin

SAT este o problemă NP-completă.

- Rezoluţia propoziţională este o regula de deducţie pentru calculul propoziţional clasic.
- Multe demonstratoare automate şi SAT-solvere au la bază rezoluţia.
- Utilizând rezoluţia se poate construi un demonstrator automat corect şi complet pentru calculul propoziţional, fără alte teoreme şi reguli de deducţie.
- Limbajul PROLOG este bazat pe rezoluţie.

Rezoluţia este o metodă de verificare a satisfiabilităţii pentru formule în forma clauzală.

Definiţia 2.6

O clauză este o mulţime finită de literali:

$$C = \{L_1, \dots, L_n\}, \text{ unde } L_1, \dots, L_n \text{ sunt literali.}$$

Dacă $n = 0$, obţinem clauza vidă $\square := \emptyset$.

O clauză nevidă este considerată implicit o disjuncţie.

Definiţia 2.7

Fie C o clauză şi $e : V \to \{0, 1\}$. Spunem că e este model al lui C sau că e satisface C şi scriem $e \vDash C$ dacă există $L \in C$ a.î. $e \vDash L$.

Definiţia 2.8

O clauză C se numeşte

(i) satisfiabilă dacă are un model.

(ii) validă dacă orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui C.

Definiţia 2.9

O clauză C este trivială dacă există un literal L a.î. $L, L^c \in C$.

Propoziţia 2.10

(i) Orice clauză nevidă este satisfiabilă.

(ii) Clauza vidă $\square$ este nesatisfiabilă.

(iii) O clauză este validă ddacă este trivială.

Demonstraţie. Exerciţiu.

Fie $\mathcal{S} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ este o mulţime de clauze.

Dacă $m = 0$, obţinem mulţimea vidă de clauze $\emptyset$.

$\mathcal{S}$ este considerată implicit ca o formulă în FNC: conjuncţie de disjuncţii ale literalilor din fiecare clauză.

Definiţia 2.11

Fie $e : V \to \{0, 1\}$. Spunem că e este model al lui $\mathcal{S}$ sau că e satisface $\mathcal{S}$ şi scriem $e \vDash \mathcal{S}$ dacă $e \vDash C_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Definiţia 2.12

$\mathcal{S}$ se numeşte

(i) satisfiabilă dacă are un model.

(ii) validă dacă orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui $\mathcal{S}$.

Propoziţia 2.13

- Dacă $\mathcal{S}$ conţine clauza vidă $\square$, atunci $\mathcal{S}$ nu este satisfiabilă.
- $\emptyset$ este validă.

Exemplu.

Arătăm că $\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$ este satisfiabilă.

Considerăm $e : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e(v_1) = e(v_2) = 1$. Atunci $e \vDash \mathcal{S}$.

Exemplu.

Arătăm că $\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{v_3\}\}$ nu este satisfiabilă.

Presupunem că $\mathcal{S}$ are un model e. Atunci $e(v_1) = e(v_3) = 1$ şi, deoarece $e \vDash \{\neg v_3, \neg v_2\}$, trebuie să avem $e(v_2) = 0$. Rezultă că $e(v_2) = e^+(\neg v_1) = 0$, deci e nu satisface $\{\neg v_1, v_2\}$. Am obţinut o contradicţie.

Unei formule φ în FNC îi asociem o mulţime de clauze $\mathcal{S}_\varphi$.

Fie

$$\varphi := \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right),$$

unde fiecare $L_{i,j}$ este literal. Pentru orice i, fie C_i clauza obţinută considerând toţi literalii $L_{i,j}, j \in \{1, \ldots, k_i\}$ distincţi.

Fie $\mathcal{S}_\varphi$ mulţimea tuturor clauzelor $C_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ distincte.

$\mathcal{S}_\varphi$ se mai numeşte şi forma clauzală a lui φ.

Propoziţia 2.14

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$, $e \vDash \varphi$ ddacă $e \vDash \mathcal{S}_\varphi$.

Unei mulţimi de clauze $\mathcal{S}$ îi asociem o formulă $\varphi_{\mathcal{S}}$ în FNC astfel:

- $C = \{L_1, \ldots, L_n\}, n \geq 1 \longmapsto \varphi_C := L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$.
- $\square \longmapsto \varphi_\square := v_0 \wedge \neg v_0$.

Fie $\mathcal{S} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ o mulţime nevidă de clauze. Formula asociată lui $\mathcal{S}$ este

$$\varphi_{\mathcal{S}} := \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_{C_i}.$$

Formula asociată mulţimii vide de clauze este $\varphi_\emptyset := v_0 \vee \neg v_0$.

Formula $\varphi_{\mathcal{S}}$ nu este unic determinată, depinde de ordinea în care se scriu elementele în clauze şi în $\mathcal{S}$, dar se observă imediat că: $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ implică $\varphi_{\mathcal{S}} \sim \varphi_{\mathcal{S}'}$.

Propoziţia 2.15

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$, $e \vDash \mathcal{S}$ ddacă $e \vDash \varphi_{\mathcal{S}}$.

Definiţia 2.16

Fie C_1, C_2 două clauze. O clauză R se numeşte rezolvent al clauzelor C_1, C_2 dacă există un literal L a.î. $L \in C_1$, $L^c \in C_2$ şi

$$R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\}).$$

Regula Rezoluţiei

$$Rez \qquad \frac{C_1, C_2}{(C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})}, \quad L \in C_1, L^c \in C_2$$

Notăm cu $Res(C_1, C_2)$ mulţimea rezolvenţilor clauzelor C_1, C_2.

Exemplu.
Fie $C_1 = \{v_1, v_2, \neg v_5\}$ şi $C_2 = \{v_1, \neg v_2, v_{100}, v_5\}$.

- Luăm $L := \neg v_5$. Atunci $L \in C_1$ şi $L^c = v_5 \in C_2$. Prin urmare, $R = \{v_1, v_2, \neg v_2, v_{100}\}$ este rezolvent al clauzelor C_1, C_2.
- Dacă luăm $L' := v_2$, atunci $L' \in C_1$ şi $L'^c = \neg v_2 \in C_2$. Prin urmare, $R' = \{v_1, \neg v_5, v_{100}, v_5\}$ este rezolvent al clauzelor C_1, C_2.

Exemplu.
Fie $C_1 = \{v_7\}$ şi $C_2 = \{\neg v_7\}$.
Atunci clauza vidă $\square$ este rezolvent al clauzelor C_1, C_2.

Fie $\mathcal{S}$ o mulţime de clauze.

Definiţia 2.17

O derivare prin rezoluţie din $\mathcal{S}$ sau o $\mathcal{S}$-derivare prin rezoluţie este o secvenţă $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de clauze a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiţii este satisfăcută:

(i) C_i este o clauză din $\mathcal{S}$;

(ii) există $j, k < i$ a.î. C_i este rezolvent al clauzelor C_j, C_k.

Definiţia 2.18

Fie C o clauză. O derivare prin rezoluţie a lui C din $\mathcal{S}$ este o $\mathcal{S}$-derivare prin rezoluţie $C_1, C_2, \ldots, C_n$ a.î. $C_n = C$.

Exemplu.
Fie

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3, v_4\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{\neg v_4\}\}.$$

O derivare prin rezoluţie a clauzei vide $\square$ din $\mathcal{S}$ este următoarea:

$$\begin{array}{lcll}
C_1 & = & \{\neg v_4\} & C_1 \in \mathcal{S} \\
C_2 & = & \{\neg v_2, \neg v_3, v_4\} & C_2 \in \mathcal{S} \\
C_3 & = & \{\neg v_2, \neg v_3\} & C_3 \text{ rezolvent al clauzelor } C_1, C_2 \\
C_4 & = & \{v_3\} & C_4 \in \mathcal{S} \\
C_5 & = & \{\neg v_2\} & C_5 \text{ rezolvent al clauzelor } C_3, C_4 \\
C_6 & = & \{\neg v_1, v_2\} & C_6 \in \mathcal{S} \\
C_7 & = & \{\neg v_1\} & C_7 \text{ rezolvent al clauzelor } C_5, C_6 \\
C_8 & = & \{v_1\} & C_8 \in \mathcal{S} \\
C_9 & = & \square & C_9 \text{ rezolvent al clauzelor } C_7, C_8.
\end{array}$$

Teorema 2.19
Fie $\mathcal{S}$ o mulţime de clauze. Dacă $\square$ se derivează prin rezoluţie din $\mathcal{S}$, atunci $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

Intrare: $\mathcal{S}$ mulţime nevidă de clauze netriviale.

$i := 1, \mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$

Pasul i.1. Fie x_i o variabilă care apare în $\mathcal{S}_i$. Definim

$$\mathcal{T}_i^1 := \{C \in \mathcal{S}_i \mid x_i \in C\}, \quad \mathcal{T}_i^0 := \{C \in \mathcal{S}_i \mid \neg x_i \in C\}.$$

Pasul i.2. Dacă $(\mathcal{T}_i^1 \neq \emptyset$ şi $\mathcal{T}_i^0 \neq \emptyset)$ atunci

$$\mathcal{U}_i := \{(C_1 \setminus \{x_i\}) \cup (C_0 \setminus \{\neg x_i\}) \mid C_1 \in \mathcal{T}_i^1, C_0 \in \mathcal{T}_i^0\}.$$

altfel $\mathcal{U}_i := \emptyset$.

Pasul i.3. Definim

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_{i+1} &:= \left(\mathcal{S}_i \setminus (\mathcal{T}_i^0 \cup \mathcal{T}_i^1)\right) \cup \mathcal{U}_i; \\ \mathcal{S}_{i+1} &:= \mathcal{S}'_{i+1} \setminus \{C \in \mathcal{S}'_{i+1} \mid C \text{ trivială}\}. \end{aligned}$$

Pasul i.4. Dacă $\mathcal{S}_{i+1} = \emptyset$ atunci $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.

altfel dacă $\square \in \mathcal{S}_{i+1}$ **atunci** $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

altfel $\{i := i + 1;$ go to Pasul i.1$\}$.

Exemplu.

Fie $\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$

$i := 1$, $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

P1.1 $x_1 := v_3$; $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$; $\mathcal{T}_1^0 := \{\{v_1, \neg v_3\}\}$.
P1.2 $\mathcal{U}_1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$.
P1.3 $\mathcal{S}_2' := \{\{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$; $\mathcal{S}_2 := \{\{v_2, v_1\}\}$.
P1.4 $i := 2$ and go to P2.1.

P2.1 $x_2 := v_2$; $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_2, v_1\}\}$; $\mathcal{T}_2^0 := \emptyset$.
P2.2 $\mathcal{U}_2 := \emptyset$.
P2.3 $\mathcal{S}_3 := \emptyset$.
P2.4 $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.

Exemplu.

Fie $\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{v_4\}\}$.

$i := 1, \mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

P1.1 $x_1 := v_1$; $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_1, v_3\}, \{v_1\}\}$; $\mathcal{T}_1^0 := \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}\}$.

P1.2 $\mathcal{U}_1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$.

P1.3 $\mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$.

P1.4 $i := 2$ and go to P2.1.

P2.1. $x_2 := v_2$; $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$; $\mathcal{T}_2^0 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}\}$.

P2.2 $\mathcal{U}_2 := \{\{v_3, \neg v_4, \neg v_3\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.

P2.3 $\mathcal{S}_3 := \{\{v_3\}, \{v_4\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.

P2.4 $i := 3$ and go to P3.1.

Exemplu. (continuare)

P3.1 $x_3 := v_3$; $\mathcal{T}_3^1 := \{\{v_3\}\}$; $\mathcal{T}_3^0 := \{\{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.
P3.2. $\mathcal{U}_3 := \{\{\neg v_4\}\}$. P3.3 $\mathcal{S}_4 := \{\{v_4\}, \{\neg v_4\}\}$.
P3.4 $i := 4$ and go to P4.1.

P4.1 $x_4 := v_4$; $\mathcal{T}_4^1 := \{\{v_4\}\}$; $\mathcal{T}_4^0 := \{\{\neg v_4\}\}$.
P4.2 $\mathcal{U}_4 := \{\square\}$. P4.3 $\mathcal{S}_5 := \{\square\}$.
P4.4 $\mathcal{S}$ nu este satisfiabilă.

RECAP - SIST. DEDUCTIV DE TIP HILBERT

Axiomele logice.

Mulţimea *Axm* a axiomelor lui *LP* constă în toate formulele de forma:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$

unde φ, ψ şi χ sunt formule.

Regula de deducţie.

Pentru orice formule φ, ψ,

din φ şi $\varphi \to \psi$ se inferă ψ (modus ponens sau (MP)):

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}$$

Fie Γ o mulţime de formule.

Definiţia 1.23

Γ-teoremele sunt formulele lui *LP* definite astfel:

(T0) Orice axiomă este Γ-teoremă.

(T1) Orice formulă din Γ este Γ-teoremă.

(T2) Dacă φ şi $\varphi \to \psi$ sunt Γ-teoreme, atunci ψ este Γ-teoremă.

$$
\begin{array}{lcl}
Thm(\Gamma) & := & \text{mulţimea } \Gamma\text{-teoremelor} \\
Thm & := & Thm(\emptyset) \\
\Gamma \vdash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ este } \Gamma\text{-teoremă} \\
\vdash \varphi & \Leftrightarrow & \emptyset \vdash \varphi \\
\Gamma \vdash \Delta & \Leftrightarrow & \Gamma \vdash \varphi \text{ pentru orice } \varphi \in \Delta.
\end{array}
$$

Definiţia 1.24

O formulă φ se numeşte teoremă a lui *LP* dacă $\vdash \varphi$.

Propoziţie 2.20
Pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formule φ, ψ,

$$\text{dacă } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \text{ şi } \Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi, \text{ atunci } \Gamma \vdash \varphi$$

Demonstraţie. Exerciţiu.

LEGĂTURA DINTRE SINTAXĂ ŞI SEMANTICĂ

Teorema de corectitudine (Soundness Theorem) 2.21
Orice Γ-teoremă este consecinţă semantică a lui Γ, adică,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vDash \varphi$$

pentru orice $\varphi \in Form$ şi $\Gamma \subseteq Form$.

Demonstraţie. Fie

$$\Sigma := \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$. Arătăm prin inducţie după Γ-teoreme.

- Axiomele sunt în Σ (exerciţiu).
- Evident, $\Gamma \subseteq \Sigma$.
- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens. Presupunem că $\varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma$, adică, $\Gamma \vDash \varphi$ şi $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$. Atunci obţinem că $\Gamma \vDash \psi$ (exerciţiu), adică, $\psi \in \Sigma$. □

Notaţii.

Pentru orice variabilă $v \in V$ şi orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$,

$$v^e = \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0. \end{cases}$$

Aşadar, $e^+(v^e) = 1$.

Pentru orice mulţime $W = \{x_1, \ldots, x_k\}$ de variabile, notăm

$$W^e = \{v^e \mid v \in W\} = \{x_1^e, x_2^e, \ldots, x_k^e\}.$$

Propoziţia 2.22

Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare. Pentru orice formulă φ,

(i) Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.

(ii) Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$.

Demonstraţie. Prin inducţie după formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $Var(\varphi)^e = \{v^e\}$ şi $e^+(v) = e(v)$.

  Dacă $e(v) = 1$, atunci $v^e = v$, deci, $\{v^e\} \vdash v$.

  Dacă $e(v) = 0$, atunci $v^e = \neg v$, deci, $\{v^e\} \vdash \neg v$.

- $\varphi = \neg\psi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi)$, deci $Var(\varphi)^e = Var(\psi)^e$.

  Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$, deci, conform ipotezei de inducţie pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.

  Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$, deci, conform ipotezei de inducţie pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \psi$. Deoarece $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$ (exerciţiu), putem aplica (MP) pentru a obţine $Var(\varphi)^e \vdash \neg\neg\psi = \neg\varphi$.
- $\varphi = \psi \to \chi$. (exerciţiu)

$\square$

Teorema de completitudine (Completeness Theorem) 2.23
Pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Se aplică Teorema de corectitudine pentru $\Gamma = \emptyset$.

"$\Leftarrow$" Fie φ o tautologie şi $Var(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Demonstrăm prin inducţie după k următoarea proprietate:

(*) pentru orice $k \leq n$, pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$, $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi$.

Pentru $k = n$, (*) ne dă $\vdash \varphi$.

$k = 0$. Fie $e : V \to \{0, 1\}$. Deoarece φ este tautologie, $e^+(\varphi) = 1$. Aplicând Propoziţia 2.22, obţinem că

$$Var(\varphi)^e = \{x_1^e, \ldots, x_n^e\} \vdash \varphi.$$

$k \Rightarrow k+1$. Presupunem că (*) este adevărată pentru k şi fie $e : V \to \{0,1\}$. Trebuie să arătăm că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. Considerăm evaluarea $e' := e_{x_{n-k} \leftarrow \neg e(x_{n-k})}$. Aşadar, $e'(v) = e(v)$ pentru orice $v \neq x_{n-k}$ şi

$$e'(x_{n-k}) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 1 \\ 1 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 0. \end{cases}$$

Rezultă că $x_i^{e'} = x_i^e$ pentru orice $i \in \{0, \ldots, n-k-1\}$ şi

$$x_{n-k}^{e'} = \begin{cases} \neg x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = x_{n-k} \\ x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = \neg x_{n-k}. \end{cases}$$

Din (*) pentru e şi e', obţinem

$$\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, x_{n-k}\} \vdash \varphi \text{ şi } \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, \neg x_{n-k}\} \vdash \varphi.$$

Aplicăm acum Propoziţia 2.20 cu $\Gamma := \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\}$ şi $\psi := x_{n-k}$ pentru a conclude că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. □

Propoziţia 2.24

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Presupunem că $\varphi \sim \psi$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

Demonstraţie. Observăm că

$$\begin{aligned} \varphi \sim \psi \quad & \Longleftrightarrow \quad \models \varphi \to \psi \text{ şi } \models \psi \to \varphi \\ & \qquad\ \text{(conform Propoziţiei 1.15)} \\ & \Longleftrightarrow \quad \vdash \varphi \to \psi \text{ şi } \vdash \psi \to \varphi \\ & \qquad\ \text{(conform Teoremei de completitudine).} \end{aligned}$$

"$\Rightarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Deoarece $\vdash \varphi \to \psi$, rezultă din Propoziţia 1.26.(ii) că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Aplicăm acum (MP) pentru a obţine că $\Gamma \vdash \psi$.

"$\Leftarrow$" Similar. $\square$

Fie Γ o mulţime de formule şi φ o formulă.

Notaţii.

$$
\begin{array}{lcl}
\Gamma \nvdash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este } \Gamma\text{-teoremă} \\
\nvdash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este teoremă} \\
\Gamma \nvDash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este consecinţă semantică a lui } \Gamma \\
\nvDash \varphi & \Leftrightarrow & \varphi \text{ nu este tautologie.}
\end{array}
$$

Definiţia 2.25

Fie Γ o mulţime de formule.

- Γ este consistentă dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \nvdash \varphi$.
- Γ este inconsistentă dacă nu este consistentă, adică, $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ.

Observaţie.

Fie Γ, Δ mulţimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

- Dacă Δ este consistentă, atunci şi Γ este consistentă.
- Dacă Γ este inconsistentă, atunci şi Δ este inconsistentă.

Propoziţia 2.26

(i) $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Mulţimea teoremelor este consistentă.

Demonstraţie.

(i) Dacă $\vdash \bot$, atunci, conform Teoremei de corectitudine, ar rezulta că $\vDash \bot$, o contradicţie. Aşadar $\nvdash \bot$, deci $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Aplicând Propoziţia 1.26.(iv) pentru $\Gamma = \emptyset$, obţinem că $Thm = Thm(Thm)$, adică, pentru orice φ,

$$\vdash \varphi \text{ ddacă } Thm \vdash \varphi.$$

Din (i) rezultă că Thm este consistentă. $\square$

Propoziţia 2.27

Pentru o mulţime de formule Γ sunt echivalente:

(i) Γ este inconsistentă.

(ii) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ şi $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iii) Există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ şi $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iv) $\Gamma \vdash \bot$.

Propoziţia 2.28

Fie Γ o mulţime de formule şi φ o formulă.

(i) $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă.

(ii) $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă.

Propoziţia 2.29

Fie Γ o mulţime de formule. Γ este inconsistentă ddacă Γ are o submulţime finită inconsistentă.

Un rezultat echivalent:

Propoziţia 2.30

Fie Γ o mulţime de formule. Γ este consistentă ddacă orice submulţime finită a lui Γ este consistentă.

Teorema 2.31
Pentru orice formulă φ,

$$\{\varphi\} \text{ este consistentă } \iff \{\varphi\} \text{ este satisfiabilă.}$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned}
\{\varphi\} \text{ este inconsistentă } &\iff \vdash \neg\varphi \\
&\ \text{conform Propoziţiei 2.28 (ii)} \\
&\iff \models \neg\varphi \\
&\ \text{conform Teoremei de completitudine} \\
&\iff \{\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\
&\ \text{(exerciţiu)}
\end{aligned}$$

Aşadar, $\{\varphi\}$ este consistentă $\iff$ $\{\varphi\}$ este satisfiabilă. $\square$

Teorema de completitudine tare - versiunea 1) 2.32

Pentru orice mulţime de formule Γ,

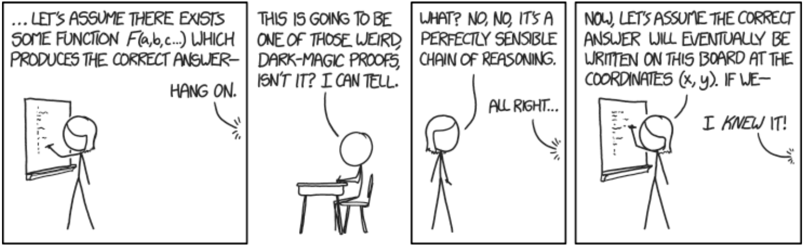
$$\Gamma \text{ este consistentă} \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Teorema de completitudine tare - versiunea 2) 2.33

Pentru orice mulţime de formule Γ şi orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi.$$

Baftă la examen!



Conţinutul tehnic al acestui curs se regăseşte în cursul de *Logică Matematică şi Computaţională* al prof. Laurenţiu Leuştean din anul universitar 2017/2018.

Comic-ul aparţine xkcd.