FMI, Info, 2018/2019, Anul I, ID
Logică matematică şi computaţională

Partea 1
Exerciţii

(S1.1) Fie T o mulţime şi $A, B, X \subseteq T$ cu $A \cap B = \emptyset$ şi $A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Să se arate că $X = A$.
Demonstraţie: Arătăm egalitatea prin dublă incluziune.

Fie întâi $x \in X$. Atunci $x \in B \cup X = A \cup (B \setminus X)$. Cum $x \in X$, $x \notin B \setminus X$, deci $x \in A$. Luăm acum $x \in A$. Atunci $x \in A \cup (B \setminus X) = B \cup X$. Cum $A \cap B = \emptyset$, $x \notin B$, deci $x \in X$. □

(S1.2) Fie $A = \{a, b, c, d\}$ şi $R = \{(a, b), (a, c), (c, d), (a, a), (b, a)\}$ o relaţie binară pe A. Care este compunerea $R \circ R$? Care este inversa R^{-1} a lui R? Care dintre relaţiile $R, R^{-1}, R \circ R$ poate fi relaţia subiacentă unei funcţii de la A la A?
Demonstraţie: Obţinem

$$\begin{aligned} R \circ R &= \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, a), (b, b), (b, c)\}, \\ R^{-1} &= \{(a, a), (a, b), (b, a), (c, a), (d, c)\}. \end{aligned}$$

Niciuna dintre relaţiile $R, R^{-1}, R \circ R$ nu poate descrie o funcţie de la A la A, deoarece

(i) $(a, b) \in R$ şi $(a, c) \in R$;

(ii) $(a, a) \in R^{-1}$ şi $(a, b) \in R^{-1}$;

(iii) nu există y astfel încât $(d, y) \in R \circ R$.

De asemenea, se observă că o relaţie "validă" ar avea patru elemente, fapt ce nu e valabil pentru niciuna din relaţiile de mai sus. □

(S1.3) Fie X o mulţime. Să se arate că nu există o funcţie surjectivă cu domeniul X şi codomeniul $\mathcal{P}(X)$.
Demonstraţie: Presupunem că ar exista, şi fie $f : X \to \mathcal{P}(X)$ surjectivă. Fie mulţimea

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Dat fiind că f este surjectivă, există $y \in X$ cu $f(y) = A$. Dar atunci: $y \in A \Leftrightarrow y \notin f(y) = A \Leftrightarrow y \notin A$ ceea ce este o contradicţie. $\square$

(S1.4) Daţi exemplu de familie de submulţimi ale lui $\mathbb{R}$, indexată, pe rând, după:

(i) $\mathbb{N}^*$;

(ii) $\mathbb{Z}$;

(iii) $\{2, 3, 4\}$.

Determinaţi reuniunea şi intersecţia fiecărei familii date ca exemplu.
Demonstraţie:

(i) (a) $A_n = \{n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \emptyset$.

(b) $B_1 = \{0\}, B_2 = \mathbb{N}^*, B_3 = \mathbb{Q}$ şi $B_n = \mathbb{R}$ pentru orice $n \geq 5$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \mathbb{R}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \emptyset$.

(c) $E_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = (-1, 1)$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = \{0\}$.

(d) $A_n = \{1\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{1\}$.

(e) $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{1\}$.

(ii) $C_1 = (-\infty, 0), C_2 = \{0\}, C_{-n} = \{3\}$ pentru orice $n \geq 0$, $C_n = \{7\}$ pentru orice $n \geq 3$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} C_n = (-\infty, 0] \cup \{3\} \cup \{7\}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} C_n = \emptyset$.

(iii) $D_2 = \{0\}, D_3 = \{2\}, D_4 = \{3\}$. Atunci $\bigcup_{x\in\{2,3,4\}} D_x = \{0, 2, 3\}$, $\bigcap_{x\in\{2,3,4\}} D_x = \emptyset$.

$\square$

(S1.5) Dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o familie de submulţimi ale unei mulţimi X, arătaţi următoarele (**legile lui De Morgan**):

(i) $C_X \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} C_X A_i$;

(ii) $C_X \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} C_X A_i$.

Demonstraţie:

(i) Fie $x \in X$. Atunci $x \in C_X \bigcup_{i\in I} A_i \iff x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că (există $i \in I$ a.î. $x \in A_i$) $\iff$

pentru orice $i \in I$, $x \notin A_i \iff$ pentru orice $i \in I$, $x \in C_X A_i \iff x \in \bigcap_{i\in I} C_X A_i$.

(ii) Fie $x \in X$. Atunci $x \in C_X \bigcap_{i\in I} A_i \iff x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că (pentru orice $i \in I$, $x \in A_i$) $\iff$ există $i \in I$ a.î. $x \notin A_i \iff$ există $i \in I$ a.î. $x \in C_X A_i \iff x \in \bigcup_{i\in I} C_X A_i$.

□

(S1.6) Daţi exemple, pe rând, de relaţii care:

(i) sunt reflexive şi tranzitive, dar nu sunt simetrice;

(ii) sunt reflexive şi simetrice, dar nu sunt tranzitive;

(iii) sunt simetrice şi tranzitive, dar nu sunt reflexive.

Demonstraţie: Notăm, pentru orice mulţime C, $\Delta_C := \{(x,y) \in C \times C \mid x = y\}$ (**relaţia diagonală**).

(i) $\leq$ pe $\mathbb{Z}$; $\leq$ pe $\mathbb{R}$; relaţia de divizibilitate pe $\mathbb{Z}$.

(ii) $R = \Delta_{\mathbb{Z}} \cup \{(7,8),(8,7),(8,9),(9,8)\}$ pe $\mathbb{Z}$. Nu este tranzitivă, deoarece $(7,8) \in R$ şi $(8,9) \in R$, dar $(7,9) \notin R$. Alt exemplu este $R' = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |x-y| \leq 1\}$ (R' nu este tranzitivă, pentru că $(1,2)$ şi $(2,3)$ sunt în R', dar $(1,3)$ nu este).

În general, o intuiţie potrivită pentru acest gen de relaţii este relaţia de prietenie între oameni (considerând că orice om este prieten cu sine). Doi oameni pot fi prieteni cu un al treilea fără să fie prieteni între ei. Pornind de la această idee, putem construi următorul exemplu "minimal" – luăm mulţimea $A := \{1,2,3\}$ şi relaţia R pe ea egală cu $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$.

(iii) $R = \Delta_{\mathbb{Z}} \setminus \{(7,7)\}$ pe $\mathbb{Z}$. Alt exemplu (tot pe $\mathbb{Z}$) este $R' = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid x \neq 0 \text{ şi } y \neq 0\}$.

Observăm, de asemenea, că pe orice mulţime nevidă relaţia vidă satisface condiţia (de ce, totuşi, relaţia vidă pe mulţimea vidă nu este un exemplu?). Un exemplu "minimal", dar nevid, este următorul: $A := \{1,2\}$, $R := \{(2,2)\}$.

□

(S1.7) Fie $R \subseteq A \times A$ o relaţie descrisă în fiecare situaţie de mai jos. Verificaţi, pe rând, dacă R este relaţie de ordine parţială, strictă sau totală sau relaţie de echivalenţă.

(i) $A = \mathbb{N}$ şi $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă $a \mid b$.

(ii) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ şi $(a, b)R(c, d)$ dacă şi numai dacă $a \leq b$ sau $b \leq d$.

(iii) $A = \mathbb{N}$ şi $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă $b = a$ sau $b = a + 1$.

(iv) A este mulţimea tuturor cuvintelor în limba engleză şi $(a, b) \in R$ dacă şi numai dacă a nu este mai lung ca b.

Demonstraţie:

(i) R este

(a) tranzitivă: Fie $(a, b) \in R$ şi $(b, c) \in R$, deci $a \mid b$ şi $b \mid c$. Rezultă că $a \mid c$, deci $(a, c) \in R$.

(b) reflexivă: Pentru orice $a \in \mathbb{N}$, avem că $a \mid a$, deci $(a, a) \in R$.

(c) antisimetrică: Presupunem că $(a, b) \in R$ şi $(b, a) \in R$, deci că $a \mid b$ şi $b \mid a$. Deoarece $a, b \in \mathbb{N}$, rezultă că $a = b$.

R nu este

(a) simetrică: avem că $(3, 6) \in R$, deoarece $3 \mid 6$. Pe de altă parte $6 \nmid 3$, prin urmare $(6, 3) \notin R$.

(b) totală: $2 \nmid 3$ şi $3 \nmid 2$. Aşadar, $(2, 3) \notin R$ şi $(3, 2) \notin R$.

Prin urmare, R este relaţie de ordine parţială, dar R nu este relaţie de ordine strictă sau totală şi nici relaţie de echivalenţă.

(ii) R este reflexivă, deoarece $b \leq b$, prin urmare $(a, b)R(a, b)$ pentru orice $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Aşadar, R nu este relaţie de ordine strictă. Observăm că R nu este

(a) simetrică: $(2, 2)R(4, 3)$, dar $((4, 3), (2, 2)) \notin R$.

(b) antisimetrică: $(3, 5)R(7, 2)$ (deoarece $3 \leq 5$) şi $(7, 2)R(3, 5)$ (deoarece $2 \leq 5$), dar $(3, 5) \neq (7, 2)$.

(c) tranzitivă: $(5, 4)R(5, 6)$ şi $(5, 6)R(3, 3)$, dar $((5, 4), (3, 3)) \notin R$.

Prin urmare, R nu este nici relaţie de ordine totală sau parţială şi nici relaţie de echivalenţă.

(iii) În acest caz, $R = \Delta_{\mathbb{N}} \cup \{(a, a+1) \mid a \in \mathbb{N}\}$. Este clar că R este reflexivă, deci R nu este o relaţie de ordine strictă. Se observă că R nu este tranzitivă: $(5,6) \in R$ şi $(6,7) \in R$, dar $(5,7) \notin R$. Prin urmare, R nu este nici relaţie de ordine totală sau parţială şi nici relaţie de echivalenţă.

(iv) R este reflexivă, deci R nu este o relaţie de ordine strictă. Observăm că R nu este

   (a) antisimetrică: dacă (a,b) şi (b,a) sunt în R, atunci a şi b au aceeaşi lungime, dar nu coincid neapărat. De exemplu, $a =$"do" şi $b =$"go".

   (b) simetrică: ("it", "and") $\in R$, dar ("and","it") $\notin R$.

   Prin urmare, R nu este nici relaţie de ordine totală sau parţială şi nici relaţie de echivalenţă.

$\square$

(S1.8) Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată şi $\emptyset \neq S \subseteq A$. Atunci:

(i) Dacă minimul lui S există, atunci acesta este unic.

(ii) Orice minim (maxim) al lui S este element minimal (maximal).

Demonstraţie:

(i) Vom presupune că există două valori minime şi vom demonstra că acestea sunt egale. Fie x minim al lui S, deci pentru orice $y \in S$, $x \leq y$. Fie x' minim al lui S, deci pentru orice $y' \in S$, $x' \leq y'$. Cum $x \leq y$ pentru orice $y \in S$, alegem $y = x'$. Rezultă că $x \leq x'$. Cum $x' \leq y'$ pentru orice $y' \in S$, alegem $y' = x$. Rezulă că $x' \leq x$. Atunci obţinem că $x' = x$, deci minimul este unic.
Se procedează asemănător pentru maxim.

(ii) Fie x minimul mulţimii S. Pentru a demonstra că x este element minimal, vom presupune că există cel puţin un element $t \in S$ a.î. $t \leq x$ şi vom arăta că $t = x$. Cum x este minim şi $t \in S$, rezultă că $x \leq t$. Prin urmare, $t = x$, deci x este element minimal al lui S.
Se procedează asemănător pentru maxim.

$\square$

(S1.9) Fie $D(n) = \{d \in \mathbf{N} |\ \ d|n\}$ şi $P(n) = \{d \in \mathbf{N} |\ \ d|n,\ d \neq 1,\ d \neq n\}$.
Demonstraţi că $(P(n), |)$ şi $(D(n), |)$ sunt mulţimi parţial ordonate. Enumeraţi elementele minimale, elementele maximale, minimul şi maximul (dacă există) pentru următoarele mulţimi: $P(12)$, $P(32)$, $P(72)$, $D(72)$.
Demonstraţie:

Definim relaţia de divizibilitate pe mulţimea $P(n)$ astfel : $R = \{(a, b) \in P(n) \times P(n) |\ a|b\}$.

Reflexivitate
Pentru orice $a \in P(n)$, $a = a \cdot 1 \Rightarrow a|a$ pentru orice $a \in P(n)$

Antisimetrie
Pentru orice $a, b \in P(n)$, dacă $(a, b) \in R$ şi $(b, a) \in R$, atunci:

$$\left.\begin{array}{r} a|b \Rightarrow \text{există } r \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } b = a \cdot r \\ b|a \Rightarrow \text{există } t \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } a = b \cdot t \end{array}\right| \Rightarrow a = a \cdot r \cdot t,\ r, t \in \mathbb{N} \Rightarrow r \cdot t = 1,\ r, t \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t = \frac{1}{r} \in \mathbb{N}$. Deci r este divizor al lui 1. Rezultă $r = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow a = b \cdot 1 \Rightarrow a = b$.

Tranzitivitate
Pentru orice $a, b, c \in P(n)$, dacă $(a, b) \in P(n)$ şi $(b, c) \in P(n)$, atunci:

$$\left.\begin{array}{r} a|b \Rightarrow \text{există } r \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } b = a \cdot r \\ b|c \Rightarrow \text{există } t \in \mathbb{N} \ \text{ a.î. } c = b \cdot t \end{array}\right| \Rightarrow c = a \cdot r \cdot t,\ r, t \in \mathbb{N} \Rightarrow a|c, \text{ unde } a, c \in P(n)$$

$\Rightarrow (a, c) \in R$.
În concluzie, R este o relaţie de ordine parţială, deci $(P(n), |)$ este mulţime parţial ordonată.
Asemător se demonstrează şi că $(D(n), |)$ este mulţime parţial ordonată.

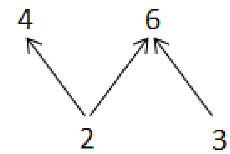
Definiţia 1. *Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată. Construim diagrama Hasse corespunzătoare sub forma unui graf orientat în modul următor:*

(i) vârfurile grafului reprezintă toate elementele mulţimii A.

(ii) există muchie $x \to y$ dacă $x < y$ şi nu există $z \in A$ a.î. $x < z < y$

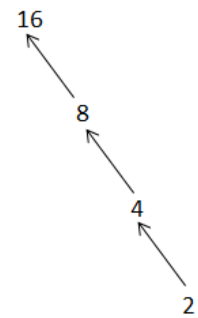
Folosim diagrama Hasse pentru a observa diferenţa dintre elementele minimale(maximale) şi minimul(maximul) unei mulţimi parţial ordonate.

$P(12) = \{2, 3, 4, 6\}$.
Observăm că pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $y|2$, rezultă $y = 2$, sau dacă $y|3$, rezultă $y = 3$. Deci, 2 şi 3 sunt elemente minimale.
Asemănător, pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $4|y$, rezultă $y = 4$, sau dacă $y|6$, rezultă $y = 6$. Deci, 4 şi 6 sunt elemente maximale.
Nu avem element minim, deoarece 2 şi 3 nu sunt într-o relaţie.
Nu avem element maxim, deoarece 4 şi 6 nu sunt într-o relaţie.
Observăm că dacă un element este minimal(maximal), nu implică faptul că el este minim(maxim).



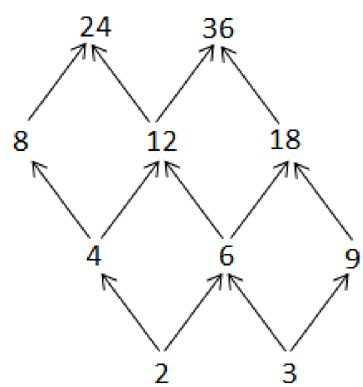
$2|4$
$2|6$
$3|6$

$P(32) = \{2, 4, 8, 16\}$.
2 este element minimal, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $y|2$, rezultă $y = 2$.
Exemplu: 4 nu este maximal, deoarece pentru $y|4$, unde $y \in S$, avem $y \in \{2, 4\}$, deci nu implică $y = 4$.
2 este şi minim, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ avem $2|y$.
16 este element maximal, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ care se află într-o relaţie de divizibilitate, dacă $16|y$, rezultă $y = 16$.
Dar 16 este şi maxim, deoarece pentru toate elementele $y \in S$ avem $y|16$.

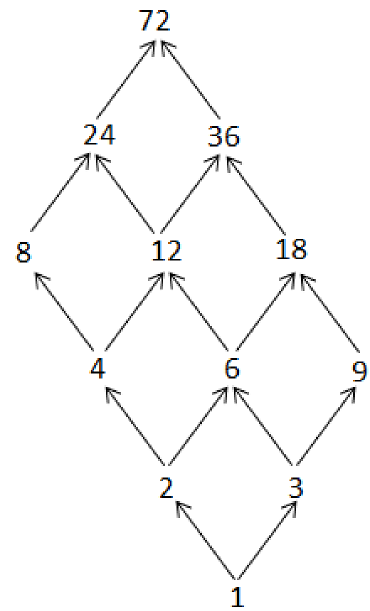


$2|4|8|16$

$P(72) = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36\}$.
2 şi 3 sunt elemente minimale.
24 şi 36 sunt elemente maximale.
Nu avem minim, deoarece 2 şi 3 nu sunt într-o relaţie de divizibilitate şi nici maxim, deoarece 24 şi 36 nu sunt într-o relaţie de divizibilitate.



$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$.
1 este element minimal, dar şi minim.
72 este element maximal, dar şi maxim.



$\square$