Probleme. Inversa unei matrici.

Începem cu rezolvarea exerciţiilor din lecţia precedentă:

1) Calculaţi

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Adunăm, la a doua coloană, prima coloană înmulţită cu 6. Avem

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Din coloana a doua scădem pe cea de a treia şi obţinem:

$$\begin{vmatrix} 7 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -6 & 0 \\ 1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 55.$$

2) Calculaţi

$$x_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix},$$

unde a, b sunt numere reale (pe diagonala principală este $a+b$, deasupra diagonalei principale este ab, dedesubtul diagonalei principale este 1 şi în rest sunt zerouri), iar matricea considerată are n linii şi n coloane.

Dezvoltăm după prima coloană şi obţinem

$$x_n = (a+b)x_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \dots \\ 1 & a+b & ab & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = (a+b)x_{n-1} - abx_{n-2};$$

pentru ultima egalitate am folosit dezvoltarea după prima linie. Folosind formula

$$x_n = (a+b)x_{n-1} - abx_{n-2},$$

egalităţile $x_1 = a+b, x_2 = a^2+ab+b^2$ şi un raţionament prin inducţie, deducem că

$$x_n = \sum_{j=0}^{n} a^{n-j}b^j.$$

Teoremă: Fie $A \in M_n(R)$, unde R este un inel comutativ. Matricea A este inversabilă dacă şi numai dacă $det(A) \in U(R)$.

În caz că matricea A este inversabilă, există o formulă de calcul pentru inversă. Pentru a explicita această formulă trebuie să definim transpusa unei matrici.

Definiţie: Dacă $A \in M_n(R), A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, transpusa matricii A este

$$A^T = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n},$$

unde $b_{i,j} = a_{j,i}$, pentru orice $i, j = \overline{1,n}$.

Proprietate: $detA = detA^T$, pentru orice matrice $A \in M_n(R)$.

În continuare, A este o matrice inversabilă în $M_n(R)$ (deci $det(A) \in U(R)$, conform teoremei). Avem

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}B^T,$$

unde $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, elementele $b_{i,j}$ fiind definite de egalităţile:

$$b_{i,j} = (-1)^{i+j}detA_{i,j};$$

$A_{i,j}$ este matricea care se obţine din A prin eliminarea liniei i şi a coloanei j.

Exemplu: Calculaţi inversa matricii $A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$.

E uşor de calculat $detA = \overline{2}$ şi $\frac{1}{detA} = \frac{1}{2} = \overline{3}$. Matricea B este dată de formula $B = \begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{4} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{1} & \overline{4} \\ \overline{4} & \overline{3} & \overline{4} \end{pmatrix}$ iar

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}B^T = \overline{3}\begin{pmatrix} \overline{4} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{4} & \overline{1} & \overline{3} \\ \overline{1} & \overline{4} & \overline{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{2} & \overline{4} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ \overline{3} & \overline{2} & \overline{2} \end{pmatrix}.$$