

Geometrie Computațională

Curs I

Analiza complexității algoritmilor geometrici

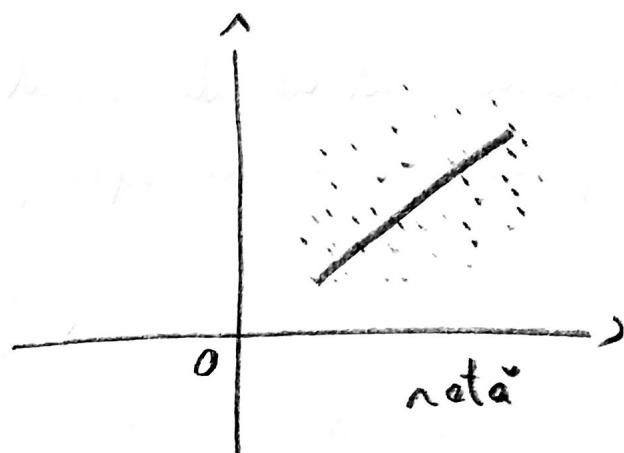
Complexitate - timp, spațiu, calcule
aplicații → statistică

Ex: pt baze de date.

distribuție notelor pe perioade

de timp etc

→ aplicații diverse



Multimi CompxP

1. Acoperiri compxp

- Segmente → două puncte



Pentru calculator, folosim coordonate.

Dacă \mathbb{R}^d este un spațiu (vectorial) d-dimensiononal ($d \in \{1, 2, 3, \dots\}$) și $p, q \in \mathbb{R}^d$, segmentul $[pq]$ este:

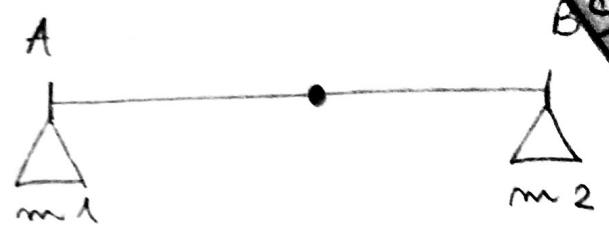
$$[pq] = \{(1-\varphi)p + \varphi q \mid \varphi \in [0,1]\} = \{(1-\varphi)p + \varphi q \mid \varphi \in [0,1], 1-\varphi+\varphi=1, p \neq q\}$$

Combinare
compxP a punctelor
 $p \neq q$

Obs: Date trei puncte
 p, q, r o combinație
 convexă este de forma:

$$(1-\gamma-\beta)p + \gamma q + \beta r$$

$$\gamma, \beta \in [0, 1]$$

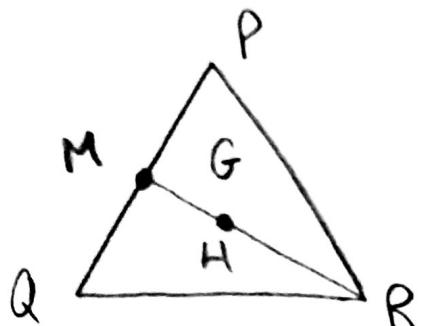


centrul de greutate

$$\frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot A + \frac{m_2}{m_1+m_2} \cdot B$$

Obs: Obținem centrul de greutate al triunghiului
 (3 puncte care nu se află pe aceeași dreaptă)

Ex:



$$? \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R \rightarrow \text{centrul de greutate}$$

(în raport cu medianele)

$$? \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q \rightarrow \text{ mijlocul segmentului } [PQ]$$

$$? \frac{1}{4}P + \frac{1}{4}Q + \frac{1}{2}R \rightarrow \text{ mijlocul segmentului } [MR] \rightarrow H$$

Obs: Date punctele p, q atunci:

$$pq = \underbrace{\{(1-\gamma)p + \gamma q \mid \gamma \in \mathbb{R}\}}_{\text{combinația afină bicanonică a punctelor } p \text{ și } q} \rightarrow \text{ dreapta } pq \quad (p \neq q)$$

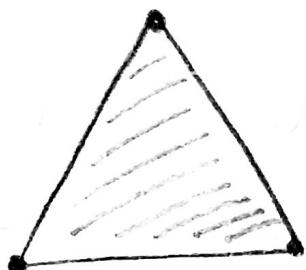
Terminologie

$$CP \ P = \{M_1, M_2, \dots, M_g\} \subset \mathbb{R}^d$$

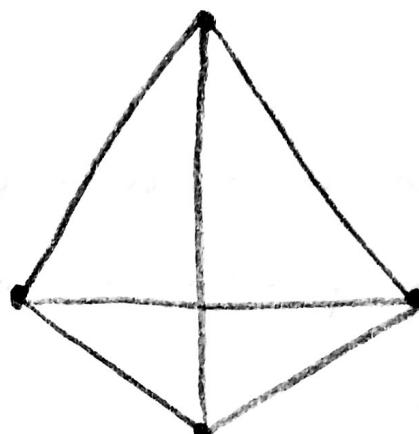
O combinație convexă a punctelor din P este un punct de formă $\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2 + \dots + \gamma_g M_g$ unde:

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_g \in [0, 1]$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_g = 1$$



triunghi
(3 puncte)

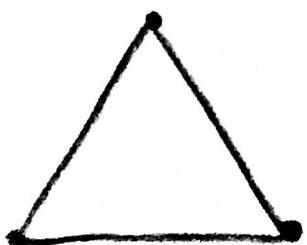


tetraedru
(4 puncte)

triunghi cu interior este
Multime Convexă

Segmentul \rightarrow Multime
Convexă

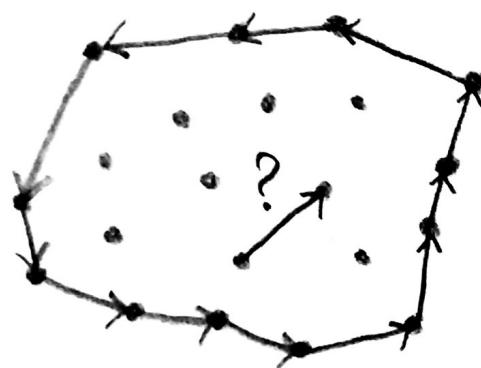
triunghi fără interior nu
este Multime Convexă



acoperire convexă
(triunghiuri în interiorul
unei)

(Algoritm pt determinarea punctelor ce formează frontiera acoperirea convexă)

paralelogramă
triangularic.

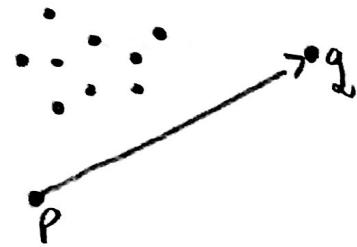


frontiera
acoperirei
convexe

Cum decidem dacă o muchie orientată \vec{pq} este pe frontiera acoperirei convexe paralelogramă în sens triangularic?

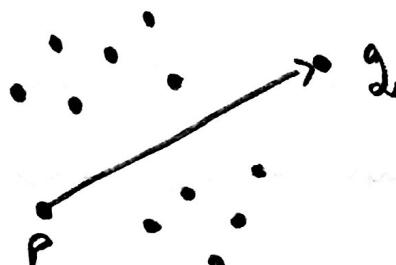
Cazul 1

muchia \vec{pq} este pe frontiera



Cazul 2

muchia \vec{pq} nu este pe frontiera



Cazul 3

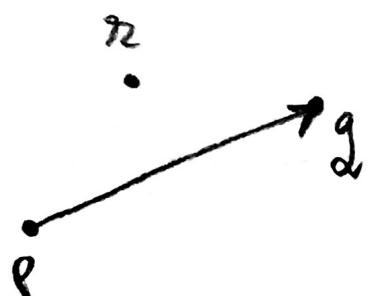
muchia \vec{pq} nu este pe frontiera
(în sensul triunghiului
ulterior), dar
muchia \vec{qp} este

Testul de orientare

Întrebare:

Fie $p, q \in \mathbb{R}^2$, $p \neq q$. Cum decidem dacă $r \in \mathbb{R}^2$ este în stânga | în dreapta muchiei orientate | segmentului orientat \overrightarrow{pq} ?

Răspuns:



$$\text{Fie } p = (p_1, p_2)$$

$$q = (q_1, q_2)$$

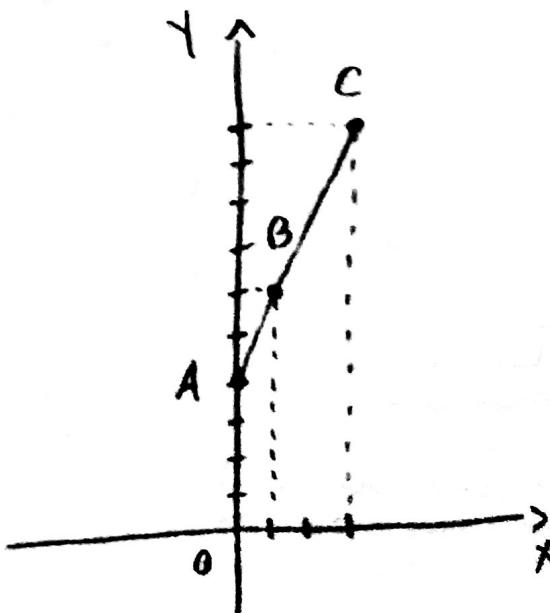
$$r = (r_1, r_2)$$

Holțam:

$$\Delta(p, q, r) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$$

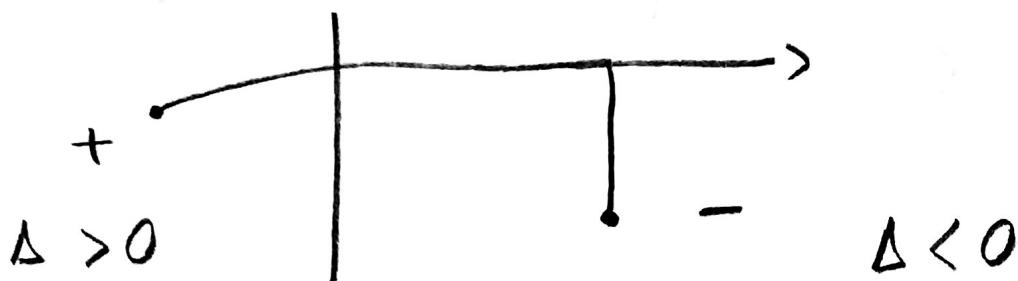
$\Delta = 0 \Leftrightarrow r$ este pe dreapta pq (punktele sunt coliniare)

$$y = 2x + 4 \quad \begin{cases} A = (0, 4) \\ B = (1, 6) \\ C = (3, 10) \end{cases}$$

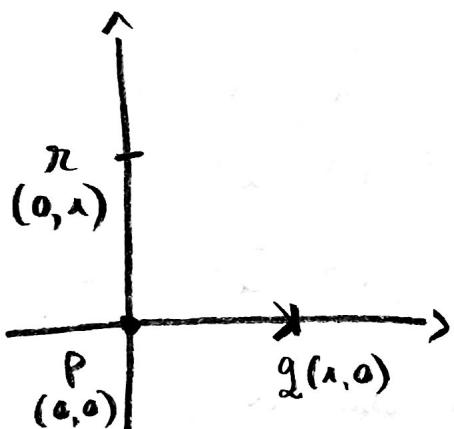


$$\Delta ABC = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 6 & 10 & \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \rightarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \rightarrow C_3 - C_1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$



Intelegem care semiplan corespunde lui "+" și care
lui "-" printr-un exemplu



$$\begin{aligned} p &= (0, 0) \\ g &= (1, 0) \\ n &= (0, 1) \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Concluzie:

"Testul de orientare"

$$P, q, r \in \mathbb{R}^2; P \neq q$$

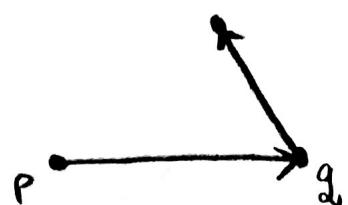
- (i) $\Delta(P, q, r) = 0 \Leftrightarrow r$ este pe dreapta Pq
- (ii) $\Delta(P, q, r) > 0 \Leftrightarrow$ este în partea stângă a muchiei orientată \vec{Pq}
- (iii) $\Delta(P, q, r) < 0 \Leftrightarrow$ -" " partea stângă a muchiei orientate \vec{Pq}

! Comentarii testul de orientare:

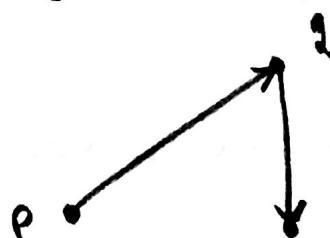
I Aplicabilitate (\mathbb{R}^2)

- a) Stabilim dacă un punct este în stânga sau în dreapta unei muchii orientate (\mathbb{R}^2)
- b) Stabilim dacă în parcurgerea unei liniile poligonale, avem "ving la stânga" sau "ving la dreapta".

vîng stânga



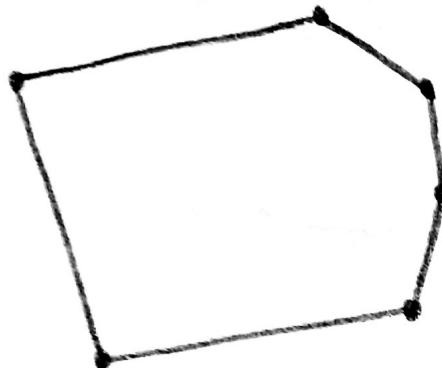
vîng dreapta



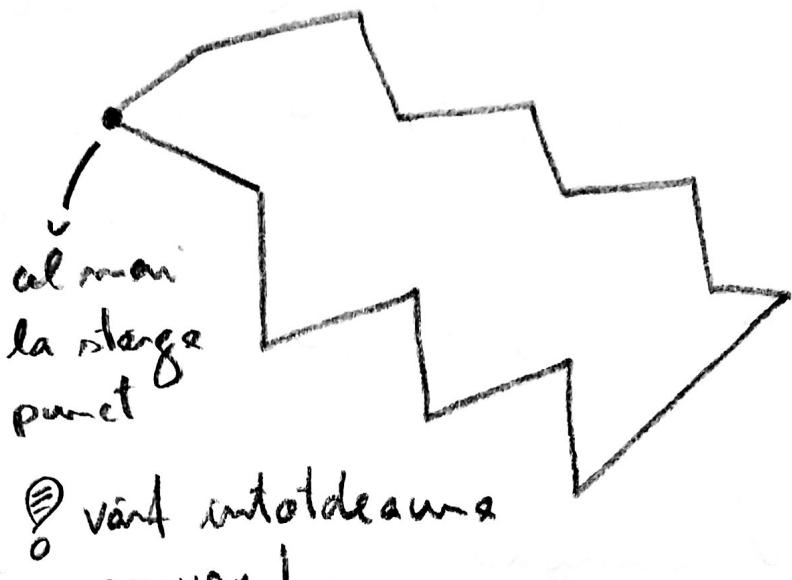
- c) Stabilim natura unei poligone (convex sau concav)

polygon convex

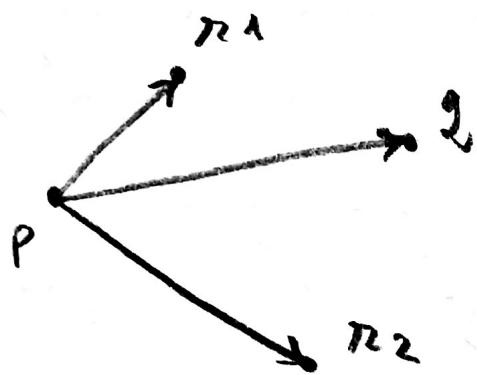
tode virgile sunt de fel



polygon concav



II Fundament teoretic



Dupre produsul vectorial:

pt vector $v = (v_1, v_2, v_3)$ din \mathbb{R}^3
 $w = (w_1, w_2, w_3)$

- produs scalar (dot product)
- produs vectorial (cross product)

Produs scalar

$$\langle v, w \rangle = v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Exemplu:

$$v = (1, 2, 3) \quad w = (-1, 2, 0)$$

$$\langle v, w \rangle = v \cdot w = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 3$$

Produs vectorial

$$v \times w = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & e_1 \\ v_2 & w_2 & e_2 \\ v_3 & w_3 & e_3 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0) \\ e_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

determinantul formal

Exemplu:

$$v = (1, 2, 3)$$

$$w = (-1, 2, 0)$$

$$v \times w = \begin{vmatrix} 1 & -1 & e_1 \\ 2 & 2 & e_2 \\ 3 & 0 & e_3 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} &\text{desvoltare după} \\ &\text{ultima coloană} \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} e_3 =$$

$$= 6e_1 - 3e_2 + 4e_3 \rightarrow (6, -3, 4)$$

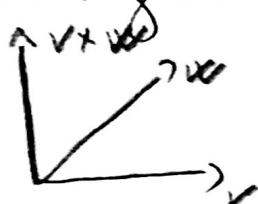
Obs:

$$\langle v \times w, v \rangle = 0 \quad (v \times w \perp v)$$

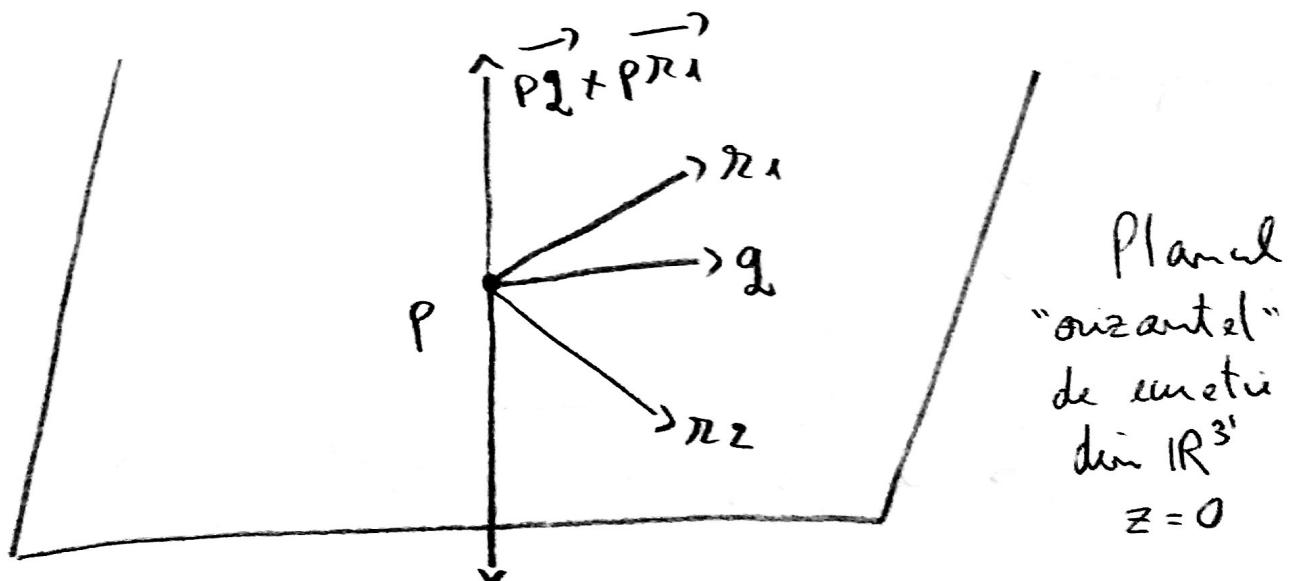
$$\langle v \times w, w \rangle = 0 \quad (v \times w \perp w)$$

Proprietăți:

- direcție: $v \times w$ este ortogonal (perpendicular) atât $\parallel v$, cât și $\parallel w$
- sens: dat de regula numărului drept



- normă: $\|v \times w\| = \|v\| \cdot \|w\| \sin \theta \quad \theta \in [0, \pi]$



Avgem următoarele propoziții:

Fie p, q, r puncte din $\mathbb{R}^2 \cong \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$

Astăzi:

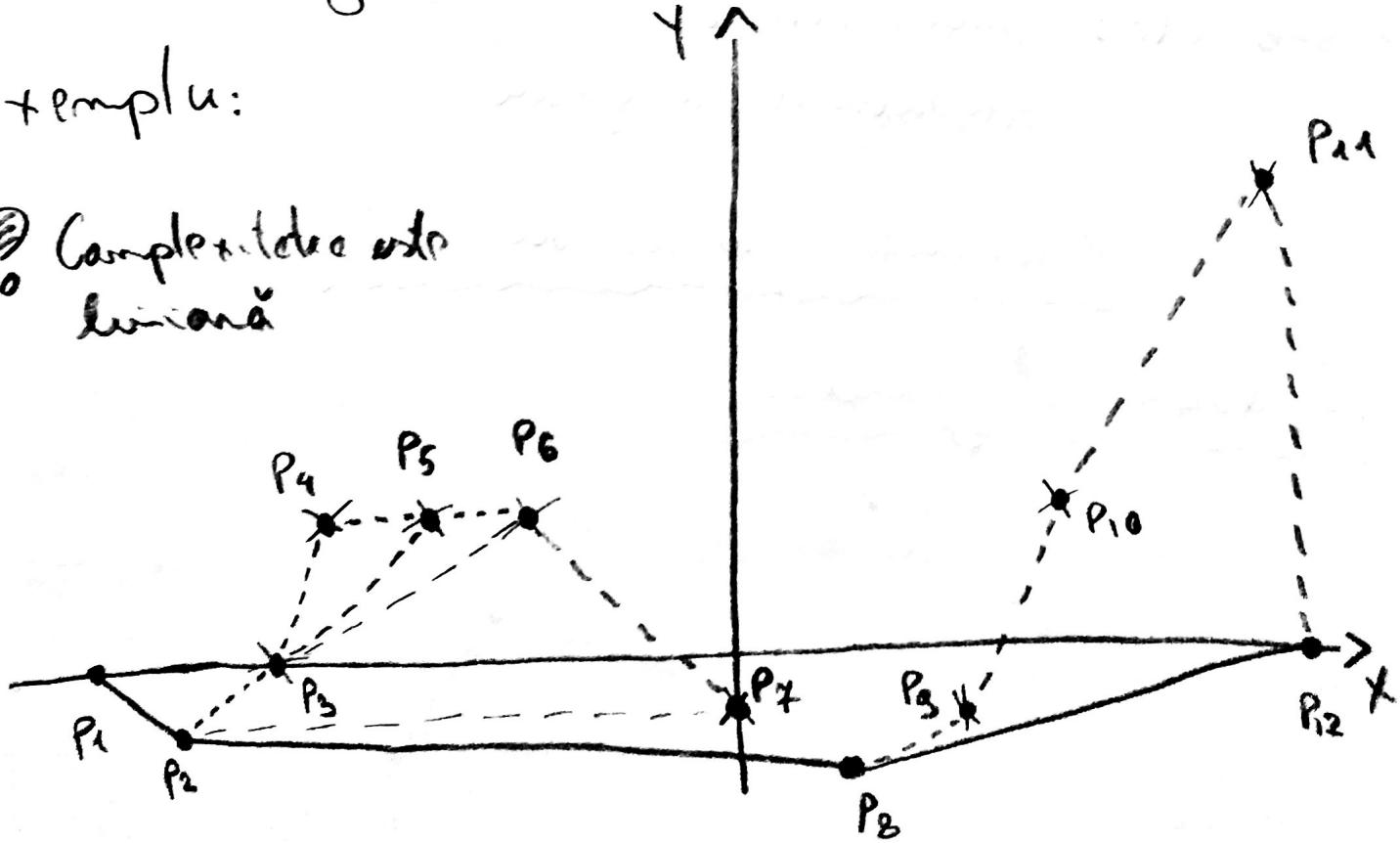
$$\vec{pq} + \vec{pr} = (0, 0, \Delta(p, q, r))$$

Graham's Scan (Variante Andrex)

- punctele sunt sorlete (folosind ordinea lexicografică)
- se determină L_i (liste vârfurilor care determină partea inferioară a lunghiștei acoperirii $\text{conv}(P)$) și
 L_j (liste vârfurilor care determină partea superioară a lunghiștei acoperirii $\text{conv}(P)$)
- ele dând liste "se uresc" folosind punctul "cel mai din stânga" și "cel mai din dreapta".

Exemplu:

! Completătoare este
lunghă



$P_1 = (-8, 0)$, $P_2 = (-6, -2)$, $P_3 = (-4, 0)$, $P_4 = (-4, 2)$
 $P_5 = (-3, 2)$, $P_6 = (-2, 2)$, $P_7 = (0, -1)$, $P_8 = (2, -4)$
 $P_9 = (4, -2)$, $P_{10} = (6, 2)$, $P_{11} = (8, 8)$, $P_{12} = (10, 0)$
 Punctele sunt dege
 se iau ultimele 3 puncte

$P_1 P_2 \not\propto P_3 P_4 P_5 \not\propto P_6 P_7 P_8 \not\propto P_9 P_{10} P_{11} P_{12}$

$P_2 P_3 P_6 \rightarrow$ coliniare, nu e vîrșos la stânga

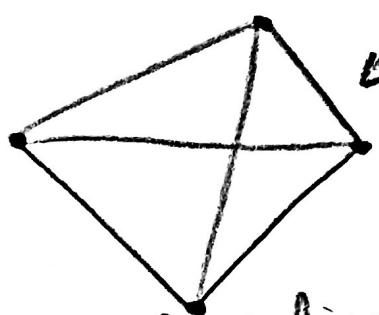
~~P_4~~ pt că $P_3 P_4 P_5$ este vîrșos la dreapta

L_i : puncte interioare a hartiului $P_1 P_2 P_8 P_{12}$

Alte subiecte: Jarvis March
Algorithmul lui Chan

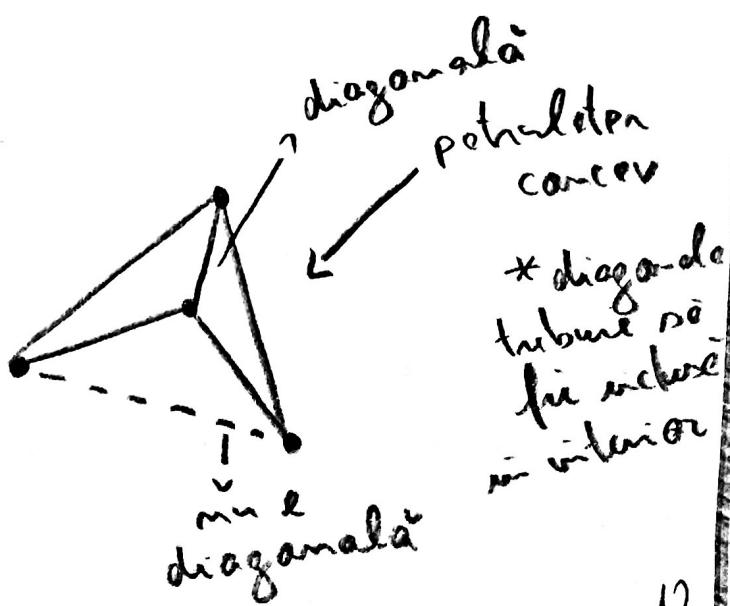
Problema galeriei de artă

Triangularizarea poligoanelor



pentru
convex

2 diagonale și fiecare determină
o triunghiură



nu e
diagonala

diagonala

pentru
concav

* diagonale
tribună nu
sunt acoperite
în interior

Metoda de triangularare

a) Two Ears Theorem

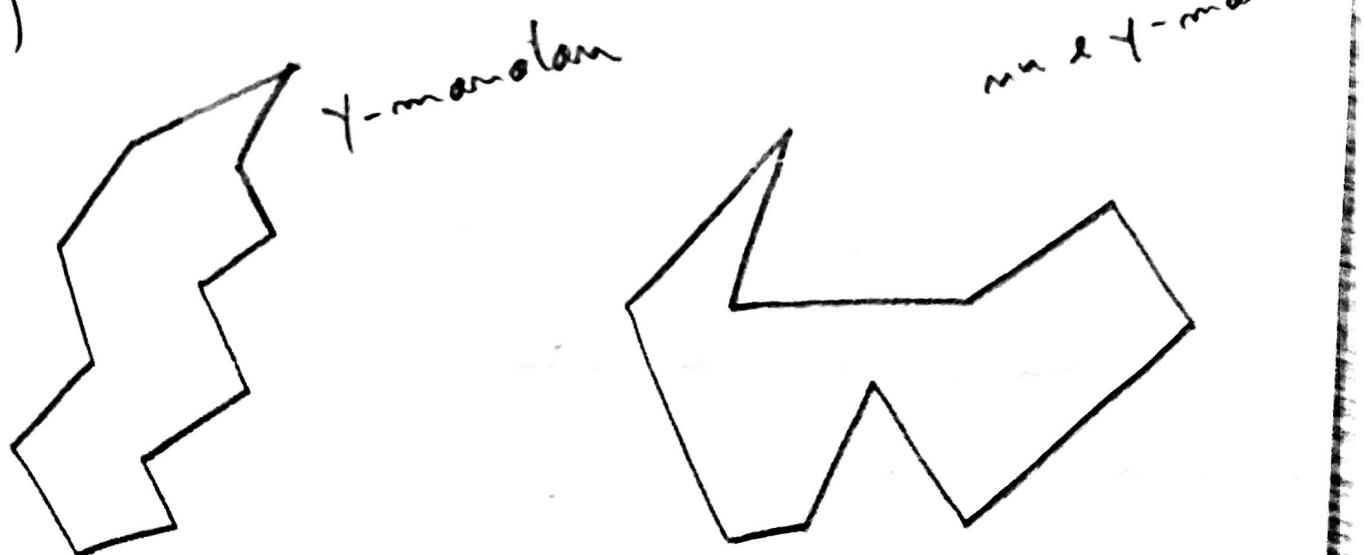
"Ear" (componentă de tip E)

- vert conexe P_i și
- P_{i-1}, P_i, P_{i+1} este diagonală

P_{i-1} = predecesor

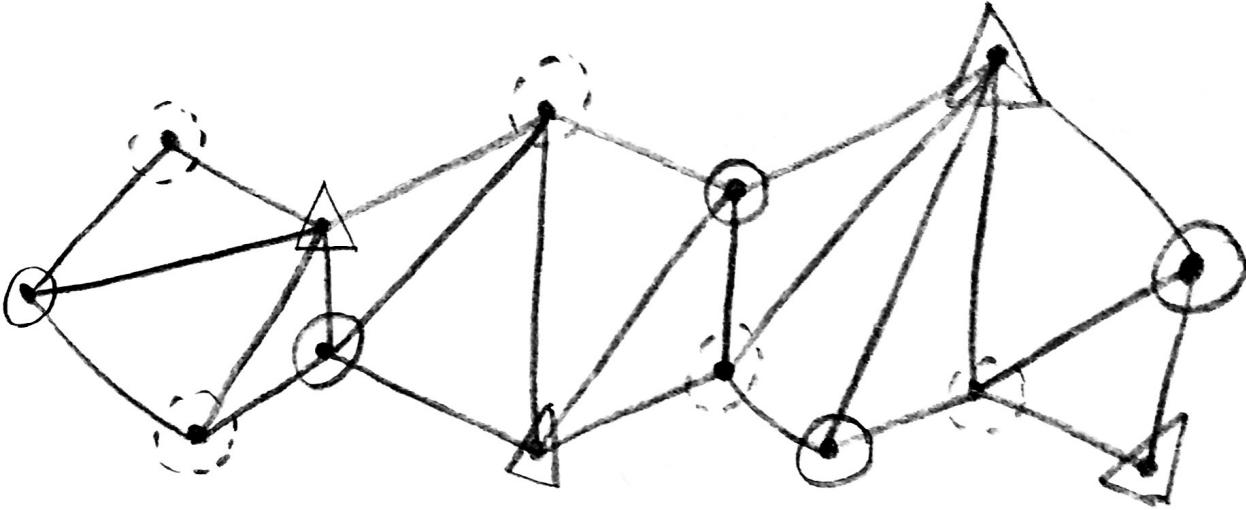
P_{i+1} = succesor

b) Falosul se descompune în poligoane γ -marotan
(un astfel de poligon poate fi triangulat în timp
linian)



→ algoritm de complexitate $\Theta(n \log n)$

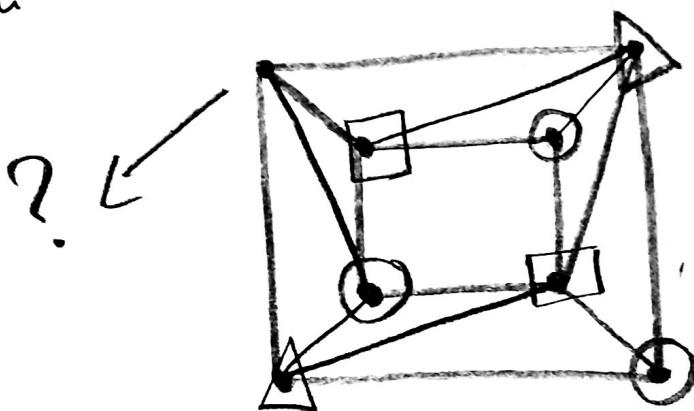
Apli. Teoremei Golpnicii de Artë:



$\circ 5 \quad \circ 5$

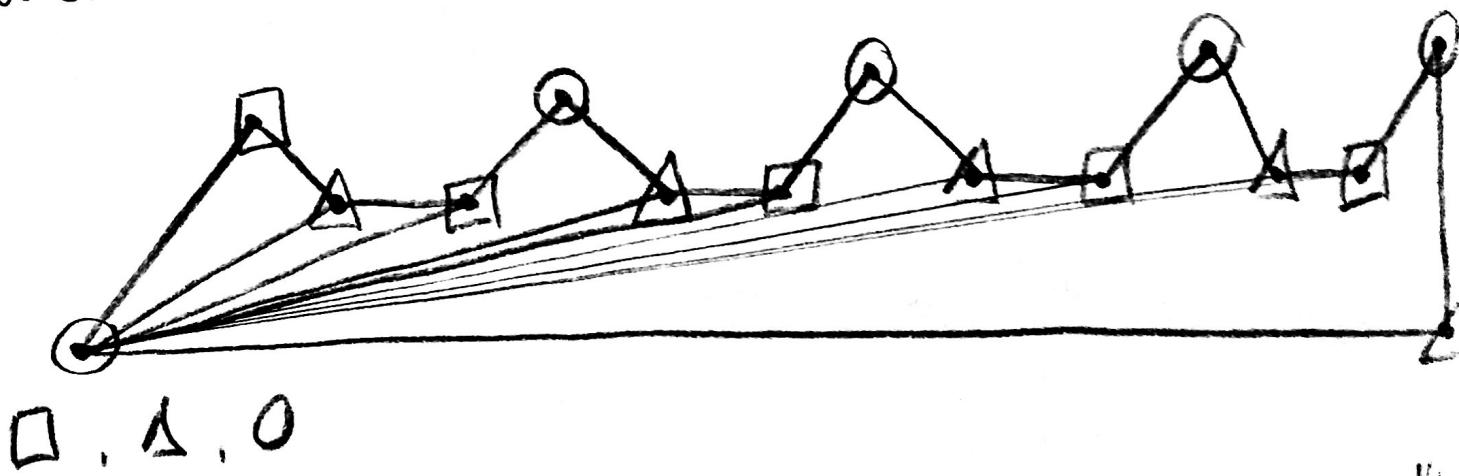
$\Delta 4$

Obs: Nu există niciună 3 colorare pt figuri în artă-intersecții



Teorema Galenici de Antă

- valori măseane



$\square, \Delta, 0$

• înălțimea suficientă

notam cu m_1, m_2, m_3 mărimile celor 3 valuri ($m_1 + m_2 + m_3 = m$)

Pp absurd

$$m_1 > \left[\frac{m}{3} \right] \Rightarrow m_1 > \frac{m}{3}$$

(proprietate
partea
intreaga)

$$m_2 > \left[\frac{m}{3} \right] \Rightarrow m_2 > \frac{m}{3}$$

$$m_3 > \left[\frac{m}{3} \right] \Rightarrow m_3 > \frac{m}{3}$$

$m_1 + m_2 + m_3 > m$ CONTRADICTIE

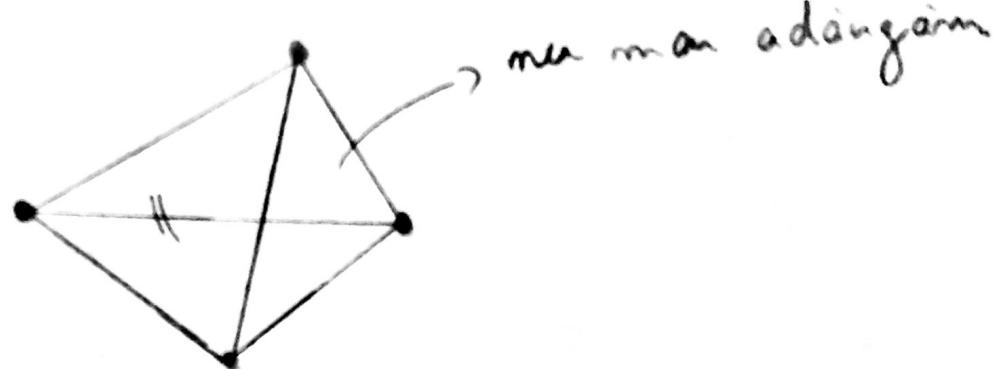
$\Rightarrow \exists$ a.i. $m \leq \left[\frac{m}{3} \right]$?

Geometrie Computațională

Curs 2

Triangulararea unor multimi de puncte \neq triangulararea unui poligon.

Dacă este compat., are 3 PMS



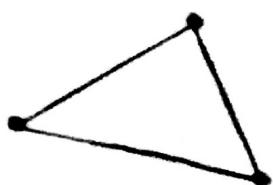
Aprecieri: Grafica
pe Calculatoare.

Triangulararea mulțimilor de puncte
(context 2D)

Exemplu:

3 puncte nealiniare

i)

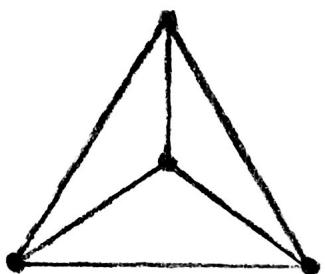


3 vârfuri
3 muchii
1 față (1 Δ)

4 puncte mășturate tacte pe
aceeași dreaptă

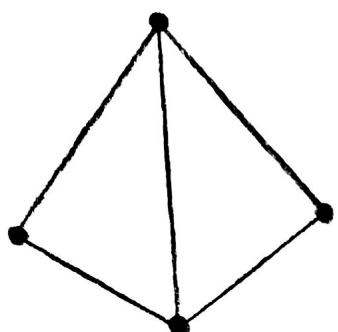
ii)

a)



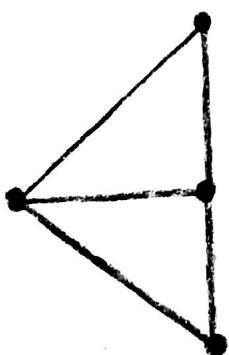
4 vârfuri
6 muchii
3 fețe (3Δ)

b)

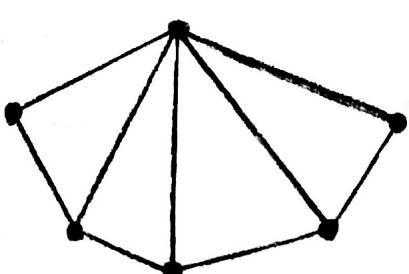


4 vârfuri
5 muchii
2 fețe (2Δ)

c)



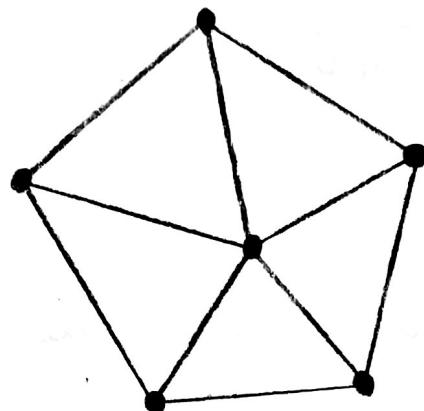
4 vârfuri
5 muchii
2 fețe



7 vârfuri
10 muchii
2 fețe

pentagonal
poligon convex

Demonstratie (Propozitie referitoare la numărul de muchii și numărul de vârfuri ale unei triangulare)



Graf: nodurile: punctele interioare (n)

muchii: laturile Δ (m_m) $m_m = ?$

fetele: triunghiurile + fata extinsă

$(m_f + 1) m_f = ?$

Relație lui Euler:

$$n - m_m + (m_f + 1) = 2$$

incidente dintre muchii și fete:

$2m_m \leftarrow$ din perspectiva muchiilor

3. $m_f + K \leftarrow$ din perspectiva fetelor

$$\begin{cases} n - m_m + (m_f + 1) = 2 \\ 2m_m = 3m_f + K \end{cases}$$

\Rightarrow formulele din suportul de curs.

! La sfârșit:

Exemplu : Se consideră punctele :

$$A_i = (i + 10, 0), \quad i = \overline{0, 50}$$

$$B_i = (0, i + 30), \quad i = \overline{0, 40}$$

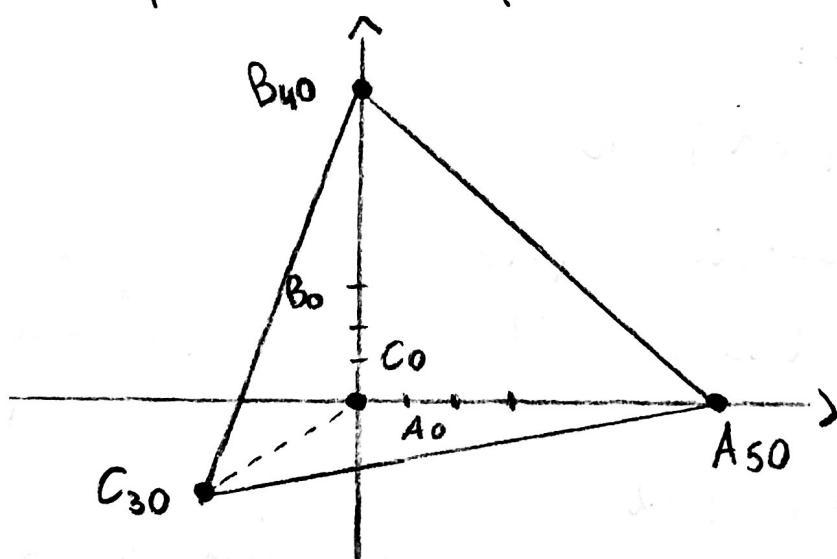
$$C_i = (-i, -i), \quad i = \overline{0, 30}$$

Câte triunghiuri și căte muchii are o triangulare a mulțimii :

$$\{ A_i \mid i = \overline{0, 50} \} \cup \{ B_i \mid i = \overline{0, 40} \} \cup \{ C_i \mid i = \overline{0, 30} \}$$

Trebui să stabilește :

- numărul de puncte (n)
- numărul de puncte de pe frontieră acoperirii convPXP.



$n = 123$ (8 puncte trebuie să fie diferite)

$k = m$ de puncte de pe frontieră acoperirii convPXP.

\Rightarrow se aplică formulele

Exemplul 2: Dă exemplu de mulțime de puncte din \mathbb{R}^2 care să admită o triunghiulară având 6 Δ și 11 muchii (dramul invers)

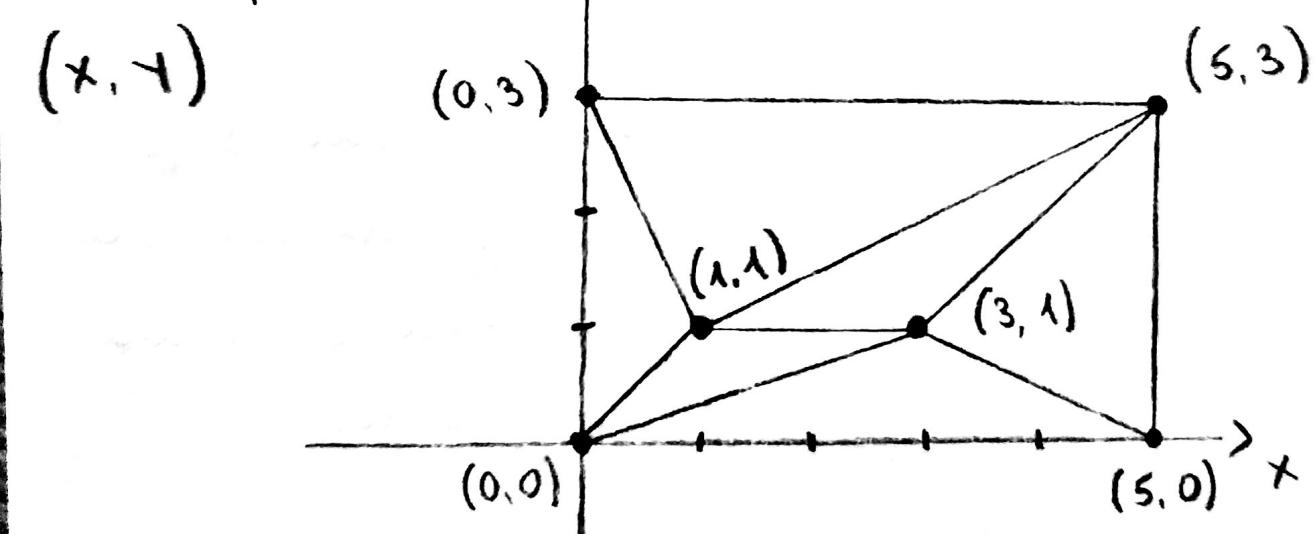
Sol: Fie m = numărul de puncte
 k = numărul de puncte de pe frontieră
 acoperirii convexă.

Cf formulelor:

$$\begin{cases} 2m - k - 2 = 6 \\ 3m - k - 3 = 11 \end{cases} \Rightarrow m - 1 = 5 \Rightarrow m = 6$$

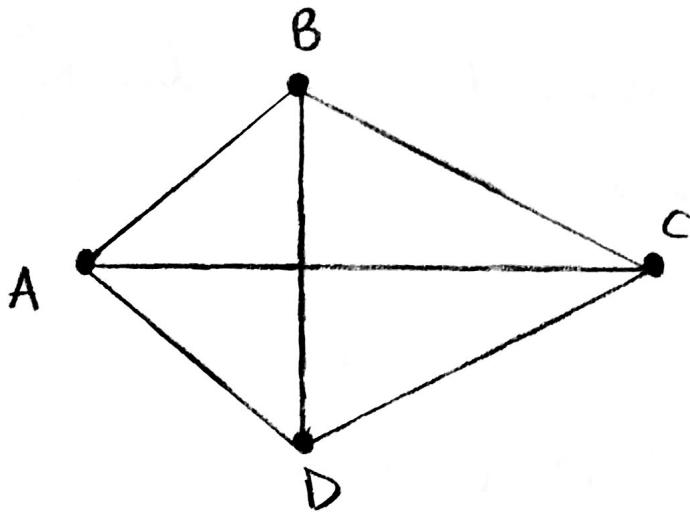
$$\Rightarrow k + 2 = 6 \Rightarrow k = 4$$

Dp exemplu:



Observație:

Fie ABCD un patrulater convex.

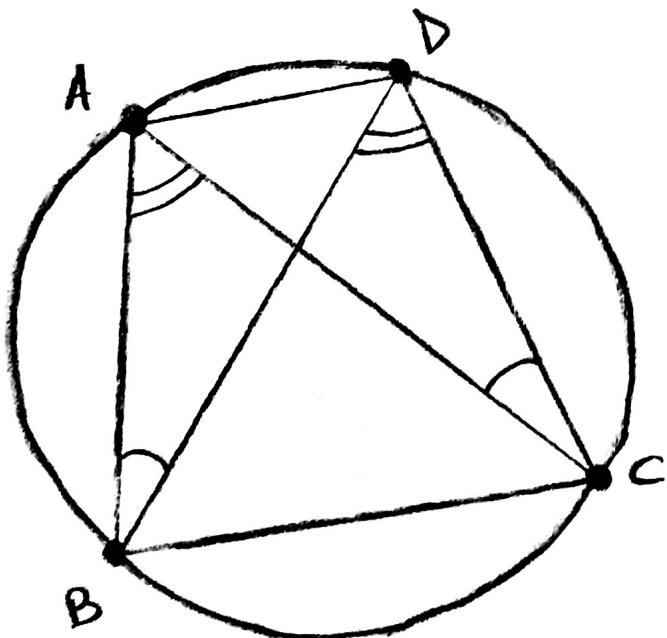


diagonala BD
 $\triangle BDA; \triangle BDC$

diagonala AC
 $\triangle ACB; \triangle ACD$

"cel mai mic unghi care apare în triunghiulă data de AC este mai mic decât cel mai mic unghi care apare în triunghiulă data de BD "

Observație: Fie $ABCD$ un patrulater inscripțibil;

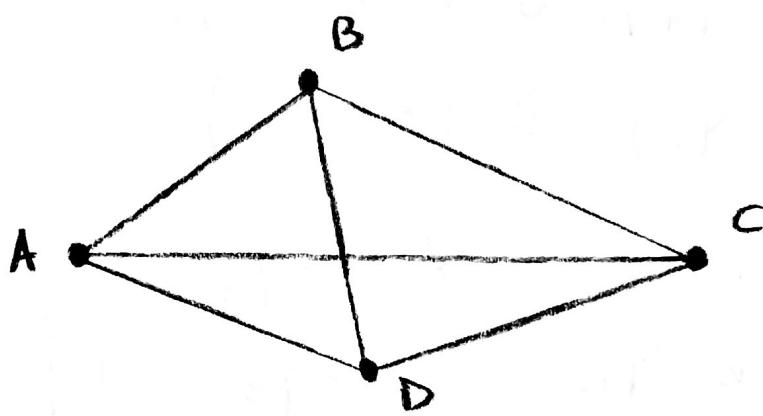


În acest caz Δ formate de diagonale au cele mai mici unghii congruente.

Exemplu: Casul unui patrulater convex.

Muchie / Diagonala ilegală

Fie A, B, C, D patru puncte necolineare, necoinicice



Diagonala AC \rightarrow vectorul α

Diagonala BD \rightarrow vectorul β

Dacă $\alpha < \beta$ (figură), atunci AC este o muchie / diagonala ilegală.

Convenție pt 4 puncte coincidice ; niciuna dintre diagonale nu este ilegală.

Criteriu geometric pentru a stabili dacă o muchie este ilegală.

Fie A, B, C, D patru puncte a.i. $ABCD$ nu este patrulater convex.

Urmoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) muchia AC este dreptă
(ii) D este în interiorul cercului circumscris $\triangle ABC$
(iii) $B = \dots$

Holotip: Fie $A(x_A, y_A)$; $B = (x_B, y_B)$;
 $C(x_C, y_C)$; $D = (x_D, y_D)$

Se mărează:

$$\Theta(A, B, C, D) = \begin{vmatrix} x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 & 1 \\ x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 & 1 \\ x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 & 1 \\ x_D & y_D & x_D^2 + y_D^2 & 1 \end{vmatrix}$$

Propozitie 2. (Verificarea condiției a conditiei din propozitie 1)

Fie A, B, C, D patru puncte.

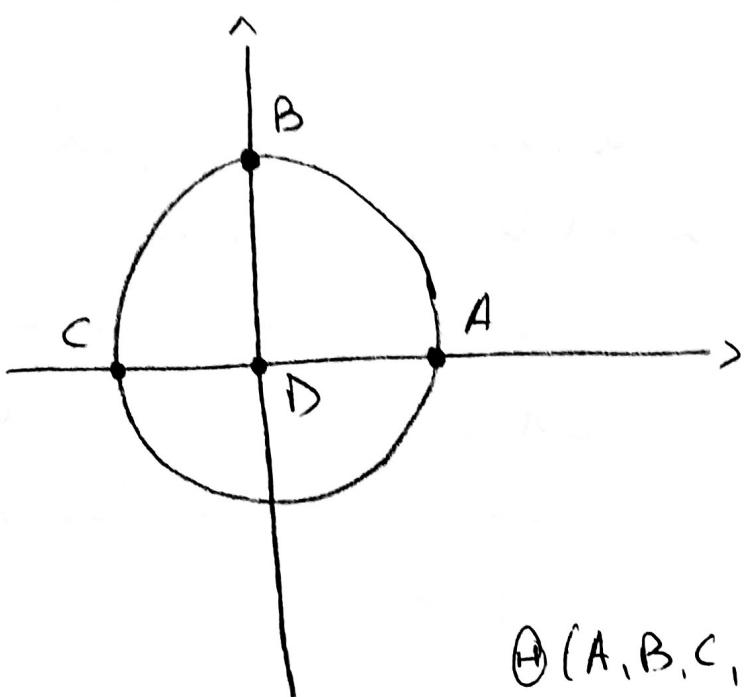
(i) A, B, C, D sunt conciclice \Leftrightarrow

$$\Theta(A, B, C, D) = 0$$

(ii) Fie A, B, C, D a.i. ABC nu vine la stânga.
Un punct D este situat în interiorul cercului circumscris $\triangle ABC$ \Leftrightarrow

$$\Theta(A, B, C, D) > 0$$

Exemplu:



$$A = (1, 0)$$

$$B = (0, 1)$$

$$C = (-1, 0)$$

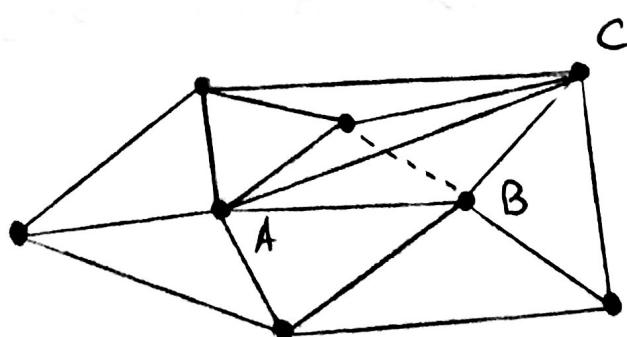
$$D = (0, -1)$$

A, B, C vor fi la stânga

$$\Theta(A, B, C, D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

D este interior

Observație despre flip.

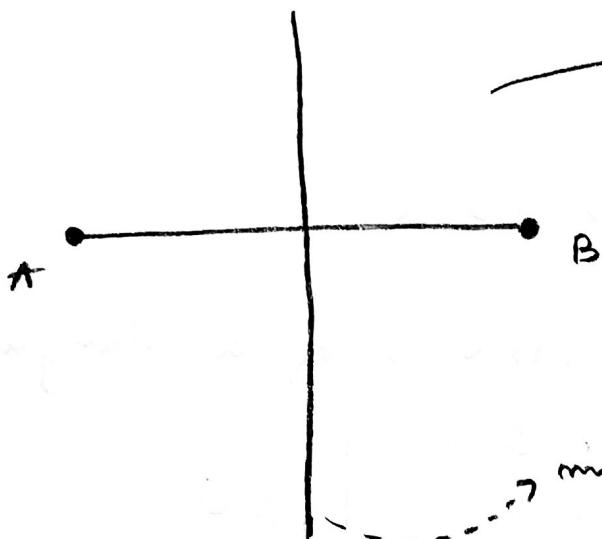


\Rightarrow o nouă triangulație $\tilde{\tau}'$
 $\text{cu } \mathcal{V}(\tilde{\tau}') \geq \mathcal{V}(\tilde{\tau})$

Flip triangular $\tilde{\tau}$ către nouă. Muchia AC este ilegală. Prin „flip” înlocuim BD; restul muchiilor rămânerează neschimbate \Rightarrow

Problema Optimizare partale
Diagonale Voronoi

1) În 2 puncte distanțe



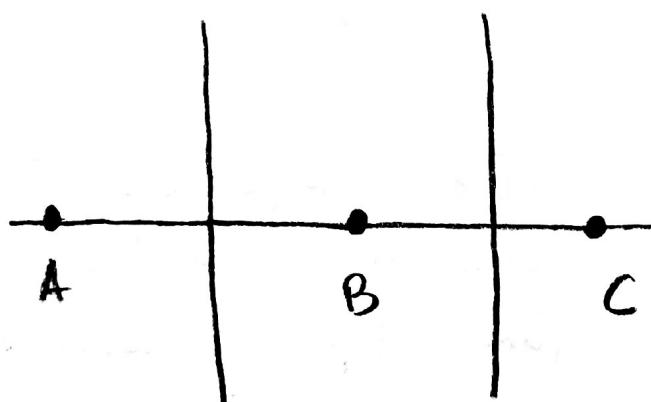
→ mijlocii punctelor egal depărtate de A și B.

medioare segmentului

$[AB]$ → separa celele corespunzătoare lui A și B

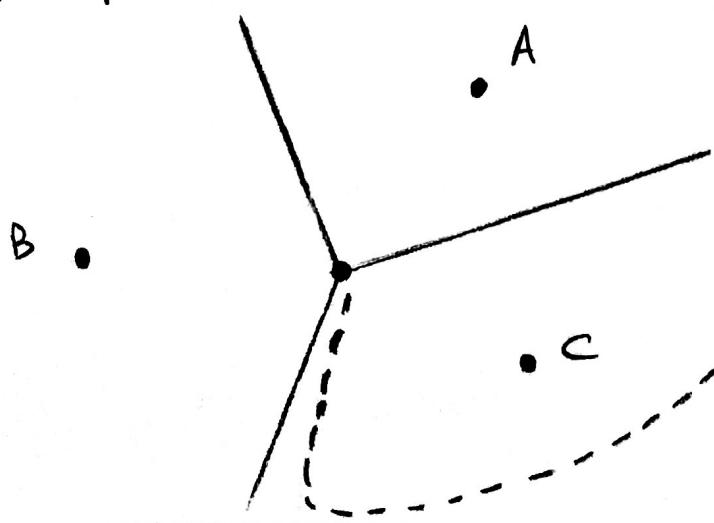
medioare

2) 3 puncte distincte coliniare



medioarele segmentelor $[AB]$ și $[BC]$

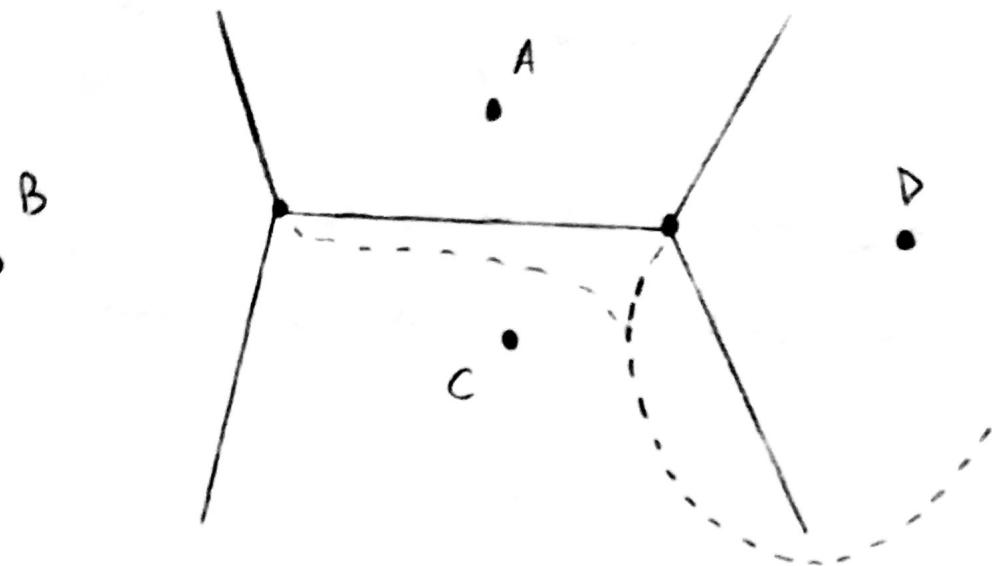
3) 3 puncte nealiniare



medioarele segmentelor $[AB]$, $[BC]$ și $[AC]$

→ centru cercului circumscris

4) 4 puncte nealiniare necoliniice

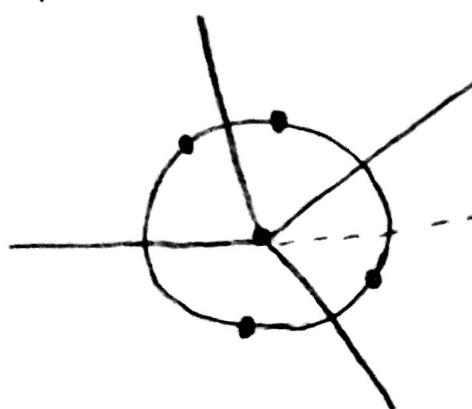


A, B, C, D puncte

antice (nisi)

→ variantele diagramei Voronoi

5) 4 puncte concilice



central cercului
care contine cele 4
puncte.

Structura unui diagramă Voronoi

Tip $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ o mulțime de puncte (sunt)

- Dacă toate punctele sunt coliniare \Rightarrow diagramă $V_a(P)$ conține $(n-1)$ drepte paralele (nu este conexă)

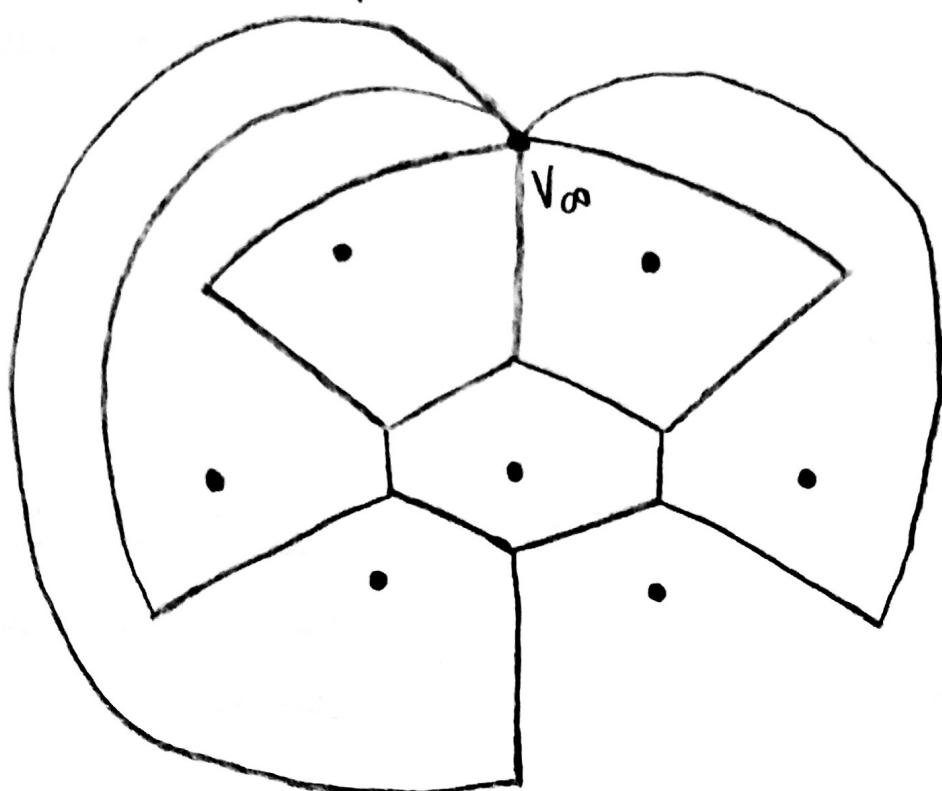
- În caz contrar diagramă este conexă, iar muchii sunt: - tip segmente

- tip semiadepte (mi corespund semiadepte
unei diagramă Voronoi?)

Proprietate:

Relația pt nr. n min. \rightarrow suport de unu

Denum (ide) P_p că punctele nu sunt coliniare



Adăugăm un vîrf (V_∞) prin care trac toate muchiile
de tip semiadeptă \Rightarrow graf planar comp.

vîrfurile: vîrfurile diagramii Voronoi + vîrful
"de la infinit" (V_∞)

muchiile: muchiile diagramii Voronoi

fetele: în bijectie cu punctele initiale (situri)

• Relație lui Euler

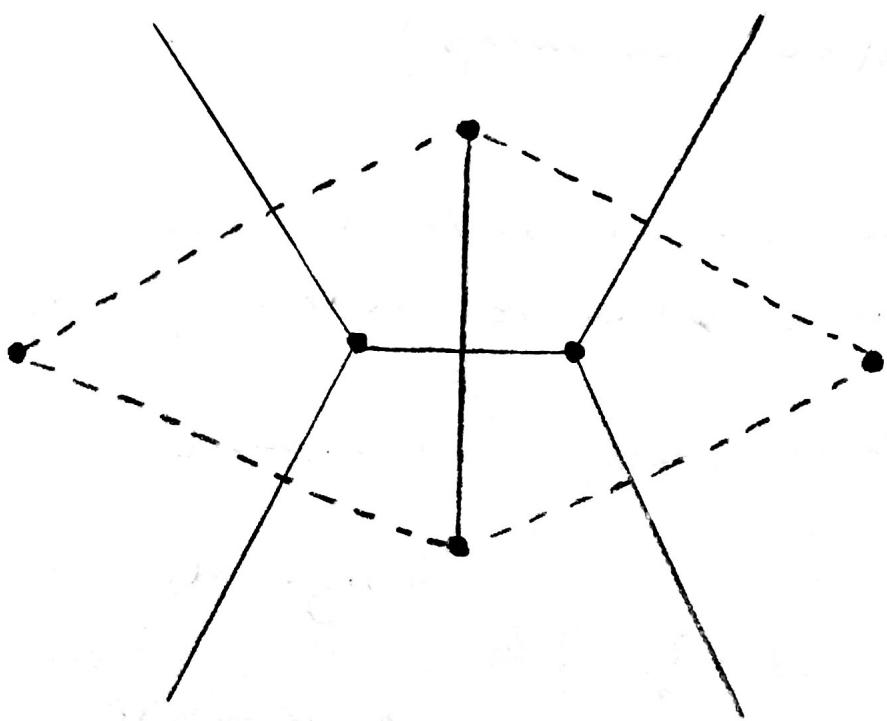
$$(m_v + 1) - m_m + m = 2$$

• Incidente: muchii / vârfuri

- fiecare muchie este incidentă cu exact două vârfuri
- fiecare vârf este incident cu cel puțin 3 muchii ale diagramei (afirmatia valabilității pt vârfurile diagramei Voronoi și pt $V\alpha$)

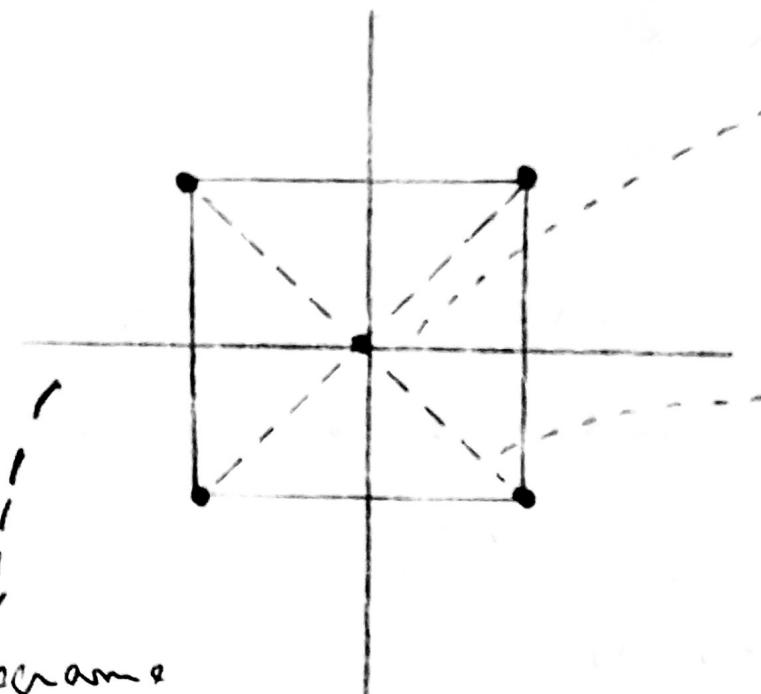
$$2m_m \geq 3(m_v + 1)$$

\Rightarrow inegalitate de dorsi



unim vârfurile care sunt despărțite de o muchie \Rightarrow triunghiulă unghiular optimă.

Intrebare: ce se poate spune despre această construcție în casă în care punctele din P (multimea P) sunt (de exemplu) vârfurile unui patrat?



→ muchie degenerată

→ oricare dintre diagonale determină o triunghiulară Delaunay, deoarece intersectările muchiilor degenerătoare.

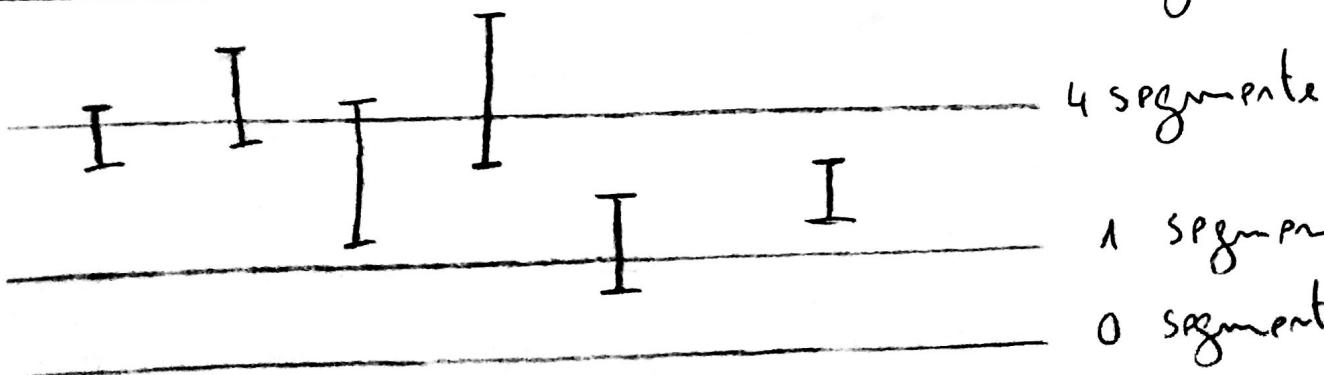
diagramă

Vorbind

Paralelogramă după de bolipne (lui SWPP)

Exemplu (simplu)

Fie o familie de segmente verticale indicate prin extremitățile lor. Se dorește să se optă orizontală. Câte segmente sunt intersectate?

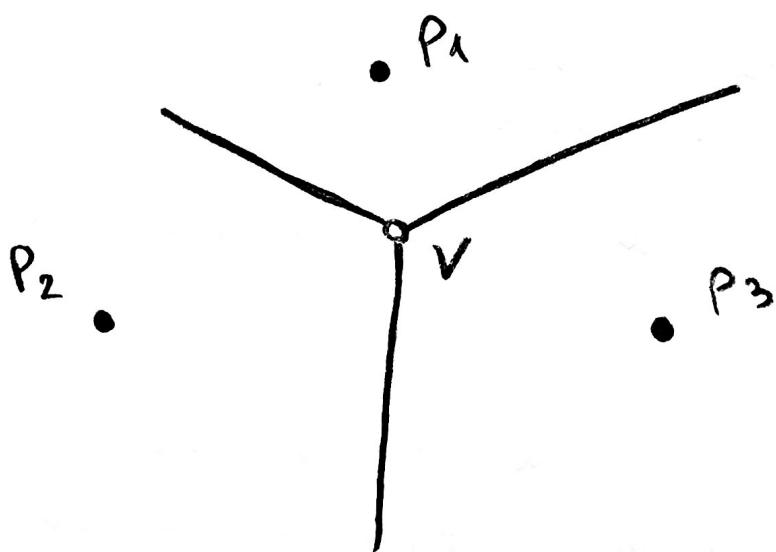


Regulă generală pt algoritmi bazati pe paradigmă de proiecție de bolișne. „Stotul” al dreptei de bolișne, care se modifică la „experimente”. (în număr finit)

În acest exemplu :

- stotul \rightarrow numărul de segmente intersectate
- experimente \rightarrow extremitățile segmentelor

Aplicarea paradigmii dreptei de bolișne la traseele diagramei Voronoi.



În figura: le trasee prin vîrful V al diagramei Voronoi, drepta de bolișne nu a întâlnit încă toate vîrfurile din P , care să determină (va trebui detectat înainte ca dreapta să treacă prin P_2 și P_3)

\Rightarrow Adaptarea paradigmii dreptei de bolișne:

nu retinem informația legată de intersectia dintre drepte de bolișne și figure, ci doar informația legată

de patru diagrampe care nu mai poate fi influentată de
situație năută sub dreptele de boltire. \Rightarrow

\Rightarrow numirea de arc de parabolă

("brace line" / umbra parabolice) ceea ce este rezultat
de acupra nu mai poate fi influentat de evenimentele care
se desfășoară

Care este stabilitul și care sunt evenimentele?

- o Stabilitate: structura umbrelor parabolice; succesiunile de
arce de parabolă \rightarrow arbore binar echilibrat \rightarrow
structuri de | contare în timp
 \rightarrow date | analogie
- o Este modificat de 2 tipuri de evenimente:

Evenimente:

- de tip năut ("năut evant") - întâlnirea unui săt
(un punct din multimea f) apără un nou arc de
parabolă
- de tip arc ("năut evant"): întâlnirea „pentru un
interior” al unui arc care trasează prin cel puțin trei
situații și este tangent la dreptele de boltire \Rightarrow
 \Rightarrow dispără un arc de parabolă \rightarrow vîrf al diagramei
nu vorană