Exerciţii şi probleme

Geometrie computaţională, IDD, Sem. I, 2019-2020

Mihai Sorin Stupariu

1. Produs vectorial. Testul de orientare. Acoperiri convexe

1.1 Calculaţi produsul vectorial $v \times w$ pentru vectorii $v = (1, -1, 0)$, $w = (-2, 1, 3)$.

1.2 Fie $P = (2, 2), Q = (4, 4)$. Stabiliţi, folosind testul de orientare, poziţia relativă a punctelor $R_1 = (8, 8), R_2 = (6, 0), R_3 = (-2, -1)$ faţă de muchia orientată $\overrightarrow{PQ}$. Care este poziţia aceloraşi puncte faţă de muchia orientată $\overrightarrow{QP}$?

1.3 Daţi exemplu de puncte coplanare P, Q, R_1, R_2 din $\mathbb{R}^3$, nesituate într-un plan de coordonate, astfel ca R_1 şi R_2 să fie de o parte şi de alta a segmentului $[PQ]$.

1.4 Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \dots, P_7\}$, unde $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (2, 7)$, $P_3 = (3, 6)$, $P_4 = (4, 5)$, $P_5 = (7, 7)$, $P_6 = (9, 7)$, $P_7 = (11, 1)$. Scrieţi cum evoluează, pe parcursul aplicării Graham's scan, lista $\mathcal{L}_i$ a vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, parcursă în sens trigonometric. Aceeaşi cerinţă pentru marginea superioară $\mathcal{L}_s$.

1.5 Considerăm punctele $A = (-6, 6)$, $B = (1, 6)$, $C = (1, -1)$, $D = (-6, 0)$, $E = (6, 0)$, $F = (3, 2)$, $G = (-4, -2)$, $H = (-1, -2)$, $I = (-2, -2)$. Precizaţi care este numărul maxim de elemente pe care îl conţine $\mathcal{L}$ pe parcursul parcurgerii Graham's scan, indicând explicit punctele respective din $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}$ este lista vârfurilor care determină frontiera acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, iar punctul "intern" considerat este O). Justificaţi!

1.6 Daţi un exemplu de mulţime $\mathcal{M}$ din planul $\mathbb{R}^2$ pentru care, la final, $\mathcal{L}_i$ are 3 elemente, dar, pe parcursul algoritmului, numărul maxim de elemente al lui $\mathcal{L}_i$ este egal cu 5 ($\mathcal{L}_i$ este lista vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew). Justificaţi!

2. Triangularea poligoanelor. Teorema galeriei de artă

2.1 Fie $\mathcal{P}$ poligonul dat de punctele $P_1 = (6,0)$, $P_2 = (2,2)$, $P_3 = (0,7)$, $P_4 = (-2,2)$, $P_5 = (-8,0)$, $P_6 = (-2,-2)$, $P_7 = (0,-6)$, $P_8 = (2,-2)$. Indicaţi o triangulare $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ a lui $\mathcal{P}$ şi construiţi graful asociat perechii $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_\mathcal{P})$.

2.2 Aplicaţi metoda din demonstraţia teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului $P_1P_2\dots P_{10}$, unde $P_1 = (4,5), P_2 = (6,6), P_3 = (4,7), P_4 = (4.8), P_5 = (6,10)$, iar punctele $P_6, \dots, P_{10}$ sunt respectiv simetricele punctelor $P_5, \dots, P_1$ faţă de axa Oy.

2.3 Fie poligonul $\mathcal{P} = (P_1P_2P_3P_4P_5P_6)$, unde $P_1 = (5,0)$, $P_2 = (3,2)$, $P_3 = (-1,2)$, $P_4 = (-3,0)$, $P_5 = (-1,-2)$, $P_6 = (3,-2)$. Arătaţi că Teorema Galeriei de Artă poate fi aplicată în două moduri diferite, aşa încât în prima variantă să fie suficientă o singură cameră, iar în cea de-a doua variantă să fie necesare şi suficiente două camere pentru supravegeherea unei galerii având forma poligonului $\mathcal{P}$.

3. Triangularea mulţimilor de puncte

3.1 Fie $n \geq 2$ un număr natural par fixat. Considerăm mulţimea $\mathcal{M} = \{A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_n, C_0, \dots, C_n, D_0, \dots, D_n\}$, unde $A_i = (i,0)$, $B_i = (0,i)$, $C_i = (i,i)$, $D_i = (n-i,i)$, pentru orice $i = 0, \dots, n$. Determinaţi numărul de triunghiuri şi numărul de muchii ale unei triangulări a lui $\mathcal{M}$.

3.2 Daţi exemplu de mulţime de puncte din $\mathbb{R}^2$ care să admită o triangulare având 3 triunghiuri şi 7 muchii.

3.3 Daţi exemplu de mulţime $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ din $\mathbb{R}^2$ astfel ca $\mathcal{M}$ să admită o triangulare ce conţine 14 muchii.

4. Diagrame Voronoi

4.1 Determinaţi, folosind metoda diagramelor Voronoi, triangularea Delaunay pentru mulţimea formată din punctele $A = (3,5)$, $B = (6,6)$, $C = (6,4)$, $D = (9,5)$ şi $E = (9,7)$.

4.2 Determinaţi numărul de semidrepte conţinute în diagrama Voronoi asociată mulţimii de puncte $\mathcal{M} = \{A_0, \dots, A_5, B_0, \dots, B_5, C_0, \dots, C_5\}$, unde $A_i = (i+1, i+1)$, $B_i = (-i, i)$ şi $C_i = (0, i)$, pentru $i = 0, \dots, 5$.

4.3 Daţi exemplu de mulţimi $\mathcal{M}_1$ şi $\mathcal{M}_2$ din $\mathbb{R}^2$, fiecare având câte 4 puncte, astfel ca, pentru fiecare dintre ele, diagrama Voronoi asociată să conţină exact 3 semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ să conţină exact 6 semidrepte.

4.4 Demonstraţi că dacă punctele din mulnţtimea $\mathcal{P}$ nu sunt coliniare, diagrama Voronoi Vor($\mathcal{P}$) nu poate conţine drepte.

5 Intersecţii

5.1 Fie punctele $P_1 = (4,3), P_2 = (1,1), P_3 = (6,2), P_4 = (11,8)$; $Q_1 = (4,5)$, $Q_2 = (9,9), Q_3 = (6,7), Q_4 = (11,0)$. Pentru fiecare $i = 1,\ldots,4$ notăm cu s_i segmentul $[P_iQ_i]$. Scrieţi cum evoluează statutul liniei de baleiere, precum şi evenimentele care determină modificarea sa (linia de baleiere este orizontală, iar statutul este o mulţime <u>neordonată</u> de segmente).

5.2 Fie punctele $A_1 = (6,1), A_2 = (3,2), A_3 = (1,8), A_4 = (13,7)$; $B_1 = (6,6)$, $B_2 = (11,10), B_3 = (9,0), B_4 = (13,-1)$. Scrieţi cum evoluează statutul liniei de baleiere, precum şi evenimentele care determină modificarea sa (linia de baleiere este orizontală, iar statutul este o mulţime <u>ordonată</u> de segmente).

5.3 Fie punctele $P_1 = (4,-1), P_2 = (2,8), P_3 = (3,3), P_4 = (7,0)$; $Q_1 = (4,11)$, $Q_2 = (8,2), Q_3 = (10,10), Q_4 = (7,4)$. Pentru fiecare $i = 1,\ldots,4$ notăm cu s_i segmentul $[P_iQ_i]$. Considerăm linia de baleiere l dată de ecuaţia $y = 9$. Indicaţi evenimentele deja eliminate din coada de evenimente $\mathcal{Q}$, cele rămase în $\mathcal{Q}$, cele care urmează să fie incluse ulterior în $\mathcal{Q}$ şi precizaţi statutul corespunzător lui l (statutul este o mulţime ordonată de segmente).

5.4 Explicaţi cum poate fi parcursă frontiera unei feţe şi cum pot fi găsite toate muchiile din jurul unui vârf, folosind pointerii asociaţi elementelor unei subdiviziuni planare.

5.5 Considerăm un dreptunghi D din interiorul căruia este scos un dreptunghi Δ. Descrieţi subdiviziunea planară asociată.

6 Analiza algoritmilor

6.1 Fie MNP un triunghi cu vârfurile $M = (x_M, y_M)$, $N = (x_N, y_N)$, $P = (x_P, y_P)$ şi fie δ o dreaptă de ecuaţie $ax + by + c = 0$. Stabiliţi şi justificaţi care este complexitatea algebrică a calculelor pentru:

a) a stabili dacă dreapta intersectează laturile triunghiului;

b) a stabili dacă dreapta trece prin centrul de greutate al triunghiului.

6.2 a) În algoritmul Graham's scan este ales un punct interior care devine originea pentru un sistem de coordonate polare. Explicaţi, pe scurt, ce s-ar întâmpla dacă acest punct ar fi ales în exteriorul acoperirii convexe.

b) Considerăm algoritmul Intersectii, bazat pe metoda liniei de baleiere, de determinare a punctelor de intersecţie pentru o mulţime de n segmente. Explicaţi pe scurt, făcând referire la structurile de date folosite şi la paşii algoritmului, de ce complexitatea este $O(n \log n + k \log n)$, unde k este numărul de evenimente analizat.