

1) Folosind definitia convergentei unei serii sa se stabileasca natura urmatoarelor serii numerice, iar in caz de convergenta sa se calculeze suma.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^{n+1}}{6^n} \end{aligned}$$

2) Studiat convergenta seriilor

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n + 4^n} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{4^n} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 + 2n + 1} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n) \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \cdot a^n, a > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n\sqrt{n}} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2) \cdots (a+n)}, a \in \mathbb{R} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2} \right)^{\frac{n^2}{n+2}} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2n^3 + 1}
\end{aligned}$$

3) Consideram urmatoarele multimi din \mathbb{R}^2

$$A = [0, 1] \times (0, 2), \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}, \quad C = \{1\} \times \mathbb{R}$$

Care dintre aceste multimi sunt deschise ? Care dintre aceste multimi sunt inchise ? Care dintre aceste multimi sunt compacte ? Justificati raspunsul !

4) Consideram urmatoarele multimi din \mathbb{R}^3

$$A = [0, 1] \times 0, 2 \times [1, 3], \quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 9\}, \quad C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z > 9\}$$

Care dintre aceste multimi sunt deschise ? Care dintre aceste multimi sunt inchise ? Care dintre aceste multimi sunt compacte ? Justificati raspunsul !

5) Sa se studieze continuitatea functiilor

$$\begin{aligned}
1) \quad f(x) &= \begin{cases} x^2 & \text{daca } -1 \leq x \leq 1 \\ |x| & \text{daca } |x| > 1 \end{cases} & 2) \quad f(x) &= \begin{cases} 0 & \text{daca } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{daca } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \\
3) \quad f(x) &= \begin{cases} x + 2 & \text{daca } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{daca } x \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

6) Studiați continuitatea uniformă a următoarelor funcții:

1) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$

2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x + 1$

3) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$

7) Să se studieze convergența simplă și uniformă a următoarelor serii de funcții:

1) $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{nx + 1}$

2) $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$

3) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$

4) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{x + n}$

5) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$

6) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx^2}{1 + nx^2}$

7) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x}$