Examen CALCUL NUMERIC, ID, 14 Iunie 2020

Câteva instrucţiuni:
- Foaia cu răspunsuri pe care o trimiteţi în fişier, să fie scrisă de mână.
- Nu uitaţi să vă scrieţi **numele** *şi* **prenumele** *pe foaia cu răspunsuri şi să adăugaţi copie* **carnet de student** *şi/sau* **carte de identitate**.
- Pe foaie, pentru fiecare exercitiu, scrieţi doar litera corespunzătoare răspunsului pe care îl obţineti sau îl consideraţi corect. Dacă la o intrebare alegeţi mai multe variante, nu se punctează. O singură variantă este corectă.
- NOTA = 1 punct din oficiu + puncte test grilă examen (maxim 9).
- Durata examen: 2 ore.

1. [*1p*] Forma matricială a sistemului

$$\begin{cases} 2x - y - z = 2 \\ x - y + 2z = -2 \\ x - 3y - z = -1 \end{cases} \tag{1}$$

este:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. [*1p*] Prin aplicarea metodei Gauss cu pivotare totală sistemului (1) se obţine următoarea matrice extinsă:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{13}{7} & \frac{13}{7} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{13}{7} & \frac{13}{7} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{13}{7} & -\frac{13}{7} \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{13}{7} & \frac{13}{7} \end{pmatrix}$;

3. [*1p*] Fie sistemul triunghiular:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + \; a_{22}x_2 & & & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + \; a_{n2}x_2 & + \; \dots & + \; a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}, \tag{2}$$

unde $a_{ii} \neq 0\,,\ i = \overline{1, n}$.

Soluţia sistemului (2) este:

a) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_i = \left(b_i - \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right) : a_{ii} \end{cases}, i = \overline{2, n}.$; b) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_i = \left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\right) : a_{ii} \end{cases}, i = \overline{2, n}.$;

c) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_i = \left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\right) a_{ii} \end{cases}, i = \overline{2, n}.$; d) $\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_i = \left(b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j\right) : a_{ii} \end{cases}, i = \overline{2, n}.$; .

4. [*1p*] Dacă matricea unui sistem liniar este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

atunci una dintre afirmaţiile următoare este adevărată:

a) metodele Jacobi şi Gauss-Seidel sunt amândouă convergente: $\rho\left(\mathcal{J}(A)\right) = 0$ şi $\rho\left(\mathcal{G}(A)\right) = \dfrac{1}{2}$;

b) metoda Jacobi este divergentă şi metoda Gauss-Seidel este convergentă: $\rho\left(\mathcal{J}(A)\right) = 2$ şi $\rho\left(\mathcal{G}(A)\right) = 0$;

c) metoda Jacobi este convergentă şi metoda Gauss-Seidel este divergentă: $\rho\left(\mathcal{J}(A)\right) = 0$ şi $\rho\left(\mathcal{G}(A)\right) = 2$;

d) metodele Jacobi şi Gauss-Seidel sunt amândouă divergente: $\rho\left(\mathcal{J}(A)\right) = 2$ şi $\rho\left(\mathcal{G}(A)\right) = 2$.

5. [*1p*] Pentru ecuaţia $f(x) = 0$, unde $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie de două ori derivabilă cu $f'(x) > 0$ şi $f''(x) < 0$, $\forall x \in [a, b]$, şirul de aproximaţii $(x_m)_{m \geq 0}$ cu

$$x_0 = a \text{ şi } x_{m+1} = x_m - f\left(x_m\right) \frac{x_m - a}{f\left(x_m\right) - f(a)} \qquad \text{pentru } m \geq 0\,,$$

este obţinut prin:

a) metoda bisecţiei; b) metoda tangentei; c) o metodă mixtă; d) metoda coardei.

6) [*1p*] Aplicând metoda rotaţiilor matricei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

într-un număr finit de paşi, se obţin următoarele valorii proprii:

a) $\lambda_1 = 1 - 2\sqrt{2}\,;\ \lambda_2 = 5\,;\ \lambda_3 = 1 + 2\sqrt{2}$; b) $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}\,;\ \lambda_2 = 5\,;\ \lambda_3 = 1 + \sqrt{2}$;

c) $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}\,;\ \lambda_2 = 5\,;\ \lambda_3 = 2 + \sqrt{2}$; d) $\lambda_1 = 1 + 2\sqrt{2}\,;\ \lambda_2 = 5\,;\ \lambda_3 = 1 - \sqrt{2}$.

7) [*1p*] Folosind metoda rotaţiilor, o mulţime de vectori proprii pentru matricea A din (3), este dată prin:

a) $\left\{(1,0,\sqrt{2})\,;\,(1,-1,0)\,(1,0,-\sqrt{2})\right\}$; b) $\left\{(1,1,\sqrt{2})\,;\,(-1,1,0)\,(1,1,-\sqrt{2})\right\}$;

c) $\left\{(1,-1,\sqrt{2})\,;\,(-1,1,0)\,(-1,1,-\sqrt{2})\right\}$; d)$\left\{(1,1,\sqrt{2})\,;\,(1,1,0)\,(1,-1,\sqrt{2})\right\}$.

8) [*1p*] Fie $f:(,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$. Polinomul pentru următoarea problema de interpolare

$$\begin{array}{l} n=3; \\ x_1=0,\ k_1=2,\ y_{11}=f\left(x_1\right),\ y_{12}=f'\left(x_1\right); \\ x_2=1,\ k_2=2,\ y_{21}=f\left(x_2\right),\ y_{22}=f'\left(x_2\right); \\ x_3=2,\ k_3=1,\ y_{31}=f\left(x_3\right), \end{array}$$

determinat prin formula Newton ascendentă, este:

a) $p(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^2(x-1)+\frac{1}{12}x^2(x-1)^2$;

b) $p(x)=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^2(x-1)-\frac{1}{12}x^2(x-1)^2$;

c) $p(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^2(x-1)-\frac{1}{12}x^2(x-1)^2$;

d) $p(x)=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^2(x-1)+\frac{1}{12}x^2(x-1)^2$.

9) [*1p*] Se dă următoarea formulă de integrare numerică:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \simeq c_1\, f\left(\frac{1}{3}\right)+c_2\, f\left(\frac{1}{2}\right)+c_3\, f\left(\frac{2}{3}\right). \tag{4}$$

Dacă formula (4) este exactă pentru polinoame până la gradul 2, atunci coeficienţii c_1, c_2, c_3 au valorile:

a) $c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=\frac{1}{4}$, $c_3=\frac{1}{4}$;

b) $c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=-1$, $c_3=\frac{3}{2}$;

c) $c_1=\frac{3}{2}$, $c_2=-2$, $c_3=\frac{3}{2}$;

d) $c_1=\frac{1}{4}$, $c_2=\frac{1}{2}$, $c_3=\frac{1}{4}$.