CAPITOLUL 2

NOȚIUNI FUNDAMENTALE ÎN TEORIA PROBABILITĂȚILOR

1. Experiment aleator. Spațiu de selecție

Definiția 1.1 Prin *experiment aleator* vom înțelege orice acțiune care poate fi repetată în condiții similare în care nu se cunoaște dinainte rezultatul, dar se cunosc dinainte toate rezultatele posibile.

Exemplul 1.1

a) Observarea pe un interval T de timp a funcționării unui agregat

b) Înregistrarea consumului de energie electrică de către un mare combinat.

Definiția 1.2 *Spațiul de selecție al unui experiment*, notat prin S, este mulțimea tuturor rezultatelor posibile ale experimentului.

Exemplul 1.2 Cel mai simplu experiment este acela în care sunt posibile două rezultate. Un astfel de experiment constă în verificarea unui transistor pentru a vedea dacă este corespunzător sau nu. Spațiul de selecție al acestui experiment este: S= {C, D} (corespunzător, defect).

Exemplul 1.3 Un nou tip de baterie se consideră corespunzătoare dacă are voltajul între anumite limite. Un experiment constă în verificarea bateriilor ce ies de pe banda de fabricație până când se obține prima baterie defectă.

Spațiul de selecție în acest caz este:

S= { D, CD, CCD, ...}

unde cu D am notat că bateria verificată este defectă iar cu C - bateria este bună.

2. Evenimente

Definiția 2.1 Un *eveniment* este orice submulțime de rezultate conținute în spațiul de selecție S.

Un *eveniment* este *elementar* (sau simplu) dacă el constă exact dintr-un rezultat și *compus* dacă constă din mai multe rezultate.

Definiția 2.2

Evenimentul sigur este evenimentul care se realizează întotdeauna ca rezultat al experienței; va fi notat cu E (se asociază mulțimii totale).

Evenimentul imposibil nu se poate realiza ca rezultat al unei experiențe; va fi notat cu ∅ (corespunde mulțimii vide).

Definiția 2.3 *Evenimentele A și B sunt compatibile* dacă se pot realiza simultan.

Definiția 2.4 *Evenimentul A implică evenimentul B* și scriem $A \subset B$, dacă realizarea evenimentului A implică realizarea evenimentului B.

Două evenimente A și B sunt *echivalente* dacă $A \subset B$ și $B \subset A$.

Definiția 2.5 Vom numi *reuniunea evenimentelor* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ și o vom nota prin $\bigcup_{j=1}^{k} A_j$, evenimentul care se realizează când cel puțin unul din evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_k$ se realizează.

Vom numi *intersecție a evenimentelor* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ și o vom nota prin $\bigcap_{j=1}^{k} A_j$ evenimentul care se realizează când se realizează toate evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Definiția 2.6 Evenimentele A și B se numesc *incompatibile* dacă nu se pot realiza simultan; scriem $A \cap B = \varnothing$.

Exerciții:

1) $\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}, \quad \overline{\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}$

2) Dacă $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$

3) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

3. Definiția clasică a probabilității

Probabilitatea unui eveniment este o măsură numerică a posibilității efective de realizare a evenimentului. Ea este legată de noțiunea de frecvență relativă de realizare a evenimentului.

Să considerăm un experiment în urma căruia poate sau nu să apară evenimentul A și să notăm cu "k" numărul de realizări ale acestui eveniment în "n" repetări ale experienței.

Definiția 3.1 Raportul $\nu(A) = \frac{k}{n}$ se numește *frecvența relativă* de apariție a evenimentului A.

După cum vom vedea mai departe, ν(A) pentru valori mari ale lui "n" se stabilizează în jurul unei valori, numită probabilitatea evenimentului A. Acest rezultat își găsește justificarea în Legea numerelor mari pe care o vom prezenta în capitolul 5.

Definiția 3.2 Un caz se numește ***favorabil pentru un eveniment***, dacă apariția sa antrenează realizarea evenimentului respectiv.

Definiția 3.3 Orice experiment care satisface condiția că mulțimea rezultatelor sale S este ***o mulțime finită de evenimente egal verosimile sau egal probabile***, adică

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \ldots = P(\{e_n\}) = \frac{1}{n}$$

este numit *modelul urnei*.

Definiția 3.4 Dacă într-un experiment cu "n" rezultate, "k" dintre ele favorizează evenimentul A, definim *probabilitatea* P(A) *a evenimentului A* ca

$$P(A)=\frac{k}{n} \tag{3.1}$$

Observație. Numărul tuturor cazurilor favorabile se găsește întotdeauna între "0" și "n" și astfel P(A) calculată cu formula (3.1) se află între "0" și "1".

Vom reaminti câteva din rezultatele de combinatorică utile pentru rezolvarea unor asemenea probleme.

Numărul de grupe de câte "k" obiecte obținute din "n" obiecte în care obiectele diferă între ele într-o aceeași grupă prin ordine și compoziție este dat de

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$$ (*aranjamente* de "n" luate câte "k").

Dacă într-o aceeași grupă, obiectele se pot *repeta* atunci avem de a face cu *aranjamente cu repetiție* iar numărul acestora este $\alpha_n^k=n^k$.

Numărul de grupe de câte "k" obiecte obținute din "n" obiecte astfel că grupele diferă între ele prin elementele care le conțin este dat de $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (*combinări* de "n" obiecte luate câte "k").

Dacă într-o asemenea grupă obiectele se repetă atunci se obțin combinări cu repetiție iar numărul acestora este $\gamma_n^k=C_{n+k-1}^k$.

Exemplul 3.1 Un grup de 12 persoane se așează în jurul unei mese rotunde. Care este șansa ca două persoane anumite să se afle alături?

Șansa este cuantificată prin frecvența relativă v(A) (unde A este acest eveniment).

$$v(A)=\frac{10!\times 12\times 2}{12!}$$

Exemplul 3.2 Într-un lot de "N" piese, proporția de piese defecte este $0\le\theta<1$, deci $N\theta$ sunt piese defecte. Dacă se extrag la întâmplare "n" piese care este șansa (probabilitatea) ca printre ele să se afle "k" piese defecte?

R În acest caz

$$v(A)=\frac{C_{N\theta}^k C_{N-N\theta}^{n-k}}{C_N^n}$$

Paradoxuri în teoria probabilităților

Sursa paradoxurilor în teoria probabilităților apare legată de expresia "alegere la întâmplare". Vom prezenta unul din paradoxurile cele mai cunoscute - paradoxul lui Bertrand.

Fie un cerc cu raza R= 1 și o coardă A_1A_2 absolut oarecare (aleasă la întâmplare). Problema este: care este probabilitatea ca lungimea corzii să fie mai mică decât lungimea laturii triunghiului echilateral înscris în cerc?

Bertrand a propus următoarele *trei raționamente*:

1) distanța de la centru la latura triunghiului echilateral este $\frac{R}{2}$; deci în acest caz probabilitatea este $\frac{1}{2}$.

Evenimentul considerat se va realiza dacă distanța de la centru la coardă depășește 1/2, deci, probabilitatea căutată este de $\frac{1}{2}$.

2) deoarece coarda A_1A_2 va fi mai scurtă decât latura triunghiului echilateral cu un vârf în A_1 dacă vârful A_2 se află pe cerc la distanță inferioară lui $\frac{2\pi}{3}$ de A_1.

Atunci probabilitatea aceluiași eveniment este $\frac{2\times\frac{2\pi}{3}}{2\pi}=\frac{2}{3}$.

3) Se mai poate judeca și altfel și anume: coarda A_1A_2 este perfect determinată de mijlocul său M și ea va fi mai mică decât latura triunghiului echilateral înscris în cerc dacă M nu va aparține discului de rază $\frac{1}{2}$. Suprafața acestui disc fiind de $\frac{1}{4}$ din cea a discului unitate, probabilitatea căutată este $\frac{3}{4}$.

Toate aceste raționamente sunt corecte dar fiecare în anumite condiții ce au în vedere definirea termenului: "ales la întâmplare".

4. Axiomele probabilității. Câmp de probabilitate

Teoria modernă a probabilităților a fost fondată la începutul sec.XX. O contribuție esențială a avut-o matematicianul rus A. Kolmogorov. Fie E o mulțime care va reprezenta pentru noi, mulțimea evenimentelor simple (rezultate posibile ale unei experiențe).

Definiția 4.1 $\mathcal{B}$ *este o σ - algebră* dacă

a) $\varnothing, E\in\mathcal{B}$

b) Dacă $A\in\mathcal{B}$ atunci $\overline{A}\in\mathcal{B}$

c) Dacă $(A_n)_{n\in N^*}$, $A_n\in\mathcal{B}$ atunci $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{B}$.

Consecințe. $\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n}=\bigcup_{1}^{\infty}\overline{A}_n\in\mathcal{B}$.

Perechea $(E, \mathcal{B})$ se numește *câmp de evenimente.*

Definiția 4.2 Se numește *probabilitate pe* $\mathcal{B}$ o funcție nenegativă $P: \mathcal{B} \to \mathbf{R}^+$ cu proprietățile:

a) $P(E)=1$

b) $0 \le P(A) \le 1$ dacă $A \in \mathcal{B}$

c) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ dacă $A_i \cap A_j = \varnothing, i \ne j$

Consecințe

1) $P(\varnothing) = P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 0$

2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ deoarece $A \cup \overline{A} = E$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$

3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dacă $A \cap B \ne \varnothing$.

Relația 3) se demonstrează astfel:

$A = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ cu $A \cap B \cap \overline{B} = \varnothing$.

$B = B \cap (A \cup \overline{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ cu $B \cap A \cap \overline{A} = \varnothing$.

iar $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

Aplicând c) din definiția probabilității rezultă

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$

$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{A})$

iar din aceste trei relații deducem 3). O inducție matematică se poate aplica pentru a calcula:

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k)$ atunci când evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sunt oarecari.

Se obține:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} P(A_j) - \sum_{i<j}\sum P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<s}\sum\sum P(A_i \cap A_j \cap A_s) -$$

$$- \ldots\ldots + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_k)$$

4) Dacă $A \subseteq B$ atunci $P(A) \le P(B)$

5) $P\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_j\right) \le \sum_{1}^{\infty} P(A_j)$

6) Dacă $(A_j)_{1 \le j \le k}$ este *o partiție* a evenimentului sigur, adică $E = \bigcup_{1}^{k} A_j$ cu $A_j \cap A_i = \varnothing$ $(\forall) i \ne j$ atunci $\sum_{j=1}^{k} P(A_j) = 1$.

Definiția 4.3 Tripletul $(E, \mathcal{B}, P)$ se numește *câmp de probabilitate.*

Exemple:

4.1 Erorile introduse de un aparat de măsură atunci când etalonul este "a" se află într-un interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Acest interval reprezintă evenimentul sigur E. Mulțimea subintervalelor lui E formează mulțimea $\mathcal{B}$ care în acest caz este $\mathcal{P}(E)$ (mulțimea părților mulțimii E), iar probabilitatea este o funcție care asociază fiecărei asemenea submulțimi un număr real și pozitiv cu proprietățile din definiția 1.2.

4.2 Becurile produse într-o zi la o fabrică specializată reprezintă evenimente elementare pentru evenimentul sigur E care în acest caz este dat de mulțimea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ unde "n" este norma zilnică. Dacă suntem interesați de becurile defecte ele reprezintă submulțimi ale lui E, iar probabilitatea asociază fiecăreia din aceste submulțimi un număr care verifică proprietățile din definiția 1.2 (probabilitatea va fi definită ca: numărul de becuri defecte raportat la numărul total de becuri).

5. Probabilități condiționate

Definiția 5.1 Două evenimente A și B din $\mathcal{B}$ sunt *independente* dacă ele nu se influențează, adică realizarea evenimentului A nu depinde de realizarea lui B și reciproc.

Dacă evenimentele nu sunt independente vom spune că ele sunt dependente.

Definiția 5.2 Se numește *probabilitate condiționată a evenimentului* A *de către evenimentul* B și se notează $P(A \mid B)$ sau $P_B(A)$ probabilitatea de realizare a evenimentului A calculată în condiția că evenimentul B s-a realizat ($P(B) > 0$) și se definește ca:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P_B(A)$

Observație

a) Se arată fără dificultate că $P(\bullet \mid B)$ este o probabilitate conformă cu definiția 1.2.

b) Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sunt evenimente ale aceluiași câmp de probabilitate atunci:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1) \ldots P(A_k \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$$

Exemplul 5.1 (*Urna lui Polya*) O urnă conține două bile albe A și o bilă neagră N. Se extrage o bilă și apoi în urnă se introduce bila extrasă și încă o bilă de aceeași culoare cu ea. Procedeul se repetă încă odată și a 3-a oară se extrage o bilă, după care experiența se oprește.

Evenimentele simple rezultat ale acestei experiențe sunt:

(N, N, N), (N, N, A), (N, A, N), (N, A, A)

(A, N, N), (A, N, A), (A, A, N), (A, A, A)

Notăm X_i evenimentul care constă în extragerea unei bile negre la proba "i" și Y_i evenimentul - bilă albă la proba "i", i= 1, 2, 3.

Astfel: $P(X_1) = \frac{1}{3}, P(Y_1) = \frac{2}{3}$

$$P(Y_2 | Y_1) = \frac{3}{4}, P(X_2 | Y_1) = \frac{1}{4}$$

$$P(Y_2 | X_1) = \frac{1}{2}, P(X_2 | X_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(Y_3 | Y_1 \cap Y_2) = \frac{4}{5}, P(X_3 | Y_1 \cap Y_2) = \frac{1}{5}$$

Probabilitatea de a obține la fiecare probă bile albe este

$$P(Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3) = P(Y_1)\, P(Y_2 | Y_1)\, P(Y_3 | Y_1 \cap Y_2) = \frac{2}{5}.$$

Definiția 5.3 Spunem că evenimentele $A_1, A_2, ..., A_k$ sunt independente în totalitate dacă: sunt independente două câte două, sunt independente trei câte trei, ..., sunt independente toate "k".

În acest caz:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) = P(A_1)\, P(A_2) ... P(A_k)$$

Observație. Dacă evenimentele sunt independente două câte două nu rezultă că sunt independente în totalitate.

Exemplul 5.2

Într-un lot de 100 televizoare s-au găsit 4 televizoare defecte:

un televizor nu are imagine

un televizor are defect de sunet

un televizor nu primește curent de la rețea

un televizor are toate cele trei defecte de mai sus.

Atunci, dacă A este evenimentul - televizorul nu are imagine, B este evenimentul - televizorul nu are sunet, C este evenimentul - televizorul nu primește curent de la rețea putem scrie:

$P(A) = \frac{1}{2} = P(B) = P(C)$, iar $P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(A \cap C) = \frac{1}{4}$ ceea ce arată că evenimentele A, B, C sunt independente două câte două $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$.

Observație: Dacă $(E, \mathcal{B}, P)$ este un câmp de probabilitate și $A \in \mathcal{B}$ cu $P(A) > 0$ atunci $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ este o probabilitate, deci $(E, \mathcal{B}, P_A)$ este un câmp de probabilitate.

Formula probabilității totale:

Fie $(A_j)_{1 \le j \le k}$ o partiție a mulțimii E ceeace înseamnă că: $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$ $P(A_J) > 0$, $j \in \overline{1, n}$, iar $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = E$ și fie X un eveniment oarecare, $X \in \mathcal{B}$.

Atunci

$$P(X) = P(X \cap E) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} (X \cap A_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} P(X \cap A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) P_{A_j}(X)$$

Obținem deci că:

$$P(X) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) P_{A_j}(X)$$

care este fomula probabilității totale.

Exemplul ~~5.3.~~ Un utilaj se poate defecta din patru motive: H_1, H_2, H_3, H_4 cu probabilitățile lor de apariție: $P(H_1) = 0{,}2$; $P(H_2) = 0{,}4$; $P(H_3) = 0{,}3$; $P(H_4) = 0{,}1$. Probabilitățile cu care utilajul se defectează datorită apariției uneia din aceste cauze sunt: $P(A|H_1) = 0{,}9$; $P(A | H_2) = 0{,}1$; $P(A | H_3) = 0{,}6$; $P(A | H_4) = 0{,}3$. Care este probabilitatea ca utilajul să se defecteze?

Formula probabilității totale conduce la

$$P(A) = \sum_{j=1}^{4} P(H_j) P(A|H_j) = 0{,}43$$

Formula lui Bayes

Dacă $E = \bigcup_{j=1}^{4} H_j$, cu $(H_j)_{1 \le j \le 4}$ o partiție a mulțimii E și $X \in \mathcal{B}$ este un eveniment oarecare:

$$P(X \cap H_j) = P(X) \cdot P(H_j | X) = P(H_j) \cdot P(X | H_j)$$

pentru orice $1 \le j \le 4$.

Rezultă că

$$P(H_j | X) = \frac{P(H_j) \cdot P(X | H_j)}{P(X)}$$

sau, din formula probabilității totale:

$$P(H_j | X) = \frac{P(H_j) \cdot P(X | H_j)}{\sum_{j=1}^{4} P(H_j) P(X | H_j)}$$

relație cunoscută sub numele de ***Formula lui Bayes***.

Observație: În formula lui Bayes apar $P(H_j)$ care se numesc *probabilități apriori* și $P(H_j \mid X)$ care se numesc *probabilități posteriori*.

Dacă primele sunt cunoscute înainte de producerea evenimentului X, cele posteriori se pot cunoaște și determina abia după producerea evenimentului X. Deci, realizarea lui X crește informația asupra acestora.

Exemplul 5.4 Trei mașini A, B, C fiecare cu o capacitate zilnică de 4000 de produse lucrează cu următoarele performanțe. Probabilitatea ca o piesă să fie defectă este **0,01**; 0,02 și 0,04 pentru mașinile **A, B** și C respectiv. Într-o aceeași zi mașina A a produs 3900 de piese, mașina B - 4200 piese, iar mașina C - 3600 piese. O piesă este aleasă la întâmplare din producția acelei zile; se constată că ea este defectă. Care este probabilitatea ca ea să fi fost produsă de mașina C?

Soluție. $P(A) = \dfrac{3900}{11700} = 0{,}33;\; P(B) = \dfrac{4200}{11700} = 0{,}36$

și

$$P(C) = \frac{3600}{11700} = 0{,}31$$

De asemenea, dacă notăm cu D - evenimentul: piesa este defectă.

$P(D \mid A) = 0{,}01;\; P(D \mid B) = 0{,}02;\; P(D \mid C) = 0{,}04.$

Aplicând formula lui Bayes, obținem:

$$P(C|D) = \frac{P(C)\cdot P(D|C)}{\sum P(A)\cdot P(D|A)} = \frac{0{,}31\cdot 0{,}04}{0{,}0229} = 0{,}54$$

Observație. P(C) este probabilitatea apriorică a evenimentului C care este: o piesă este produsă de mașina C, iar P(C|D) este probabilitatea posterioară ca o piesă să fie produsă de mașina C. Ea diferă de probabilitatea apriorică pentru că conține mai multă informație.

Probleme propuse

1. Un circuit electronic se compune din: trei tranzistori, patru condensatori și cinci rezistori. Considerăm evenimentele:

A_k - defectarea tranzistorului k (k = 1, 2, 3)
B_j - defectarea rezistorului j (j = 1, 2, 3, 4, 5)
C_s - defectarea condensatorului s (s = 1, 2, 3, 4).

Circuitul este bun dacă toți tranzistorii, cel puțin doi condensatori și cel puțin un rezistor sunt buni. Să se exprime evenimentul X - circuitul este bun.

2. Dacă A, B, C sunt evenimente oarecari, să se arate că:

$(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

$(A - B) = (A \cap \overline{B})$

3. Dacă A și B sunt evenimente independente rezultă că $\overline{A}$ și $\overline{B}$ sunt deasemenea independente?

4. Scrieți în ordine crescătoare probabilitățile: $P(A_1)$, $P(A_1 \cap A_2)$, $P(A_1) + P(A_2)$, $P(A_1 \cup A_2)$, dacă $0 < P(A_j) < 1$, $j = 1, 2$.

5. Dacă $P(A \cap B \cap C) = 0{,}04$, $P(A) = 0{,}1$ și $P(B \mid A) = 0{,}8$ să se afle $P(C \mid A \cap B)$.

6. Trei studenți se prezintă la un concurs pentru acordarea unor burse de doctorat.

Performanțele lor anterioare sunt cuantificate prin următoarele procente: I - 0,84, II - 0,90, III - 0,75.

a) Care este probabilitatea ca toți să câștige bursa?
b) Care este probabilitatea ca cel puțin doi dintre ei să câștige bursă?

7. Arătați că dacă A_1 și A_2 sunt evenimente independente atunci $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})$.

8. Dacă A și B sunt evenimente ce pot să apară în urma unei experiențe și se cunoaște $P(B) = 0{,}4$, $P(A|B) = 0{,}3$, $P(A|\overline{B}) = 0{,}2$ să se afle $P(A)$, $P(\overline{A} \cup \overline{B})$ și $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

9. Dacă evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt două câte două incompatibile și $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ atunci:

$$P_A(B) = \frac{P(A_1)}{P(A)}P(B|A_1) + \ldots + \frac{P(A_n)}{P(A)}P(B|A_n)$$

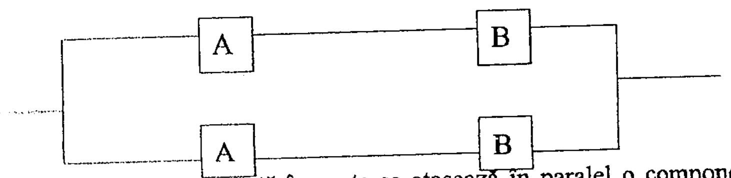
unde B este un eveniment oarecare.

10. Trei automobile ajung la o intersecție triplă, fiecare venind din direcții diferite. Care este probabilitatea ca toți trei automobiliști să meargă în aceeași direcție.

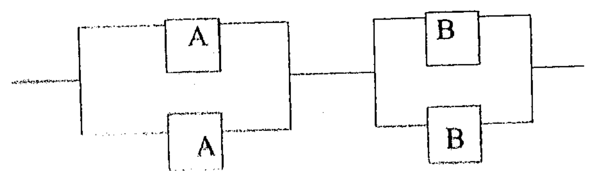
R: $\dfrac{1}{9}$

11. Se urmărește creșterea probabilității de funcționare a unui sistem cu două componente: A și B. Pentru aceasta se poate proceda în două moduri:

a) Se atașează în paralel cu sistemul dat un sistem de rezervă identic cu sistemul inițial



b) Pentru fiecare componentă în parte se atașează în paralel o componentă identică



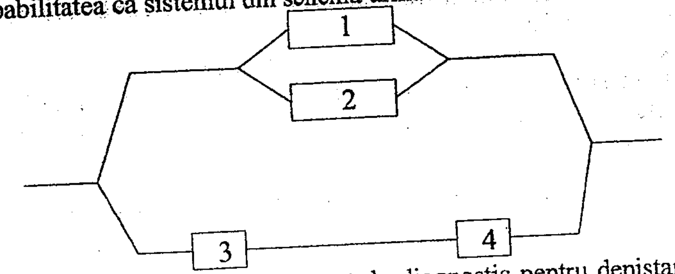
35

Dacă notăm cu p_1 probabilitatea de funcționare a componentei A și cu p_2 probabilitatea de funcționare a componentei B, care dintre aceste metode este mai bună?

R: a doua metodă este mai bună deoarece:

$P_a = p_1p_2(2-p_1p_2)$, iar $P_b = p_1p_2(2-p_1)(2-p_2)$.

12. Dacă p_i este probabilitatea ca componenta "i", i = 1,2,3,4 să funcționeze găsiți probabilitatea ca sistemul din schema următoare să funcționeze:



13. Presupunem că se face un test de diagnostic pentru depistarea hepatitei cronice. El are probabilitatea de reușită de 0,98.

Fie A_1 evenimentul - pacientul are hepatită

A_2 evenimentul - pacientul nu are hepatită

A_3 evenimentul - pacientul are reacție pozitivă la test.

În populația studiată probabilitatea ca un individ să aibă hepatită este: $P(A_1) = 0{,}012$, iar $P(A_2) = 0{,}998$.

Știind că:

$P(A_3|A_1) = 0{,}98$; $P(A_3|A_2) = 0{,}02$

care este probabilitatea ca un individ din această populație care reacționează pozitiv la test să fie într-adevăr bolnav de hepatită? (adică $P(A_1|A_3)$)

14. Dacă 2% din piesele fabricate de o mașină sunt defecte, defecte ce apar în producție și aceste piese sunt ambalate în cutii de câte 1 000 bucăți care este probabilitatea ca o cutie să conțină "k" piese defecte?

R: $P = C_{1000}^{k}\left(\frac{2}{100}\right)^{k}\left(1-\frac{2}{100}\right)^{100-k}$, $k = 0,1,\ldots,1000$

15. Un patron vrea să angajeze patru tineri ingineri. La concurs s-au înscris 12 candidați. În prima zi au fost testați 7 din cei 12 candidați, iar a doua zi 5. Care este probabilitatea ca trei din cei patru reușiți la concurs să fi fost testați în prima zi?

16. Într-o cutie se află ambalate becuri de 100 W produse de două fabrici: 15 de la fabrica I și 15 de la fabrica II.

Un cumpărător, cumpără 6 becuri. Care este probabilitatea ca între becurile cumpărate să se afle mai multe produse de la fabrica I, decât la fabrica II.

17. Într-o uzină de automobile fiecare din electromotoarele ce urmează a fi montate pe mașină pot avea un defect cu probabilitatea 0,05. Ele sunt verificate și probabilitatea ca defectul să fie depistat de controlorul de calitate este 0,98. El poate greși și respinge un electromotor bun cu probabilitatea 0,01.

Determinați probabilitatea : un electromotor este respins.

CAPITOLUL 3

VARIABILE ALEATOARE DISCRETE

1. Variabile aleatoare. Funcție de repartiție.

Definiția 1.1 *Variabila aleatoare* este o funcție X sau $f : E \to \mathbf{R}$ care asociază evenimentelor $e \in E$, numerele reale $X(e) \in \mathbf{R}$.

Altfel spus, $X : E \to \mathbf{R}$ este variabilă aleatoare dacă pentru fiecare $x \in \mathbf{R}$, evenimentul definit de $X^{-1}(x) = \{e \in E, X(e) = x\}$ aparține mulțimii $\mathcal{B}$.

Observație: După cum se vede denumirea de *variabilă aleatoare* dată acestei noțiuni importante din teoria probabilităților nu are nimic aleator; ea este perfect determinată pentru evenimentele din E.

De asemenea ea nu este o variabilă ci este o funcție așa cum rezultă și din definiție.

Definiția 1.2 Funcția $F_X : \mathbf{R} \to [0, 1]$ definită prin:

$$F_X(x) = P(e \in E, X(e) \le x)$$

se numește *funcția de repartiție a variabilei aleatoare* X.

Proprietăți ale funcției de repartiție

a) $F_X(x) \in [0, 1]$, $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$

b) $F_X(x + h) \ge F_X(x)$ pentru $h > 0$ deoarece

$F_X(x + h) = F_X(x) + P(e \in E, x < X(e) \le x + h)$

c) $P(e \in E, a < X(e) \le b) = F_X(b) - F_X(a)$

Dacă valorile luate de variabila aleatoare X sunt în număr finit sau numărabil, spunem că X este o variabilă aleatoare discretă.

Ea este perfect determinată dacă se cunosc valorile luate de variabila aleatoare precum și probabilitățile cu care se iau aceste valori.

Putem scrie: $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{pmatrix}$

unde

$$p_n = P(e \in E, X(e) = x_n),\ n = 1, 2, \ldots$$

Definiția 1.3 Un asemenea tablou se numește *repartiția variabilei aleatoare X.*

Observații:

a) $p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = P(e \in E, X(e) = x_1) + P(e \in E, X(e) = x_2) + \ldots + P(e \in E, X(e) = x_n) + \ldots = P(E) = 1$

deoarece evenimentele $A_i = \{e \in E, X(e) = x_i\}$ și $A_j = \{e \in E, X(e) = x_j\}$

37

cu $i \neq j$ sunt incompatibile, (adică $A_i \cap A_j = \emptyset$ deoarece dacă $\tilde{e} \in A_i \cap A_j \Rightarrow X(\tilde{e}) = x_i = x_j$ ceea ce este imposibil pentru $i \neq j$) și $\bigcup_i A_i = E$.

b) O variabilă aleatoare discretă realizează o partiție a câmpului de evenimente.

2. Exemple de repartiții discrete

2.1 ***Repartiția uniformă*** este dată de:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

2.2 ***Repartiția hipergeometrică.*** Se obține plecând de la problema:

Considerăm un lot de "N" piese dintre care "$N\theta$" cu $0 < \theta < 1$ sunt defecte. Dintre acestea se aleg la întâmplare "n". Care este probabilitatea ca printre cele "n" piese "k" să fie defecte?

Aici $P(e \in E, X(e) = k) = \dfrac{C_{N\theta}^{k} C_{N-N\theta}^{n-k}}{C_N^n}$, $k = 0, 1, \dots, \min(N\theta, n)$.

Am definit variabila aleatoare X ca luând valori egale cu numărul de piese defecte, deci:

$$X: \begin{pmatrix} 0 & \dots & k & \dots \\ \dfrac{C_{N-N\theta}^{n}}{C_N^n} & \dots & \dfrac{C_{N\theta}^{k} C_{N-N\theta}^{n-k}}{C_N^n} & \dots \end{pmatrix}$$

2.3. ***Repartiția binomială*** ($X \sim Bi(n,\theta)$). Se obține din repartiția hipergeometrică în cazul în care "N" ia valori foarte mari.

Avem:

$$\lim_{N\to\infty} P(e \in E, X(e) = k) = \lim_{N\to\infty} \frac{C_{N\theta}^{k} C_{N-N\theta}^{n-k}}{C_N^n} = C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k}$$

Observație: $\dfrac{N\theta}{N} = \theta$ este probabilitatea de a obține o piesă defectă la o singură extracție.

Deci în acest caz:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & k & \dots & n \\ (1-\theta)^n & \dots & C_n^k \theta^k (1-\theta)^{n-k} & \dots & \theta^n \end{pmatrix}$$

2.4 ***Repartiția Poisson sau legea evenimentelor rare*** ($X \sim Po(\lambda)$).

Dacă în repartiția binomială $n \to \infty$ astfel ca $n\theta = \lambda$ (λ constantă reală pozitivă) obținem:

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots \\ e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \dots & \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & \dots \end{pmatrix}$$

Observație: Din relația $n\theta = \lambda$ rezultă că atunci când $n \to \infty$, $\theta \to 0$ deci, probabilitatea de a obține un defect este foarte mică.

2.5. ***Repartiția geometrică***

Dacă experimentatorul este interesat în apariția unui anumit eveniment posibil de a se produce ca urmare a experienței, vrea să știe de câte ori trebuie să repete experiența până când apare evenimentul A.

Variabila aleatoare X = numărul de repetări ale experienței, are repartiția.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ q & qp & q^2 p & \dots & q^{k-1} p & \dots \end{pmatrix}$$

unde am notat "p" = probabilitatea ca evenimentul A să se producă într-o experiență.

2.6. ***Repartiția binomială negativă***

Fie "p" probabilitatea de realizare a evenimentului A într-o singură probă și $q = 1 - p$ probabilitatea de apariție a evenimentului $\overline{A}$. Notăm Z variabila aleatoare care dă numărul minim de repetări ale experienței pentru ca evenimentul A să se realizeze de "k" ori (k fixat).

Dacă B_1 este: evenimentul A s-a realizat de "k - 1" ori în primele "n - 1" probe și B_2 este: evenimentul A s-a realizat în proba "n" atunci:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1) = C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \cdot p$$

cu $n = k, k+1, k+2, \dots$.

3. Operații cu variabile aleatoare discrete

Definiția 3.1. Dacă X și Y sunt definite pe același câmp de probabilitate $(E, \mathcal{K}, P)$ atunci:

$$(X+Y)(e) = X(e) + Y(e)$$
$$(aX)(e) = aX(e) \quad \text{pentru } a \in \mathbf{R}$$
$$(XY)(e) = X(e)Y(e)$$
$$\frac{X}{Y}(e) = \frac{X(e)}{Y(e)} \quad \text{dacă } Y(e) \neq 0 \text{ pentru orice } e \in E.$$

Dacă

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{pmatrix}$$

atunci

$$X+Y:\begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & \cdots & x_i+y_j & \cdots & x_n+y_m \\ p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

unde $p_{ij} = P((e \in E, X(e) = x_i) \cap (e \in E, Y(e) = y_j))$.

În cazul în care evenimentele

$$(e \in E, X(e) = x_i) \text{ și } (e \in E, Y(e) = y_j)$$

sunt independente pentru orice $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$ spunem că v.a. X și Y sunt **independente. În acest caz** $p_{ij} = p_i q_j$.

La fel:

$$aX:\begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 & \cdots & ax_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

$$X\cdot Y:\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_iy_j & \cdots & x_ny_m \\ p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

$$\text{și } X/Y:\begin{pmatrix} x_1/y_1 & x_1/y_2 & \cdots & x_i/y_j & \cdots & x_n/y_m \\ p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{nm} \end{pmatrix}$$

$y_j \neq 0$ **pentru orice** $j = 1, 2, \ldots, m$.

4. Momente. Definiții

Notăm (E, $\mathcal{B}$, P) spațiul de probabilitate pe care este definită variabila **aleatoare discretă X.**

Definiția 4.1 Dacă X este o v a X:E→R, atunci numim *valoare medie a* ***variabilei X***

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

pentru cazul în care X ia un număr numărabil de valori și seria este convergentă. Dacă X ia un număr finit de valori, valoarea medie se definește printr-o sumă finită.

Definiția 4.2 *Momentul de ordinul "r" al v.a.* "X" este $M_r(X) = M(X^r)$. Se **mai folosește notația** $\mu_r' = M(X^r)$.

Definiția 4.3 *Momentul centrat de ordin "r" al v. a.* "X" este numărul

$$\mu_r(X) = M(X - M(X))^r$$

Pentru r = 2,

$\mu_2(X) = M(X - M(X))^2$ **se numește** ***dispersia v. a. X.***

O vom nota cu D(X) și ea dă o măsură împrăștierii valorilor variabilei X în jurul valorii ei medii.

Definiția 4.4 **Cantitatea** $\sqrt{D(X)}/M(X)$ **se numește** ***coeficientul de variație pentru variabila X.***

Definiția 4.5 Cantitatea $M(X-M(X))^3/D^{3/2}(X)$ se numește *coeficientul de asimetrie pentru variabila* X.

Definiția 4.6 Cantitatea $\dfrac{M(X-M(X))^4}{D^2(X)} - 3$ se numește *coeficientul de aplatizare* sau *de exces pentru variabila* X.

Exemplul 4.1 Pentru a) Repartiția hipergeometrică b) Repartiția binominală **și c)** Repartiția Poisson calculăm M(X) și D(X).

Soluția: a) Din definiția valorii medii:

$$M(X) = \sum_k k \frac{C_{N\theta}^k C_{N-N\theta}^{n-k}}{C_N^n} = \theta n \text{ și}$$

$$D(X) = \frac{N-n}{N-1} n(1-\theta)\theta$$

b) Dacă în (4.1) $N \to \infty$ obținem $M(X) = \theta n$ și $D(X) = n\theta(1-\theta)$

c) Făcând $n\theta = \lambda$ și $n \to \infty$ obținem $M(X) = D(X) = \lambda$

5. Proprietăți ale valorii medii

Propoziția 5.1 $M(aX + b) = aM(X) + b$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Propoziția 5.2 $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$

Demonstrație: Avem

$$M(X+Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i + y_j)p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} p_{ij} + \sum_{j=1}^{m} y_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) + \sum_{j=1}^{m} y_j P(Y = y_j)$$

deoarece:

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = P((X = x_i) \cap E) = P(X = x_i)$$

și

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = P(E \cap (Y = y_j)) = P(Y = y_j)$$

Propoziția 5.3 Dacă X și Y sunt v.a. independente, atunci

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$$

Demonstrație: Avem $M(X \cdot Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij}$ și, cum X și Y sunt independente,

$$p_{ij} = P(X(e) = x_i) \cdot P(Y(e) = y_j)$$

şi astfel:

$$M(X\cdot Y)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)\sum_{j=1}^{m}y_jP(Y=y_j)$$

6. Inegalităţi pentru momente

Teorema 6.1 Dacă X este o v. a. discretă pentru care există momentul absolut de ordinul s, s > 0 număr real, atunci pentru această variabilă există şi momentul absolut de ordin r pentru orice număr real r satisfăcând inegalitatea $0<r<s$ şi

$$(\sum|x|^r f(x))^{1/r}\le(\sum|x|^s f(x))^{1/s} \tag{6.1}$$

unde $f(x)=P(e\in E, X(e)=x)$.

Demonstraţie Mai întâi vom arăta că dacă t şi x sunt numere reale, atunci dacă $t>1$ şi $x>0$

$$1+t(x-1)\le x^t. \tag{6.2}$$

Pentru $t>1$ fixat şi pentru $x>0$ definim $u_1(x)=x^t$. Avem

$$\frac{du_1(x)}{dx}=tx^{t-1} \text{ şi } \frac{d^2u_1(x)}{dx^2}=t(t-1)x^{t-2}>0$$

ceeace arată că $u_1(x)$ este convexă. Deoarece $\left.\frac{du_1}{dx}\right|_{x=1}=t$ urmează că dreapta $u_2(x)=1+t(x-1)$ de pantă t este tangentă la $u_1(x)$ în punctul (1, 1) (figura 6.1), ceea ce demonstrează (6.2), deoarece $u_2(x)\le u_1(x)$.

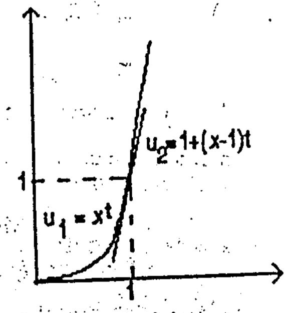


Fig. 6.1

Dacă în (6.2) facem

$$t=\frac{s}{r} \text{ şi } x=|x|^r,$$

atunci pentru oricare numere reale r şi s, obţinem

$$1+\frac{s}{r}(|x|^r-1)\le|x|^s \text{ dacă } 0<r<s \tag{6.3}$$

Dacă în (6.3) înlocuim x prin x_i, înmulţim inegalitatea rezultată prin $f(x_i)$ şi sumăm după i, urmează că pentru v.a. X există momentul absolut de ordin r.

Dacă în (6.3) înlocuim x prin

$$\frac{x_i}{\left(\sum|x_i|^r f(x_i)\right)^{1/r}}$$

şi înmulţim inegalitatea rezultată prin $f(x_i)$ obţinem

$$f(x_i)+\frac{s}{r}\left(\frac{|x_i|^r f(x_i)}{\sum|x_i|^r f(x_i)}-f(x_i)\right)\le\frac{|x_i|^s f(x_i)}{\left(\sum|x_i|^r f(x_i)\right)^{s/r}}$$

Dacă sumăm această inegalitate după i şi ţinem seama că $\sum f(x_i)=1$, urmează că

$$1\le\frac{\sum|x_i|^s f(x_i)}{\left(\sum|x_i|^r f(x_i)\right)^{s/r}}$$

sau extrăgând radicalul de ordin 1/s

$$\left(\sum|x_i|^r f(x_i)\right)^{1/r}\le\left(\sum|x_i|^s f(x_i)\right)^{1/s}$$

ceeace demonstrează teorema.

Teorema 6.2 (Inegalitatea lui Hölder). Dacă v.a. X(Y) admite momentul de ordinul r(s), atunci există şi M(XY) şi

$$M(|XY|)\le\left(M|X|^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(M|Y|^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

cu $r>1$ şi $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$.

Demonstraţie Mai întâi arătăm că

$$|ab|\le\frac{|a|^r}{r}+\frac{|b|^s}{s} \tag{6.4}$$

cu $r>1$ şi $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$.

Cum $|ab|=|a||b|$, considerăm cazul $a, b>0$; deci vom arăta că

$$ab<\frac{a^r}{r}+\frac{b^s}{s}.$$

Funcţia

$$f(t)=\frac{t^r}{r}+\frac{t^{-s}}{s} \text{ cu } t>0 \text{ şi } \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1,$$

admite un minin în punctul $t=1$. Într-adevăr

$$f'(t)=t^{r-1}-t^{-s-1}, \text{ deci } f'(1)=0,$$

adică 1 este un punct de extrem. Cum $f'(t)<0$, dacă $t<1$ şi $f'(t)>0$ dacă $t>1$, urmează că f(t) admite în punctul $t=1$ un minim. Avem $f(1)=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ şi prin urmare $1\le\frac{t^r}{r}+\frac{t^{-s}}{s}$.

Împărțind prin $\left(M\left(|X+Y|^{s(r-1)}\right)\right)^{\frac{1}{s}}$ și ținând seama că

$$1-\frac{1}{s}=\frac{1}{r},\quad \frac{s+r}{rs}=1,\quad s(r-1)=r,$$

teorema este demonstrată.

Probleme propuse

1. X urmează o repartiție geometrică. Arătați că:

$$P(X>k+j|X>k)=P(X>j) \text{ unde } k,j\in N^*$$

2. Determinați media și dispersia unei v.a. X binomiale negative.

3. V.a. X și Y sunt independente și repartizate astfel:

$$X:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 4\\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4\end{pmatrix}\qquad Y:\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3\end{pmatrix}$$

a) Să se determine repartiția v.a. Z = max(X, Y) și funcția ei de repartiție.
b) Să se determine P(X < Y).

4. V.a. X ia valori din N^* astfel ca

$$P(X=k+r|X>k)=P(X=r),\quad r\in N^*$$

Să se determine: P(X = 3) dacă P(X = 1) = p > 0.

5. Fie v.a. X ce ia valorile k∈N* cu probabilitățile $P(X=k)=\frac{C}{k^4}, k=1,2,3,\ldots$ Să se determine C, media și dispersia v.a. X.

6. Fie X ~ Bi (100; 1/3). Să se determine probabilitatea ca X să ia ca valoare un număr par.

7. Fie X și Y v.a. independente X ~ Bi (n; p), Y ~ Bi (m; p). Să se arate că X + Y ~ Bi (n + m; p). Să se calculeze P(X = k| X + Y = n)

8. Fie X și Y v.a. independente X ~ P_0 (λ) și Y ~ P_0 (μ). Să se arate că v.a.

$$(X|Y+X=n)\sim Bi\left(n;\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$$

9. O urnă conține 6 bile albe și 8 bile negre. Se extrag consecutiv trei bile fără a fi repuse după extragere în urnă. Să se afle probabilitatea ca ultima bilă extrasă să fie albă.

10. Să se afle x ∈ R astfel ca v.a. X să aibă repartiția

$$X:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 5x^2 & -2x^2+x & x\end{pmatrix}.$$ Să se determine apoi $P(X^2<X)$.

11. Fie ecuația $x^2 - 6x - m + 7 = 0$, m ∈ (-3, 3) ∩ Z. Să se determine probabilitatea ca ecuația să aibă rădăcinile supraunitare.

12. Dați exemplu de un fenomen real care este modelat de una din repartițiile: i) Bernoulli (Bi(1, p)), ii) Binomială (Bi(n, p)), iii) Poisson (P(λ)). Explicați alegerea.

CAPITOLUL 4

VARIABILE ALEATOARE CONTINUE

1. Funcția de repartiție. Densitatea de repartiție.

Definiția 1.1 X : E → R este *v.a. continuă* dacă

$$P(e\in E, X(e)=x)=0,$$

pentru orice x ∈ R.

Observație. Deși probabilitatea evenimentului din definiție este zero nu înseamnă că evenimentul nu se poate realiza.

Din definiția funcției de repartiție rezultă:

Teorema 1.1 Dacă X este o v.a. continuă, atunci funcția sa de repartiție este continuă. (F)

Demonstrație: Avem

$$F_X(x+h)-F_X(x)=P(e\in E, x<X(e)\le x+h)$$

cu h > 0. Trecând la limită pentru h → 0 obținem:

$$\lim_{h\to 0+} F_X(x+h)=F_X(x)$$

La fel,

$$F_X(x)-F_X(x-h)=P(e\in E, x-h<X(e)\le x)$$

și, de aici

$$\lim_{h\to 0+} F_X(x-h)=F_X(x)$$ ceea ce demonstrează teorema.

Definiția 1.2. Dacă există

$$\lim_{h\to 0}\frac{F_X(x+h)-F_X(x)}{h}=F_X'(x)$$

atunci F_X' se numește *densitatea de repartiție a variabilei* X și

$$F_X'(x)=f_X(x),\ x\in R.$$

Proprietăți ale densității de repartiție

1) Deoarece $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt=1$

2) Deoarece F_X este nedescrescătoare $f_X(x)\ge 0,\ x\in R.$

2. Caracteristici ale variabilelor aleatoare continue

Definiția 2.1 *Valoarea medie a v.a.* X este

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

Teorema 2.1 Fie X o v.a. cu f.r.F. Dacă există M(X), atunci

$$\lim_{x\to+\infty} x[1-F(x)]=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} xF(x) = 0$$

Demonstrație Dacă M(X) există, atunci există și

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF(x) \text{ și deci, dacă } x > 0$$

(2.1) $$\lim_{x\to+\infty} \int_{x}^{\infty} |u| dF(u) = 0 \text{ și } \lim_{x\to-\infty} \int_{-\infty}^{x} |u| dF(u) = 0$$

Pentru x > 0 rezultă

$$x(1 - F(x)) = x\int_{x}^{\infty} dF(u) \le \int_{x}^{\infty} u dF(u)$$

Pentru x < 0 rezultă

$$|x|F(x) = |x|\int_{-\infty}^{x} dF(u) \le \int_{-\infty}^{x} |u| dF(u)$$

și, ținând seama de (2.1) teorema este demonstrată.

Corolarul 2.1 Dacă F este funcția de repartiție a v.a. X, atunci

$$M(X) = \int_{0}^{\infty} (1 - F(u))du - \int_{-\infty}^{0} F(u)du$$

și dacă X este nenegativă

$$M(X) = \int_{0}^{\infty} (1 - F(u))du$$

sau,

$$M(X) = \int_{0}^{\infty} P(X > u)du$$

Definiția 2.2 Momentul de ordin "r" al variabilei aleatoare X este:

$$M_r(X) = M(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r dF_X(x)$$

$E(X-a)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^r f(x)dx$

Definiția 2.3 Momentul centrat de ordin "r" al v.a. X este:

$$\mu_r(X) = M(X - M(X))^r = \int_{R} (x - M(x))^r dF_X(x)$$

Pentru r = 2 se obține dispersia variabilei aleatoare X:

$$D(X) = \mu_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 dF_X(x)$$

$\sqrt{D(X)}$ se numește *abatere medie pătratică.*

Proprietățile mediei și dispersiei sunt aceleași ca și pentru variabile discrete.

Cu toate că valoarea medie a unei v.a. este cel mai folosit indicator pentru locație sau poziție, mai sunt folosiți: modulul și mediana.

Definiția 2.4 Modulul v.a. X, notat prin M_0, este acea valoare a v.a. X pentru care densitatea de repartiție $f_X(x)$ are valoarea maximă.

Definiția 2.5 Mediana v.a. X, notată prin Me, este acea valoare pentru care

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

3. Exemple de repartiții continue

3.1 Repartiția normală de parametrii m și σ^2 [X~N(m, σ^2)]. În acest caz v.a. "X" este definită prin densitatea de repartiție

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, x \in R$$

Funcția de repartiție corespunzătoare este

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right] dt$$

Avem

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = m$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f_X(x)dx = \sigma^2$$

Graficul densității de repartiție este dat în fig. 3.1

El prezintă simetrie față de x= m și admite punctele de inflexiune de abscise x= m ± σ.

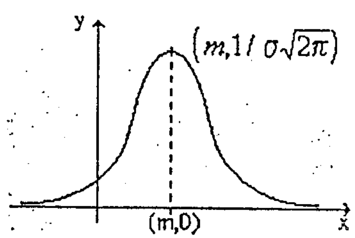


Fig. 3.1.

Propoziția 3.1 Dacă X ~ N (m, σ^2), atunci

$$M(X - M(X))^k = \begin{cases} 0, k = 2r + 1 \\ \frac{(2r)!}{2^r \cdot r!}\sigma^{2r}, k = 2r \end{cases}$$

și
$$\frac{M(X-M(X))^3}{(D(X))^{3/2}}=0, \frac{M(X-M(X))^4}{D^2(X)}-3=0.$$

Deci, pentru o repartiție normală, coeficienții de asimetrie și cel de exces sunt zero.

În cazul particular N(0, 1), m = 0 și σ= 1 se obține densitatea

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), x \in R$$ și funcția de repartiție

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$$

(se numește *funcția lui Laplace*).

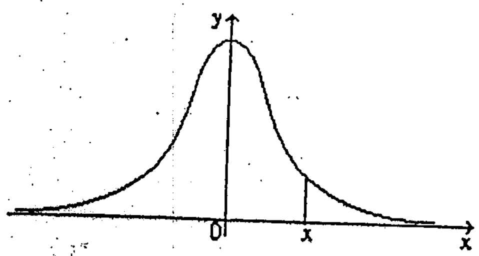
Cele două funcții: densitatea și funcția de repartiție pentru normala N(0,1) sunt tabelate.

Observații:

a) Dacă $X \sim N(0, 1)$ graficul densității este simetric față de axa Oy.

b) $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$ deorece "x" și "(-x)" sunt puncte simetrice față de axa Oy iar $\Phi(x)$ reprezintă aria mărginită de graficul f_x, axa Ox și paralela dusă la Oy prin punctul de abcisă "x" așa cum se vede în figura 3.2.

fig. 3.2



Deasemenea $\Phi(\infty)=1$

Propoziția 3.2. Dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$ atunci variabila aleatoare $Y=\frac{X-m}{\sigma}\sim N(0,1)$

Demonstrație: Funcția de repartiție a variabilei Y este:

$$F_Y(x)=P(Y\le x)=P\left(\frac{X-m}{\sigma}\le x\right)=P(X\le \sigma x+m)=F_X(\sigma x+m)$$

Dar,

$$F_X(\sigma x+m)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\sigma x+m}\exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)dt$$

care, prin schimbarea de variabilă $u=\frac{t-m}{\sigma}$ conduce la:

$$F_Y(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

care este funcția de repartiție N(0, 1).

Repartiția normală este folosită în toate situațiile în care avem de studiat erori de măsurare.

Definiția 3.1 Variabila aleatoare "Y" se numește ***variabila redusă.***

Definiția 3.2 Valoarea "u_α" se numește ***cuantila de ordinul*** "α" ***a variabilei*** $Y \sim N(0, 1)$ dacă: $\Phi(u_\alpha)=\alpha$

Exemplul 3.1 Când mașina este bine reglată ea produce piese cu diametrul mediu de 25 mm. După 5 ore de lucru se constată că, din cele 100 de piese 9 au diametrul mai mic de 22 mm iar 6 piese au diametrul mai mare de 28 mm. Presupunând că diametrul unei piese de acest tip este o variabilă aleatoare normală $N(m, \sigma^2)$ găsim parametrii "m" și "σ^2".

S: Știm că $P(X<22)=\frac{9}{100}$ și $P(X>28)=\frac{6}{100}$.

Introducând variabila redusă obținem:

$$P\left(\frac{X-m}{\sigma}<\frac{22-m}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{22-m}{\sigma}\right) \text{ și}$$

$$P\left(\frac{X-m}{\sigma}>\frac{28-m}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{28-m}{\sigma}\right)$$

Din tabele rezultă:

$$\frac{22-m}{\sigma}=-1{,}35 \text{ și } \frac{28-m}{\sigma}=1{,}56$$

Rezolvând acest sistem se obține

$$m=24{,}78 \text{ și } \sigma=2{,}062, \sigma^2=4{,}25$$

Concluzia: Variabila X = diametrul piesei este o variabilă aleatoare N(24,78; 4,25).

3.2. Repartiția uniformă U[a, b]. În acest caz densitatea de repartiție a variabilei aleatoare $X \sim U[a, b]$ este:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$$

$\int f(x) \geq 0$

Avem

$$M(X)=\int_a^b x f_X dx=\frac{b+a}{2}$$

$=1$

$$D(X)=\int_a^b\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2 f_X dx=\frac{(b-a)^2}{12}$$

3.3 Repartiția exponențială E(λ, α).

În acest caz variabila aleatoare X~Exp(λ, α) are densitatea de repartiție:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x-\alpha}{\lambda}}, & x\geq\alpha,\lambda>0\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}$$

Avem

$$M(X)=\lambda+\alpha,\ D(X)=\lambda^2$$

Repartiția exponențială se utilizează în modelarea timpilor de defectare a diferitelor utilaje.

Exemplul 3.2 Timpul de așteptare la un ghișeu este *o variabilă aleatoare T* care urmează o repartiție Exp(λ, 0) cu timpul mediu de așteptare de 15 minute. Să se afle probabilitatea ca un cetățean să aștepte mai mult de 20 minute.

S: Deoarece M(T) = 15 minute, rezultă λ = 15 minute

$P(T>20 \text{ minute}) = 1 - P(T\leq 20)$

$1 - F_T(20) = 1 - \int_0^{20}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{t}{\lambda}}dt = 1-e^{-\frac{4}{3}}$

3.4 Repartiția Weibull.

W(n, a, b) este utilizată în teoria siguranței

Variabila aleatoare X ~ W(n, a, b) dacă are densitatea:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{n}{b}(x-a)^{n-1}e^{-\frac{(x-a)^n}{b}}, & x\geq a\\ 0, & x\leq a, b>0, a\in R\end{cases}$$

Avem

$$M(X)=a+n\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)b^{\frac{1}{n}}.$$

3.5 Repartiția hi - pătrat $\chi^2(n)$

O variabilă aleatoare $X\sim\chi^2(n)$ dacă are densitatea de repartiție:

$$h_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

Avem

$$M(X)=n,\ D(X)=2n.$$

3.6. Repartiția Student

O variabilă aleatoare "X" cu densitatea de repartiție

$$f_X(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},\ x\in(-\infty,\infty)$$

urmează o repartiție Student (t) cu "n" grade de libertate (scriem X~ t(n)).

3.7. Repartiția F cu n, respectiv m grade de libertate: F(n, m)

O variabilă aleatoare X ~F(n, m) dacă are densitatea de repartiție:

$$f_X(x;n,m)=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n}{m}\right)^{n/2}x^{(n/2)-1}\left(1+\frac{n}{m}x\right)^{-(n+m)/2}$$

3.8. Repartiția Gamma

Variabila X ~ Γ(α) dacă are densitatea

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x}, & x\in(0,\infty)\\ 0, & \text{în rest}\end{cases}\qquad \alpha>0$$

3.9. Repartiția valorilor extreme

Deosebit de utile în situațiile practice în care depășirea unui anumit nivel de solicitare pentru un sistem mecanic conduce la defectarea sistemului, repartițiile de tipul:

$$U=\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \text{ și } V=\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

au fost studiate de Gumbel încă din anul 1958 în cartea sa intitulată "Statistics of extremes"

În decursul timpului ele și-au dovedit importanța în situații diverse:

a) un sistem cu componente legate în serie se defectează când se defectează prima componentă din sistem.

b) un sistem cu componente legate în paralel se defectează când se defectează ultima componentă.

Repartițiile valorilor extreme sunt de următoarele tipuri:

I. (valori maximale)

$$F_n\left(\frac{x-a}{b}\right)=\exp\left[-\exp\left(-\frac{x-a}{b}\right)\right],\ x\in R$$

II. (valori maximale)

$$F_a\left(\frac{x-a}{b}\right)=\begin{cases}0, & x<a\\ \exp\left[-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{\gamma}\right], & x\ge a,\gamma>0\end{cases}$$

III. (valori maximale)

$$F\left(\frac{x-a}{b}\right)=\begin{cases}\exp\left[-\left(-\frac{x-a}{b}\right)^{\gamma}\right], & x<a,\gamma>0\\ 1\ , & x\ge a\end{cases}$$

IV. (valori minimale)

$$G\left(\frac{x-a}{b}\right)=1-\exp\left[-\exp\frac{x-a}{b}\right], x\in R$$

V. (valori minimale)

$$G\left(\frac{x-a}{b}\right)=\begin{cases}0, & x<a\\ 1-\exp\left[-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{\gamma}\right], & x\ge a,\gamma>0\end{cases}$$

VI. (valori minimale)

$$G\left(\frac{x-a}{b}\right)=\begin{cases}1-\exp\left[-\left(-\frac{x-a}{b}\right)^{\gamma}\right], & x<a,\gamma>0\\ 1\ , & x\ge a\end{cases}$$

4. Funcții de o variabilă aleatoare

Fie X o v.a. $X : E \to \mathbf{R}$ care ia valori în $D \subset \mathbf{R}$ și $\varphi : D \to \mathbf{R}$, φ continuă. Atunci v.a. $Y = \varphi(X) : E \to \varphi(D) \subset \mathbf{R}$ are repartiția dată de:

$$P(e \in E, Y(e) \in A) = P(e \in E, X(e) \in \varphi^{-1}(A))$$

pentru orice $A \subset \varphi(D)$

Propoziția 4.1 Dacă $X \sim N(m, \sigma^2)$, atunci $Y = e^X$ are densitatea de repartiție:

$$(4.1)\qquad f_Y(y) = \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y-m)^2}{2\sigma^2}}\ , y>0$$

Demonstrație: Avem:

$F_Y(y) = P(e \in E, Y(e) \le y) = P(e^X \le y) = P(X \le \ln y) = F_X(\ln y) =$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\ln y} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt$$

Definiția 4.1 Variabila aleatoare Y care are densitatea de repartiție (4.1) se numește ***lognormală***.

S-a dovedit potrivită pentru a modela diverse situații ce apar în practică: repartiția timpilor de defectare ale unor circuite electronice, repartiția consumului de curent electric de către consumatorii casnici dintr-un mare oraș, repartiția particolelor obținute prin pulverizare;

Propoziția 4.2 Dacă $X \sim U(0, 1)$ atunci variabila aleatoare

$$Y = \left(-\frac{1}{a}\ln(1-X)\right)^{1/b}$$

cu $a, b > 0$ are densitatea de repartiție

$$(4.2)\qquad f(y) = aby^{b-1}e^{-ay^b}\quad , 0<y<\infty$$

Demonstrație Funcția de repartiție a variabilei aleatoare Y este

$F(y) = P(Y \le y) = P(-\ln(1-X) \le ay^b) = P(\ln(1-X) \ge -ay^b) =$

$= P(1-X \ge e^{-ay^b}) = P(X \le 1 - e^{-ay^b})$

și cum $X \sim U(0,1)$

$$F(y) = (1 - e^{-ay^b}),\ 0<y<\infty.$$

Din $f(y) = \dfrac{dF(y)}{dy}$, rezultă propoziția

Definiția 4.2 O variabilă aleatoare cu densitatea de repartiție (4.2) se numește (sau definește repartiția) ***Weibull cu parametrii a și b*** și este notată W(a, b).

Repartiția Weibull se folosește ca repartiție a duratei de viață în teoria siguranței.

Observații i) Pentru $b = 1$

$$f(y) = ae^{-ay},\ 0<y<\infty$$

densitatea unei variabile Exp(a)

ii) Pentru $b = 2$, obținem

$$(4.3)\qquad f(y) = 2aye^{-ay^2}\ , 0<y<\infty$$

Definiția 4.3 O variabilă aleatoare cu densitatea (4.3) se numește Rayleigh cu parametrul a.

Propoziția 4.3 Dacă $X \sim U(0, 1)$, atunci variabila aleatoare

$$Y = a\left((1-X)^{-1/b} - 1\right)$$

cu $a,b > 0$ are densitatea de repartiție

$$(4.4)\qquad f(y) = \frac{b}{a}\left(\frac{a}{a+y}\right)^{b+1}, 0<y<\infty$$

Demonstrație Funcția de repartiție a v.a. Y este

$$F(y) = P(Y \le y) = P\left[\left(a(1-X)^{-1/b}-1\right) \le y\right] =$$

$$= P\left[(1-X)^{-1/b} \le \frac{a+y}{a}\right] = P\left[X \le 1-\left(\frac{a}{a+y}\right)^b\right]$$

și cum X ~ U(0, 1)

$$F(y) = 1 - \left(\frac{a}{a+y}\right)^b, \; 0 < y < \infty$$

Din $f(y) = \frac{dF(y)}{dy}$ și ținând seama că $\frac{a}{a+y} = \frac{1}{1+\frac{y}{a}}$, obținem (4.4).

Definiția 4.4 Variabila aleatoare Y care are densitatea de repartiție (4.4) definește ***repartiția Pareto de parametru a și b*** și se notează Y ~ Par(a, b).

Propoziția 4.4 Dacă $p \in (0, 1)$ și $X \sim U(0, 1)$, atunci variabila aleatoare

$$N = \left[\frac{\ln X}{\ln(1-p)}\right]$$ unde [.] reprezintă partea întreagă (N ia valorile 0, 1, 2, ...) are o repartiție geometrică de parametru "p".

Demonstrație: Avem

$$P(N=k) = P\left(k \le \frac{\ln X}{\ln(1-p)} < k+1\right) =$$

$$= P\left[(1-p)^{k+1} \le X < (1-p)^k\right] = F\left[(1-p)^k\right] - F\left[(1-p)^{k+1}\right]$$

unde F este funcția de repartiție a repartiției U(0, 1).

Prin urmare

$$P(N=k) = (1-p)^k - (1-p)^{k+1} = p(1-p)^k$$

Repartiția geometrică poate conduce la o *discretizare* a repartiției exponențiale astfel:

Fie $Y = \frac{\ln X}{\ln(1-p)}$; Y ia valori pe R^+ și, pentru x > 0 se poate scrie:

$$P(Y \le x) = P[\ln X \ge x\ln(1-p)] = P(X \ge e^{x\ln(1-p)}) =$$
$$= 1 - e^{x\ln(1-p)} = 1 - e^{-x|\ln(1-p)|}, \qquad x > 0$$

Deci, Y ~ Exp [|ln(1-p)|]

Dacă Y~Exp (θ) atunci [Y] este repartizată geometric cu $p = 1 - e^{-\theta}$.

Teorema 4.1 Fie X o variabilă aleatoare cu funcția de repartiție F(X) de tip continuu care este strict crescătoare. Atunci variabila aleatoare Y = F(X) este repartizată uniform pe (0, 1).

Demonstrație:

Funcția de repartiție a variabilei Y este

$$P(Y \le y) = P[F(X) \le y] = P[X \le F^{-1}(y), 0 < y < 1] =$$
$$= F[F^{-1}(y)] = y, \; y \in (0, 1)$$ ceea ce arată că Y ~ U(0, 1).

Un rezultat pentru reciproca afirmației din *Teorema 4.1* este dat de

Teorema 4.2 Fie Y~U(0, 1) și F(x) o funcție de repartiție de tip continuu cu F(a) = 0, F(b) = 1 și F strict crescătoare pe (a, b). Atunci v.a.

$$X = F^{-1}(Y)$$

este o v.a. continuă cu funcția de repartiție F.

Demonstrație: Funcția de repartiție v.a. X este:

$$P(X \le x) = P[F^{-1}(Y) \le x] = P(Y \le F(x))$$

deoarece F este strict crescătoare.

Cum Y ~ U(0, 1), $F_Y(y) = y$ pentru $y \in (0, 1)$. Deci,

$$P(X \le x) = F(x), \; 0 < F(x) < 1.$$

Teorema 4.3. Dacă g: **R** → **R**, admite o dezvoltare în serie Taylor după puterile "$x - x_0$" și, dacă X este o v.a. pentru care există $M(X^2)$, atunci

$$M(g(X)) \cong g(M(X)) + \frac{1}{2}D(X)g''(M(X))$$

Demonstrație. Din

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$, rezultă

$$g(x) \cong g(x_0) + (x - x_0)g'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 g''(x_0).$$

Punând x = X și $x_0 = M(X)$ obținem

$$g(X) \cong g(M(X)) + (X - M(X))g'(M(X)) + \frac{1}{2}(X - M(X))^2 g''(M(X))$$

și, aplicând media rezultă teorema.

5. Funcții generatoare

5.1.1. Funcția generatoare de momente

Definiția 5.1.1 Fie X o variabilă aleatoare. Funcția

$$G_X(t) = M(e^{tX}) = \int e^{tx}\,dF(x)$$

dacă X are funcția de repartiție F

$$G_X(t) = \int e^{tx} f(x)\,dx$$

dacă X are densitatea de repartiție f

$$G_X(t) = \sum_n e^{tn} P(X = n)$$

dacă X este o variabilă aleatoare discretă se numește **funcția generatoare de momente.**

Teorema 5.1.1 Dacă v.a. X are funcția generatoare de momente $G_X(t)$, atunci

i) $G_X(0) = 1$

ii) $G_X(t) \le 1$ (pentru X pe R_+ și t < 0)

iii) $G_X^{(k)}(0) = \mu'_k$, iv) $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu'_n}{n!} t^n$

iv) dacă $a, b \in R$, $G_{aX+b}(t) = e^{bt} G_X(at)$

Teorema 5.1.2 Dacă $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt variabile aleatoare independente, atunci

$$G_{\sum_1^n X_j}(t) = \prod_{j=1}^{n} G_{X_j}(t)$$

Exemplul 5.1.1 Fie $X_i \sim Exp(\lambda)$, $1 \le i \le n$ independente

$$G_{X_i}(t) = M(e^{tX_i}) = \int_0^{\infty} e^{tu} \lambda e^{-\lambda u} du = \left.\frac{\lambda e^{-u(\lambda - t)}}{-\lambda + t}\right|_0^{\infty} = \frac{\lambda}{-t+\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{t}{\lambda}}$$

Funcția generatoare a sumei $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$ este

$$G_z(t) = M\left(e^{t\sum_1^n X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} M(e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^n}$$

Exemplul 5.1.2 Funcția generatoare a variabilei aleatoare U ce urmează o repartiție Gamma de densitate

$$f_U(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\alpha)}, & x > 0, \lambda > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

este

$$G_u(t) = M(e^{tU}) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{ty} y^{\alpha-1} e^{-\lambda y} dy = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda - t)^\alpha} = \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^\alpha}$$

Comparând acest rezultat cu cel din exemplu 5.1.1 rezultă că suma a "n" variabile aleatoare independente, repartizate la fel și anume după repartiția exponențială urmează o repartiție *Gamma.*

5.2 Transformata Fourier (Funcția caracteristică)

Pentru a înlătura problemele de existență legate de funcția generatoare de momente se poate folosi transformarea Fourier.

Definiția 5.2.1 Funcția $\varphi_X(t) = M(e^{itX})$, $t \in R$, se numește funcția caracteristică a variabilei aleatoare X.

Exemplul 5.2.1 Calculăm funcția caracteristică a v.a. $X \sim N(0, 1)$. Din definiția funcției caracteristicii și a densității normale N(0, 1) obținem:

$$\varphi_X(t) = M(e^{itX}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \int_R x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Avem:

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{cases} 0 & , k = 2s+1 \\ 2\int_0^{\infty} x^{2s} e^{-\frac{x^2}{2}} dx & , k = 2s \end{cases}$$

Pentru calculul integralei I_{2s} stabilim relația de recurență

$$I_{2s} = (2s-1) I_{2s-2}, \quad s = 1, 2, \ldots$$

Rezultă $I_{2s} = (2s-1)!! I_0 = (2s-1)!! \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Obținem:

$$\varphi_X(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s t^{2s} (2s-1)!!}{(2s)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (t^2/2)^s}{s!} = e^{-t^2/2}$$

Observație. Pentru a obține funcția caracteristică a v.a. $X \sim N(m, \sigma^2)$ ținem seama că:

$$Y = \frac{X - m}{\sigma} \sim N(0,1) \quad \text{(Propoziția 3.2)}$$

Rezultă că funcția caracteristică a variabilei X este:

$$\varphi_X(t) = M(e^{itX}) = M(e^{it(m+\sigma Y)}) = e^{itm} \varphi_Y(t\sigma) = e^{itm - \sigma^2 t^2/2}$$

Definiția 5.2.2 O funcție caracteristică φ este indefinit divizibilă dacă pentru fiecare întreg pozitiv n, există o funcție caracteristică φ_n astfel că $\varphi = [\varphi_n]^n$.

Exemplul 5.2.2 Fie φ funcția caracteristică a v.a. $N(m, \sigma^2)$ atunci

$$\varphi(t) = \exp\left(itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right) = \left[\exp\left(it\frac{m}{n} - \frac{\sigma^2}{n}\frac{t^2}{2}\right)\right]^n,$$

ceea ce arată că φ este indefinit divizibilă.

Exemplul 5.2.3 Funcția caracteristică a v.a. $X \sim Po(\lambda)$ este

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Putem scrie

$$\varphi(t) = \left[e^{\frac{\lambda}{n}(e^{it}-1)}\right]^n,$$

cceace arată că φ este indefinit divizibilă.

Teorema 5.2.1 Funcţia caracteristică φ este uniform continuă pe R şi satisface condiţiile

i) $\varphi(0) = 1$, ii) $|\varphi(t)| \le 1$, iii) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

unde $\overline{\varphi}$ este complex conjugata lui φ.

Teorema 5.2.2 Dacă X este o v.a. pentru care

$$\int |x|^n f(x)dx < \infty$$

atunci pentru orice $k \le n$, $t \in R$, $\varphi^{(k)}(t)$ există şi este finită şi

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k M(X^k).$$

Dacă $\varphi^{(2n)}(t)$ există şi este finită, atunci pentru orice $k \le n$, $M(|X|^k) < \infty$.

Corolarul 5.2.1 Fie X o v.a. astfel încât $M(|X|^n) < \infty$ pentru orice n. Atunci

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \mu_n'.$$

Teorema 5.2.3 (Teorema de inversiune) Fie F o funcţie de repartiţie şi fie φ funcţia sa caracteristică. Atunci

$$F(y+x) - F(y-x) = \lim_{l \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{l} \frac{\sin xt}{t} e^{-ity} \varphi(t)dt$$

pentru $y \in R$ şi $x > 0$ şi $y \pm x$ puncte de continuitate pentru F.

Demonstraţie Notăm $J_l(x) = \int_0^l \frac{\sin xt}{t} dt \quad , x \in (-\infty, +\infty)$

Funcţia J este definită pe R şi pentru $l \to \infty$

$$\lim_{l \to \infty} J_l(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

Pentru $l > 0$, fie

$$I_l = \int_{-l}^{l} \frac{\sin xt}{t} e^{-ity} \varphi(t)dt = \int_{-l}^{l} \frac{\sin xt}{t} e^{-ity} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} dF(u) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dF(u) \int_{-l}^{l} \frac{\sin xt}{t} e^{-it(y-u)} dt$$

S-a putut schimba ordinea de integrare deoarece,

$$\left| \frac{\sin xt}{t} e^{it(u-y)} \right| \le x$$

I_l se mai poate scrie:

$$I_l = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(u) \int_{-l}^{l} \frac{\sin xt}{t} \cos t(y-u)dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dF(u) \int_{-l}^{l} \frac{\sin t(x+y-u) + \sin t(x-y+u)}{2t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dF(u) \int_0^l \frac{\sin t(x+y-u)}{t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} dF(u) \int_0^l \frac{\sin t(x-y+u)}{t} dt$$

Dar,

$$\lim_{l \to \infty} \int_0^l \frac{\sin t(x+y-u)}{t} dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pentru} \quad x+y-u > 0 \\ 0 & \text{pentru} \quad x+y-u = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pentru} \quad x+y-u < 0 \end{cases}$$

şi, la fel:

$$\lim_{l \to \infty} \int_0^l \frac{\sin t(x-y+u)}{t} dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pentru} \quad x-y+u > 0 \\ 0 & \text{pentru} \quad x-y+u = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{pentru} \quad x-y+u < 0 \end{cases}$$

Rezultă,

$$\lim_{l \to \infty} I_l = \int_{-\infty}^{+\infty} dF(u) \lim_{l \to \infty} \int_0^l \left(\frac{\sin t(x+y-u)}{t} + \frac{\sin t(x-y+u)}{t} \right) dt =$$

$$= \pi \int_{y-x}^{y+x} dF(u) = \pi(F(y+x) - F(y-x))$$

şi deci, teorema este demonstrată.

Corolarul 5.2.2 Fie $a < b$, atunci

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{l \to \infty} \int_{-l}^{l} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)dt$$

Demonstraţia rezultă din Teorema 5.5

$$F(y+x) - F(y-x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \to \infty} \int_{-l}^{l} \frac{\sin xt}{t} e^{-ity} \varphi(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{l \to \infty} \int_{-l}^{l} \frac{e^{itx} - e^{-itx}}{2ti} e^{-ity} \varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi} \lim_{l \to \infty} \int_{-l}^{l} \frac{e^{it(x-y)} - e^{-it(x+y)}}{ti} \varphi(t)dt$$

unde $y + x = b$ şi $y - x = a$.

Teorema 5.2.4 Presupunem φ absolut integrabilă pe R. Atunci, există densitatea de repartiţie $f = F'$ care este mărginită şi:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-txi}\varphi(t)dt.$$

Demonstraţia teoremei rezultă din: Teorema 5.2.3

Ştim că:

$$F(y+x) - F(y-x) = \frac{1}{\pi}\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}\frac{\sin xt}{t}e^{-ity}\varphi(t)dt.$$

Prin împărţire cu „2x„ avem:

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(y+x)-F(y-x)}{2x} = \frac{1}{\pi}\lim_{x\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin xt}{2xt}e^{-ity}\varphi(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ity}\varphi(t)dt.$$

Teorema 5.2.5 Dacă X este concentrată pe {kd; k = 0, 1, ...}, d > 0 constantă, atunci:

$$p_k = P(X = kd) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-itk}\varphi_X\left(\frac{t}{d}\right)dt$$

Demonstraţie: Pentru k = 0, 1, ... avem:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-itk}\varphi_X\left(\frac{t}{d}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}p_m\int_0^{2\pi}e^{it(m-k)}dt = p_k$$

deoarece

$$\int_0^{2\pi}e^{it(m-k)}dt = \begin{cases}2\pi, & m = k\\ 0, & m \neq k\end{cases}$$

Teorema 5.2.6 (*Teorema de continuitate*) Fie $\{F_n\}$ un şir de funcţii de repartiţie şi $\{\varphi_n\}$ şirul corespunzător al funcţiilor caracteristice. Atunci F_n converge la o funcţie de repartiţie F dacă şi numai dacă $\varphi_n \to \varphi$ când $n \to \infty$ pe R, unde φ este continuă în t = 0. În acest caz funcţia limită φ este funcţia caracteristică a funcţiei de repartiţie limită F.

Teorema limită centrală

Repartiţia normală ocupă un loc special printre repartiţiile studiate, ceea ce va permite utilizarea ei în anumite condiţii în cazul modelelor celor mai diferite.

Are loc:

Teorema 5.2.7 Fie $(X_n)_{n\in N^*}$ un şir de variabile aleatoare independente şi la fel repartizate cu $M(X_n) = m$ şi $D(X_n) = \sigma^2$ şi

$$Y_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

Dacă F_n este funcţia de repartiţie a variabilei

$$Z_n = \frac{Y_n - M(Y_n)}{\sqrt{D(Y_n)}}$$

avem

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Demonstraţie Se utilizează funcţia caracteristică a variabilei Z_n. Astfel:

$$\varphi_{Z_n}(t) = M(e^{itZ_n}) = M\left(e^{it\frac{Y_n - M(Y_n)}{D(Y_n)}}\right) = M\left(e^{it\frac{\sum_1^n (X_j - m)}{\sigma\sqrt{n}}}\right) = \prod_{j=1}^{n}M\left(e^{it\frac{X_j - m}{\sigma\sqrt{n}}}\right)$$

Dezvoltând în serie de puteri exponenţiala, se obţine:

$$e^{it(X_j - m)/\sigma\sqrt{n}} = 1 + it\frac{X_j - m}{\sigma\sqrt{n}} - \frac{t^2(X_j - m)^2}{2n\sigma^2} + 0\left(\frac{1}{n}\right)$$

şi, cum $M(X_j) = m$ rezultă,

$$\varphi_{Z_n}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + 0\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

de unde, $\lim_{n\to\infty}\varphi_{Z_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, care reprezintă funcţia caracteristică a repartiţiei N(0, 1).

Un rezultat asemănător în condiţii mai largi este dat de

Teorema Liapunov Fie $(X_n)_n$ un şir de v.a. independente cu:

$$M(X_n) = m_n, \quad D(X_n) = \sigma_n^2, \sqrt[3]{M(|X_n - m_n|^3)} \doteq h_n$$

valori ce există pentru orice $n \in N^*$.

Să notăm:

$$s_n = \sqrt{\sum_1^n \sigma_j^2}, k_n = \sqrt[3]{\sum_1^n h_j^3},$$

$$Y_n = \sum_1^n X_j, Z_n = \frac{Y_n - M(Y_n)}{s_n}$$

Notăm F_n funcţia de repartiţie a variabilei Z_n. În aceste condiţii, dacă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{s_n} = 0$$

atunci

de citit

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Nu vom da demonstrația acestei teoreme, care folosește tot funcția caracteristică pentru variabila Z și teorema de continuitate 5.2.6.

Teorema 5.2.7 este o generalizare a Teoremei Moivre-Laplace.

Fie $(X_n)_n$ v.a. independente identic repartizate Bernoulli ce iau valorile "1" sau "0" cu probabilitățile "p", respectiv q = "1-p" ($M(X_n) = p$ și $D(X_n) = pq$) V.a $Y_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ are $M(Y_n) = np$ și $D(Y) = npq$ și

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \Phi(x) \text{ - f. de repartiție redusă } (0,1)$$

Putem scrie, deci $P(Y_n > m) = P\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} > \frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right) =$

$$= 1 - P\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right) \cong 1 - \Phi\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)$$

unde Φ este funcția de repartiție a variabilei N(0, 1).

Aplicație Presupunem că într-un sistem de componente legate în paralel, trebuie să funcționeze cel puțin "n" componente pentru ca sistemul să lucreze la performanța maximă.

Probabilitatea ca o componentă să se defecteze este "p".

Vrem să determinăm numărul general "m" de componente ce trebuie să intre în alcătuirea sistemului astfel ca cu probabilitatea "α" (α ∈ (0, 1)) sistemul să funcționeze la performanța maximă.

Asociem această problemă cu "m" încercări independente cu probabilitatea de realizare "p" a unui eveniment. Atunci:

$$P(\text{numărul de componente defecte} \le m\text{-}n) = \sum_{j=0}^{m-n} C_m^j p^j q^{m-j}.$$

Folosind aproximația ce rezultă din teorema limită centrală obținem:

$$\Phi\left(\frac{m-n-mp}{\sqrt{mpq}}\right) = \Phi\left(\frac{mq-n}{\sqrt{mpq}}\right) = \alpha$$

și

$$\frac{mq-n}{\sqrt{mpq}} = u_\alpha, \text{ unde } \Phi(u_\alpha) = \alpha$$

deci

$$m = \left[\frac{n}{q} + \frac{1}{2q}\left(p^2u_\alpha^2 + 4npu_\alpha\right)^{1/2} + \frac{pu_\alpha^2}{2q}\right].$$

Probleme propuse

1. Fie X ~ N(2, 1). Care dintre evenimentele

$$A = \{e \in E, |X(e)| < 0{,}2\} \text{ și } B = \{e \in E, |X(e)| \ge 0{,}2\}$$

este mai probabil?

2. Dacă v.a. X are densitatea de repartiție f(x), x ≠ 0 să se arate că Y = 1/X are densitatea de repartiție

$$g(y) = f\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y^2}.$$

3. Dacă X ~ N(0, σ^2) care este densitatea de repartiție a v.a. Y = 1/X? Are v.a. Y valoare medie?

4. Dacă v.a. X are densitatea de repartiție f(x) să se arate că v.a. Y = min (X, X^2) are densitatea de repartiție

$$g(y) = \begin{cases} f(\sqrt{y})/(2\sqrt{y}) & , y \in (0, 1) \\ f(y) & , y \notin (0, 1) \end{cases}$$

5. Dacă X ~ N(0, σ^2) să se arate Y = X^2 are densitatea de repartiție

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) \quad y > 0.$$

6. Să se determine momentele variabilei lognormale cu densitatea (4.1).

7. V.a. X are o *repartiție Beta* cu parametrii α > 0 și β > 0 și scriem X ~ Be(α, β) dacă densitatea ei de repartiție este

$$f_X(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1$$

$(B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta))$.

Să se determine M(X) și D(X).

8. V.a. X are o *repartiție Maxwell* dacă are densitatea de repartiție

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta^{3/2} y^2 \exp(-\beta y^2/2), \quad y > 0, \ \beta > 0$$

Să se determine M(X) și D(X).

Observaţie Viteza V a moleculelor unui gaz ideal în echilibru la o anumită temperatură este o v.a. repartizată Maxwell.

9. Este modulul soluţia ecuaţiei $\frac{d^2F(x)}{dx^2}=0$, unde F este funcţia de repartiţie a v.a. X?

10. În ce caz M(X) = Me?

11. În ce caz M(X) = Me = Mo?

12. Fie W v.a. Weibull cu densitatea de repartiţie

$$f_W(x)=\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\theta}\exp\left(-\frac{x^\alpha}{\theta}\right),x>0,\ \theta>0$$

a) Să se reprezinte grafic f_W.
b) Să se determine mediana v.a. W.
c) Dacă W_1 şi W_2 sunt v.a. independente, să se determine densitatea de repartiţie a v.a. $Z = \min(W_1, W_2)$.

13. V.a. X are o *repartiţie logistică* dacă are densitatea de repartiţie

$$f_X(x)=\frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\quad,\ -\infty<x<\infty.$$

Arătaţi că

$$Y=\frac{1}{1+e^{-X}}\sim U(0,1).$$

14. Dacă X are funcţia generatoare de momente

$$G(t) = \exp(2t + 2t^3)$$

Să se afle

a) $P(X > 1)$, b) $P(0 < X < 1)$, c) $P(|X| > 2)$.

15. Să se determine funcţia caracteristică a v.a. $X \sim U(-A, A)$.

16. V.a. X are o repartiţie *Cauchy* dacă are densitatea de repartiţie

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}\quad,\ x\in R$$

a) Să se determine funcţia de repartiţie a v.a. X.
b) Există M(X)? Există D(X)?
c) Să se arate că funcţia caracteristică a v.a. X este $\exp(-|t|)$.
d) Care este funcţia caracteristică a v.a. $Y = mX + \theta$, unde $m > 0$ şi $\theta \in R$?

17. V.a. X are o *repartiţie Laplace* de parametru λ dacă are densitatea de repartiţie

$$f(x)=\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}\quad,\lambda>0$$

a) Să se calculeze funcţia de repartiţie a v.a. X.
b) Să se arate că $M(X) = 0$, $D(X) = 2/\lambda^2$.

18. Funcţia caracteristică a unei v.a. X este

$$\varphi(t)=\frac{e^{it}\left(1-e^{nit}\right)}{n\left(1-e^{it}\right)}$$

Să se determine repartiţia v.a. X.

19. Repartiţia exponenţială trunchiată este dată de densitatea de repartiţie de forma: $f_T(t)=Ae^{-t/\theta},\ t\in[t_1,t_2]$.

a) Aflaţi A astfel ca f să fie densitate de repartiţie.
b) Determinaţi funcţia de repartiţie, media, dispersia şi funcţia caracteristică a v.a. T.

20. Fie şirul de v.a. independente $(X_n)_{n\in N^*}$ astfel încât

$$P\left(X_n=\frac{1}{n^\beta}\right)=P\left(X_n=-\frac{1}{n^\beta}\right)=p\quad\text{cu}\ \frac{1}{3}<\beta\leq\frac{1}{2}\ ,\ n\in N^*$$

şi $P(X_n=0)=1-2p$

Să se arate că şirului $(X_n)_{n\in N^*}$ i se poate aplica teorema lui Leapunov.

21. Fie şirul de v.a. independente $(X_n)_{n\in N^*}$ astfel încât

$$P\left(X_n=-\sqrt{n}\right)=P\left(X_n=\sqrt{n}\right)=\frac{1}{2}$$

Să se arate că şirul $(X_n)_{n\in N^*}$ i se poate aplica teorema lui Leapunov.

22. Cu ce probabilitate putem afirma că din 144 aruncări a unei monede, stema apare de un număr de ori cuprins între 50 şi 80?

23. De câte ori trebuie să aruncăm o monedă, astfel încât să putem afirma cu o probabilitate de 0,90, că frecvenţa apariţiei stemei să fie cuprinsă între 50% şi 60%.

CAPITOLUL 5

LEGI ALE NUMERELOR MARI

1. Introducere

Am văzut că nu putem ști înainte de efectuarea experimentului ce valoare va lua v.a. pe care o studiem. S-ar părea că întrucât despre fiecare v.a. dispunem de informații reduse, cu greu am putea determina comportarea mediei aritmetice a unui număr de v.a. În realitate, în condiții puțin restrictive, media aritmetică a unui număr suficient de mare de v.a. își pierde caracterul întâmplător.

Pentru practică este important să cunoaștem condițiile în care acțiunea combinată a mai multi factori întâmplători conduce la un rezultat care să nu depindă de întâmplare, deci care să ne permită să prevedem desfășurarea fenomenului studiat. Astfel de condiții se dau în teoremele cunoscute sub denumirea comună de legea numerelor mari.

2. Inegalități pentru variabile aleatoare

Teorema 2.1 a) Fie $g : R \to R_+$ o funcție măsurabilă satisfăcând $g(x) \geq b$ pentru $x \geq a$ unde $a \in R$, $b \in R_+$.

Atunci pentru fiecare v.a. Y, $P(Y \geq a) \leq \dfrac{Mg(Y)}{b}$.

b) Pentru fiecare v.a. Y și fiecare funcție nenegativă nedescrescătoare g, $P(Y \geq a) \leq \dfrac{Mg(Y)}{g(a)}$ în cazul $g(a) > 0$.

c) Pentru fiecare v.a. X de pătrat integrabilă și fiecare a > 0, obținem

$$P(|X - MX| \geq a) \leq \frac{D(X)}{a^2}$$ (*inegalitatea lui CEBÎȘEV*) !!!

Demonstrație a) Avem:

$$Mg(Y) = \int g(y)dF(y) = \int_{[Y \geq a]} g(y)dF(y) + \int_{[Y<a]} g(y)dF(y) \geq$$

$$\geq \int_{[Y \geq a]} g(y)dF(y) \geq \int_{[Y \geq a]} b dF(y) = bP(Y \geq a)$$

b) În a) punem $b = g(a)$

c) În a) punem $Y = |X - MX|$, $g(x) = x^2$, $b = a^2$.

Teorema 2.2 Dacă X este o v.a. continuă ce ia valori pozitive, atunci

$$P(X > \alpha M(X)) > (1-\alpha)^2 \frac{M^2(X)}{M(X^2)}, \quad \alpha \in (0, 1)$$

unde M(X), $M(X^2)$ sunt valoarea medie, respectiv momentul de ordinul doi.

Demonstrație Din inegalitatea lui Schwarz

$$\left(\int_{\alpha M(X)}^{\infty} xdF(x)\right)^2 \leq \int_{\alpha M(X)}^{\infty} x^2 dF(x) \int_{\alpha M(X)}^{\infty} dF(x) \leq$$

$$\leq M(X^2) \int_{\alpha M(X)}^{\infty} dF(x) = M(X^2)P(X > \alpha M(X)).$$

Deasemenea,

$$\int_{\alpha M(X)}^{\infty} xdF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x) - \int_{-\infty}^{\alpha M(X)} xdF(x) =$$

$$= M(X) - \int_{0}^{\alpha M(X)} xdF(x) \geq M(X)(1-\alpha)$$

Combinând aceste două inegalități, rezultă

$$M^2(X)\,(1-\alpha)^2 < M(X^2)\,P(X > \alpha\, m(X))$$

3. Tipuri de convergențe pentru șiruri de v.a.

Convergența șirurilor de v.a., spre deosebire de convergența șirurilor de funcții din analiza matematică clasică, are la bază existența unei măsuri de probabilitate pe E.

Vom presupune în cele ce urmează că toate v.a. sunt definite pe același spațiu de probabilitate (E, B, P).

Convergența în probabilitate

Definiția 3.1 Șirul de v.a. $(X_n)_n$ *converge în probabilitate la* v.a. X, dacă

$$\lim_{n\to\infty} P\{e \in E, |X_n(e) - X(e)| < \varepsilon\} = 1.$$

Teorema 3.1

i) Limita unui șir de v.a. convergent în probabilitate este unică (aproape sigur)

ii) Dacă $X_n \xrightarrow{P} X$ și $Y_n \xrightarrow{P} Y$ și a și b sunt numere reale, atunci $aX_n + bY_n \xrightarrow{P} aX + bY$

iii) Dacă $X_n \xrightarrow{P} X$, atunci $|X_n| \xrightarrow{P} |X|$.

Convergența în repartiție

Definiția 3.2 Dacă șirul de funcții de repartiție $\{F_n\}$ converge către o funcție de repartiție F, în fiecare punct de continuitate al acesteia, spunem că *șirul de v.a.* $\{X_n\}$ *converge în repartiție către v.a.* X *a cărei funcție de repartiție este* F (folosim notația $X_n \xrightarrow{rep} X$).

Teorema 3.2

i) Dacă $X_n \xrightarrow{P} X$, atunci $X_n \xrightarrow{rep} X$

ii) Dacă c este o constantă reală și dacă $X_n \xrightarrow{rep} c$, atunci $X_n \xrightarrow{P} c$.

Convergența aproape sigură

Definiția 3.3 *Șirul de v.a. $\{X_n\}$ converge aproape sigur către v.a.* X (folosim notația $X_n \xrightarrow{a.s.} X$) dacă mulțimea punctelor e în care șirul X_n converge punctual, formează un eveniment de probabilitate 1

$$P\left(e \in E, \lim_{n\to\infty} X_n(e) = X(e)\right) = 1$$

Acest mod de convergență este denumit și *tare*.

Teorema 3.3 Dacă $X_n \xrightarrow{a.s.} X$, atunci $X_n \xrightarrow{P} X$ și implicit $X_n \xrightarrow{rep} X$.

Teorema 3.4 Dacă X_n, X sunt v.a., atunci următoarele afirmații sunt echivalente

i) $X_n \xrightarrow{P} X$,

ii) Din orice subșir al șirului $(X_n)_n$ se poate extrage alt subșir $\left(X_{n_k}\right)$ așa încât $X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$.

Convergența în medie

Definiția 3.4 Fie $(X_n)_n$ un șir de v.a. și fie X o v.a. Dacă există $M(X_n^r)$ și $M(X^r)$ și dacă $\lim_{n\to\infty} M\left(|X_n - X|^r\right) = 0$ spunem că *șirul $(X_n)_n$ converge în medie "r"* la X.

ajută la dispersie

Teorema 3.4 Convergența în medie pătratică implică convergența în probabilitate.

4. Legi ale numerelor mari

Teorema 4.1 (*Teorema lui Bernoulli - forma slabă*) Fie A un eveniment a cărui probabilitate de realizare este p și fie $f_n(A)$ frecvența relativă de realizare a evenimentului A în n repetări independente ale experimentului în care se produce A. Atunci pentru fiecare $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{|f_n(A) - p| \le \varepsilon\right\}\right) = 1$$

Demonstrație Vom asocia la fiecare efectuare a experimentului o v.a. X_i care poate lua valoare 1 sau 0 după cum în experimentul i s-a realizat sau nu

evenimentul A. Astfel numărul de realizări ale evenimentului A, în cele n repetări independente ale evenimentului, este dat de

$$\alpha = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

unde fiecare din v.a. $X_1, X_2, \dots, X_n$ are repartiția $X_j : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$

Avem

$$M(X_j) = p, D(X_j) = p(1-p)$$

$$M\left(\sum_1^n X_j\right) = np, D\left(\sum_1^n X_j\right) = np(1-p)$$

și deci

$$M(f_n(A)) = M\left(\frac{\alpha}{n}\right) = p, D(f_n(A)) = \frac{p(1-p)}{n}$$

Aplicând inegalitatea lui Cebîșev v.a. $f_n(A)$, găsim:

$$(4.1) \qquad P\left(|f_n(A) - p| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Ținând seama că $p(1-p) \le \frac{1}{4}$, din (4.1) obținem

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|f_n(A) - p| \le \varepsilon\right) = 1$$

Observație În cazul unei populații de volum mare, dacă se efectuează o selecție de volum n și se obțin α rezultate favorabile, atunci cu o probabilitate apropiată de unitate, putem afirma că probabilitatea evenimentului cercetat este dată de frecvența relativă.

Prin urmare dacă în studiul populațiilor pentru care nu putem determina apriori probabilitatea p, aceasta se poate exprima pe cale experimentală prin frecvența relativă $\frac{\alpha}{n}$ a evenimentului considerat, fapt ce constituie justificarea teoretică a folosirii frecvenței relative în loc de probabilitate.

Teorema 4.2 (*Teorema Cebîșev*) Fie $\{X_n\}$ un șir de v.a. independente două câte două, având dispersiile mărginite de aceeași constantă:

$$D(X_n) \le C, n = 1, 2, \dots$$

Atunci, pentru fiecare $\varepsilon > 0$,

$$(4.2) \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_1^n X_j - \frac{1}{n}\sum_1^n M(X_j)\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0,$$

sau cu alte cuvinte, șirul de v.a.

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - M(X_j)\right)$$

converge în probabilitate către 0.

Demonstrație Avem

$$M\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}M(X_j)$$

și cum variabilele sunt independente

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}D(X_j)$$

sau ținând seama de ipoteză

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\le\frac{C}{n}$$

Inegalitatea lui Cebîșev pentru v.a. $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$ dă

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}M(X_j)\right|>\varepsilon\right)<\frac{C}{n\varepsilon^2},$$

de unde prin trecere la limită obținem teorema.

Observații i) Dacă $M(X_1)=M(X_2)=\ldots=M(X_n)=m$, atunci (4.2) se scrie

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}-m\right|>\varepsilon\right)=0$$

ceea ce explică de ce putem face observații asupra mediei unei populații pe baza unei selecții de volum mic comparativ cu al întregii populații. Explicația constă în aceea că selecția implică un număr de măsurători, suficient prin ele înseși.

Deci Teorema lui Cebîșev stă la baza teoriei selecției.

ii) Teorema lui Cebîșev ne spune că, deși v.a. independente pot lua valori departe de mediile lor, media aritmetică a unui număr suficient de mare de astfel de v.a. ia, cu o probabilitate foarte mare, valori în vecinătatea constantei $(1/n)\sum_{j=1}^{n}M(X_j)$.

Această observație ne arată că între comportarea fiecărei v.a., și a mediei lor aritmetice există o mare deosebire, în sensul că nu putem preciza ce valoare va lua fiecare v.a., însă putem preciza cu o probabilitate apropiată de 1 ce valoare va lua media aritmetică a acestor v.a.

Teorema 4.3 (*Teorema lui Poisson*) Fie A un eveniment a cărui probabilitate de realizare variază pe parcursul unui șir de experimente independente, astfel ca în experimentul de ordin k, $P(A)=p_k$, $k=1, 2, \ldots$ și fie $f_n(A)$ frecvența relativă de realizare a lui A în primele n repetări.

Atunci

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left\{\left|f_n(A)-\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}\right|>\varepsilon\right\}\right)=0$$

Demonstrație Pentru fiecare $k=1, 2, \ldots, n, \ldots$ definim v.a. X_k care ia valorile 1 sau 0, după cum în experimentul de ordin k s-a realizat sau nu evenimentul A. Deci X_k are repartiția

$$X_k:\begin{pmatrix}1 & 0\\ p_k & 1-p_k\end{pmatrix}$$

Notând cu α_n numărul de realizări ale lui A în primele n probe

$$f_n(A)=\frac{\alpha_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$$

Avem $M(X_k)=p_k$, $D(X_k)=p_k(1-p_k)\le 1/4$ și cum $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ sunt v.a. independente sunt satisfăcute condițiile Teoremei 4,2, rezultă teorema.

Teorema 4.4. (*Teorema Cantelli*) Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ v.a. independente, identic repartizate și

$$\sup_n M\left(\left|X_n-M(X_n)\right|^4\right)\le C<\infty$$

Atunci

$$\frac{\sum_1^n X_j-\sum_1^n M(X_j)}{n}\xrightarrow{a.s.}0.$$

Demonstrație Vom arăta că

$$M\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sum_1^n X_j-\sum_1^n M(x_j)}{n}\right)^4\right]<\infty \text{ a.p.t.}$$

și acest fapt este suficient deoarece din el rezultă

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sum_1^n X_j-\sum_1^n M(X_j)}{n}\right)^4<\infty \text{ a.s.}$$

și în particular
$$\frac{\sum_1^n X_j-\sum_1^n M(X_j)}{n}\xrightarrow{a.s.}0$$

$$\int x^4 dF(x)<\infty\Rightarrow\int|x|dF(x)\le\left(\int x^4 dF(x)\right)^{1/4}$$

Fără a restrânge din generalitate putem presupune că $M(X_n) = 0$ pentru orice n. Avem

$$M\left[\left(\sum_1^n X_j\right)^4\right] = \sum_{j=1}^n M(X_j^4) + 6\sum_{i<j} M(X_i^2)M(X_j^2),$$

şi folosind inegalitatea Schwarz

$$M\left[\left(\sum_1^n X_j\right)^4\right] \le \sum_1^n M(X_j^4) + 6\sum_{i\ne j}\sqrt{M(X_i^4)M(X_j^4)} =$$

$$= nM(X^4) + 3n(n-1)M(X^4) \le C[n+3(n-1)]$$

Deci

$$\sum_n \frac{1}{n^4} M\left(\sum_1^n X_j\right)^4 \le \frac{1}{n^4} C[n+3(n-1)] < \infty,$$

ceeace demonstrează teorema.

Probleme propuse

1. Fie $(X_n)_{1\le n<\infty}$ un şir de v.a independente care pot lua valorile $\pm\sqrt{n}$ şi 0 cu probabilităţile

$P(X_1 = 0) = 1$

$$P(X_n = \sqrt{n}) = P(X_n = -\sqrt{n}) = \frac{1}{n},\quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n},\quad n = 2,3,\ldots$$

Să se arate că şirul dat se supune legii numerelor mari.

2. Fie $(X_n)_{n\in N^*}$ un şir de v.a. independente de valori medii $M(X_n) = 0$, $n \in N^*$ şi dispersii $D(X_n) = n^\lambda$, $n \in N^*$ unde $0 < \lambda < 1$. Să se arate că şirul dat se supune legii numerelor mari.

3. Fie $\{X_n\}$ un şir de v.a. independente şi identic repartizate cu

a) $P(X_k = \pm 2n) = 1/\ln n^n,\ P(X_k = 0) = 1 - 2/\ln n^n,\quad n \ge 2$

b) $P(X_k = n) = C/(\ln n^n)^2,\ n \ge 2, C = \left[\sum_{n=2}^{\infty} 1/(\ln n^n)^2\right]^{-1},\quad n \ge 2$

şirul dat se supune legii numerelor mari?

4. Dacă $\{X_n\}$ este un şir de v.a. independente cu $P(X_n = \mp n^\alpha) = \frac{1}{2}$ pentru ce valori ale lui α, şirul se supune legii numerelor mari.

5. Fie $\{X_n\}$ un şir de v.a. independente cu repartiţia comună având densitatea de repartiţie $f(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$. Are loc legea numerelor mari pentru şirul $\{X_n\}$?

CAPITOLUL 6

VECTORI ALEATORI

1. Funcţia de repartiţie, Densitatea de repartiţie.

Definiţia 1.1 *Un vector aleator multidimensional* $X=(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ *este definit de funcţia* $X : E \to R^k$ *care asociază evenimentului* $e \in E$, *vectorul*

$$X(e) = ((X_1(e), X_2(e), \ldots, X_k(e))$$

Astfel $X : E \to R^2$ este bidimensional dacă pentru fiecare pereche de submulţimi din R, $(A_1, A_2) : A_1 \in (-\infty, x_1]$, $A_2 = (-\infty, x_2]$, evenimentul

$$(e \in E, X_1(e) \in A_1 \text{ şi } X_2(e) \in A_2)$$

aparţine mulţimii $\mathcal{B}$.

Definiţia 1.2 Fie $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k) : E \to R^k$ un vector aleator. Funcţia

$$F_X : R^k \to [0, 1]$$

definită prin:

$F_X(x) = F_X(x_1, x_2, \ldots, x_k) = P(e \in E, X_1(e) \le x_1, \ldots, X_k(e) \le x_k)$

se numeşte *funcţia de repartiţie a vectorului* X.

Proprietăţi:

1) $\lim\limits_{x_j\to-\infty} F_X(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0, (\forall) 1 \le j \le k$

$\lim\limits_{(x_1,\ldots,x_k)\to(\infty,\ldots,\infty)} F_X(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k) = 1$

2) $\lim\limits_{x_j\to\infty} F_X(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k) =$

$$= F_{(X_1,\ldots,X_{j-1},X_{j+1},\ldots,X_k)}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$$

Definiţia 1.3 Dacă există $f_x : R^k \to R$ astfel încât:

$$F_X(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_k} f_X(u_1, u_2, \ldots, u_k)\, du_1 \ldots du_k$$

atunci f se numeşte *densitatea de repartiţie a vectorului* X.

Proprietăţile densităţii de repartiţie

1) $\int_{R^k} f_X(x_1, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_k = 1$

2) $f_X(x_1, \ldots, x_k) = \dfrac{\partial^k F(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k}$

3) $P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_k \in A_k) = \int\int_{A_1\times\ldots\times A_k} f_X(x_1, \ldots, x_k)\, dx_1 \ldots dx_k$

Pentru vectorul aleator bidimensional $X = (X_1, X_2)$ avem:

$$\lim_{x_1 \to +\infty} F_{(x_1,x_2)}(x_1,x_2) = F_{X_2}(x_2)$$

și

$$\lim_{x_2 \to +\infty} F_{(x_1,x_2)}(x_1,x_2) = F_{X_1}(x_1)$$

Definiția 1.4. F_{X_1} și F_{X_2} se numesc *funcțiile de repartiție marginale corespunzătoare vectorului* X.

Definiția 1.5 Dacă pentru i = 1, 2, ..., n, X_i este o v.a. discretă, atunci *repartiția comună a variabilelor* $X_1, X_2, ..., X_n$ este dată de funcția

$$P(e \in E, X_1(e) = x_1, ..., X_n(e) = x_n) = p_{12...n}$$

și repartiția marginală a v.a. X_i, este dată de

$$P(X_i = x_i) = \sum_{x_1} ... \sum_{x_{i-1}} \sum_{x_{i+1}} ... \sum_{x_n} P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n)$$

În cazul unui vector bidimensional discret:

$P(e \in E, X_1(e) = x_i, X_2(e) = x_j) = p_{ij}$

$P(e \in E, X_1(e) = x_i) = p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}$

$P(e \in E, X_2(e) = x_2) = p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}$

Exemplul 1.1 Se transmit două mesaje. Probabilitatea ca primul mesaj să fie receptat greșit este p_1 iar, probabilitatea ca cel de-al 2-lea mesaj să fie receptat greșit este p_2.

Introducem v.a.

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ dacă mesajul "i" este receptat greșit.} \\ 0, \text{ dacă mesajul "i" este receptat corect.} \end{cases}$$

i = 1, 2.

Aflăm funcția de repartiție a vectorului $X = (X_1, X_2)$.

S: Repartiția comună a v.a. X_1, X_2 este:

$p_{00} = P(X_1 = 0, X_2 = 0) = (1-p_1)(1-p_2)$

$p_{01} = P(X_1 = 0, X_2 = 1) = (1-p_1)p_2$

$p_{10} = P(X_1 = 1, X_2 = 0) = p_1(1-p_2)$

$p_{11} = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = p_1 p_2$

și

$$F_{(x_1,x_2)}(x_1,x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 < 0, & x_2 \in R \\ 0, & x_2 < 0, & x_1 \in R \\ (1-p_1)(1-p_2), & (x_1,x_2) \in [0,1)^2, & \\ 1-p_1, & x_1 \in [0,1), & x_2 \geq 1 \\ 1-p_2, & x_1 \geq 1, & x_2 \in [0,1) \\ 1, & x_1 \geq 1, & x_2 \geq 1 \end{cases}$$

Definiția 1.6 $X_1, X_2, ..., X_k$ *sunt independente în totalitate dacă pentru orice mulțime de evenimente* $X_i^{-1}(B_i)$ i = 1, 2, ..., k avem:

$P(e \in E, X_1(e) \in B_1, ..., X_k(e) \in B_k) =$

$= P(e \in E, X_1(e) \in B_1) ... P(e \in E, X_k(e) \in B_k)$.

Teorema 1.1 $X_1, X_2, ..., X_k$ sunt independente în totalitate dacă și numai dacă pentru orice $X \in R^k$,

$$F_{(x_1,...,x_k)}(x_1,...,x_k) = F_{X_1}(x_1)...F_{X_k}(x_k)$$

sau

$$f_{(x_1,...,x_k)}(x_1,...,x_k) = f_{X_1}(x_1)...f_{X_k}(x_k)$$

Dacă $X_1, X_2, ..., X_k$ sunt discrete, atunci condiția de independență devine:

$$P(X_1 = x_1, ..., X_k = x_k) = \prod_{j=1}^{k} P(X_j = x_j)$$

Teorema 1.2 Dacă $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ este un șir de v.a. independente și $T_1, T_2, ..., T_n, ...$ un șir de funcții măsurabile $T_j: R \to R$; j = 1, 2, ... atunci șirul $T_1(X_1), T_2(X_2), ...,$ este deasemenea un șir de v.a. independente.

2. Densități condiționate

Fie vectorul bidimensional $X = (X_1, X_2)$ cu densitatea de repartiție $f_{(x_1,x_2)}$. Ne propunem să determinăm densitatea de repartiție a v.a. X_1 condiționată de $X_2 = x_2$.

În acest scop vom determina funcția de repartiție condiționată, pentru care considerăm evenimentele:

$A_1 = \{e \in E, X_1(e) \leq x_1\} \in \mathcal{B}$

$A_2 = \{e \in E, x_2 - h < X_2(e) \leq x_2 + h\} \in \mathcal{B}$.

Putem scrie:

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} =$$

$$= \frac{P((e \in E; X_1(e) \leq x_1) \cap (e \in E, x_2 - h < X_2(e) \leq x_2 + h))}{P(e \in E, x_2 - h < X_2(e) \leq x_2 + h)} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x_1} du \int_{x_2-h}^{x_2+h} f_{(x_1,x_2)}(u,v)dv}{\int_{x_2-h}^{x_2+h} f_{X_2}(v)dv}, \text{unde } f_{X_2}(v) = \int_R f_{(x_1,x_2)}(u,v)du$$

este densitatea de repartiție marginală a v.a. X_2.

Funcția de repartiție a componentei X_1, condiționată de $X_2 = x_2$ este dată de

$$F_{X_1|X_2}(x_1|X_2 = x_2) = \lim_{h\to 0} P(A_1|A_2)$$

Avem:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x_1} du \int_{x_2-h}^{x_2+h} f_{(x_1,x_2)}(u,v)dv}{\int_{x_2-h}^{x_2+h} f_{X_2}(v)dv} = \frac{\int_{-\infty}^{x_1} f_{(x_1,x_2)}(u,x_2)du}{f_{X_2}(x_2)}$$

Cum

$$f_{X_1|X_2}(x_1|X_2 = x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} F_{X_1|X_2}(x_1|X_2 = x_2)$$

rezultă că densitatea de repartiție a v.a. X_1 condiționată de $X_2 = x_2$ este dată de:

$$f_{X_1|X_2}(x_1|X_2 = x_2) = \frac{f_{(x_1,x_2)}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

Avem:

$$P(X_1 = x_1,\dots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1).P(X_2 = x_2| X_1 = x_1)\dots$$
$$\dots P(X_n = x_n| X_1 = x_1,\dots, X_{n-1} = x_{n-1})$$

și, pentru $j = 1, 2, \dots, n$ repartița

$$(x_j, P(X_j = x_j| X_1 = x_1,\dots, X_{j-1} = x_{j-1}))$$

este numită *repartiția v.a.* X_j dată fiind că $X_1 = x_1,\dots, X_{j-1} = x_{j-1}$.

Exemplul 2.1 Dacă $X_1 \sim \Gamma(a,b)$, și $X_2| X_1 = \alpha \sim Exp(\alpha)$ găsim densitatea de repartiție a v.a. X_2.

S: Densitatea de repartiție a vectorului (X_1, X_2) este

$$f_{(x_1,x_2)}(x_1,x_2) = f(x_1)f(x_2|x_1) = \frac{a^b}{\Gamma(b)}\alpha^{b-1}e^{-\alpha a}\alpha e^{-\alpha x_2} =$$
$$= \frac{a^b}{\Gamma(b)}\alpha^b e^{-(a+x_2)\alpha} 1_{(0,\infty)}(\alpha) 1_{(0,\infty)}(x_2)$$

Prin urmare X_2 are d.r.

$$f_{X_2}(x_2) = \int_0^{\infty} f_{(x_1,x_2)}(x_1,x_2)dx_1 = \frac{b}{a}\left(\frac{a}{a+x_2}\right)^{b+1} I_{(0,\infty)}(x_2)$$

Spunem că X_2 are o repartiție Pareto de parametrii a și b.

Exemplul 2.2. Fie $X_1 \sim Po(\lambda)$, $P(X_2 = 0 \mid X_1 = 0) = 1$ și $X_2 \mid X_1 = n$ repartizată binomial $Bi(n,p)$ pentru $n \in N$. Dacă X_1 reprezintă numărul de defecte ce apar într-un sistem iar X_2 numărul de defecte neremediabile ne propunem să determinăm repartiția v.a. X_2.

S: Din definiția probabilității condiționate, obținem:

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2) = P(X_1 = n_1)P(X_2 = n_2|X_1 = n_1) =$$
$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n_1}}{n_1!}C_{n_1}^{n_2}p^{n_2}(1-p)^{n_1-n_2};\ n_2 = 0,1,\dots, n_1$$

Avem

$$P(X_2 = n_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} P(X_1 = n_1, X_2 = n_2) =$$
$$= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^{n_2}}{n_2!}\sum_{n_1=n_2}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n_1-n_2}}{(n_1-n_2)!} = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^{n_2}}{n_2!}$$

ceea ce arată că $X_2 \sim Po(\lambda p)$.

Exemplul 2.3 Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. independente astfel încât $X_j \sim Po(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, n$ și fie $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. X_j poate fi v.a. ce dă numărul de defectări din agregatul "j", $j = 1, 2, \dots, n$ și deci Y este numărul total de defectări în cele "j" agregate ce formează un sistem.

S: Avem

$$Y \sim Po(\lambda_1 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

și, deci

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n \mid Y = y) = 0$$

pentru $x_1 + \dots + x_n \neq y$ și pentru $x_i \in N^*$, $i = 1, 2, \dots, n$ și $x_1 + \dots + x_n = y$

$$P(X = x_1,\dots,X_n = x_n|Y = y) =$$
$$= \frac{P(X = x_1)\dots P(X_{n-1} = x_{n-1})P\left(X_n = y - \sum_1^{n-1} x_i\right)}{P(Y = y)} =$$