

# CALCULABILITATE ȘI COMPLEXITATE

## CULEGERE DE PROBLEME

<p>Să se determine complexitatea timp și spațiu pentru MT care calculează funcția <math>f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}</math> definită prin:</p> <p>a) <math>f(n)=n/2</math>, dacă <math>n=\text{par}</math> și <math>f(n)=(n+1)/2</math>, altfel</p> <p>b) <math>f(n)=n/2</math>, dacă <math>n=\text{par}</math> și <math>f(n)=3n+1</math>, altfel (funcția lui Collatz)</p> <p>c) <math>f(n)=1</math>, dacă <math>n=\text{prim}</math> și <math>f(n)=0</math>, altfel</p> <p>d) <math>f(n)=a^n</math></p>
<p>Să se determine complexitatea timp și spațiu pentru MT care verifică dacă un număr natural <math>n</math> este număr Mersenne sau nu.</p> <p>Obs. <math>n = \text{număr Mersenne} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}</math> astfel încât <math>n = 2^k - 1</math></p>
<p>Să se determine complexitatea timp și spațiu pentru MT care calculează funcția <math>f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}</math> definită prin:</p> <p>a) <math>f(n,k)=1</math>, dacă <math>n &gt; k</math> și <math>f(n,k)=0</math>, altfel</p> <p>b) <math>f(n,k)=1</math>, dacă <math>n \nmid k</math> și <math>f(n,k)=0</math>, altfel</p>
<p>Să se construiască o MT care să calculeze funcția <math>f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}</math>, definită prin:</p> <p>a) <math>f(n) = \lfloor \log_3 n \rfloor</math></p> <p>b) <math>f(n) = \lfloor n^{(1/2)} \rfloor</math></p>
<p>Să se construiască MT decidentă pentru limbajul</p> $L = \{ a^n / n > 0, 5 \mid 3^n + 1 \text{ și } 7 \mid \lceil \log_3 n \rceil \}$ <p>și să se determine complexitatea timp și spațiu.</p>
<p>Fie <math>w \in \{0,1\}^*</math> și <math>f: \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*</math>, <math>f(w) = w^R</math>.</p> <p>a) Să se construiască o MT care să simuleze calculul efectuat de <math>f</math> pe o intrare oarecare <math>w</math>.</p> <p>b) Idem cu (a) dar fără a utiliza celule suplimentare pe bandă.</p> <p>c) Să se calculeze complexitatea timp a MT</p>
<p>Să se determine complexitatea timp a MT decidente pentru limbajele:</p> <p>a) <math>L = \{w \in \{0,1\}^* / \exists n \in \mathbb{N} : w = 0^n 1^n\}</math></p> <p>b) <math>L = \{w \in \{0,1\}^* / \#_0(w) = \#_1(w)\}</math></p> <p>c) <math>L = \{w \in \{0,1\}^* / \#_0(w) \neq \#_1(w)\}</math></p> <p>d) <math>L = \{w \in \{0,1\}^* / \#_0(w) = 2 \cdot \#_1(w)\}</math></p> <p>e) <math>L = \{w \in \{0,1\}^* / \#_0(w) = 2 \cdot \#_1(w) + 3\}</math></p>
<p>a) Să se construiască o MT decidentă pentru limbajul format din cuvinte binare al căror număr de simboluri 0 diferă de dublul numărului de simboluri 1:</p> $L = \{w \in \{0,1\}^* /  w _0 \neq 2 w _1\}$ <p>b) Să se determine complexitatea timp a acestei mașini.</p>
<p>Să se construiască MT decidente pentru următoarele limbaje și să li se calculeze complexitatea timp:</p> <p>c) <math>L = \{w \in \{a,b\}^* / 3 \mid \#_a(w) \text{ și } 5 \mid \#_b(w)\}</math></p> <p>d) <math>L = \{w \in \{a,b,c\}^* / 3\#_a(w) = 2\#_b(w) \text{ și } 2 \mid \#_c(w)\}</math></p>

e) $L = \{ w \in \{a.\}^* / n,m \in \mathbb{N}, m n \}$
<p>Să se construiască MT decidente pentru următoarele limbaje și să se demonstreze că ele se află în clasa P:</p> <p>a) <math>L = \{a^n b^n / n \in \mathbb{N}\}</math>  b) <math>L = \{a^n b^m / n,m \in \mathbb{N}, n &lt; m\}</math>  c) <math>L = \{a^n b^n c^n / n \in \mathbb{N}\}</math>  d) <math>L = \{a^n b^m c^n / n,m \in \mathbb{N}\}</math>  e) <math>L = \{a^n b^m / n,m \in \mathbb{N}, m = 2n\}</math>  f) <math>L = \{a^n b^m c^s / n,m,s \in \mathbb{N}, s = n+m\}</math>  g) <math>L = \{a^n b^m c^p / n,m,p \in \mathbb{N}, p = n \times m\}</math>  h) <math>L = \{a^n b^m c^{2(n+m)} / n,m \in \mathbb{N}\}</math>  i) <math>L = \{a^{2^n} b^n c^m / n,m \in \mathbb{N}\}</math>  j) <math>L = \{a^n b^m a^n / n,m \in \mathbb{N}\}</math>  k) <math>L = \{a^n b^m / n,m \in \mathbb{N}, n &lt; m\}</math>  l) <math>L = \{a^n b^m / n,m \in \mathbb{N}, n \leq m \leq 2n\}</math>  m) <math>L = \{a^n b^m / n,m \in \mathbb{N}, m n\}</math>  n) <math>L = \{a^n b^m / n,m \in \mathbb{N}, (n,m)=1\}</math>  o) <math>L = \{a^n b^m a^n b^m / n,m \in \mathbb{N}\}</math>  p) <math>L = \{a^n b^m a^n b^m / n,m \in \mathbb{N}, m n\}</math>  q) <math>L = \{a^n b^m c^s / n,m,s \in \mathbb{N}, n=2m \text{ sau } m=2s\}</math>  r) <math>L = \{a^n b^n a^n b^n / n,m \in \mathbb{N}\}</math>  s) <math>L = \{a^n b^n a^m b^m / n,m \in \mathbb{N}\}</math></p>
<p>Să se construiască MT decidentă pentru limbajul L și să se demonstreze că el se află în clasa P:</p> <p><math>L = \{w \in \{a,b\}^* / \#_b(w) = \lfloor \log_2(\#_a(w)) \rfloor \}</math></p>
<p>Să se construiască MT decidente pentru următoarele limbaje și să li se determine complexitatea timp și spațiu:</p> <p>a) <math>L = \{w \&amp; w / w \in \Sigma^*\}</math>  b) <math>L = \{a^n \&amp; a^k / n,k \in \mathbb{N}, n k\}</math></p>
<p>Să se construiască MT decidente pentru următoarele limbaje și să li se determine complexitatea timp și spațiu:</p> <p>a) <math>L = \{w \in \Sigma^+ / w = \text{palindrom}\}</math>  b) <math>L = \{w \in \Sigma^+ / \exists \alpha \in \{0.1\}^+ : w = \alpha \alpha' \alpha, \text{ unde } \alpha' = \text{mi}(\alpha)\}</math>  c) <math>L = \{w \in \Sigma^+ / \exists \alpha \in \{0.1\}^+ : w = \alpha \alpha \alpha', \text{ unde } \alpha' = \text{mi}(\alpha)\}</math></p>
<p>Să se construiască MT decidente pentru următoarele limbaje și să li se determine complexitatea timp și spațiu:</p> <p>a) <math>L = \{w \in \{a,b,c\}^+ \mid \exists u \in \{a,b,c\}^* : w = uu \}</math>  b) <math>L = \{w \in \{a,b,c\}^+ \mid \exists u \in \{a,b,c\}^* : w = uuu \}</math>  c) <math>L = \{w \in \{a,b,c\}^+ \mid \exists u \in \{a,b,c\}^* : w = uuuu \}</math>  d) <math>L = \{w \in \{a,b,c\}^+ \mid \text{nu exista } u \in \{a,b,c\}^* : w = uu \}</math></p>

<p>Fie <math>\Sigma=\{a,b\}</math> si <math>L\subseteq\Sigma</math>: <math>L=\{w\in\Sigma^* / \exists n\in\mathbb{N}:  w =2n\}</math>; definim</p> <p style="text-align: center;"><math>f:L\rightarrow L</math>, <math>f(w)=w'</math>, unde <math>w'=\beta\alpha</math> daca <math>w=\alpha\beta</math> si <math> \alpha = \beta = w /2</math></p> <p>Sa se rezolve urmatoarele cerinte:</p> <p>i) sa se construiasca o MT care sa calculeze</p> <p style="text-align: center;"><math>f:\{0,1\}^*\rightarrow\{0,1\}^*</math>, <math>f(a)=\bar{a}</math>, unde: <math>\bar{a}_k=1</math>, daca <math>a_k=0</math> si <math>\bar{a}_k=0</math>, daca <math>a_k=1</math>, <math>\forall 1\leq i\leq  a </math>;</p> <p>ii) sa se construiasca o MT decidenta pentru limbajul:</p> <p style="text-align: center;"><math>L = \{a\bar{a}\in\{0,1\}^* / \bar{a}_k=1, \text{ daca } a_k=0 \text{ si } \bar{a}_k=0, \text{ daca } a_k=1, \forall 1\leq i\leq  a \}</math></p>
<p>Să se construiască MT decidente pentru urmatoarele limbaje și să li se determine complexitatea timp și spatiu:</p> <p><math>L=\{w_1w_2\dots w_n / n\in\mathbb{N}, \forall 1\leq i\leq n: w_i\in\Sigma^* \text{ și } \forall 1\leq i\neq k\leq n: w_i\neq w_k\}</math></p>
<p>Să se construiască MT decidenta pentru limbajul</p> <p><math>L=\{\alpha u\alpha u\alpha / \alpha\in\{0,1\}^*, u\in\{a,b,c\}^*\}</math></p> <p>și să i se determine complexitatea timp și spatiu</p>