# COMBINATORICĂ ŞI TEORIA GRAFURILOR. Partea a doua: Elemente de teoria grafurilor (continuare)

Prof. dr. Ioan Tomescu
Facultatea de Matematică şi Informatică,
Universitatea din Bucureşti

Distanţele minime se obţin in ordinea apropierii vârfurilor respective de originea $s$. Aplicând de $n$ ori acest algoritm şi luând de fiecare dată ca vârf sursă $s$ fiecare din vârfurile $1, \ldots, n$, se pot obţine distanţele şi drumurile minime pentru toate perechile ordonate de vârfuri $(i, j)$ cu $i \neq j$ şi $1 \leq i, j \leq n$.

Aceste algoritm se aplică şi grafurilor neorientate, inlocuind la pasul 3c) arcul $(i, j)$ prin muchia $ij$ care are una dintre extremităţi in vârful $i$ selectat la acel pas şi cealaltă extremitate intr-un vârf $j \in \overline{S}$. In acest caz arborescenţa drumurilor minime devine un arbore al drumurilor minime care au o extremitate in $s$.

Complexitatea timp a algoritmului se evaluează astfel: Dacă $\overline{S}$ are $k$ elemente $(1 \leq k \leq n)$, determinarea minimului din numerele $l(j)$ pentru $j \in \overline{S}$ se face cu ajutorul a $k-1$ comparaţii. Deoarece există cel mult $k-1$ arce de forma $(i, j)$ cu $i$ fixat in $\overline{S}$ şi $j$ variabil in $\overline{S}$, la compararea lui $l(j)$ cu suma $l(i) + d_{i,j}$ se mai fac cel mult $k-1$ comparaţii şi $k-1$ adunări. Deci numărul total de adunări este cel mult egal cu $1+2+\ldots+(n-1) = n(n-1)/2$ şi un număr dublu de comparaţii, adică $n(n-1)$.

Dacă graful conţine şi arce cu lungimea negativă, se poate ca anumite distanţe minime dintre vârfurile sale să nu existe. De exemplu, intre vârfurile situate pe un circuit cu suma lungimilor arcelor sale negativă nu există un minim al distanţelor intre vârfurile sale, acestea putând fi făcute să tindă la $-\infty$. Există algoritmi (de exemplu algoritmul lui Dantzig) care detectează existenţa circuitelor negative, iar in cazul inexistenţei acestora găsesc distanţele minime intre vârfurile unui graf pentru care distanţele directe intre vârfuri pot lua şi valori negative.

FLUX MAXIM IN REŢELE DE TRANSPORT

In cazul reţelelor de transport vom nota prin $\omega^-(x)$, respectiv $\omega^+(x)$ mulţimea arcelor care intră, respectiv ies din vârful $x \in V(G)$, adică $\omega^-(x) = \{(y,x)|y \in V(G)$ şi $(y,x) \in E(G)\}$ şi $\omega^+(x) = \{(x,y)|y \in V(G)$ şi $(x,y) \in E(G)\}$. Vom extinde aceste definiţii la o mulţime de vârfuri $A \subset V(G)$ in felul următor: $\omega^-(A) = \{(x,y)|x \notin A,\ y \in A$ şi $(x,y) \in E(G)\}$, iar $\omega^+(A) = \{(x,y)|x \in A, y \notin A$ şi $(x,y) \in E(G)\}$.

Un graf orientat $G$ se numeşte reţea de transport dacă verifică următoarele condiţii:

a) Există un vârf unic $s \in V(G)$ in care nu intră nici un arc, adică $\omega^-(s) = \emptyset$, numit *intrarea reţelei.*

b) Există un vârf unic $t \in V(G)$ din care nu pleacă nici un arc, adică $\omega^+(t) = \emptyset$, numit *ieşirea reţelei.*

c) $G$ este conex şi există drumuri de la $s$ la $t$.

d) S-a definit o funcţie pe mulţimea arcelor $E(G)$ cu valori numere reale nenegative: $c : E(G) \to \{x|x \geq 0\}$. Numărul $c(u)$ se numeşte *capacitatea* arcului $u$. O funţie $\varphi$ definită pe mulţimea arcelor cu valori numere reale nenegative, $\varphi : E(G) \to \{x|x \geq 0\}$ se numeşte *flux* in reţeaua de transport $G$, dacă sunt indeplinite următoarele două condiţii:

A. Condiţia de conservare a fluxului in orice vârf diferit de intrare şi ieşire: pentru orice vârf $x \neq s,t$, suma fluxurilor pe arcele care intră in $x$ este egală cu suma fluxurilor pe arcele care ies din $x$, ceea ce se scrie

$$\sum_{u\in\omega^-(x)} \varphi(u) = \sum_{u\in\omega^+(x)} \varphi(u)$$

B. Condiţia de mărginire a fluxului pe arcele reţelei: fluxul asociat oricărui arc nu trebuie să depăşească capacitatea arcului respectiv, adică $\varphi(u) \leq c(u)$ pentru orice arc $u \in E(G)$.

Se notează fluxul pe arcele de intrare cu $\varphi_s$ şi fluxul pe arcele de ieşire cu $\varphi_t$, adică

$$\varphi_s = \textstyle\sum_{u\in\omega^+(s)} \varphi(u) \text{ şi } \varphi_t = \sum_{u\in\omega^-(t)} \varphi(u).$$

PROPOZIŢIA 6. Pentru orice reţea de transport există egalitatea $\varphi_s = \varphi_t$.

Demonstraţie. Această egalitate este o consecinţă a ipotezei de conservare a fluxului in orice vârf diferit de intrare şi ieşire, dar vom da şi o demonstraţie formală a acestei proprietăţi. Pentru aceasta vom calcula in două moduri suma $\sum_{x\neq s,t}(\sum_{u\in\omega^+(x)} \varphi(u) - \sum_{u\in\omega^-(x)} \varphi(u))$. Conform condiţiei A această sumă este egală cu 0. Fluxul pe orice arc $u = (x, y)$, unde $x$ şi $y$ sunt diferite de intrare şi ieşire apare in această sumă sub forma $\varphi(u) - \varphi(u)$, arcul $u$ ieşind din $x$ şi intrând in $y$. Deci dacă notăm cu $U$ mulţimea arcelor reţelei care au ambele extremităţi diferite de $s$ şi $t$, putem scrie această sumă şi sub forma $-\varphi_s + \sum_{u\in U}(\varphi(u) - \varphi(u)) + \varphi_t = 0$, de unde rezultă egalitatea căutată. $\square$

Pentru o reţea de transport $G$ cu intrarea $s$ şi ieşirea $t$ vom considera o submulţime de vârfuri $A \subset V(G)$ astfel incât $s \notin A$ şi $t \in A$. Mulţimea $\omega^-(A)$ a arcelor grafului pentru care extremitatea iniţială nu se găseşte in $A$, dar extremitatea finală aparţine mulţimii $A$ se numeşte *tăietură de suport* $A$. *Capacitatea* tăieturii $\omega^-(A)$ este egală prin definiţie cu suma capacităţilor arcelor tăieturii şi vom nota

$$c(\omega^-(A)) = \sum_{u\in\omega^-(A)} c(u).$$

Să observăm că orice drum care leagă intrarea $s$ de ieşirea $t$ conţine cel puţin un arc dintr-o tăietură oarecare $\omega^-(A)$. Intr-adevăr, deoarece $s \notin A$ şi $t \in A$, vor exista două vârfuri vecine ale drumului, $x$ şi $y$ astfel incât $x \notin A$ şi $y \in A$, deci $(x, y) \in \omega^-(A)$.

PROPOZIŢIA 7. Pentru orice flux $\varphi$ şi orice tăietură $\omega^-(A)$ dintr-o reţea de transport $G$ există relaţiile:

$$\varphi_t = \sum_{u\in\omega^-(A)} \varphi(u) - \sum_{u\in\omega^+(A)} \varphi(u) \leq c(\omega^-(A)).$$

Demonstraţie. Prima egalitate se demonstrează analog cu propoziţia 6, calculând in două moduri suma $\sum_{x\in A\setminus\{t\}}(\sum_{u\in\omega^+(x)} \varphi(u) - \sum_{u\in\omega^-(x)} \varphi(u)) = 0$. Pentru a demonstra inegalitatea se majorează fluxul pe arcele $u \in \omega^-(A)$ prin $c(u)$ şi se minorează pe arcele $u \in \omega^+(A)$ prin 0. $\square$

Un arc $u \in E(G)$ se numeşte *saturat* relativ la fluxul $\varphi$ dacă $\varphi(u) = c(u)$. *Problema fluxului maxim* este problema determinării unui flux $\varphi$ in reţeaua $G$, astfel incât fluxul la ieşire $\varphi_t$ (care este egal cu fluxul la intrare), să aibă cea mai mare valoare posibilă.

TEOREMA 6 (Ford-Fulkerson). Pentru orice reţea de transport valoarea maximă a fluxului la ieşire este egală cu capacitatea minimă a unei tăieturi, ceea ce se mai scrie

$$\max_{\varphi}\varphi_t = \min_{\omega^-(A)} c(\omega^-(A)).$$

Demonstraţie. Fie $\varphi$ un flux maxim in reţeaua $G$. Vom aplica următorul procedeu de etichetare a vârfurilor reţelei $G$. Mai intâi se etichetează intrarea $s$. Apoi se etichetează un vârf $y$ ori de câte ori există arcul $u = (x, y)$, vârful $x$ a fost etichetat, $y$ nu este etichetat şi $\varphi(u) < c(u)$ sau există arcul

$v = (y, x)$, cu aceleaşi ipoteze de etichetare asupra vârfurilor $x$ şi $y$ şi $\varphi(v) > 0$. Să demonstrăm că după ce s-au efectuat, intr-o ordine oarecare, toate etichetările posibile in reţeaua $G$, ieşirea $t$ nu a putut fi etichetată. Pentru aceasta vom presupune contrariul şi anume că $t$ a fost etichetată şi vom ajunge la o contradicţie şi anume la concluzia că fluxul $\varphi_t$ nu este maxim. Intr-adevăr, dacă ieşirea $t$ a fost etichetată, inseamnă că există un lanţ $L$ de extremităţi $s$ şi $t$, astfel incât, dacă se notează cu $L^+$, respectiv $L^-$ mulţimile de arce ale lui $L$ care sunt orientate de la $s$ către $t$, respectiv de la $t$ către $s$, să avem: $\varphi(u) < c(u)$ peuntru orice arc $u \in L^+$ şi $\varphi(u) > 0$ pentru orice arc $u \in L^-$. Vom obţine un nou flux care la ieşire este mai mare decât $\varphi_t$ in modul următor. Vom nota $\varepsilon_1 = \min_{u \in L^+}(c(u) - \varphi(u)) > 0$, $\varepsilon_2 = \min_{u \in L^-} \varphi(u) > 0$, $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$. Vom defini un nou flux $\varphi'$ in reţeaua $G$ in felul următor: $\varphi'(u) = \varphi(u) + \varepsilon$ dacă $u \in L^+$; $\varphi'(u) = \varphi(u) - \varepsilon$ dacă $u \in L^-$; $\varphi'(u) = \varphi(u)$ dacă $u \notin L^+ \cup L^-$.

Din modul de definire a lui $\varphi'$ rezultă că verifică condiţia de conservare in orice vârf diferit de $s$ şi $t$, precum şi condiţia de mărginire pe orice arc al reţelei. Obţinem $\varphi'_t = \varphi_t + \varepsilon > \varphi_t$, deoarece ultimul arc al lanţului $L$ aparţine lui $L^+$, deci pe el fluxul a fost mărit cu $\varepsilon$. Dar aceasta contrazice maximalitatea fluxului $\varphi$, deci ieşirea $t$ nu a fost etichetată. Să notăm cu $A$ mulţimea vârfurilor care nu au fost etichetate. Se obţine că $s \notin A$ şi $t \in A$, deci $A$ este suportul unei tăieturi. Conform propoziţiei 7 putem scrie:

$$\varphi_t = \sum_{u \in \omega^-(A)} \varphi(u) - \sum_{u \in \omega^+(A)} \varphi(u) = \sum_{u \in \omega^-(A)} c(u) = c(\omega^-(A)),$$

deci fluxul la ieşire $\varphi_t$ este egal cu capacitatea unei tăieturi. Conform propoziţiei 7 rezultă că tăietura de suport $A$ are capacitate minimă, egală cu fluxul maxim. $\square$

Dacă teorema lui Ford–Fulkerson are loc pentru orice fel de capacităţi numere reale pozitive, algoritmul următor pentru determinarea unui flux maxim, datorat de asemenea lui Ford şi Fulkerson, funcţionează numai pentru capacităţi numere intregi. Să observăm totuşi că deoarece putem amplifica atât capacităţile arcelor cât şi componentele fluxului cu o aceeaşi cantitate pozitivă, obţinând o problemă similară cu cea iniţială, problema determinării fluxului maxim cu componente numere raţionale intr-o reţea cu capacităţi numere raţionale se reduce la cazul când componentele fluxului, cât şi capacităţile arcelor sunt numere intregi nenegative.

*Algoritmul lui Ford-Fulkerson*

In cazul când capacităţile arcelor sunt numere naturale, algoritmul lui Ford-Fulkerson constă in următoarele:

Pasul 1. Se determină un flux cu componente numere naturale, care verifică condiţiile de conservare şi mărginire; de exemplu se poate alege fluxul cu componente nule pe fiecare arc.

Pasul 2. Se aplică următorul procedeu de etichetare: Se etichetează intrarea $s$. Un vârf $y$ neetichetat se poate eticheta in următoarele două situaţii:
a) există arcul $u = (x, y)$, unde $x$ este etichetat şi $\varphi(u) < c(u)$. In acest caz vârful $y$ se etichetează cu $[+x]$.
b) există arcul $v = (y, x)$, unde $x$ este etichetat şi $\varphi(v) > 0$. In acest caz $y$ se etichetează cu $[-x]$.
Dacă după ce se fac toate etichetările posibile ieşirea $t$ nu a fost etichetată, ne oprim, fluxul obţinut este maxim. In caz contrar $t$ a fost etichetată. Urmărind etichetele vârfurilor in sens invers, de la $t$ la $s$, se reconstituie un lanţ nesaturat $L$ pe care fluxul poate fi mărit cu $\varepsilon$, definit in acelaşi mod ca in demonstraţia teoremei lui Ford–Fulkerson. Cu noul flux $\varphi'$ se merge la pasul 2.

Algoritmul are un număr finit de paşi deoarece atât capacităţile arcelor cât şi componentele fluxului fiind numere naturale, la fiecare mărire a fluxului valoarea $\varphi_t$ creşte cu $\varepsilon \geq 1$ iar fluxul este mărginit, el neputând depăşi capacitatea minimă a unei tăieturi. La sfârşitul aplicării algoritmului arcele care unesc vârfurile etichetate cu vârfurile neetichetate constituie o tăietură de capacitate minimă, demonstraţia acestei proprietăţi decurgând din demonstraţia teoremei lui Ford-Fulkerson.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Becheanu, I. Tomescu, B. Enescu, A. Vernescu, Matematică, Manual pentru clasa a X-a (profil M2), Editura Teora, 2000, pp. 92-132.
2. M. Behzad, G. Chartrand, L. Lesniak-Foster, Graphs & digraphs, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, Massachusetts, 1979.
3. B. Bollobás, Graph theory. An introductory course, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1979.
4. N. Christofides, Graph theory. An algorithmic approach, Academic Press, 1975.
5. L. Ford, D. R. Fulkerson, Flows in networks, Princeton Univ. Press, 1962.
6. I. Tomescu, Combinatorică şi teoria grafurilor, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1978.
7. I. Tomescu, Probleme de combinatorică şi teoria grafurilor, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981. Ediţia engleză: Problems in combinatorics and graph theory, John Wiley, New York, 1985.