Geometrie - Curs 3

Victor Vuletescu

University of Bucharest, Faculty of Mathematics, Bucharest, Romania.

14 Aprilie 2019

Subspații afine: definiții, proprietăți elementare

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. O submulțime $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ se numește *subspațiu afin* dacă există un punct $O' \in \mathcal{A}'$ astfel încât

$$dir_{O'}(\mathcal{A}') = \{\overrightarrow{O'P} | P \in \mathcal{A}'\}$$

este subspațiu vectorial al lui $dir(\mathcal{A})$.

Subspații afine: definiții, proprietăți elementare

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. O submulțime $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ se numește *subspațiu afin* dacă există un punct $O' \in \mathcal{A}'$ astfel încât

$$dir_{O'}(\mathcal{A}') = \{\overrightarrow{O'P} | P \in \mathcal{A}'\}$$

este subspațiu vectorial al lui $dir(\mathcal{A})$.

Observație

Dacă $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este un subspațiu afin, atunci:

Subspaţii afine: definiţii, proprietăţi elementare

Definiţie

Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu afin. O submulţime $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ se numeşte *subspaţiu afin* dacă există un punct $O' \in \mathcal{A}'$ astfel încât

$$dir_{O'}(\mathcal{A}') = \{\overrightarrow{O'P} | P \in \mathcal{A}'\}$$

este subspaţiu vectorial al lui $dir(\mathcal{A})$.

Observaţie

Dacă $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este un subspaţiu afin, atunci:

- $dir_{O'}(\mathcal{A}')$ nu depinde de punctul $O' \in \mathcal{A}'$ ales;

Subspații afine: definiții, proprietăți elementare

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin. O submulțime $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ se numește *subspațiu afin* dacă există un punct $O' \in \mathcal{A}'$ astfel încât

$$dir_{O'}(\mathcal{A}') = \{\overrightarrow{O'P} | P \in \mathcal{A}'\}$$

este subspațiu vectorial al lui $dir(\mathcal{A})$.

Observație

Dacă $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este un subspațiu afin, atunci:

- $dir_{O'}(\mathcal{A}')$ nu depinde de punctul $O' \in \mathcal{A}'$ ales;
- $\mathcal{A}'$ devine un spațiu afin de direcție $dir_{O'}(\mathcal{A}')$.

Caracterizarea în coordonate carteziene a subspațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ o submulțime. Atunci $\mathcal{A}'$ este subspațiu afin dacă și numai dacă

Caracterizarea în coordonate carteziene a subspațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ o submulțime. Atunci $\mathcal{A}'$ este subspațiu afin dacă și numai dacă există o matrice $A \in Mat_{n,m}(K)$ și $B \in Mat_{m,1}(K)$ astfel încât

$$\mathcal{A}' = \{P \in \mathcal{A} \text{ de coordonate } X | AX = B\}.$$

Caracterizarea în coordonate carteziene a subspațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ o submulțime. Atunci $\mathcal{A}'$ este subspațiu afin dacă și numai dacă există o matrice $A \in Mat_{n,m}(K)$ și $B \in Mat_{m,1}(K)$ astfel încât

$$\mathcal{A}' = \{P \in \mathcal{A} \text{ de coordonate } X | AX = B\}.$$

Propoziție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ dat de sistemul de ecuații $AX = B$. Atunci $dir(\mathcal{A}')$ este subspațiul vectorial definit de sistemul de ecuații omogene

Caracterizarea în coordonate carteziene a subspațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ o submulțime. Atunci $\mathcal{A}'$ este subspațiu afin dacă și numai dacă există o matrice $A \in Mat_{n,m}(K)$ și $B \in Mat_{m,1}(K)$ astfel încât

$$\mathcal{A}' = \{P \in \mathcal{A} \text{ de coordonate } X | AX = B\}.$$

Propoziție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ dat de sistemul de ecuații $AX = B$. Atunci $dir(\mathcal{A}')$ este subspațiul vectorial definit de sistemul de ecuații omogene

$$(dir(\mathcal{A}')) : \quad AX = 0.$$

Caracterizarea în coordonate carteziene a subspațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ o submulțime. Atunci $\mathcal{A}'$ este subspațiu afin dacă și numai dacă există o matrice $A \in Mat_{n,m}(K)$ și $B \in Mat_{m,1}(K)$ astfel încât

$$\mathcal{A}' = \{P \in \mathcal{A} \text{ de coordonate } X | AX = B\}.$$

Propoziție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n în care am fixat un reper cartezian $\mathcal{R}$ și $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ dat de sistemul de ecuații $AX = B$. Atunci $dir(\mathcal{A}')$ este subspațiul vectorial definit de sistemul de ecuații omogene

$$(dir(\mathcal{A}')) : \quad AX = 0.$$

În particular,

$$dim(\mathcal{A}') = dim(\mathcal{A}) - rang(A).$$

Cazuri particulare remarcabile

Drepte afine

- Se numște *dreaptă afină* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune

Cazuri particulare remarcabile

Drepte afine

- Se numște *dreaptă afină* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 1$.

Cazuri particulare remarcabile

Drepte afine

- Se numște *dreaptă afină* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 1$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$ atunci dreapta afină ce trece prin punctul A de coordonate $A = (x_1^A, \dots, x_n^A)$ și are direcția generată de vectorul $v = (v_1, \dots, v_n)$ este

Cazuri particulare remarcabile

Drepte afine

- Se numște *dreaptă afină* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 1$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$ atunci dreapta afină ce trece prin punctul A de coordonate $A = (x_1^A, \dots, x_n^A)$ și are direcția generată de vectorul $v = (v_1, \dots, v_n)$ este

$$\frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$$

Cazuri particulare remarcabile

Drepte afine

- Se numște *dreaptă afină* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 1$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$ atunci dreapta afină ce trece prin punctul A de coordonate $A = (x_1^A, \ldots, x_n^A)$ și are direcția generată de vectorul $v = (v_1, \ldots, v_n)$ este

$$\frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$$

- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$ iar $A \neq B$ sunt două puncte distincte din $\mathcal{A}$, atunci ecuația dreptei determinată de A și B este:

Cazuri particulare remarcabile

Drepte afine

- Se numște *dreaptă afină* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 1$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$ atunci dreapta afină ce trece prin punctul A de coordonate $A = (x_1^A, \dots, x_n^A)$ și are direcția generată de vectorul $v = (v_1, \dots, v_n)$ este

$$\frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n}$$

- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$ iar $A \neq B$ sunt două puncte distincte din $\mathcal{A}$, atunci ecuația dreptei determinată de A și B este:

$$\frac{x_1 - x_1^A}{x_1^B - x_1^A} = \frac{x_2 - x_2^A}{x_2^B - x_2^A} = \dots = \frac{x_n - x_n^A}{x_n^B - x_n^A}$$

Cazuri particulare remarcabile

Plane afine

- Se numște *plan afin* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune

Cazuri particulare remarcabile

Plane afine

- Se numște *plan afin* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 2$.

Cazuri particulare remarcabile

Plane afine

- Se numște *plan afin* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 2$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin de dimensiune $dim(\mathcal{A}) = 3$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$, $A \in \mathcal{A}'$ este un punct iar $V' \subset dir(\mathcal{A})$ este un subspațiu vectorial de dimensiune $dim_K(V') = 2$ generat de vectorii $V' =< v = (v_1, v_2, v_3), u = (u_1, u_2, u_3) >$ atunci planul afin $\mathcal{A}'$ ce trece prin A și are direcția V' are ecuația:

Cazuri particulare remarcabile

Plane afine

- Se numște *plan afin* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 2$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin de dimensiune $dim(\mathcal{A}) = 3$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$, $A \in \mathcal{A}'$ este un punct iar $V' \subset dir(\mathcal{A})$ este un subspațiu vectorial de dimensiune $dim_K(V') = 2$ generat de vectorii $V' =< v = (v_1, v_2, v_3), u = (u_1, u_2, u_3) >$ atunci planul afin $\mathcal{A}'$ ce trece prin A și are direcția V' are ecuația:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^A & v_1 & u_1 \\ x_2 - x_2^A & v_2 & u_2 \\ x_3 - x_3^A & v_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

Cazuri particulare remarcabile

Plane afine

- Se numște *plan afin* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 2$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin de dimensiune $dim(\mathcal{A}) = 3$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$, $A \in \mathcal{A}'$ este un punct iar $V' \subset dir(\mathcal{A})$ este un subspațiu vectorial de dimensiune $dim_K(V') = 2$ generat de vectorii $V' =< v = (v_1, v_2, v_3), u = (u_1, u_2, u_3) >$ atunci planul afin $\mathcal{A}'$ ce trece prin A și are direcția V' are ecuația:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^A & v_1 & u_1 \\ x_2 - x_2^A & v_2 & u_2 \\ x_3 - x_3^A & v_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

- Ca atare, ecuația planului determinat de trei puncte A, B, C va fi

Cazuri particulare remarcabile

Plane afine

- Se numște *plan afin* un subspațiu afin $\mathcal{A}'$ de dimensiune $dim(\mathcal{A}') = 2$.
- Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin de dimensiune $dim(\mathcal{A}) = 3$ raportat la reperul cartezian $\mathcal{R}$, $A \in \mathcal{A}'$ este un punct iar $V' \subset dir(\mathcal{A})$ este un subspațiu vectorial de dimensiune $dim_K(V') = 2$ generat de vectorii $V' =< v = (v_1, v_2, v_3), u = (u_1, u_2, u_3) >$ atunci planul afin $\mathcal{A}'$ ce trece prin A și are direcția V' are ecuația:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^A & v_1 & u_1 \\ x_2 - x_2^A & v_2 & u_2 \\ x_3 - x_3^A & v_3 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

- Ca atare, ecuația planului determinat de trei puncte A, B, C va fi

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1^A & x_1^B - x_1^A & x_1^C - x_1^A \\ x_2 - x_2^A & x_2^B - x_2^A & x_2^C - x_2^A \\ x_3 - x_3^A & x_3^B - x_3^A & x_3^C - x_3^A \end{vmatrix} = 0$$

Paralelism în spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ subspații afine ale sale. Spunem că $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt paralele (notat $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$) dacă are loc măcar una dintre incluziunile $dir(\mathcal{A}_1) \subset dir(\mathcal{A}_2)$ sau invers, $dir(\mathcal{A}_2) \subset dir(\mathcal{A}_1)$.

Paralelism în spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ subspații afine ale sale. Spunem că $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt paralele (notat $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$) dacă are loc măcar una dintre incluziunile $dir(\mathcal{A}_1) \subset dir(\mathcal{A}_2)$ sau invers, $dir(\mathcal{A}_2) \subset dir(\mathcal{A}_1)$.

Observații

Paralelism în spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ subspații afine ale sale. Spunem că $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt paralele (notat $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$) dacă are loc măcar una dintre incluziunile $dir(\mathcal{A}_1) \subset dir(\mathcal{A}_2)$ sau invers, $dir(\mathcal{A}_2) \subset dir(\mathcal{A}_1)$.

Observații

- Relația de paralelism *nu este* tranzitivă, i.e. dacă $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ sunt trei subspații astfel încât $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2 \parallel \mathcal{A}_3$ nu rezultă $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_3$.

Paralelism în spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ subspații afine ale sale. Spunem că $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt paralele (notat $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$) dacă are loc măcar una dintre incluziunile $dir(\mathcal{A}_1) \subset dir(\mathcal{A}_2)$ sau invers, $dir(\mathcal{A}_2) \subset dir(\mathcal{A}_1)$.

Observații

- Relația de paralelism *nu este* tranzitivă, i.e. dacă $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ sunt trei subspații astfel încât $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2 \parallel \mathcal{A}_3$ nu rezultă $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_3$.
- Dacă $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sunt subspații afine *de aceeași dimensiune* atunci $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$ dacă și numai dacă $dir(\mathcal{A}_1) = dir(\mathcal{A}_2)$.

Paralelism în spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin și $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ subspații afine ale sale. Spunem că $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ sunt paralele (notat $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$) dacă are loc măcar una dintre incluziunile $dir(\mathcal{A}_1) \subset dir(\mathcal{A}_2)$ sau invers, $dir(\mathcal{A}_2) \subset dir(\mathcal{A}_1)$.

Observații

- Relația de paralelism *nu este* tranzitivă, i.e. dacă $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ sunt trei subspații astfel încât $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_2 \parallel \mathcal{A}_3$ nu rezultă $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_3$.
- Dacă $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sunt subspații afine *de aceeași dimensiune* atunci $\mathcal{A}_1 \parallel \mathcal{A}_2$ dacă și numai dacă $dir(\mathcal{A}_1) = dir(\mathcal{A}_2)$.
- Ca și consecință, în categria spațiilor afine are loc *"postulatul paralelelor"*: dacă $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ este un subspațiu afin și $A \in \mathcal{A}$ este un punct arbitrar, atunci există și este unic un subspațiu afin $\mathcal{A}"$ astfel încât

$$A \in \mathcal{A}", \ \mathcal{A}" \parallel \mathcal{A}', \text{ și } dim(\mathcal{A}") = dim(\mathcal{A}').$$

Paralelism în spații afine

Exemple: drepte paralele

- Fie dreptele

$$(d_1): \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^A}{v_3}$$

Paralelism în spații afine

Exemple: drepte paralele

- Fie dreptele

$$(d_1) : \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^A}{v_3}$$

și

$$(d_2) : \frac{x_1 - x_1^B}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^B}{u_2} = \frac{x_3 - x_3^B}{u_3}$$

Paralelism în spații afine

Exemple: drepte paralele

- Fie dreptele

$$(d_1) : \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^A}{v_3}$$

și

$$(d_2) : \frac{x_1 - x_1^B}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^B}{u_2} = \frac{x_3 - x_3^B}{u_3}$$

Atunci $d_1 \parallel d_2$ dacă și numai dacă

Paralelism în spații afine

Exemple: drepte paralele

- Fie dreptele

$$(d_1):\ \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^A}{v_3}$$

și

$$(d_2):\ \frac{x_1 - x_1^B}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^B}{u_2} = \frac{x_3 - x_3^B}{u_3}$$

Atunci $d_1 \parallel d_2$ dacă și numai dacă

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_3}{v_3}$$

Paralelism în spații afine

Exemple: plane paralele

- Fie planele

$$(\pi_1): \ A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = D_1$$

Paralelism în spații afine

Exemple: plane paralele

- Fie planele

$$(\pi_1):\ A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = D_1$$

și

$$(\pi_2):\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 = D_2$$

Paralelism în spații afine

Exemple: plane paralele

- Fie planele

$$(\pi_1): \ A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = D_1$$

și

$$(\pi_2): \ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 = D_2$$

Atunci $\pi_1 \parallel \pi_2$ dacă și numai dacă

Paralelism în spații afine

Exemple: plane paralele

- Fie planele

$$(\pi_1):\ A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = D_1$$

și

$$(\pi_2):\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 = D_2$$

Atunci $\pi_1 \parallel \pi_2$ dacă și numai dacă

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$$

Paralelism în spații afine

Exemple: plan paralel cu dreaptă

- Fie planul

$$(\pi):\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$$

Paralelism în spații afine

Exemple: plan paralel cu dreaptă

- Fie planul

$$(\pi): \ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$$

și dreapta

$$(d): \ \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^A}{v_3}$$

Paralelism în spații afine

Exemple: plan paralel cu dreaptă

- Fie planul

$$(\pi): \; Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$$

și dreapta

$$(d): \; \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^A}{v_3}$$

Atunci $\pi \parallel d$ dacă și numai dacă

Paralelism în spații afine

Exemple: plan paralel cu dreaptă

- Fie planul

$$(\pi):\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$$

și dreapta

$$(d):\ \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^A}{v_3}$$

Atunci $\pi \parallel d$ dacă și numai dacă

$$Av_1 + Bv_2 + Cv_3 = 0$$

Aplicații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un acelașși corp K. O funcție $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ se numește *aplicație afină* dacă

Aplicații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un acelassi corp K. O funcție $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ se numește *aplicație afină* dacă există un punct $O \in \mathcal{A}_1$ astfel încât aplicația $T_{O,\tau} : dir(\mathcal{A}_1) \to dir(\mathcal{A}_2)$ definită prin

$$T_{O,\tau}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(P)}$$

este aplicație liniară.

Aplicații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un acelassi corp K. O funcție $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ se numește *aplicație afină* dacă există un punct $O \in \mathcal{A}_1$ astfel încât aplicația $T_{O,\tau} : dir(\mathcal{A}_1) \to dir(\mathcal{A}_2)$ definită prin

$$T_{O,\tau}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{\tau(O)\tau(P)}$$

este aplicație liniară.

Propoziție

Dacă $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ este o aplicație afină, atunci aplicația liniară $T_{O,\tau}$ de mai sus *nu depinde de alegerea lui O*. Ea se numește *urma vectorială* a lui τ și este notată T_τ.

Caracterizarea aplicațiilor afine utilizând combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un același corp K și $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Atunci τ este transformare afină dacă și numai dacă **pentru orice** $n \geq 2$, și orice alegeri $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ și $a_1, \ldots, a_n \in K$ cu $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ avem

$$\tau\left(\sum_{i=1}^{n} a_i P_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i.$$

Caracterizarea aplicațiilor afine utilizând combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un același corp K și $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Atunci τ este transformare afină dacă și numai dacă **pentru orice** $n \geq 2$, și orice alegeri $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ și $a_1, \ldots, a_n \in K$ cu $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ avem

$$\tau\left(\sum_{i=1}^{n} a_i P_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i.$$

Remarcă

În cazul afin, spre deosebire de cel vectorial, nu ne putem limita la a testa egalitatea de mai sus doar pentru $n = 2$!!!

Caracterizarea aplicațiilor afine utilizând combinații afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un același corp K și $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Atunci τ este transformare afină dacă și numai dacă **pentru orice** $n \geq 2$, și orice alegeri $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{A}_1$ și $a_1, \ldots, a_n \in K$ cu $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ avem

$$\tau\left(\sum_{i=1}^{n} a_i P_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i.$$

Remarcă

În cazul afin, spre deosebire de cel vectorial, nu ne putem limita la a testa egalitatea de mai sus doar pentru $n = 2$!!!

Se poate demonstra că dacă avem $char(K) \neq 2$ atunci ne putem limita la a testa egalitatea de mai sus doar pentru $n = 2$puncte.

Caracterizarea în coordonate a aplicațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un același corp K de dimensiuni n (respectiv m) și $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Fie $\mathcal{R}_1$ (respectiv $\mathcal{R}_2$) repere afine pentru $\mathcal{A}_1$ (respectiv $\mathcal{A}_2$) fixate. Atunci τ este aplicație afină dacă și numai dacă

Caracterizarea în coordonate a aplicațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un același corp K de dimensiuni n (respectiv m) și $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Fie $\mathcal{R}_1$ (respectiv $\mathcal{R}_2$) repere afine pentru $\mathcal{A}_1$ (respectiv $\mathcal{A}_2$) fixate. Atunci τ este aplicație afină dacă și numai dacă există o matrice $A \in Mat_{m,n}(K)$ și o matrice $B \in Mat_{m,1}(K)$ astfel încât

$$\tau(X) = AX + B$$

Caracterizarea în coordonate a aplicațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un același corp K de dimensiuni n (respectiv m) și $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Fie $\mathcal{R}_1$ (respectiv $\mathcal{R}_2$) repere afine pentru $\mathcal{A}_1$ (respectiv $\mathcal{A}_2$) fixate. Atunci τ este aplicație afină dacă și numai dacă există o matrice $A \in Mat_{m,n}(K)$ și o matrice $B \in Mat_{m,1}(K)$ astfel încât

$$\tau(X) = AX + B$$

Remarcă

Dacă $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ este o transformare afină ce are expresia

$$\tau(X) = AX + B$$

în raport cu reperele $\mathcal{R}_1 = (O_1, B_1)$ respectiv $\mathcal{R}_2 = (O_2, B_2)$ atunci matricea urmei vectoriale T_τ a lui τ în raport cu bazele B_1 respectiv B_2 este

Caracterizarea în coordonate a aplicațiilor afine

Teoremă

Fie $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ spații afine peste un același corp K de dimensiuni n (respectiv m) și $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ o funcție. Fie $\mathcal{R}_1$ (respectiv $\mathcal{R}_2$) repere afine pentru $\mathcal{A}_1$ (respectiv $\mathcal{A}_2$) fixate. Atunci τ este aplicație afină dacă și numai dacă există o matrice $A \in Mat_{m,n}(K)$ și o matrice $B \in Mat_{m,1}(K)$ astfel încât

$$\tau(X) = AX + B$$

Remarcă

Dacă $\tau : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ este o transformare afină ce are expresia

$$\tau(X) = AX + B$$

în raport cu reperele $\mathcal{R}_1 = (O_1, B_1)$ respectiv $\mathcal{R}_2 = (O_2, B_2)$ atunci matricea urmei vectoriale T_τ a lui τ în raport cu bazele B_1 respectiv B_2 este A, i.e.

$$T_\tau(X) = AX.$$

Exemple remarcabile de transformări afine

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *translație* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}) \to dir(\mathcal{A})$ este identitatea,

$$T_\tau(v) = v, \ \forall v \in dir(\mathcal{A}).$$

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *translație* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}) \to dir(\mathcal{A})$ este identitatea,

$$T_\tau(v) = v, \ \forall v \in dir(\mathcal{A}).$$

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este translație dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *translație* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}) \to dir(\mathcal{A})$ este identitatea,

$$T_\tau(v) = v, \ \forall v \in dir(\mathcal{A}).$$

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este translație dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este $\tau(X) = X + B$

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *translație* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}) \to dir(\mathcal{A})$ este identitatea,

$$T_\tau(v) = v, \ \forall v \in dir(\mathcal{A}).$$

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este translație dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este $\tau(X) = X + B$

Omotetii

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *translație* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}) \to dir(\mathcal{A})$ este identitatea,

$$T_\tau(v) = v,\ \forall v \in dir(\mathcal{A}).$$

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este translație dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este $\tau(X) = X + B$

Omotetii

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *omotetie* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}_1) \to dir(\mathcal{A}_1)$ este de forma

$$T_\tau(v) = \lambda v,\ \lambda \in K, \lambda \neq 1.$$

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *translație* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}) \to dir(\mathcal{A})$ este identitatea,

$$T_\tau(v) = v, \ \forall v \in dir(\mathcal{A}).$$

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este translație dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este $\tau(X) = X + B$

Omotetii

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *omotetie* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}_1) \to dir(\mathcal{A}_1)$ este de forma

$$T_\tau(v) = \lambda v, \ \lambda \in K, \lambda \neq 1.$$

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este omotetie dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este

Exemple remarcabile de transformări afine

Translații

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *translație* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}) \to dir(\mathcal{A})$ este identitatea,

$$T_\tau(v) = v, \ \forall v \in dir(\mathcal{A}).$$

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este translație dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este $\tau(X) = X + B$

Omotetii

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *omotetie* dacă urma sa vectorială $T_\tau : dir(\mathcal{A}_1) \to dir(\mathcal{A}_1)$ este de forma

$$T_\tau(v) = \lambda v, \ \lambda \in K, \lambda \neq 1.$$

- O transformare afină $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este omotetie dacă și numai dacă expresia ei în raport cu un reper cartezian $\mathcal{R}$ este $\tau(X) = \lambda X + B$

Hipercuadrice în spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n raportat la un reper cartezian $\mathcal{R}$. Se numește hipercuadrică în $\mathcal{A}$ o submulțime $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ care este mulțimea zerourilor ununi polinom de gradul doi $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$,

$$\mathcal{Q} = \{(x_1, \ldots, x_n) | F(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

Hipercuadrice în spații afine

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin de dimensiune n raportat la un reper cartezian $\mathcal{R}$. Se numește hipercuadrică în $\mathcal{A}$ o submulțime $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ care este mulțimea zerourilor ununi polinom de gradul doi $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$,

$$\mathcal{Q} = \{(x_1, \ldots, x_n) | F(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

Observație

Cu alte cuvinte, o hipercuadrică este o mulțime de forma

$$\mathcal{Q} = \{\{(x_1, \ldots, x_n)| \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c = 0\}$$

Hipercuadrice în spații afine

Terminologie

- Dacă $\mathcal{Q}$ este o hipercuadrică ca mai sus, vom nota

$$q_F = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

  și respectiv

$$l_F = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i;$$

  q_F este evident o formă pătratică (vectorială), numită *forma pătratică asociată hipercuadricei*.
- În cazul $dim(\mathcal{A}) = 2$ hipercuadricele se numesc *conice*, iar în cazul $dim(\mathcal{A}) = 3$ hipercuadricele se numesc *cuadrice*.

Spații vectoriale euclidiene

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$. Se numește *produs scalar* pe V o biliniară $g : V \times V \to \mathbb{R}$ care este *simetrică* și *pozitiv definită*, i.e.

$$g(u, v) = g(v, u), \forall u, v \in V;$$

Spații vectoriale euclidiene

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$. Se numește *produs scalar* pe V o biliniară $g : V \times V \to \mathbb{R}$ care este *simetrică* și *pozitiv definită*, i.e.

$$g(u,v) = g(v,u), \forall u, v \in V;$$

$$g(v,v) \geq 0,\ \forall v \in V \text{ și}$$

Spații vectoriale euclidiene

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$. Se numește *produs scalar* pe V o biliniară $g : V \times V \to \mathbb{R}$ care este *simetrică* și *pozitiv definită*, i.e.

$$g(u, v) = g(v, u), \forall u, v \in V;$$

$$g(v, v) \geq 0,\ \forall v \in V \text{ și } g(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0_V.$$

Spații vectoriale euclidiene

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$. Se numește *produs scalar* pe V o biliniară $g : V \times V \to \mathbb{R}$ care este *simetrică* și *pozitiv definită*, i.e.

$$g(u, v) = g(v, u), \forall u, v \in V;$$

$$g(v, v) \geq 0,\ \forall v \in V \text{ și } g(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0_V.$$

Exemplu

Spații vectoriale euclidiene

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$. Se numește *produs scalar* pe V o biliniară $g : V \times V \to \mathbb{R}$ care este *simetrică* și *pozitiv definită*, i.e.

$$g(u, v) = g(v, u), \forall u, v \in V;$$

$$g(v, v) \geq 0,\ \forall v \in V \text{ și } g(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0_V.$$

Exemplu ("produsul scalar canonic")

Spații vectoriale euclidiene

Definiție

Fie V un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$. Se numește *produs scalar* pe V o biliniară $g : V \times V \to \mathbb{R}$ care este *simetrică* și *pozitiv definită*, i.e.

$$g(u,v) = g(v,u), \forall u, v \in V;$$

$$g(v,v) \geq 0,\ \forall v \in V \text{ și } g(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0_V.$$

Exemplu ("produsul scalar canonic")

Fie $V = \mathbb{R}^n$ și $g_0 : V \times V \to \mathbb{R}$ dată prin

$$g_0\left((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Spacții vectoriale euclidiene

Forma generală a unui produs scalar

Fie $V = \mathbb{R}^n$ și $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o biliniară simetrică, dată prin

$$g\left((x_1, \ldots x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Atunci g este un produs scalar dacă și numai dacă

Spacții vectoriale euclidiene

Forma generală a unui produs scalar

Fie $V = \mathbb{R}^n$ și $g : V \times V \to \mathbb{R}$ o biliniară simetrică, dată prin

$$g\left((x_1, \ldots x_n), (y_1, \ldots, y_n)\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Atunci g este un produs scalar dacă și numai dacă

$$\Delta_i > 0, \forall i = 1, \ldots n$$

unde

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ii} \end{vmatrix}$$

Proprietăți ale produselor scalare

Notație

Dacă $g : V \times V \to \mathbb{R}$ este un produs scalar, vom nota

$$\langle u, v \rangle \overset{not}{=} g(u, v)$$

Proprietăți ale produselor scalare

Notație

Dacă $g : V \times V \to \mathbb{R}$ este un produs scalar, vom nota

$$\langle u, v \rangle \overset{not}{=} g(u, v)$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz

Fie $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar. Atunci pentru orice doi vectori $u, v \in V$ are loc

$$(\langle u, v \rangle)^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

cu egalitate dacă și numai dacă u, v sunt liniar dependenți.

Proprietăți ale produselor scalare

Notație

Dacă $g : V \times V \to \mathbb{R}$ este un produs scalar, vom nota

$$\langle u, v \rangle \overset{not}{=} g(u, v)$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz

Fie $<, >: V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar. Atunci pentru orice doi vectori $u, v \in V$ are loc

$$(\langle u, v \rangle)^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

cu egalitate dacă și numai dacă u, v sunt liniar dependenți.

Demonstrație

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \langle tu + v, tu + v \rangle$. Atunci

Proprietăți ale produselor scalare

Notație

Dacă $g : V \times V \to \mathbb{R}$ este un produs scalar, vom nota

$$\langle u, v \rangle \overset{not}{=} g(u, v)$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz

Fie $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar. Atunci pentru orice doi vectori $u, v \in V$ are loc

$$(\langle u, v \rangle)^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

cu egalitate dacă și numai dacă u, v sunt liniar dependenți.

Demonstrație

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \langle tu + v, tu + v \rangle$. Atunci $f(t) = \langle u, u \rangle t^2 + 2 \langle u, v \rangle t + \langle v, v \rangle$ și

Proprietăți ale produselor scalare

Notație

Dacă $g : V \times V \to \mathbb{R}$ este un produs scalar, vom nota

$$\langle u, v \rangle \overset{not}{=} g(u, v)$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz

Fie $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar. Atunci pentru orice doi vectori $u, v \in V$ are loc

$$(\langle u, v \rangle)^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

cu egalitate dacă și numai dacă u, v sunt liniar dependenți.

Demonstrație

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \langle tu + v, tu + v \rangle$. Atunci $f(t) = \langle u, u \rangle t^2 + 2 \langle u, v \rangle t + \langle v, v \rangle$ și $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Deci

Proprietăți ale produselor scalare

Notație

Dacă $g : V \times V \to \mathbb{R}$ este un produs scalar, vom nota

$$\langle u, v \rangle \overset{not}{=} g(u, v)$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz

Fie $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar. Atunci pentru orice doi vectori $u, v \in V$ are loc

$$(\langle u, v \rangle)^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$$

cu egalitate dacă și numai dacă u, v sunt liniar dependenți.

Demonstrație

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \langle tu + v, tu + v \rangle$. Atunci $f(t) = \langle u, u \rangle t^2 + 2 \langle u, v \rangle t + \langle v, v \rangle$ și $f(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Deci $\Delta_f \leq 0$.

Proprietăți ale produselor scalare

Norma indusă de un produs scalar

Fie V un spațiu vectorial și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V.Se numește *norma indusă de* $\langle , \rangle$ funcția $|| \, || : V \to \mathbb{R}$ definită prin

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Proprietăți ale produselor scalare

Norma indusă de un produs scalar

Fie V un spațiu vectorial și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V.Se numește *norma indusă de* $\langle , \rangle$ funcția $|| \, || : V \to \mathbb{R}$ definită prin

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Exemplu. Pentru produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$ avem

$$||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}$$

Proprietăți ale produselor scalare

Norma indusă de un produs scalar

Fie V un spațiu vectorial și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V.Se numește *norma indusă de* $\langle , \rangle$ funcția $|| \; || : V \to \mathbb{R}$ definită prin

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Exemplu. Pentru produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$ avem

$$||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}$$

Proprietăți ale normei

Au loc:

Proprietăți ale produselor scalare

Norma indusă de un produs scalar

Fie V un spațiu vectorial și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V.Se numește *norma indusă de* $\langle , \rangle$ funcția $|| \; || : V \to \mathbb{R}$ definită prin

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Exemplu. Pentru produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$ avem

$$||(x_1, \dots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$$

Proprietăți ale normei

Au loc:

a) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall u, v \in V$;

Proprietăţi ale produselor scalare

Norma indusă de un produs scalar

Fie V un spaţiu vectorial şi $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V.Se numeşte *norma indusă de* $\langle , \rangle$ funcţia $|| \, || : V \to \mathbb{R}$ definită prin

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Exemplu. Pentru produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$ avem

$$||(x_1, \dots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$$

Proprietăţi ale normei

Au loc:
a) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall u, v \in V$;
b) $||tv|| = |t| \cdot ||v||, \forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in V$;

Proprietăți ale produselor scalare

Norma indusă de un produs scalar

Fie V un spațiu vectorial și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V.Se numește *norma indusă de* $\langle , \rangle$ funcția $|| \ || : V \to \mathbb{R}$ definită prin

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Exemplu. Pentru produsul scalar canonic pe $\mathbb{R}^n$ avem

$$||(x_1, \dots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$$

Proprietăți ale normei

Au loc:
a) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall u, v \in V$;
b) $||tv|| = |t| \cdot ||v||, \forall t \in \mathbb{R}, \forall v \in V$;
c) $||v|| \geq 0, \forall v \in V$ și $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$.

Proprietăți ale produselor scalare

Măsuri de unghiuri induse de un produs scalar

Fie V un spațiu vectorial și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V. Fie $u, v \in V$ vectori nenuli. Definim *măsura unghiului $\widehat{u, v}$ dintre u și v* prin

$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{\langle u, v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}$$

Proprietăți ale produselor scalare

Măsuri de unghiuri induse de un produs scalar

Fie V un spațiu vectorial și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V. Fie $u, v \in V$ vectori nenuli. Definim *măsura unghiului* $\widehat{u, v}$ *dintre* u *și* v prin

$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{\langle u, v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}$$

Remarcă.

Faptul că această noțiune este corect definită provine din CBS:

Proprietăți ale produselor scalare

Măsuri de unghiuri induse de un produs scalar

Fie V un spațiu vectorial și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V. Fie $u, v \in V$ vectori nenuli. Definim *măsura unghiului* $\widehat{u, v}$ *dintre* u *și* v prin

$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{\langle u, v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}$$

Remarcă.

Faptul că această noțiune este corect definită provine din CBS:

$$-1 \leq \left| \frac{\langle u, v \rangle}{||u|| \cdot ||v||} \right| \leq 1$$

Proprietăți ale produselor scalare

Măsuri de unghiuri induse de un produs scalar

Fie V un spațiu vectorial și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V. Fie $u, v \in V$ vectori nenuli. Definim *măsura unghiului* $\widehat{u, v}$ *dintre* u și v prin

$$\cos(\widehat{u, v}) = \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||}$$

Remarcă.

Faptul că această noțiune este corect definită provine din CBS:

$$-1 \leq \left| \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||} \right| \leq 1$$

Prependicularitate

Dacă $u, v \in V$ sunt vectori nenuli, atunci spunem prin definiție că u este perpendicular pe v (notat $u \perp v$) dacă și numai dacă

Proprietăţi ale produselor scalare

Măsuri de unghiuri induse de un produs scalar

Fie V un spaţiu vectorial şi $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V. Fie $u, v \in V$ vectori nenuli. Definim *măsura unghiului* $\widehat{u,v}$ *dintre* u şi v prin

$$\cos(\widehat{u,v}) = \frac{\langle u, v \rangle}{||u|| \cdot ||v||}$$

Remarcă.

Faptul că această noţiune este corect definită provine din CBS:

$$-1 \leq \left| \frac{\langle u, v \rangle}{||u|| \cdot ||v||} \right| \leq 1$$

Prependicularitate

Dacă $u, v \in V$ sunt vectori nenuli, atunci spunem prin definiţie că u este perpendicular pe v (notat $u \perp v$) dacă şi numai dacă $\langle u, v \rangle = 0$.

Baze ortonormate

Definiție

Fie V un spațiu vectorial și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V. O bază $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V se numește *bază ortonormată* dacă

Baze ortonormate

Definiție

Fie V un spațiu vectorial și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V. O bază $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V se numește *bază ortonormată* dacă

$$e_i \perp e_j, \forall i \neq j, \text{ și}$$

Baze ortonormate

Definiție

Fie V un spațiu vectorial și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V. O bază $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V se numește *bază ortonormată* dacă

$$e_i \perp e_j, \forall i \neq j, \text{ și } ||e_i|| = 1, \forall i = \overline{1, n}.$$

Baze ortonormate

Definiție

Fie V un spațiu vectorial și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V. O bază $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V se numește *bază ortonormată* dacă

$$e_i \perp e_j, \forall i \neq j, \text{ și } ||e_i|| = 1, \forall i = \overline{1, n}.$$

Remarcă

Baza $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ este ortonormată dacă și numai dacă $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \forall i, j$ unde δ_{ij} este simbolul Kronecker:

Baze ortonormate

Definiție

Fie V un spațiu vectorial și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V. O bază $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V se numește *bază ortonormată* dacă

$$e_i \perp e_j, \forall i \neq j, \text{ și } ||e_i|| = 1, \forall i = 1, n.$$

Remarcă

Baza $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ este ortonormată dacă și numai dacă $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \forall i, j$ unde δ_{ij} este simbolul Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j; \\ 0, & \text{dacă } i \neq j. \end{cases}$$

Baze ortonormate

Definiție

Fie V un spațiu vectorial și $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ un produs scalar pe V. O bază $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V se numește *bază ortonormată* dacă

$$e_i \perp e_j, \forall i \neq j, \text{ și } ||e_i|| = 1, \forall i = \overline{1, n}.$$

Remarcă

Baza $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ este ortonormată dacă și numai dacă $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \forall i, j$ unde δ_{ij} este simbolul Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j; \\ 0, & \text{dacă } i \neq j. \end{cases}$$

Exemplu. Baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$ este ortonormată în raport cu produsul scalar canonic.

Algoritmul Gramm-Schmidt

Algoritmul

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. Fie $\mathcal{B}_i = \{f_1, \dots, f_n\}$ o bază arbitrară alui V. Construim o bază ortonormată $B_o = \{e_1, \dots, e_n\}$ astfel:

Algoritmul Gramm-Schmidt

Algoritmul

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. Fie $\mathcal{B}_i = \{f_1, \ldots, f_n\}$ o bază arbitrară alui V. Construim o bază ortonormată $B_o = \{e_1, \ldots, e_n\}$ astfel:
Pasul 1. Punem prin definiție

$$e_1 = \frac{1}{||f_1||} f_1;$$

Algoritmul Gramm-Schmidt

Algoritmul

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. Fie $\mathcal{B}_i = \{f_1, \ldots, f_n\}$ o bază arbitrară alui V. Construim o bază ortonormată $B_o = \{e_1, \ldots, e_n\}$ astfel:
Pasul 1. Punem prin definiție

$$e_1 = \frac{1}{||f_1||} f_1;$$

Pasul general. Presupunem că am construit vectorii $e_1, \ldots, e_{k-1}$ din baza $\mathcal{B}_o$.

Algoritmul Gramm-Schmidt

Algoritmul

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. Fie $\mathcal{B}_i = \{f_1, \ldots, f_n\}$ o bază arbitrară alui V. Construim o bază ortonormată $B_o = \{e_1, \ldots, e_n\}$ astfel:
Pasul 1. Punem prin definiție

$$e_1 = \frac{1}{||f_1||} f_1;$$

Pasul general. Presupunem că am construit vectorii $e_1, \ldots, e_{k-1}$ din baza $\mathcal{B}_o$. Construim mai întâi un vector "auxiliar" g_k prin formula:

$$g_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_k, e_i \rangle e_i;$$

Algoritmul Gramm-Schmidt

Algoritmul

Fie $(V, \langle, \rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian. Fie $\mathcal{B}_i = \{f_1, \dots, f_n\}$ o bază arbitrară alui V. Construim o bază ortonormată $B_o = \{e_1, \dots, e_n\}$ astfel:
Pasul 1. Punem prin definiţie

$$e_1 = \frac{1}{||f_1||} f_1;$$

Pasul general. Presupunem că am construit vectorii $e_1, \dots, e_{k-1}$ din baza $\mathcal{B}_o$. Construim mai întâi un vector "auxiliar" g_k prin formula:

$$g_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle f_k, e_i \rangle \, e_i;$$

Punem

$$e_k = \frac{1}{||g_k||} g_k.$$

Aplicații ortogonale

Definiție.

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. O funcție $T : V \to V$ se numește *transformare ortogonală* dacă păstrează produsul scalar, i.e. dacă

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle , \forall u, v \in V.$$

Aplicații ortogonale

Definiție.

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. O funcție $T : V \to V$ se numește *transformare ortogonală* dacă păstrează produsul scalar, i.e. dacă

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle \, , \forall u, v \in V.$$

Teorema de caracterizare a transformărilor ortogonale.

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian și $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază ortogonală fixată a lui V. Fie $T : V \to V$ o aplicație liniară având matricea A în raport cu baza $\mathcal{B}$. Atunci T este transformare ortogonală dacă și numai dacă matricea A satisface relația:

Aplicații ortogonale

Definiție.

Fie $(V, \langle, \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. O funcție $T : V \to V$ se numește *transformare ortogonală* dacă păstrează produsul scalar, i.e. dacă

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V.$$

Teorema de caracterizare a transformărilor ortogonale.

Fie $(V, \langle, \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian și $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază ortogonală fixată a lui V. Fie $T : V \to V$ o aplicație liniară având matricea A în raport cu baza $\mathcal{B}$. Atunci T este transformare ortogonală dacă și numai dacă matricea A satisface relația:

$$A \cdot A^t = I_n$$

Grupul ortogonal

Definiție

Fie $(V, \langle, \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. Atunci mulțimea

$$O(V) = \{T | T : V \to V, T = \text{ transformare ortogonală } \}$$

este un grup în raport cu compunerea funcțiilor, numit *grupul ortogonal* al lui V.
În cazul particular $V = \mathbb{R}^n$ cu produsul scalar canonic, acest grup se notează $O(n)$.

Grupul ortogonal

Definiție

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. Atunci mulțimea

$$O(V) = \{T | T : V \to V, T = \text{ transformare ortogonală } \}$$

este un grup în raport cu compunerea funcțiilor, numit *grupul ortogonal* al lui V.
În cazul particular $V = \mathbb{R}^n$ cu produsul scalar canonic, acest grup se notează $O(n)$.

Remarci

- Fie $A \in O(n)$; atunci $det(A) = \pm 1$.

Grupul ortogonal

Definiție

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. Atunci mulțimea

$$O(V) = \{T | T : V \to V, T = \text{ transformare ortogonală } \}$$

este un grup în raport cu compunerea funcțiilor, numit *grupul ortogonal* al lui V.
În cazul particular $V = \mathbb{R}^n$ cu produsul scalar canonic, acest grup se notează $O(n)$.

Remarci

- Fie $A \in O(n)$; atunci $det(A) = \pm 1$.
- Mulțimea
$$SO(n) = \{A \in O(n) | det(A) = 1\}$$
este un subgrup al lui $O(n)$ numit *grupul special ortogonal*.

Grupul $O(2)$

Teoremă

Avem

$$O(2) = \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$$

unde

Grupul $O(2)$

Teoremă

Avem

$$O(2) = \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$$

unde

$$\mathcal{R} = \{R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} |\alpha \in \mathbb{R}\}$$

Grupul $O(2)$

Teoremă

Avem

$$O(2) = \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$$

unde

$$\mathcal{R} = \{R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{S} = \{S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Grupul $O(2)$

Teoremă

Avem

$$O(2) = \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$$

unde

$$\mathcal{R} = \{R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} |\alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{S} = \{S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} |\alpha \in \mathbb{R}\}$$

Matricele de forma R_α se numesc *matrici de rotație*

Grupul $O(2)$

Teoremă

Avem

$$O(2) = \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$$

unde

$$\mathcal{R} = \{R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{S} = \{S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Matricele de forma R_α se numesc *matrici de rotație* iar matricele de forma S_α se numesc *matrici de simetrie*.

Grupul $O(2)$

Teoremă

Avem
$$O(2)=\mathcal{R}\cup\mathcal{S}$$
unde
$$\mathcal{R}=\{R_\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}|\alpha\in\mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{S}=\{S_\alpha=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha)\end{pmatrix}|\alpha\in\mathbb{R}\}$$
Matricele de forma R_α se numesc *matrici de rotație* iar matricele de forma S_α se numesc *matrici de simetrie*. În plus, $SO(2)=\mathcal{R}$.

Transformări simetrice

Definiţie

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spaţiu vectorial euclidian. O transformare liniară $T : V \to V$ se numește *simetrică* dacă are loc

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle, \forall u, v \in V.$$

Transformări simetrice

Definiție

Fie $(V, \langle, \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. O transformare liniară $T : V \to V$ se numește *simetrică* dacă are loc

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle, \forall u, v \in V.$$

Teoremă

Fie $(V, \langle, \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian, $\mathcal{B}$ o bază ortonomată alui V și $T : V \to V$ o aplicație liniară. Atunci:
a) T este simetrică dacă și numai dacă matricea A a lui T în raport cu baza $\mathcal{B}$ este

Transformări simetrice

Definiție

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. O transformare liniară $T : V \to V$ se numește *simetrică* dacă are loc

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle, \forall u, v \in V.$$

Teoremă

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian, $\mathcal{B}$ o bază ortonomată alui V și $T : V \to V$ o aplicație liniară. Atunci:
a) T este simetrică dacă și numai dacă matricea A a lui T în raport cu baza $\mathcal{B}$ este matrice simetrică, i.e.

$$A = A^t.$$

Transformări simetrice

Definiție

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. O transformare liniară $T : V \to V$ se numește *simetrică* dacă are loc

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle, \forall u, v \in V.$$

Teoremă

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian, $\mathcal{B}$ o bază ortonomată alui V și $T : V \to V$ o aplicație liniară. Atunci:
a) T este simetrică dacă și numai dacă matricea A a lui T în raport cu baza $\mathcal{B}$ este matrice simetrică, i.e.

$$A = A^t.$$

b) dacă T este simetrică, atunci T este diagonalizabilă.

Transformări simetrice

Definiție

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian. O transformare liniară $T : V \to V$ se numește *simetrică* dacă are loc

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle, \forall u, v \in V.$$

Teoremă

Fie $(V, \langle , \rangle)$ un spațiu vectorial euclidian, $\mathcal{B}$ o bază ortonomată alui V și $T : V \to V$ o aplicație liniară. Atunci:

a) T este simetrică dacă și numai dacă matricea A a lui T în raport cu baza $\mathcal{B}$ este matrice simetrică, i.e.

$$A = A^t.$$

b) dacă T este simetrică, atunci T este diagonalizabilă. În plus, există o bază de diagonalizare a lui T care este ortonormată.

Spații afine euclidiene

Definiție

Se numește *spațiu afin euclidian* un spațiu afin $\mathcal{A}$ peste corpul numerelor reale, astfel încât spațiul său vectorial director $dir(\mathcal{A})$ are o structură de spațiu vectorial euclidian, i.e. s-a fixat un produs scalar $\langle , \rangle$ pe $dir(\mathcal{A})$.

Spații afine euclidiene

Definiție

Se numește *spațiu afin euclidian* un spațiu afin $\mathcal{A}$ peste corpul numerelor reale, astfel încât spațiul său vectorial director $dir(\mathcal{A})$ are o structură de spațiu vectorial euclidian, i.e. s-a fixat un produs scalar $\langle , \rangle$ pe $dir(\mathcal{A})$.

Distanța în spații euclidiene

Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin euclidian, definim *funcția distanță* pe $\mathcal{A}$ prin $d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

Spații afine euclidiene

Definiție

Se numește *spațiu afin euclidian* un spațiu afin $\mathcal{A}$ peste corpul numerelor reale, astfel încât spațiul său vectorial director $dir(\mathcal{A})$ are o structură de spațiu vectorial euclidian, i.e. s-a fixat un produs scalar $\langle , \rangle$ pe $dir(\mathcal{A})$.

Distanța în spații euclidiene

Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin euclidian, definim *funcția distanță* pe $\mathcal{A}$ prin $d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}||$$

Spații afine euclidiene

Definiție

Se numește *spațiu afin euclidian* un spațiu afin $\mathcal{A}$ peste corpul numerelor reale, astfel încât spațiul său vectorial director $dir(\mathcal{A})$ are o structură de spațiu vectorial euclidian, i.e. s-a fixat un produs scalar $\langle , \rangle$ pe $dir(\mathcal{A})$.

Distanța în spații euclidiene

Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin euclidian, definim *funcția distanță* pe $\mathcal{A}$ prin $d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}||$$

Proprietăți ale funcției distanță

Spații afine euclidiene

Definiție

Se numește *spațiu afin euclidian* un spațiu afin $\mathcal{A}$ peste corpul numerelor reale, astfel încât spațiul său vectorial director $dir(\mathcal{A})$ are o structură de spațiu vectorial euclidian, i.e. s-a fixat un produs scalar $\langle , \rangle$ pe $dir(\mathcal{A})$.

Distanța în spații euclidiene

Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin euclidian, definim *funcția distanță* pe $\mathcal{A}$ prin $d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}||$$

Proprietăți ale funcției distanță

$d(P, Q) = d(Q, P), \forall P, Q \in \mathcal{A}$;

Spații afine euclidiene

Definiție

Se numește *spațiu afin euclidian* un spațiu afin $\mathcal{A}$ peste corpul numerelor reale, astfel încât spațiul său vectorial director $dir(\mathcal{A})$ are o structură de spațiu vectorial euclidian, i.e. s-a fixat un produs scalar $\langle , \rangle$ pe $dir(\mathcal{A})$.

Distanța în spații euclidiene

Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin euclidian, definim *funcția distanță* pe $\mathcal{A}$ prin $d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}||$$

Proprietăți ale funcției distanță

$d(P, Q) = d(Q, P), \forall P, Q \in \mathcal{A}$;

$d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R), \forall P, Q, R \in \mathcal{A}$;

Spații afine euclidiene

Definiție

Se numește *spațiu afin euclidian* un spațiu afin $\mathcal{A}$ peste corpul numerelor reale, astfel încât spațiul său vectorial director $dir(\mathcal{A})$ are o structură de spațiu vectorial euclidian, i.e. s-a fixat un produs scalar $\langle , \rangle$ pe $dir(\mathcal{A})$.

Distanța în spații euclidiene

Dacă $\mathcal{A}$ este un spațiu afin euclidian, definim *funcția distanță* pe $\mathcal{A}$ prin $d : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}||$$

Proprietăți ale funcției distanță

$d(P, Q) = d(Q, P), \forall P, Q \in \mathcal{A}$;
$d(P, Q) + d(Q, R) \geq d(P, R), \forall P, Q, R \in \mathcal{A}$;
$d(P, Q) \geq 0$ și $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$.

Subspații afine perpendiculare

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin euclidian și $\mathcal{A}', \mathcal{A}"" \subset \mathcal{A}$ subspații afine. Sunem că $\mathcal{A}'$ este perpendicular pe $\mathcal{A}"$ dacă $dir(\mathcal{A}") \perp dir(\mathcal{A}")$, i.e.

Subspații afine perpendiculare

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin euclidian și $\mathcal{A}', \mathcal{A}"" \subset \mathcal{A}$ subspații afine. Sunem că $\mathcal{A}'$ este perpendicular pe $\mathcal{A}"$ dacă $dir(\mathcal{A}") \perp dir(\mathcal{A}")$, i.e.

$$\langle u, v\rangle = 0, \forall u \in dir(\mathcal{A}'), v \in dir(\mathcal{A}").$$

Subspații afine perpendiculare

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin euclidian și $\mathcal{A}', \mathcal{A}''' \subset \mathcal{A}$ subspații afine. Sunem că $\mathcal{A}'$ este perpendicular pe $\mathcal{A}''$ dacă $dir(\mathcal{A}'') \perp dir(\mathcal{A}'')$, i.e.

$$\langle u, v\rangle = 0, \forall u \in dir(\mathcal{A}'), v \in dir(\mathcal{A}'').$$

Drepte perpendiculare

Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ cu structura euclidiană canonică. Considerăm dreptele

$$(d_1): \ \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n};$$

$$(d_2): \ \frac{x_1 - x_1^B}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^B}{u_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^B}{u_n}.$$

Atunci

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow$$

Subspații afine perpendiculare

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin euclidian și $\mathcal{A}', \mathcal{A}''' \subset \mathcal{A}$ subspații afine. Sunem că $\mathcal{A}'$ este perpendicular pe $\mathcal{A}''$ dacă $dir(\mathcal{A}'') \perp dir(\mathcal{A}'')$, i.e.

$$\langle u, v \rangle = 0, \forall u \in dir(\mathcal{A}'), v \in dir(\mathcal{A}'').$$

Drepte perpendiculare

Fie $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ cu structura euclidiană canonică. Considerăm dreptele

$$(d_1) : \frac{x_1 - x_1^A}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^A}{v_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^A}{v_n};$$

$$(d_2) : \frac{x_1 - x_1^B}{u_1} = \frac{x_2 - x_2^B}{u_2} = \cdots = \frac{x_n - x_n^B}{u_n}.$$

Atunci

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots v_n u_n = 0.$$

Perpendicularitate în spațiul euclidian 3-dimensional

Perpendicularitate între drepte și plane

Fie dreapta

$$(d_1): \ \frac{x_1 - x_1^O}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^O}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^O}{v_3}$$

și planul

$$(\pi): Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$$

Atunci $d \perp \pi$ dacă și numai dacă

Perpendicularitate în spațiul euclidian 3-dimensional

Perpendicularitate între drepte și plane

Fie dreapta

$$(d_1): \ \frac{x_1 - x_1^O}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^O}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^O}{v_3}$$

și planul

$$(\pi): Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$$

Atunci $d \perp \pi$ dacă și numai dacă (A, B, C) și (v_1, v_2, v_3) sunt proporționali.

Perpendicularitate în spațiul euclidian 3-dimensional

Perpendicularitate între drepte și plane

Fie dreapta

$$(d_1): \ \frac{x_1 - x_1^O}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^O}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^O}{v_3}$$

și planul

$$(\pi): Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$$

Atunci $d \perp \pi$ dacă și numai dacă (A, B, C) și (v_1, v_2, v_3) sunt proporționali.

Perpendiculara dusă dintr-un punct la un plan

Fie $P = (x_1^P, x_2^P, x_3^P)$ și planul $(\pi): Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$.
Dreapta $\pi^\perp$ perpendiculară dusă din punctul P pe planul π are ecuația:

Perpendicularitate în spațiul euclidian 3-dimensional

Perpendicularitate între drepte și plane

Fie dreapta

$$(d_1): \ \frac{x_1 - x_1^O}{v_1} = \frac{x_2 - x_2^O}{v_2} = \frac{x_3 - x_3^O}{v_3}$$

și planul

$$(\pi): Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$$

Atunci $d \perp \pi$ dacă și numai dacă (A, B, C) și (v_1, v_2, v_3) sunt proporționali.

Perpendiculara dusă dintr-un punct la un plan

Fie $P = (x_1^P, x_2^P, x_3^P)$ și planul $(\pi): Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$.
Dreapta $\pi^\perp$ perpendiculară dusă din punctul P pe planul π are ecuația:

$$(\pi^\perp): \ \frac{x_1 - x_1^P}{A} = \frac{x_2 - x_2^P}{B} = \frac{x_3 - x_3^P}{C}$$

Perpendicularitate în spațiul euclidian 3-dimensional

Distanța de la un punct la un plan

Fie $P = (x_1^P, x_2^P, x_3^P)$ și planul $(\pi) : Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$. Atunci distanța de la punctul P la planul π este

Perpendicularitate în spațiul euclidian 3-dimensional

Distanța de la un punct la un plan

Fie $P = (x_1^P, x_2^P, x_3^P)$ și planul $(\pi) : Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$. Atunci distanța de la punctul P la planul π este

$$dist(P, \pi) = \frac{|Ax_1^P + Bx_2^P + Cx_3^P + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Perpendicularitate în spațiul euclidian 3-dimensional

Distanța de la un punct la un plan

Fie $P = (x_1^P, x_2^P, x_3^P)$ și planul $(\pi) : Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$. Atunci distanța de la punctul P la planul π este

$$dist(P, \pi) = \frac{|Ax_1^P + Bx_2^P + Cx_3^P + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Perpendiculariate între plane

Fie planele

$$(\pi') : A'x_1 + B'x_2 + C'x_3 + D' = 0$$

și

$$(\pi") : A"x_1 + B"x_2 + C"x_3 + D" = 0.$$

Atunci $\pi' \perp \pi"$ dacă și numai dacă

Perpendicularitate în spațiul euclidian 3-dimensional

Distanța de la un punct la un plan

Fie $P = (x_1^P, x_2^P, x_3^P)$ și planul $(\pi) : Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$. Atunci distanța de la punctul P la planul π este

$$dist(P, \pi) = \frac{|Ax_1^P + Bx_2^P + Cx_3^P + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Perpendiculariate între plane

Fie planele

$$(\pi') : A'x_1 + B'x_2 + C'x_3 + D' = 0$$

și

$$(\pi") : A"x_1 + B"x_2 + C"x_3 + D" = 0.$$

Atunci $\pi' \perp \pi"$ dacă și numai dacă

$$A'A" + B"B" + C'C" = 0.$$

Izometrii în spații euclidiene

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu euclidian. O funcție $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *izometrie* dacă

$$d(P, Q) = d\left(f(P), f(Q)\right), \forall P, Q \in \mathcal{A}$$

Izometrii în spații euclidiene

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu euclidian. O funcție $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *izometrie* dacă

$$d(P, Q) = d\left(f(P), f(Q)\right), \forall P, Q \in \mathcal{A}$$

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin euclidian și $\mathcal{R}_c = (O, \mathcal{B})$ un *reper cartezian ortonormat* (i.e. baza $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ este bază ortonormată). Atunci o funcție $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este izometrie dacă și numai dacă

Izometrii în spații euclidiene

Definiție

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu euclidian. O funcție $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numește *izometrie* dacă

$$d(P, Q) = d\left(f(P), f(Q)\right), \forall P, Q \in \mathcal{A}$$

Teoremă

Fie $\mathcal{A}$ un spațiu afin euclidian și $\mathcal{R}_c = (O, \mathcal{B})$ un *reper cartezian ortonormat* (i.e. baza $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ este bază ortonormată). Atunci o funcție $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este izometrie dacă și numai dacă există o matrice ortogonală $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ și o matrice $B \in Mat_{n\times 1}(\mathbb{R})$ astfel încât

$$f(X) = AX + B.$$

Hipercuadrice în spații euclidiene

Teoremă

Orice hipercuadrică poate fi adusă la formă canonică prin izometrii.
Formele canonice sunt de unul din următoarele trei tipuri:

Hipercuadrice în spații euclidiene

Teoremă

Orice hipercuadrică poate fi adusă la formă canonică prin izometrii. Formele canonice sunt de unul din următoarele trei tipuri:

$$(I) : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_p^2}{a_p^2} - \frac{{x_{p+1}}^2}{a_{p+1}^2} - \cdots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = 0$$

Hipercuadrice în spații euclidiene

Teoremă

Orice hipercuadrică poate fi adusă la formă canonică prin izometrii. Formele canonice sunt de unul din următoarele trei tipuri:

$$(I) : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_p^2}{a_p^2} - \frac{{x_{p+1}}^2}{a_{p+1}^2} - \cdots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = 0$$

$$(II) : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_p^2}{a_p^2} - \frac{x_{p+1}^2}{a_{p+1}^2} - \cdots - \frac{x_r^2}{a_r^2} \pm 1 = 0$$

Hipercuadrice în spații euclidiene

Teoremă

Orice hipercuadrică poate fi adusă la formă canonică prin izometrii. Formele canonice sunt de unul din următoarele trei tipuri:

$$(I) : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_p^2}{a_p^2} - \frac{{x_{p+1}}^2}{a_{p+1}^2} - \cdots - \frac{x_r^2}{a_r^2} = 0$$

$$(II) : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_p^2}{a_p^2} - \frac{x_{p+1}^2}{a_{p+1}^2} - \cdots - \frac{x_r^2}{a_r^2} \pm 1 = 0$$

$$(III) : \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_p^2}{a_p^2} - \frac{x_{p+1}^2}{a_{p+1}^2} - \cdots - \frac{x_r^2}{a_r^2} - 2x_{r+1} = 0$$

Conice în planul euclidian

Conice pe ecuație canonică

Conice în planul euclidian

Conice pe ecuație canonică

- $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ ("*punct dublu*")

Conice în planul euclidian

Conice pe ecuație canonică

- $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ ("*punct dublu*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ ("*pereche de drepte secante*")

Conice în planul euclidian

Conice pe ecuație canonică

- $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ ("*punct dublu*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ ("*pereche de drepte secante*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$ ("*dreaptă dublă*")

Conice în planul euclidian

Conice pe ecuație canonică

- $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ (" *punct dublu*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ (" *pereche de drepte secante*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$ (" *dreaptă dublă*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ (" *elipsă*")

Conice în planul euclidian

Conice pe ecuație canonică

- $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ ("*punct dublu*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ ("*pereche de drepte secante*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$ ("*dreaptă dublă*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ ("*elipsă*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ ("*hiperbolă*")

Conice în planul euclidian

Conice pe ecuație canonică

- $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ (" *punct dublu*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ (" *pereche de drepte secante*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$ (" *dreaptă dublă*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ (" *elipsă*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ (" *hiperbolă*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 1$ (" *pereche de drepte paralele*")

Conice în planul euclidian

Conice pe ecuație canonică

- $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ (" *punct dublu*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ (" *pereche de drepte secante*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$ (" *dreaptă dublă*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ (" *elipsă*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ (" *hiperbolă*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 1$ (" *pereche de drepte paralele*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} - 2x_2 = 0$ (" *parabolă*")

Conice în planul euclidian

Conice pe ecuație canonică

- $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ ("*punct dublu*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 0$ ("*pereche de drepte secante*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 0$ ("*dreaptă dublă*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ ("*elipsă*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1$ ("*hiperbolă*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} = 1$ ("*pereche de drepte paralele*")
- $\frac{x_1^2}{a_1^2} - 2x_2 = 0$ ("*parabolă*")

Wikipedia -conice

Cuadrice în spațiul euclidian

Cuadrice pe ecuație canonică

Wikipedia - cuadrice