Consultații, EDDP, ID, 29.01.2021

① - ec. dif. de ordinul întâi în $\mathbb{R}$: – de recunoscut tipul de ecuație
– de determinat mulț. sol. unei ec. date, eventual cu cond. inițială.

② - ec. implicite de ord 1 în $\mathbb{R}$

③ - determinarea aproximațiilor succesive pentru o problemă Cauchy

④ - aprox. soluției prob. Cauchy cu metoda Euler :

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [x_0, x_0 + T]$$

$$\left.\begin{array}{l} N = 3 : x_0, x_1, x_2, x_3 \\ \text{metoda Euler} \end{array}\right\} \Rightarrow y_0, y_1, y_2, y_3.$$

să arătam că y_3 verifică o proprietate.

⑤ - rezolvarea unui sistem de ecuații diferențiale, de ordinul întâi cu ajutorul integralelor prime.

⑥ - sisteme de ec. diferențiale liniare : $y' = Ay$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

• pt. sisteme liniare $\boxed{y' = A(x)y}$
• cu coef constanți : metoda cu valori proprii.
• cu coef. variabili : $y' = A(x)y$, dar cu posibilitatea ca printr-o schimbare de variabilă să ajungem la coef constanți.
• rezolvări de sisteme de ec. diferențiale în $\mathbb{R}^n$ cu reducerea dimensiunii.

• sisteme afine $\boxed{y' = A(x)y + b(x)}$
I) când cunoaștem o soluție particulară
II) cu metoda var. constantelor

(7)
- ec. liniare de ordin n
- ec. afine de ordin n — cu sol. particulare / cu var. constantelor
- ec. Euler de ordin superior.

! Lucrarea va avea 9 ex. fiecare de 1 punct + 1 punct din oficiu.

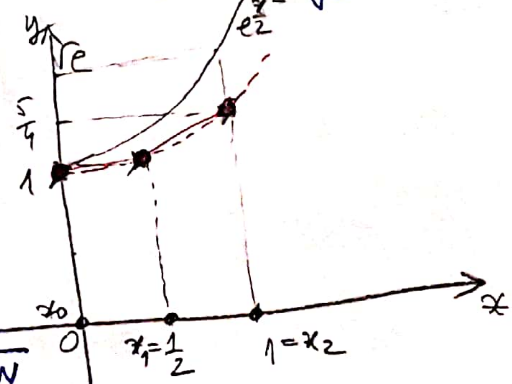
---

[1] Fie prob. Cauchy:
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

iv) pt $x \in [0,1]$, $N=2$, cu puncte echidistante calculați y_0, y_1, y_2 cu metoda Euler.

• în prob. Cauchy: $f(x,y) = xy$
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$x_0 = 0$; $y_0 = 1$

• metoda Euler:



$x_0 = 0$
$x_j = x_0 + j \cdot h$, $j = \overline{0,N}$
$N = 2 \Rightarrow x_1 = 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$h = \dfrac{(x_0+T) - x_0}{N} = \dfrac{1}{2}$
$x_2 = x_0 + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 1$

$$\begin{cases} y_0 \\ y_{j+1} = y_j + h \cdot f(x_j, y_j), \quad j = \overline{0, N-1} \end{cases}$$

$\boxed{y_0 = 1}$

$j=0 \to y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + \frac{1}{2} \cdot x_0 \cdot y_0 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1 = 1.$

$$\boxed{y_1 = 1}$$

$$j=1 \Rightarrow y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot x_1 y_1 = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

$$\boxed{y_2 = \frac{5}{4}} \in (1,2)$$
$$\in \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

iii) $\frac{dy}{dx} = xy$ ec. cu variabile separabile $\rightarrow \underline{\frac{dy}{dx} = a(x)\,b(y)}$

liniară $\rightarrow \underline{\frac{dy}{dx} = a(x)\,y}$

$b(y) = y$

$$y(x) = C\cdot e^{A(x)}$$

A prim. pt a

Avem $a(x) = x$

$$\int a(x)\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \boxed{A(x) = \frac{x^2}{2}}$$

Deci: $\boxed{y(x) = C\cdot e^{\frac{x^2}{2}}, \ C\in\mathbb{R}}$

dar $y(0) = 1 \Rightarrow$ pt $x = 0$: $y(0) = C\cdot e^{0}$

$1 = C\cdot 1 \Rightarrow C = 1.$

Prin urmare: $\boxed{y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}}$

Se poate evalua eroarea cu care aproximăm $y(1)$ cu metoda Euler: $y(1) \simeq y_2 = \frac{5}{4}$

dar $y(1) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow E_2 = y(\underset{x_2}{1}) - y_2 = \sqrt{e} - \frac{5}{4} \simeq 0,3962\ldots \Rightarrow$$

$$\boxed{E_j = y(x_j) - y_j, \ j = 0, N-1} \Rightarrow \underline{E_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)}$$

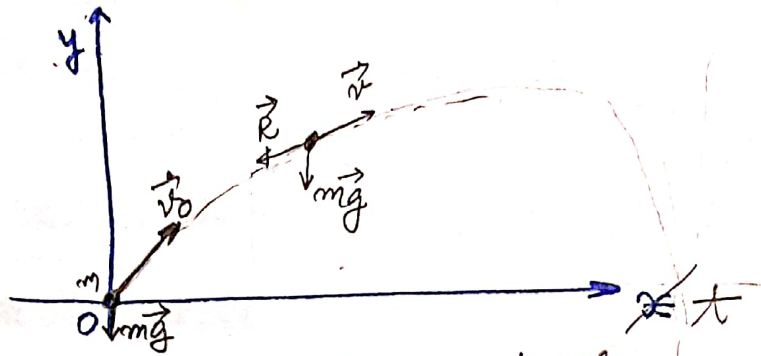
sau

$$\underline{E_2 < 0,5.}$$

Exemplu pt met. Euler

- modelăm un fenomen care ne conduce la o prob Cauchy:

-aruncarea în plan vertical.



m = punctul material

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{y}} = m\vec{g} + \underbrace{\vec{R}(\vec{y}, \dot{\vec{y}})} \\ \vec{y}(0) = 0 \\ \dot{\vec{y}}(0) = \vec{v_0} \end{cases}$$

interesează $y(t)$, adică, traiectoria punctului material, care depinde de forma forței de rezistență: $\vec{R}(\vec{y}, \dot{\vec{y}})$

! • Întrebări cu răspuns <u>unic</u> din 5 variante

Exemplu: $(y')^2 - 2yy'' + 1 = 0 \Rightarrow (y'(x))^2 - 2y(x)y''(x) + 1 = 0$

$y(1) = 0$ sau

$y''(1) = 0$.

cu $x \in I \subset \mathbb{R}$

ai $1 \in I$

Dacă prin absurd, $\exists$ sol. y care verifică $y(1)=0$ sau $y''(1)=0$ $\Rightarrow$ Sau ce pt $\underline{x=1}$: $(y'(1))^2 - 2\underbrace{y(1)\cdot y''(1)}_{=0} + 1 = 0$

$\Rightarrow y'(1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (y'(1))^2 = -1 \Rightarrow$ fals! (în $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow \nexists$ sol care verifică $y(1)=0$ sau $y''(1)=0$.

• pt. $y(x) = (x-1)^3 \Rightarrow y'(1) = 0$
(dar nu e soluție)
$y'(x) = 3(x-1)^2$, $y''(x) = 6(x-1)$ $y''(1) = 0$

<u>Timp examen</u>: 2 ore între 9:00 – 11:15

- încep ex. la
  - 9:10 → termin la 11:10
  - 9:30 → termin la <u>11:15</u>

Pt. încărcare copie a unui act de identitate într-un <u>assignment</u> pe MOODLE,

- copia înseamnă o poză într-un fișier jpg, png, pdf.
- se poate încărca între <u>8:30 – 12:00</u>.