Reductibilitate - Nedecidabilitate

1. Functii calculabile; reductibilitatea functionala
2. Problema opririi
3. Alte probleme nedecidabile in teoria limbajelor formale

Reductibilitate - Nedecidabilitate

Definiţia 1

Reducerea = o metodă de a transforma o problemă P1 într-o altă problemă P2 astfel încât o soluţie dată problemei P2 poate fi utilizată pentru a rezolva problema P1.

Exemplul 1

P1: rezolvarea unui sistem de n ecuaţii lineare cu m necunoscute, $n,m \in N$.

P2: inversarea unei matrice.

P3: calcularea valorii unui determinant.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

- Reductibilitatea functionala.
- Găsirea unei funcţii calculabile – numite REDUCERE – care să transforme fiecare instanţă a problemei A într-o instanţă a problemei B.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

Definiţie 2

Funcţia $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ se numeşte calculabilă $\Leftrightarrow$

$\exists$ $M \in MT$ a.i. $\forall$ $w \in \Sigma^*$: M se opreşte, având pe bandă secvenţa $f(w) \in \Sigma^*$.

Exemplul 2

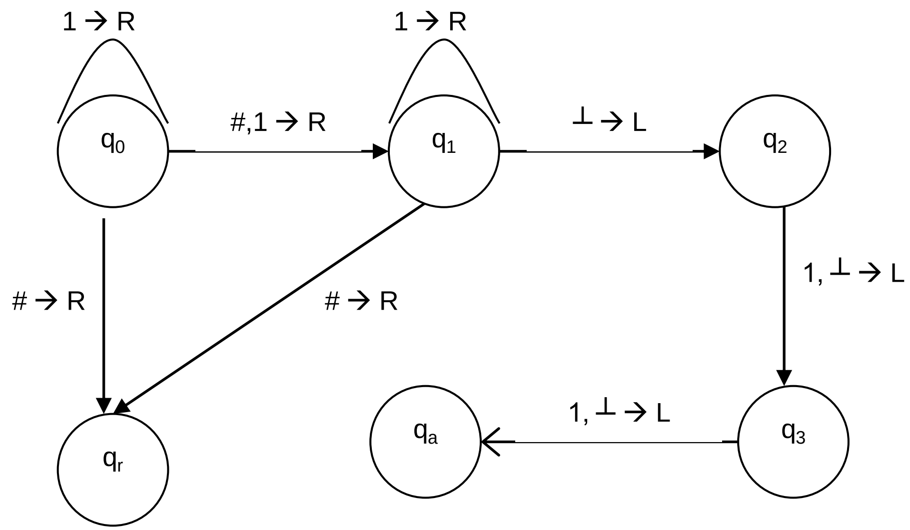
Toate funcţiile aritmetice definite pe N sunt calculabile.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

Fie f: NxN → N, f(n,m)=n+m

=>construim urmatoarea MT

$S=(\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_a,q_r\}, \{1\}, \{1,\#,\perp\}, q_0, \delta, \{q_a,q_r\})$ unde δ:



Reductibilitate - Nedecidabilitate

S = “Fie secventa de intrare <n,m>, n,m$\in$N:

1. Se testeaza corectitudinea codificarii ca o secventa de n+1 simboluri 1 si m+1 simboluri 1 separate printr-un singur #. Daca exista pe banda si alte simboluri inafara de 1, # si $\perp$ sau daca exista mai mult decat un # atunci S respinge.
2. Se scaneaza secventa pana la intalnirea simbolului #.
3. Se inlocuieste simbolul # cu 1.
4. Se scaneaza banda pana la intalnirea primului simbol $\perp$.
5. Se inlocuiesc ultimele 2 simboluri 1 din extremitatea dreapta cu $\perp$.
6. S furnizeaza rezultatul corect: n+m+1 simboluri de 1 si se opreste.”

Reductibilitate - Nedecidabilitate

Definiţia 3

Fie limbajele $A, B \subseteq \Sigma^*$.

Limbajul A se numeşte reductibil funcţional la limbajul B $\Leftrightarrow$

$\exists\ f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ calculabilă astfel încât $(\forall)\ w \in \Sigma^*$:

$$w \in A \leftrightarrow f(w) \in B.$$

Funcţia f se numeşte reducerea lui A la B.

Notatie

$A \leq_m B$

Observatia 1

i) $A \leq_m B \Leftrightarrow \neg A \leq_m \neg B$

ii) $A \leq_m B$: $w \in A \sim\sim> f(w) \in B$

$=> ?\ w \in A \sim\sim>_f\ w \sim f(w) \sim\sim> f(w) \in B$

Reductibilitate - Nedecidabilitate

Observaţia 2

Reductibilitatea joacă un rol important în

(i) teoria calculabilităţii:

dacă P1 este reductibilă la P2 şi P2 este algoritmic rezolvabila, atunci P1 este algoritmic rezolvabila;

$\Leftrightarrow$

dacă P1 este reductibilă la P2 şi P1 este nerezolvabila algoritmic, atunci si P2 este nerezolvabila algoritmic;

(ii) teoria complexităţii:

dacă P1 este reductibilă la P2 atunci rezolvarea lui P1 nu poate fi mai dificilă decât rezolvarea lui P2 pentru că o soluţie obţinută pentru P2 furnizează o soluţie pentru P1

$\Leftrightarrow$

P1 are aceeaşi complexitate ca şi P2.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

Teorema 1

Fie limbajele A, B$\subseteq\Sigma^*$.

Daca A $\leq_m$ B si B = decidabil => A = decidabil.

demonstraţie

Cf.ip.: "B = limbaj decidabil" $\Rightarrow \exists$ M$\in$MT decidentă pentru B.

Cf.ip.: "A $\leq_m$ B " $\Rightarrow \exists$ f : $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ o reducere a lui A la B

$\Rightarrow$ putem construi o MT M' decidentă pentru A astfel:

M' = "Fie cuvânt de intrare w $\in \Sigma^*$:

1. Se calculează f(w).
2. Se rulează M pe intrarea f(w); rezultatul furnizat de M este preluat de M'."

Evident, w$\in$A $\rightarrow$ f(w)$\in$B $\Rightarrow$ M acceptă f(w) exact atunci când w$\in$A

Intrucat M decide B => M' este corect definita si decide A.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

Corolar 1

Fie limbajele A,B$\subseteq\Sigma^*$.

Daca A $\leq_m$ B si

A = nedecidabil

=> B = nedecidabil.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

Corolar 2

Fie 2 limbaje $A,B \subseteq \Sigma^*$:

$A \leq_m B$ si B = Turing-acceptat

=> A = Turing-acceptat.

demonstratie

Acelasi rationament ca pt. Teorema 1, doar ca cele 2 MT, M si N, nu decid ci doar recunosc limbajele B si A.

Corolar 3

Fie 2 limbaje $A,B \subseteq \Sigma^*$: $A \leq_m B$ si

A $\neq$ Turing-acceptat

=> B $\neq$ Turing-acceptat.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

1. Functii calculabile; reductibilitatea functionala
2. Problema opririi
3. Alte probleme nedecidabile in teoria limbajelor formale

Reductibilitate - Nedecidabilitate

$ACC_{MT}=\{<M,w> \mid M \in MT, w \in \Sigma^*: M \text{ accepta } w\}$ = nedecidabil

$HALT_{MT}=\{<M,w> \mid M \in MT, w \in \Sigma^*: M \text{ se opreste pe } w\}$ = nedecidabil

Vom aplica metoda reducerii:

stim ca problema acceptabilitatii pt MT este algoritmic nerezolvabila (i.e. limbajul ACC_{MT} este nedecidabil);

reducem problema acceptabilitatii la problema opririi

$\Downarrow$

demonstram astfel ca problema opririi este si ea algoritmic nerezolvabila (i.e. limbajul $HALT_{MT}$ este nedecidabil)

Reductibilitate - Nedecidabilitate

<u>Teorema 2</u>

Limbajul

$HALT_{MT} = \{\langle M,w\rangle \mid M \in MT,\ w \in \Sigma^*$ *şi M se opreşte pe w*$\}$

este nedecidabil.

ideea demonstraţiei

ppa: limbajul $HALT_{MT}$ este decidabil şi demonstrăm că limbajul ACC_{MT} este decidabil, ceea ce contrazice teorema anterioara.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

$HALT_{MT}$ decidabil => $\exists H \in MT$ care decide asupra limbajului $HALT_{MT}$

construim $A \in MT$ care să decidă asupra limbajului ACC_{MT} astfel:

A utilizează *H* pentru a "observa" comportamentul $M \in MT$ pe intrarea $w \in \Sigma^*$ (unde *M* şi *w* sunt arbitrare), şi anume:

H indică faptul că *M* se opreşte şi acceptă *w*

→ *A* acceptă <*M*,*w*>;

H indică faptul că *M* se opreşte şi respinge *w*

→ *A* respinge <*M*,*w*>;

H indică faptul că *M* ciclează pe intrarea *w*

→ convenim ca *A* să respingă intrarea <*M*,*w*>

$\Rightarrow$ *A* este decidentă nu doar acceptoare.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

demonstratie

<u>(i) Formal, $A \in MT$ este definită astfel:</u>

A = “Fie secvenţa de intrare <*M*,*w*>, unde $M \in MT$ şi $w \in \Sigma^*$, oarecare:

1. Se rulează MT *H* pe intrarea <*M*,*w*>.
2. Dacă *H* respinge <*M*,*w*> atunci şi *A* respinge <*M*,*w*>.
3. Dacă *H* acceptă <*M*,*w*> atunci se simulează *M* pe intrarea *w* până când *M* se opreşte
4. Dacă *M* accepta / respinge $w \in \Sigma^*$ atunci *A* acceptă / respinge <*M*,*w*>.”

Reductibilitate - Nedecidabilitate

(ii) Demonstram acum ca $ACC_{MT} \leq_m HALT_{MT}$

$\Leftrightarrow$ gasim o funcţie f : $\Sigma^* \to \Sigma^*$, calculabilă, a.i.

$\forall$ <M,w>: <M,w>$\in ACC_{MT}$ $\Leftrightarrow$ f(<M,w>) = <M',w'>$\in HALT_{MT}$.

Fie următoarea MT , F, care calculează o astfel de reducere f:

F = "Fie secvenţa de intrare <M,w>, unde M$\in$MT şi w$\in\Sigma^*$:

1. Se construieşte următoarea MT M' astfel:

   M' = "Fie cuvântul de intrare x $\in \Sigma^*$:

   2. Se rulează M pe intrarea x.
   3. Dacă M acceptă x, atunci şi M' acceptă x.
   4. Dacă M respinge x, atunci M' ciclează."

5. Se returnează secvenţa <M',w>."

Reductibilitate - Nedecidabilitate

Cf. presupunerii prin absurd: H este decidentă şi decide asupra limbajului $HALT_{MT}$;

Conform (i), (ii) si Teoremei 1: $A \in MT$ este şi ea decidentă şi decide asupra limbajului ACC_{MT}.

Dar, conform teoremei ant., limbajul ACC_{MT} nu este decidabil

$\Rightarrow$ contradicţie

$\Rightarrow$ limbajul $HALT_{MT}$ este nedecidabil.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

1. Functii calculabile; reductibilitatea functionala
2. Problema opririi
3. Alte probleme nedecidabile in teoria limbajelor formale

Reductibilitate - Nedecidabilitate

Teorema 3

Limbajul

$$EMP_{MT} = \{<M> \mid M \in MT \text{ şi } L(M) = \emptyset\}$$

este nedecidabil.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

demonstratie

M’=“Fie secventa de intrare $x \in \Sigma^*$, oarecare:

1. Daca $x \neq w$, atunci M’ respinge.
2. Daca x=w, atunci se ruleaza M pe intrarea w.
3. Daca M accepta w, atunci M’ accepta x”

Ppa ca avem $E \in MT$ care decide asupra limbajului EMP_{MT}. Construim A pt ACC_{MT}:

A =“Fie secv. de intrare <M,w>, $M \in MT$, $w \in \Sigma^*$, oarecare:

1. Se construieste, cu ajutorul descrierii <M,w>, o MT M’ cf. definitiei de mai sus.
2. Se ruleaza E pe intrarea <M’>.
3. Daca E accepta <M’>, atunci A respinge <M,w> iar daca E respinge <M’> atunci A accepta <M,w>.”

Cf. ip. noastre: E=decidenta si cf. def. A de mai sus: => A decidenta

=> lb. ACC_{MT} decidabil => (cf. teorema ant.) contradictie

=> lb. EMP_{MT}= nedecidabil.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

<u>Teorema 4</u>

Limbajul

$EQ_{MT} = \{<M_1, M_2> \mid M_1, M_2 \in MT \text{ şi } L(M_1) = L(M_2)\}$

este nedecidabil.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

demonstratie

ppa: $\exists$ F$\in$MT, decidenta, pt limbajul EQ_{MT};

construim E$\in$MT, care sa decida asupra limbajului EMP_{MT}:

E = “Fie secventa de intrare <M>, $\forall$M$\in$MT:

1. Se ruleaza F pe intrarea $<M,M_1>$, unde M_1 este o MT care respinge toate intrarile primite.
2. Daca F accepta $<M,M_1>$, atunci E accepta <M>; daca F respinge, atunci E respinge.”

Reductibilitate - Nedecidabilitate

Demonstram că $EMP_{MT} \leq_m EQ_{MT} \Leftrightarrow$
gasim o funcţie $g : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, calculabilă, a.i.

$\forall\, w \in \Sigma^*$, $w = \langle M \rangle \in EMP_{MT} \Leftrightarrow g(\langle M \rangle) = \langle M', M_1 \rangle \in EQ_{MT}$, unde M', $M_1 \in MT$ sunt ca mai sus.

Fie următoarea MT , G, care calculează o astfel de reducere g:

G = “Fie secvenţa de intrare $\langle M \rangle$, unde $M \in MT$:

1. Se construieşte $M' \in MT$ astfel:

   M' = “Fie cuvântul de intrare $w \in \Sigma^*$:

   2. Se rulează M pe intrarea w.
   3. Dacă M respinge w, atunci şi M' respinge w.
   4. Dacă M accepta w, atunci M' ciclează.”

5. Se returnează secvenţa $\langle M', M_1 \rangle$, unde $M_1 \in MT$ si $L(M_1) = \emptyset$.”

Reductibilitate - Nedecidabilitate

Cf. def. lb. EQ_{MT} si constructiei propuse:

daca F accepta <M,M_1> $\rightarrow$L(M)=L(M1) $\rightarrow$ L(M)=$\emptyset$ $\rightarrow$ E accepta <M>;

daca F respinge <M,M_1> $\rightarrow$L(M)$\neq$L(M1) $\rightarrow$ L(M)$\neq\emptyset$ $\rightarrow$ E respinge <M>.

Cf. pp. noastre: F=decidenta => E=decidenta (cf. constructiei de mai sus).

=> EMP_{MT}=decidabil => contradictie => EQ_{MT}=nedecidabil.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

Observatia 3

? B $\subseteq \Sigma^*$: B $\neq$ Turing-acceptat.

daca aratam ca $ACC_{MT} \leq_m \neg B$ →

$\neg ACC_{MT} \leq_m B$ (*)

Teorema ant.: $\neg ACC_{MT} \neq$ Turing-acceptat (**)

(*) + (**) + Corolar 2 => B $\neq$ Turing-acceptat

=> pt a demonstra ca un limbaj B NU este Turing-acceptat este suficient sa demonstram ca $ACC_{MT} \leq_m \neg$ B.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

<u>Corolarul 4</u>

Limbajul

$$EQ_{MT} = \{<M_1,M_2> \mid M_1, M_2 \in MT \text{ şi } L(M_1) = L(M_2)\}$$

nu este nici Turing-acceptat nici co-Turing-acceptat.

demonstratie

<u>(i) EQ_{MT} nu este Turing-acceptat</u>

e suficient sa demonstram ca $ACC_{MT} \leq_m \neg EQ_{MT}$.

Urmatoarea MT, F, calculeaza aceasta reducere f:

F = “Fie secventa de intrare <M,w>, unde $M \in MT$ si $w \in \Sigma^*$:

1. Se construiesc urmatoarele 2 MT: M_1 si M_2:
   - M_1 = “Oricare ar fi secventa de intrare $x \in \Sigma^*$:
     2. M_1 respinge x.”
   - M_2 = “Oricare ar fi secventa de intrare $x \in \Sigma^*$:
     3. Se ruleaza M pe intrarea w.
     4. Daca M accepta w atunci M_2 accepta x.”
5. F produce la iesire secventa $<M_1,M_2>$.”

Reductibilitate - Nedecidabilitate

f este corect definita:

(1) M_1 nu accepta nimic;

(2) daca M accepta w $\rightarrow$ M_2 accepta orice

M nu accepta w $\rightarrow$ M_2 nu accepta nimic;

din (1) +(2) =>

daca $<M,w> \in ACC_{MT} \rightarrow M_2 \neq M_1$,

$<M,w> \notin ACC_{MT} \rightarrow M_2 = M_1$

=> f reduce ACC_{MT} la $\neg EQ_{MT}$.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

<u>(ii) $\neg$ EQ_{MT} nu este Turing-acceptat</u>

analog, dem. ca $ACC_{MT} \leq_m \neg (\neg EQ_{MT})$, adica $ACC_{MT} \leq_m EQ_{MT}$

Urmatoarea MT, G, calculeaza aceasta reducere g:

G = “Fie secventa de intrare <M,w>, unde $M \in MT$ si $w \in \Sigma^*$:

1. Se construiesc urmatoarele 2 MT: M_1 si M_2:

   M_1 = “Oricare ar fi secventa de intrare $x \in \Sigma^*$:

   2. M_1 accepta x.”

   M_2 = “Oricare ar fi secventa de intrare $x \in \Sigma^*$:

   3. Se ruleaza M pe intrarea w.
   4. Daca M accepta w atunci M_2 accepta x.”

5. G produce la iesire secventa <M_1,M_2>.”

Reductibilitate - Nedecidabilitate

g este corect definita:

(1) M_1 accepta orice intrare;

(2) daca M accepta w → M_2 accepta orice

M nu accepta w → M_2 nu accepta nimic;

din (1) +(2) =>

daca $<M,w> \in ACC_{MT}$ → $M_2=M_1$,

$<M,w> \notin ACC_{MT}$ → $M_2 \neq M_1$

=> g reduce ACC_{MT} la EQ_{MT}.

Din (i) si (ii) → EQ_{MT} nu este nici Turing-acceptat, nici co-Turing-acceptat.

Reductibilitate - Nedecidabilitate

1. Functii calculabile; reductibilitatea functionala
2. Problema opririi
3. Alte probleme nedecidabile in teoria limbajelor formale