

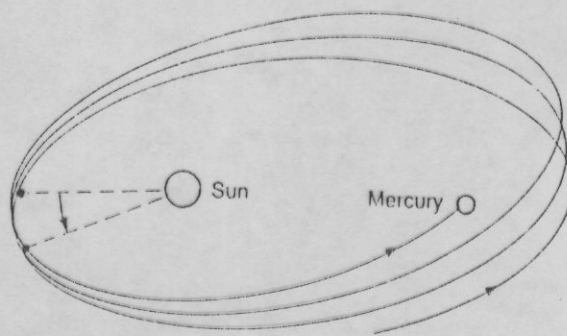
Общая теория относительности (ОТО).

14

И. Ньютон, (1643 ÷ 1727), $F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$; ($v \ll c$).

Прицессия перигелия Меркурия

$$\delta = \varphi_{\text{изм}} - \varphi_{\text{теор}} = 574'' - 531'' = 43''/100 \text{ лет} !$$



А. Эйнштейн, 1916, (1907 ÷ 1916), ОТО, ($v \sim c$).

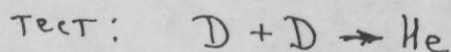
Основные идеи и послышки ОТО.

- 1) Специальная теория относительности (СТО).
(А. Эйнштейн, 1905~)
- 2) Однородное ускорение, сообщаемое телом с
различной массой. (Г. Галилей, 1564 ÷ 1642 гг.)
 \Rightarrow
- 3) Равенство (эквивалентность) инертной и гравитационной
массы. (Опыт Этвеша, 1890~)

$$m_u \cdot \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial t^2} = m_u \cdot \text{grad } U$$

$$m_u = \lambda \cdot m_n \Rightarrow \text{закон Гамильтона. } (\lambda \equiv 1)$$

СТО: m_u - зависит от энергии.



$$\left| \frac{M_{He} - 2M_D}{M_{He}} \right| = 6 \cdot 10^{-3} \quad (\text{дефект масс})$$

$$W = K + P = \frac{mv^2}{2} + P; \quad P < 0 - \text{притяжение} \\ P > 0 - \text{отталкивание}$$

Эксперимент Этвеша:

$$\Delta = \left| \frac{m_u - m_{гр}}{m_u} \right| < 10^{-8} \quad (\Delta < 10^{-10}, \text{ Дикке, 1964})$$

По аналогии:

$$F_{эл} = \frac{e_1 e_2}{r^2}; \quad F_{грав} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

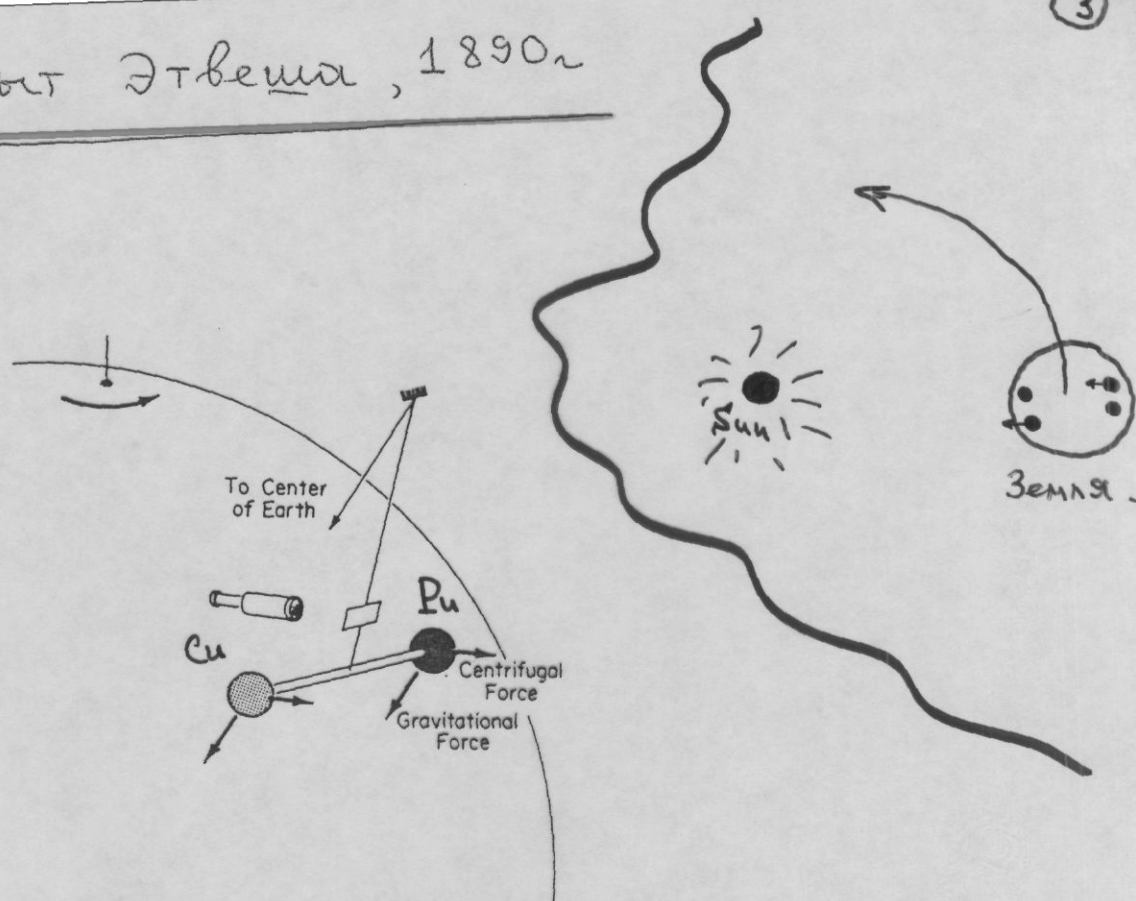
$\Rightarrow F_{грав}$ зависит от гравитационный заряд (барионный),
но

$$\left| \frac{m_u - N_{бар} \cdot m_p}{m_u} \right| \sim 10^{-3} \quad !!!$$

Этвеша: $m_u = m_n$ (лучше 10^{-8}) $\Rightarrow m_{грав}$ - зависит от E_T .

Опыт Этвеша, 1890г

3



The Eötvös experiment. Fibre supporting the rod does not hang exactly vertically because of the centrifugal force from the Earth's rotation, so the downward gravitational force on the balls is not parallel to the fibre. If gravity pulls one material more strongly than the other, the rod will rotate about the fibre axis. If the entire apparatus is rotated so that the two balls are interchanged, the resulting rotation will be in the opposite sense. The rotation is detected by observing light reflected from a mirror attached to the fibre.

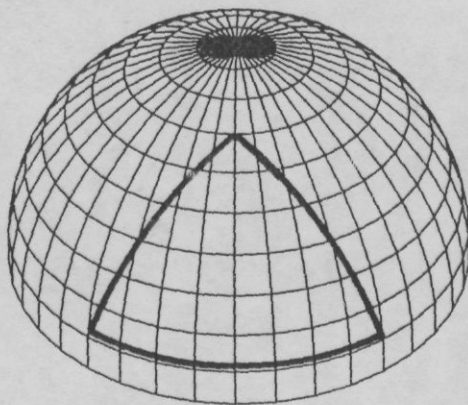
$$\frac{\Delta M}{M_u} < 10^{-8}, \quad \left(< 10^{-10}, \text{ Дикке и др 1964}_2 \right)$$

Вне зависимости от M и состава:

$$\left(\frac{\Delta a}{a} \right)_{\text{BeCu}} = (-1.9 \pm 2.5) \times 10^{-12}, \quad \left(\text{Y. Su et al, PR, D50, 3614 (94)} \right)$$

$$\left(\frac{\Delta a}{a} \right)_{\text{Луня-Земля}} = (-3.2 \pm 4.6) \times 10^{-12}, \quad \left(\text{J.O. Dickey et al., Science} \right. \\ \left. 265, 482 (94) \right)$$

сфера



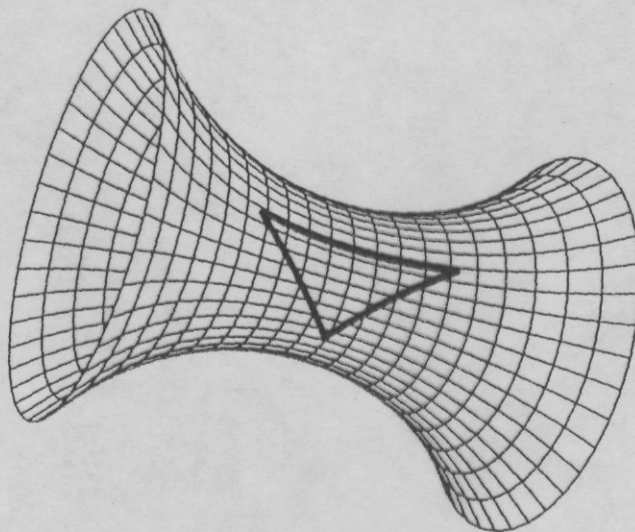
$$\frac{e}{D} < \pi$$

$$\sum \Delta > \pi$$

$$C > 0$$

The angles in a triangle on a surface with positive curvature add up to more than 180°

псевдосфера



$$\frac{e}{D} > \pi$$

$$\sum \Delta < \pi$$

$$C < 0$$

The angles in a triangle on a surface with negative curvature add up to less than 180°

Кривизна характеризуется квадратом радиуса кривизны.

$$\sum \Delta - \pi = C \cdot S \quad (\text{теорема})$$

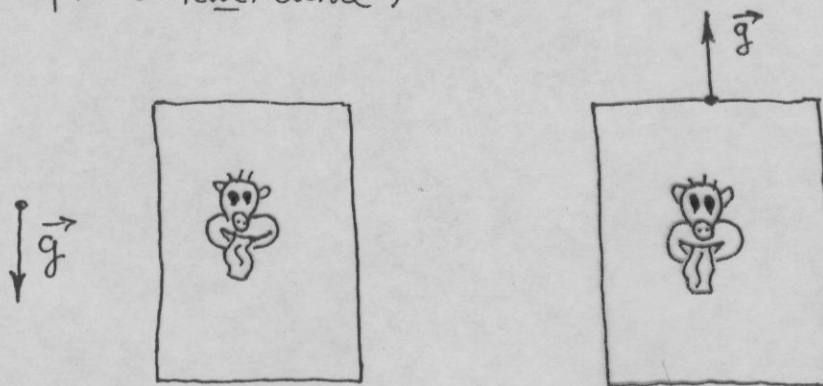
C - кривизна, S - площадь треугольника

$\alpha = 1/\sqrt{C}$ - радиус кривизны

Геодезическая линия - кривая, соединяющая 2 точки и имеющая минимальную длину.

Основная идея ОТО.

- 1) Принцип эквивалентности. ($m_i \equiv m_{\text{грав.}}$)
- 2) \Rightarrow 1) Эквивалентность ИСО и гравитации (лифт Эйнштейна)



\Rightarrow Возможность локально исключить гравитацию выбором подходящей ИСО.

- 3) Неевклидовость геометрии в ИСО. ($\ell_D \neq \pi$, $\Sigma \Delta \neq \pi$)

Н.И. Лобачевский, 1829 г.

Построение непротиворечивой геометрии после отказа от 5-ой аксиомы Евклида.

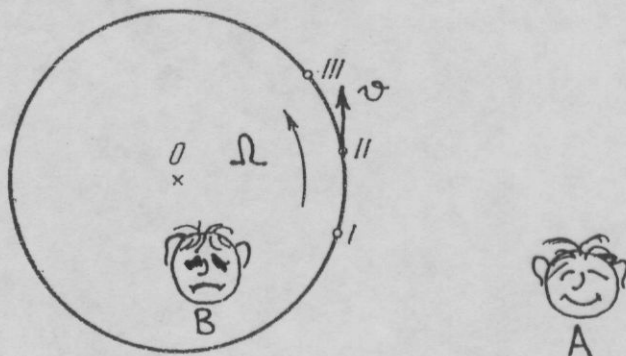
$$\Sigma \Delta < \pi$$

Б. Риман, 1854 г.

$$ds^2 = g_{ik} \cdot dx^i \cdot dx^k, \quad g_{ik} - \text{метрический тензор.}$$

Неевклидовость геометрии в НСО.

6



Наблюдатель А : $e/D = \pi$ (Евклидова геометрия)

Наблюдатель В : $\tilde{e} = \gamma \cdot e$, $\tilde{D} = D \Rightarrow$

$$\tilde{e}/\tilde{D} = \frac{e}{D \cdot \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} > \pi \text{ (Неевклидова)}$$

$$v = \Omega \cdot R$$

Свойства времени:

$$\Delta \tilde{t} = \Delta t / \gamma = \Delta t_{\text{оси}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 R^2}{c^2}}$$

чем дальше от оси диска, тем $> V \Rightarrow$ тем медленнее идут часы (СТО)

Невозможность синхронизации часов \Rightarrow

нельзя установить единое время на всем диске!

\Rightarrow с НСО нельзя связать жесткую систему координат с Евклидовой геометрией и единым временем.

Массы, создающие поле тяжести, искривляют пространство - время. Все тела, которые движутся в этом искривлённом пространстве - времени, независимо от их массы и состава, движутся по геодезическим (экстремальным) линиям.

Движение по геодезической в искривлённом пространстве - времени воспринимается нами как движение по кривой, с переменной скоростью.

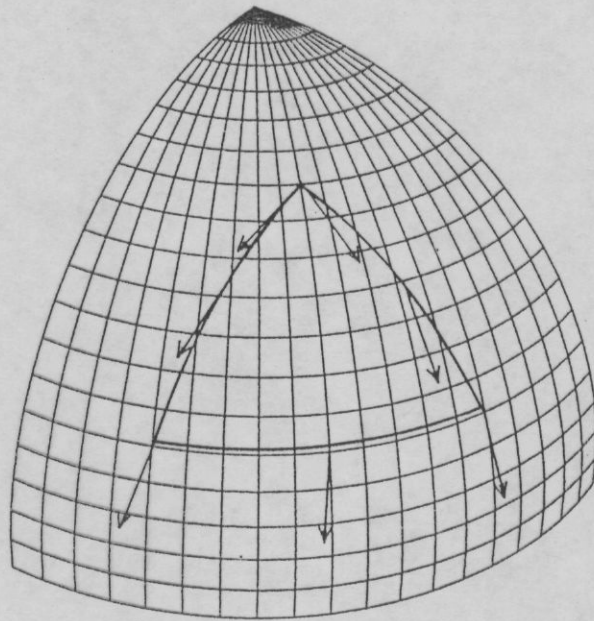
→ Поле тяготения - отклонение свойств реального пространства - времени от свойств плоского многообразия.

из 2) \Rightarrow отсутствие тяготения в локально инерциальной (ЛГ) (свободно падающей) системе отсчёта. Переход от ЛГ системы в соседние есть переход от ИСО к НСО т.к. НСО \sim гравитации \Rightarrow в соседней точке уже есть гравитация!

! т.к. силы инерции и силы тяготения неразличимы. !

8

Описание кривизны 4-мерного пространства-времени



R^i_{klm} - тензор кривизны Римана (пространства-времени)
(20 независимых компонент.)

$R_{km} = R^i_{klm} \cdot g^l_i$ - тензор Риччи

$R_{km} = R_{mk}$ - симметричен

$R = R_{km} g^{km}$ - скал. кривизны пространства-времени.

$R^i_{klm} = 0$ - плоское П-В в этой области

$R_{ik} = 0$ - не означает, что П-В плоское.

Уравнения ОТО.

(9)

определяют связь между кривизной пространства-времени и распределением и движением вещества и полей (кроме гравитационного).

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \cdot R = \frac{\kappa}{c^2} T_{ik}, \quad \kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$$

R_{ik} - тензор Риччи

T_{ik} - тензор энергии-импульса.

κ - постоянная тяготения Эйнштейна.

$$T_{ik} = (\varepsilon + p) u^i u^k - p g^{ik} \quad - \text{газ без вязкости}$$

$\varepsilon = \rho \cdot c^2$ - плотность энергии вещества

p - давление.

Точные решения ОТО.

- 1. Сферически-симметричное поле тяготения.
- 2. Поле вращающегося тела.
- 3. Поле вращающегося заряженного тела.



Karl Schwarzschild

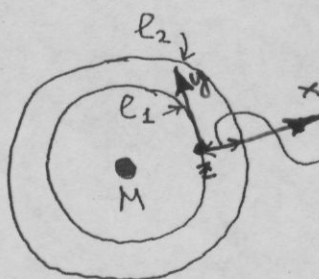
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) \cdot c^2 dt^2$$

$$ds'^2 = - dl^2 + c^2 \tau^2,$$

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \text{ если } dz = r d\theta, \quad dy = r \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \text{ то,}$$

$$dx = \underbrace{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1/2}}_{\neq 1} \cdot dr, \quad r_g = \frac{2GM}{c^2} - \text{РШ, ГР}$$

$\neq 1 \Rightarrow$ геометрия прост-ва неевклидова



$$\delta \neq \frac{l_2 - l_1}{2\pi}, \quad \alpha \quad \delta = \frac{(l_2 - l_1)}{2\pi} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1/2}$$

$$\Delta \tau = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \cdot \Delta t$$

$$(z \rightarrow \infty): \Delta \tau \rightarrow \Delta t; dx \rightarrow dz$$

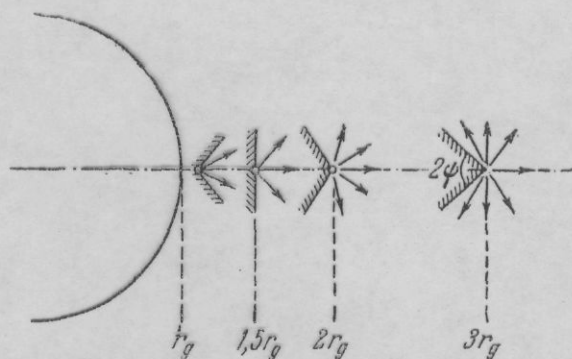
$$(z \rightarrow z_g): \Delta \tau \rightarrow 0 - \text{остановка времени!}$$

$$F_{\text{Тэл}} = \frac{G \cdot M}{z^2 \sqrt{(1 - z_g/z)}}; \quad z \rightarrow z_g, F_{\text{Тэл}} \rightarrow \infty!$$

$$z \rightarrow \infty, F_{\text{Тэл}} \rightarrow F_{\text{Тэл}}^{\text{Ньютона}} = \frac{GM}{z^2}$$

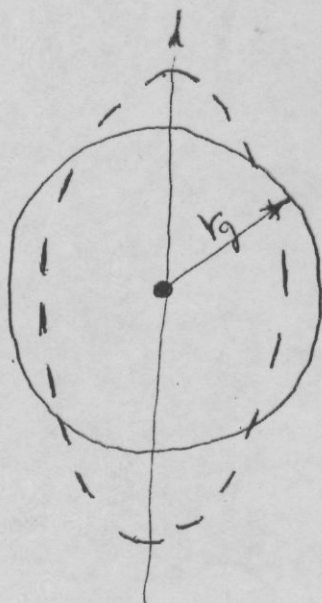
$$z_g^{\odot} = 2.96 \text{ км}, \quad z_g^{\text{Земля}} = 0.443 \text{ см}$$

На z_g бесконечное красное смещение



Гравитационный захват излучения: лучи, вышедшие из каждой точки внутри конической полости, сечение которой заштриховано на рисунке, гравитационно захватываются.

$r = r_g$ - горизонт событий.



Без вращения: сфера $r = r_g \equiv$ горизонту событий.

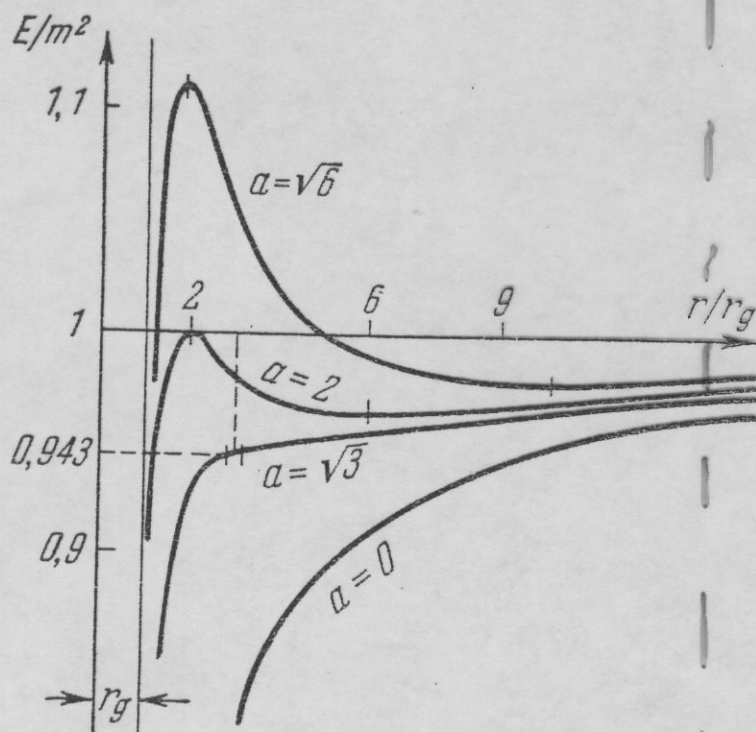
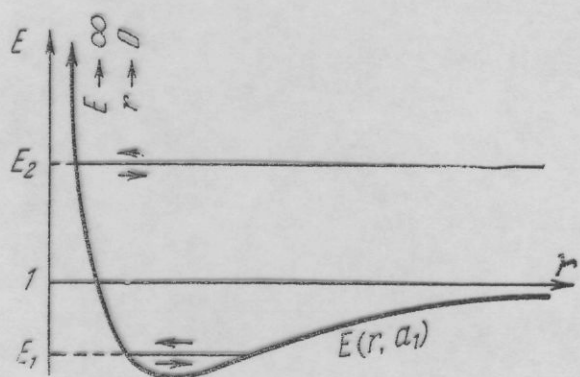
С вращением: сфера $r = r_g \neq$ горизонту событий

извлечение энергии из вращающегося ЧД.

Ньютоновская теория

r - в ед. r_g ; a - момент импульса в ед. $mc r_g$

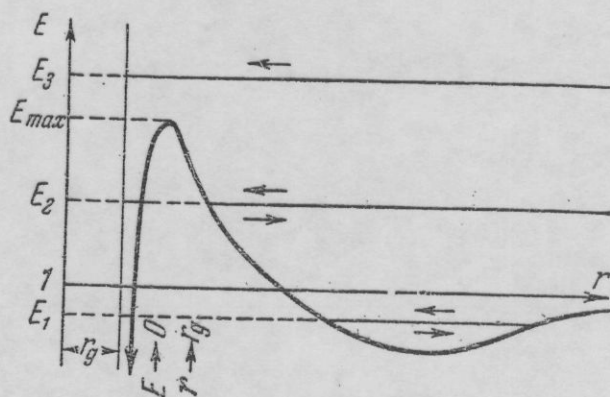
$$U_H = -\frac{1}{r} + \frac{a^2}{r^2}$$



ОТО

$$U_{OTO} = -\frac{1}{r} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{a^2}{r^3}$$

$E \approx E_{max}$ - неустойчивая орбита.



Последняя устойчивая орбита.

$$(r = 3r_g)$$

$$v_{крз} = c/2$$

$$E_{min} = 0.943 \cdot mc^2$$

$$\left(\frac{3}{2} < r < 3\right)$$

Область неустойчивых орбит.

$$r = \frac{3}{2}, v = c, E \rightarrow \infty$$

$$\left(r < \frac{3}{2}\right)$$

Нет круговых орбит.!