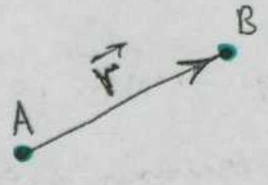
Эволюция Вселенной.

$\vec{u} = H\vec{r}$ – Закон Хаббла, или в другой форме:

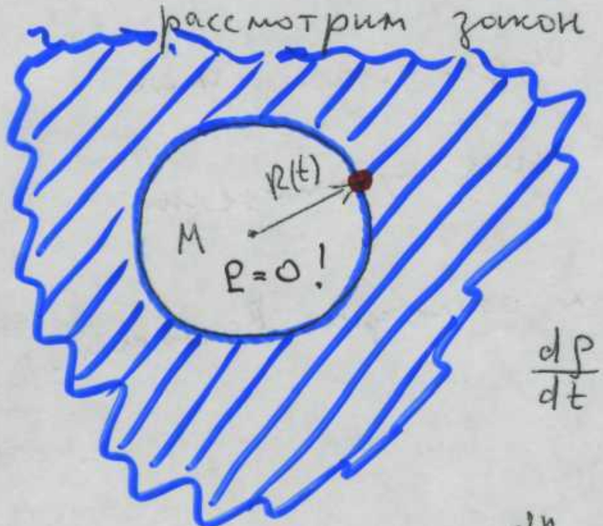


$$\frac{dr_{AB}}{dt} = H r_{AB}, \quad H = \frac{\dot{r}_{AB}}{r_{AB}}; \left[\frac{1}{c}\right]$$

$$r_{AB} = r_{AB}(t_0)\cdot \exp\int_{t_0}^{t} H(t)\cdot dt$$

- однородная и изотропная космологическая модель!

рассмотрим закон изменения плотности (шар: R, M)



$$\rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{3M}{\frac{4\pi}{3}R^4}\cdot\frac{dR}{dt} = -\frac{3M}{\frac{4\pi}{3}R^{\cancel{4}3}}H\cancel{R}$$

$$\frac{dR}{dt} = u = H\cdot R$$ – закон Хаббла.

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = -3\rho H} \sim \frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{R}}{R}\rho = 0$$

если в момент t_0 ρ не зависело от коор-т ⇒

в любое время t ρ —"— ! ⇒

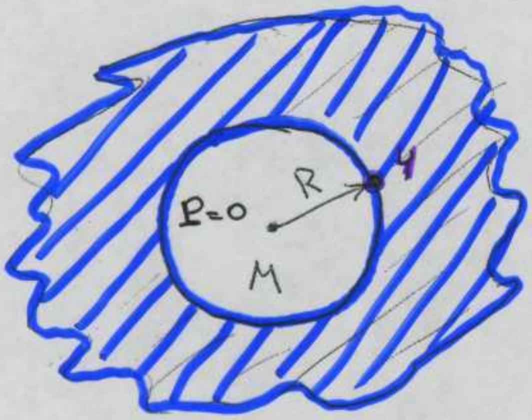
- Однородность заданная в начальный момент сохраняется всегда.

1) Из однородности ⇒, что достаточно проследить динамику одного элемента V^{α} в-ва при этом судьба остальных аналогична.

2) Выберем сферу „малого" радиуса R вокруг любой точки, т.к. действие в-ва, расположенного за пределами радиуса R, сокра-ся. (или оно создает $\emptyset$ поле внутри сферы R)

3) Малостью R можно всегда добиться того, что поле тяготения, создаваемое его массой будет мало (слабо) и мы сможем работать в Ньютоновском приближении.

Воспользуемся этим для вывода ф-л эволюции Вселенной.



Всегда можем выбрать R малым

$\Rightarrow F_{грав}$ мала $\Rightarrow$ Ньютоновская ТГ

Найдём ускорение для частицы:

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{GM}{R^2} \qquad (1)$$

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3, \qquad u = \frac{dR}{dt} = HR$$ – закон Хаббла.

$$\frac{d(HR)}{dt} = R\frac{dH}{dt} + H\cdot\frac{dR}{dt} = \cancel{R}\frac{dH}{dt} + \cancel{R}H^2 = -\frac{4\pi}{3}G\rho \cancel{R}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= -H^2 - \frac{4\pi}{3}G\rho \\ \frac{d\rho}{dt} &= -3\rho H \end{aligned}\right\}$$

опре-т изме-ие лок-х св-в. Вселенной vs t.
M, R не входят.

для наглядности работаем с R и M: $(1) \times \frac{dR}{dt} \int$

$$(2) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{R} = const \quad (\sim ЗСЭ)$$

$$t = t_0, \quad H = H_0, \quad \rho = \rho_0, \quad R = R_0 \Rightarrow M = \frac{4\pi}{3}R_0^3\rho_0$$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_{t=t_0} = u_0 = H_0R_0$$ $\Rightarrow$ опре-м const:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2_{t=t_0} - G\frac{4\pi}{3}\frac{\rho_0R_0^3}{R_0} = const = \frac{1}{2}H_0^2 R_0^2 - G\frac{4\pi\rho_0R_0^2}{3}$$

из (2) $\Rightarrow$

$$\boxed{\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\cdot\frac{G\rho_0 R_0^3}{R} - \frac{8\pi}{3} G R_0^2\left(\rho_0 - \frac{3H_0^2}{8\pi G}\right) \qquad (3)}$$

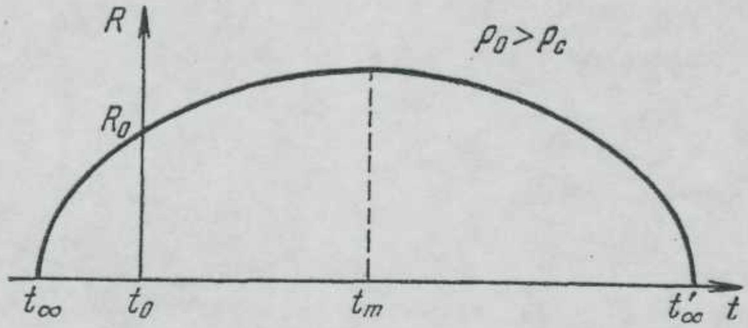
в наст. вр. $\frac{dR}{dt} > 0$ ⇒ в прошлом R было $<$ ⇒

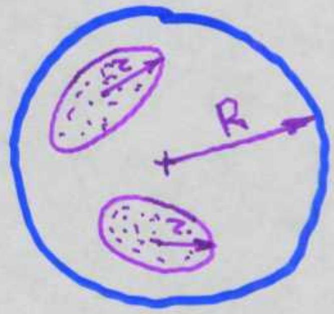
$\frac{8\pi}{3}\,\frac{G\rho_0 R_0^3}{R}$ было $>$ ⇒ в прошлом $\frac{dR}{dt}$ было $>$

$\left(\frac{dR}{dt} = u > c.\right)$!!!

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$ – критическая плотность.

Замкнутая Вселенная



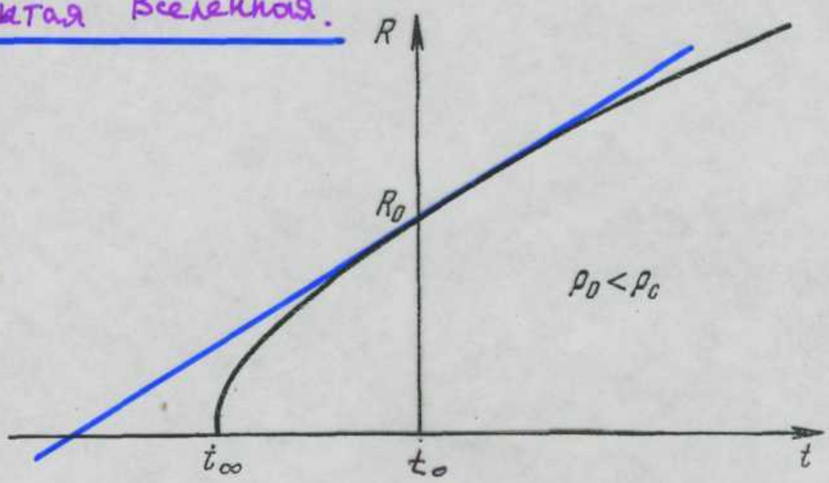


$r = c \cdot T_{\text{всел.}}$

$\rho_0 < \rho_c$, $t \to \infty$, $R \to \infty$

$$\frac{dR}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G R_0^2 (\rho_c - \rho_0)} = \text{const}.$$

Открытая Вселенная.



$$H_0 = 100 \text{ км}/(\text{с}\cdot\text{Мпс}) = 3\cdot 10^{-18}\ \text{с}^{-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho_c = 2\cdot 10^{-29}\ \text{г}/\text{см}^3} \sim 10\,p/\text{м}^3$$

Плотность видимого в-ва во Вселенной:

$$\rho \approx 5\cdot 10^{-31}\ \text{г}/\text{см}^3 \sim \frac{1}{30}\rho_c \Rightarrow \text{Вариант 2.}$$

Продолжительность расширения.

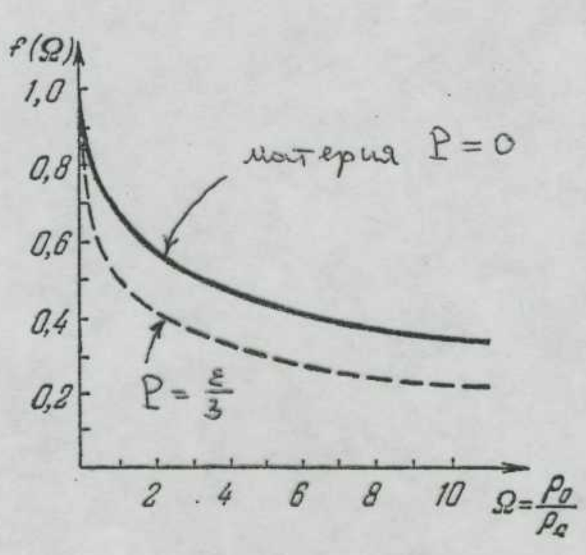
$$(t = t_\infty,\ R = 0)\ ;\ \rho \to \infty$$

линейная экстраполяция: $R_0 = \left(\frac{dR}{dt}\right)_{t=t_0} \times (t_0 - t_\infty) = H_0 R_0 (t_0 - t_\infty)$

$$T_{\text{всел}} = t_0 - t_\infty = \frac{1}{H_0} = 3\cdot 10^{17}\ \text{с} \approx 10^{10}\ \text{лет}.$$

т.к. $\frac{dR}{dt}$ не const, то:

$$T_{\text{всел}} = t_0 - t_\infty = \frac{1}{H_0} f\left(\frac{\rho_0}{\rho_c}\right) = \frac{1}{H_0}\cdot f(\Omega)$$



Два частных решения.

I. $(\rho=\rho_c)$, из (3) имеем:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\cdot\frac{G\rho_0\cdot R_0^3}{R} \qquad (R\to 0\ ,\ v>c)$$

решение:

$$R = R_0\left(\frac{t-t_\infty}{t_0-t_\infty}\right)^{2/3},$$

$$T_{всел} = t_0 - t_\infty = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{H_0},$$

$$\rho = \frac{1}{6\pi G(t-t_\infty)} = \frac{8\cdot 10^5}{(t-t_\infty)^2}.$$

$[t]$ – с, $[\rho]$ – г/см^3

при $\rho_0\neq\rho_c$ в прошлом $R\to 0 \Rightarrow$ это решение является универсальным для начальной стадии.

II. $(\rho_0 \ll \rho_c)$, из (3) имеем $(\rho_0\to 0)$:

$$\frac{dR}{dt} = H_0 R_0 = \text{const}$$

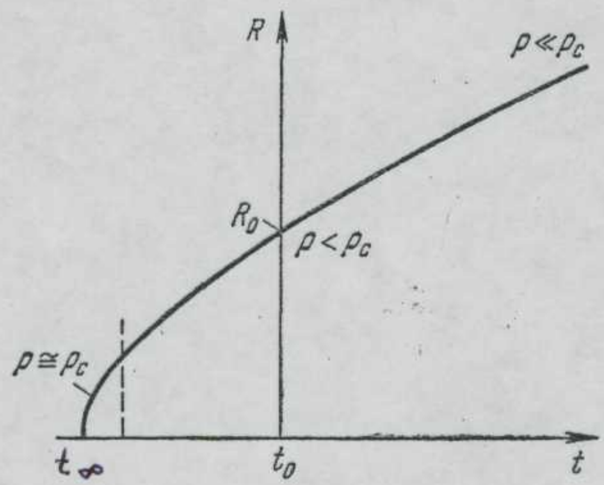
$R = R_0 + H_0\cdot R_0\cdot(t-t_0)$ в этом приближении:

$$t_\infty = t_0 - \frac{1}{H_0}\ ;\quad R = H_0(t-t_\infty),$$

$$H = H(t) = \frac{1}{(t - t_\infty)} = \frac{H_0}{1 + H_0 \cdot (t - t_0)}$$

$$\rho(t) = \rho_0 \cdot \frac{R_0^3}{R^3} = \rho_0 \left(\frac{t_0 - t_\infty}{t - t_\infty}\right)^3$$

$\forall \rho_0$ в прошлом плотность была близка к ρ_c



$$T_{всел} = t_0 - t_\infty = \frac{1}{H_0} \times \left(1 - \frac{1}{2}\Omega \cdot \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right)\right), \quad \Omega = \frac{\rho_0}{\rho_c} = \frac{8\pi\rho_0}{3GH_0}$$

Уравнение движения с учётом давления.

До этого $P \equiv 0$. (газ при низкой T, пыль = галактики)

Но есть ν, γ, $(v = c)$. $N_\gamma \simeq 400 \frac{шт}{см^3}$; $N_\nu \simeq N_\gamma = 400 \frac{шт}{см^3}$

Для релятивистского газа давление равно:

$$P = \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\rho c^2}{3}; \quad \boxed{\rho = \frac{3 \cdot P}{c^2}}$$

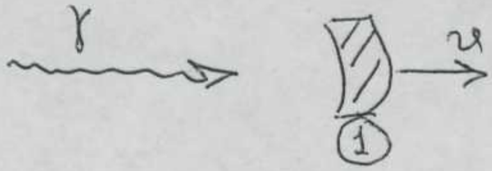
$\rho_{нук} \sim \frac{1}{V} \sim \frac{1}{R^3}$; $\rho_\nu \sim \frac{1}{R^4}$.

$d(\varepsilon V) = -P\,dV$ при расширении γ и ν совер-т работу над соседними эле-и.

$\Downarrow$

$\varepsilon \sim \frac{1}{R}$. (Закон адиаба-ого расш-я)

$m_0 \equiv 0$.



ε_γ в системе 1 меньше

$\Rightarrow$ в реля-м газе тоже самое

Высокое давление не является причиной Большого Взрыва

т.к. нет разности давлений. P в одно-ой В-ой распр. одн-

$\Rightarrow$ нет силы которая может повлиять на расширение.

наоборот P замедляет расширение! $\left(E_{сист} = mc^2 + K + \alpha P;\ \alpha = \pm 1 \right)$

$E_{сист} = mc^2 + \Delta m c^2$, т.к. P вызвано отталкиванием

$\Rightarrow \Delta m c^2 > 0$

$M = const$ с учётом давления, $\rho \nearrow \Rightarrow M \nearrow \Rightarrow F_{грав} \nearrow$

7 $F_{грав}$ – замедляет расширение $\Rightarrow P$ замед-т расширение

Количественные результаты

Толмен (1930г) для покоящегося в-ва в ОТО.

$$\boxed{g = -\frac{4\pi G R^3}{3R^2}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) = -\frac{4\pi G}{3c^2}R(\varepsilon + 3P)}$$

Мак-Кри (1951) $\rho \Rightarrow \rho + \frac{3P}{c^2}$ и используя Нью-ю Мех

(1) $$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3c^2}R(\varepsilon + 3P)$$

плотность частиц: $n = \dfrac{N}{\frac{4\pi}{3}R^3}$ как прежде

плотность энергии (с учётом m_0) подчиняется уравнению:

(2) $$dE = d\left(\frac{4\pi}{3}R^3\varepsilon\right) = -P\cdot dV = -P\cdot 4\pi R^2\cdot dR$$

На основе (1) и (2): (1) $\times \frac{dR}{dt}$

$$\frac{d^2R}{dt^2}\cdot\frac{dR}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = -\frac{G}{c^2}\left[\frac{4\pi}{3}R\varepsilon\cdot\frac{dR}{dt} + 4\pi R P\frac{dR}{dt}\right]$$

из (2) $\frac{1}{R}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\varepsilon\right) = -P 4\pi R^{\cancel{2}}\frac{dR}{dt}\cdot\cancel{\frac{1}{R}}$, а

так как $\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\cancel{\frac{1}{R}}\cdot\frac{4\pi}{3}R^{\cancel{3}\,2}\varepsilon\right) = \frac{1}{R}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\varepsilon\right) + \frac{4\pi}{3}R^3\varepsilon\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{R}\right)$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{4\pi}{3}R\varepsilon\frac{dR}{dt}$$

$\Rightarrow [\quad] = -\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{d}{dt}(\varepsilon R^2) \Rightarrow \int dt$

Окончательно получаем:

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - G\cdot\frac{1}{R}\left(\frac{4\pi}{3}R^3\cdot\frac{\varepsilon}{c^2}\right) = const \quad (3C\text{Э})}$$

входит $\rho = \frac{\varepsilon}{c^2}$, а в ур-ие для ускорения $\rho + \frac{3P}{c^2}$.

Поведение аналогично случаю без дав-ия, всё зависит от плотности, вернее соот-ия плотностей $\rho_0 = \frac{\varepsilon_0}{c^2}$ в насто-ее время и

$\rho_c = \frac{3}{8\pi}\cdot\frac{H_0^2}{G} = 2\cdot10^{-29}\cdot\frac{г}{см^3}$, $(H_0 = 100\,км/(с\cdot Мпс))$

при этом, если осн-ая часть в-ва состоит из частиц с $v \simeq c$, то ускорение (при равной плотности) удваивается: $\left(P = \frac{\varepsilon}{3}\right)$

$$\frac{\varepsilon + 3P}{c^2} = \frac{2\varepsilon}{c^2} = 2\rho$$

$\rho_c = 2\cdot10^{-29}\,г/см^3$ ~ $30^\circ K$ равномерному Планковскому из-ю!

Время расширения при $+P$.

$$t_0 - t_\infty = \frac{1}{H_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{\Omega}+1} \quad ; \quad \Omega = \rho_0/\rho_c$$