Метод Гаусса онлайн

Данный онлайн калькулятор находит решение системы линейных уравнений (СЛУ) методом Гаусса. Дается подробное решение. Для вычисления выбирайте количество переменных и количество уравнений. Затем введите данные в ячейки и нажимайте на кнопку "Вычислить."

Количество уравнений: 6
Количество переменных: 6

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 1x_6 = 3 \\ 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 + 32x_6 = 5 \\ 1x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 27x_4 + 81x_5 + 243x_6 = 5 \\ 1x_1 + 4x_2 + 16x_3 + 64x_4 + 256x_5 + 1024x_6 = 9 \\ 1x_1 + 5x_2 + 25x_3 + 125x_4 + 625x_5 + 3125x_6 = 7 \\ 1x_1 + 6x_2 + 36x_3 + 216x_4 + 1296x_5 + 7776x_6 = 4 \end{cases}$$

Очистить | Вычислить

Представление чисел:

- Целые числа и (или) Обыкновенные дроби
- Целые числа и (или) Десятичные дроби

Число знаков после десятичного разделителя 2

Найти общее решение неоднородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 1x_1 & +1x_2 & +1x_3 & +1x_4 & +1x_5 & +1x_6=3 \\ 1x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +8x_4 & +16x_5 & +32x_6=5 \\ 1x_1 & +3x_2 & +9x_3 & +27x_4 & +81x_5 & +243x_6=5 \\ 1x_1 & +4x_2 & +16x_3 & +64x_4 & +256x_5 & +1024x_6=9 \\ 1x_1 & +5x_2 & +25x_3 & +125x_4 & +625x_5 & +3125x_6=7 \\ 1x_1 & +6x_2 & +36x_3 & +216x_4 & +1296x_5 & +7776x_6=4 \end{cases}$$

Решение:

Матричный вид записи: $Ax=b$, где

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 9 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Для решения системы, построим расширенную матрицу:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 5 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 & 9 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 & 7 \\ 1 & 6 & 36 & 216 & 1296 & 7776 & 4 \end{array}\right]$$

Обозначим через a_{ij} элементы i-ой строки и j-ого столбца.

Первый этап. Прямой ход Гаусса.

Исключим элементы 1-го столбца матрицы ниже элемента $a_{1,1}$. Для этого сложим строки 2,3,4,5,6 со строкой 1, умноженной на $-1,-1,-1,-1,-1$ соответственно:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 15 & 31 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 26 & 80 & 242 & 2 \\ 0 & 3 & 15 & 63 & 255 & 1023 & 6 \\ 0 & 4 & 24 & 124 & 624 & 3124 & 4 \\ 0 & 5 & 35 & 215 & 1295 & 7775 & 1 \end{array}\right]$$

Исключим элементы 2-го столбца матрицы ниже элемента $a_{2,2}$. Для этого сложим строки 3,4,5,6 со строкой 2, умноженной на $-2,-3,-4,-5$ соответственно:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 15 & 31 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 50 & 180 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 42 & 210 & 930 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 96 & 564 & 3000 & -4 \\ 0 & 0 & 20 & 180 & 1220 & 7620 & -9 \end{array}\right]$$

Исключим элементы 3-го столбца матрицы ниже элемента $a_{3,3}$. Для этого сложим строки 4,5,6 со строкой 3, умноженной на $-3,-6,-10$ соответственно:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 15 & 31 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 50 & 180 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 60 & 390 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 264 & 1920 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 720 & 5820 & 11 \end{array}\right]$$

Исключим элементы 4-го столбца матрицы ниже элемента $a_{4,4}$. Для этого сложим строки 5,6 со строкой 4, умноженной на $-4,-10$ соответственно:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 15 & 31 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 50 & 180 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 60 & 390 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 360 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 120 & 1920 & -49 \end{array}\right]$$

Исключим элементы 5-го столбца матрицы ниже элемента $a_{5,5}$. Для этого сложим строку 6 со строкой 5, умноженной на -5:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 15 & 31 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 50 & 180 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 60 & 390 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 360 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 120 & 31 \end{array}\right]$$

Делим каждую строку матрицы на соответствующий ведущий элемент (если ведущий элемент существует):

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & 15 & 31 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 25 & 90 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 65 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15 & -0.66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.25 \end{array}\right]$$

Из расширенной матрицы восстановим систему линейных уравнений:

$$\left[\begin{array}{lllllll} 1x_1 & +1x_2 & +1x_3 & +1x_4 & +1x_5 & +1x_6 = & 3 \\ 0x_1 & +1x_2 & +3x_3 & +7x_4 & +15x_5 & +31x_6 = & 2 \\ 0x_1 & +0x_2 & +1x_3 & +6x_4 & +25x_5 & +90x_6 = & -1 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +1x_4 & +10x_5 & +65x_6 = & 1 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +1x_5 & +15x_6 = & -0.66 \\ 0x_1 & +0x_2 & +0x_3 & +0x_4 & +0x_5 & +1x_6 = & 0.25 \end{array}\right.$$

Базисные переменные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.

Имеем:

$$x_1=3-1\cdot x_2-1\cdot x_3-1\cdot x_4-1\cdot x_5-1\cdot x_6$$
$$x_2=2-3\cdot x_3-7\cdot x_4-15\cdot x_5-31\cdot x_6$$
$$x_3=-1-6\cdot x_4-25\cdot x_5-90\cdot x_6$$
$$x_4=1-10\cdot x_5-65\cdot x_6$$
$$x_5=-0.66-15\cdot x_6$$
$$x_6=0.25$$

Подставив нижние выражения в верхние, получим **решение**.

$$x_1=-54$$
$$x_2=120.11$$
$$x_3=-88.45$$
$$x_4=29.62$$
$$x_5=-4.54$$
$$x_6=0.25$$

Решение в векторном виде:

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-54\\120.11\\-88.45\\29.62\\-4.54\\0.25\end{bmatrix}$$

Инструкция ввода данных. Числа вводятся в виде целых чисел (примеры: 487, 5, -7623 и т.д.), десятичных чисел (напр. 67., 102.54 и т.д.) или дробей. Дробь нужно набирать в виде a/b, где a и b (b>0) целые или десятичные числа. Примеры 45/5, 6.6/76.4, -7/6.7 и т.д.

Метод Гаусса

Метод Гаусса − это метод перехода от исходной системы линейных уравнений (при помощи эквивалентных преобразований) к системе, которая решается проще, чем исходная система.

Эквивалентными преобразованиями системы линейных уравнений являются:

- перемена местами двух уравнений в системе,
- умножение какого-либо уравнения в системе на ненулевое действительное число,
- прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1}$$

Запишем систему (1) в матричном виде:

$$Ax=b \tag{2}$$

где

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ .... & .... & .... & ....\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_m\end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{bmatrix} \tag{3}$$

A-называется матрица коэффициентов системы, b − правая часть ограничений, x− вектор переменных, которую нужно найти. Пусть rang(A)=p.