ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (ОДУ)

1. Метод Эйлера

Метод Эйлера — простейший численный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Впервые описан Леонардом Эйлером в 1768 году в работе «Интегральное исчисление». Метод Эйлера является явным, одношаговым методом первого порядка точности. Он основан на аппроксимации интегральной кривой кусочно-линейной функцией, так называемой ломаной Эйлера.

Ломаная Эйлера (красная линия) — приближённое решение в пяти узлах задачи Коши и точное решение этой задачи (выделено синим цветом) приведены на рис. 1.

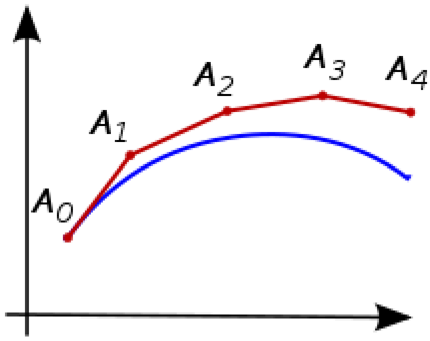

Рис. 1 – Ломаная Эйлера (красная линия) — приближённое решение в пяти узлах задачи Коши и точное решение этой задачи (выделено синим цветом)

1.1. Описание метода

Пусть дана задача Коши для уравнения первого порядка:

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0,$$

где функция f определена на некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$. Решение ищется на интервале $(x_0, b]$. На этом интервале введем узлы: $x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$. Приближенное решение в узлах x_i, которое обозначим через y_i, определяется по формуле:

$$y_i = y_{i-1} + (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}, y_{i-1}), \; i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Эти формулы непосредственно обобщаются на случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Неявный метод Рунге — Кутты второго порядка

Простейшим неявным методом Рунге — Кутты является модифицированный метод Эйлера «с пересчётом». Он задаётся формулой:

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2}.$$

Для его реализации на каждом шаге необходимы как минимум две итерации (и два вычисления функции).

Прогноз:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Коррекция:

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{f\left(x_n,\ y_n\right) + f\left(x_{n+1},\ y_{n+1}\right)}{2}.$$

Вторая формула — это простая итерация решения системы уравнений относительно y_{n+1}, записанной в форме сжимающего отображения. Для повышения точности итерацию-коррекцию можно сделать несколько раз, подставляя $y_{n+1} = y_{n+1}$. Модифицированный метод Эйлера «с пересчётом» имеет второй порядок точности.

3. Классический метод Рунге — Кутты четвёртого порядка

Метод Рунге — Кутты четвёртого порядка при вычислениях с постоянным шагом интегрирования столь широко распространён, что его часто называют просто методом Рунге — Кутты.

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. (Далее y, f, $k_i \in \mathbb{R}^n$, а $x,\ h \in \mathbb{R}^1$).

$$y' = f\left(x,\ y\right),\ y\left(x_0\right) = y_0.$$

Тогда приближенное значение в последующих точках вычисляется по итерационной формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right).$$

Вычисление нового значения проходит в четыре стадии:

$$k_1 = f\left(x_n,\ y_n\right),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = f\left(x_n + h,\ y_n + hk_3\right).$$

где h — величина шага сетки по x.

Этот метод имеет четвёртый порядок точности. Это значит, что ошибка на одном шаге имеет порядок $O\left(h^5\right)$, а суммарная ошибка на конечном интервале интегрирования имеет порядок $O\left(h^4\right)$.

4. Метод Адамса

Метод Адамса — конечноразностный многошаговый метод численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В отличие от метода Рунге-Кутты использует для вычисления очередного значения искомого решения не одно, а несколько значений, которые уже вычислены в предыдущих точках.

Назван по имени предложившего его в 1855 году английского астронома Джона К. Адамса.

4.1. Определение

Пусть дана система дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = f\left(x,\ y\right),\ y\left(x_0\right) = y_0,$$

для которой надо найти решение на сетке с постоянным шагом $x_n - x_0 = (n-1)h$. Расчётные формулы метода Адамса для решения этой системы имеют вид:

1) экстраполяционные — метод Адамса-Башфорта

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{\lambda=0}^{k} u_{-\lambda} f\left(x_{n-\lambda},\, y_{n-\lambda}\right),$$

2) интерполяционные или неявные — метод Адамса-Мультона

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{\lambda=-1}^{k-1} v_{-\lambda} f\left(x_{n-\lambda},\, y_{n-\lambda}\right),$$

где $u_{-\lambda}$, $v_{-\lambda}$ — некоторые вычисляемые постоянные.

При одном и том же k формула б) точнее, но требует решения нелинейной системы уравнений для нахождения значения y_{n+1}. На практике находят приближение из а), а затем приводят одно или несколько уточнений по формуле

$$y_{n+1}^{(i+1)} = y_n + h\sum_{\lambda=0}^{k-1} v_{-\lambda} f\left(x_{n-\lambda},\, y_{n-\lambda}\right) + hv_1 f\left(x_{n+1},\, y_{n+1}^{(i)}\right).$$

4.2. Свойства

Методы Адамса k-го порядка требуют предварительного вычисления решения в k начальных точках. Для вычисления начальных значений обычно используют одношаговые методы, например, 4-стадийный метод Рунге — Кутты 4-го порядка точности.

Локальная погрешность методов Адамса k-го порядка — $O\left(h^k\right)$. Структура погрешности метода Адамса такова, что погрешность остаётся ограниченной или растёт очень медленно в случае асимптотически устойчивых решений уравнения. Это позволяет использовать этот метод для отыскания устойчивых периодических решений, в частности, для расчёта движения небесных тел.

4.3. Методы Адамса — Башфорта

Приведем расчетные формулы явных методов Адамса — Башфорта k-го порядка точности при $k = 2,\ 3,\ 4$:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(3 f_n - f_{n-1}\right),\ k = 2;$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left(23 f_n - 16 f_{n-1} + 5 f_{n-2}\right),\ k = 3;$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right),\ k = 4.$$

4.4. Методы Адамса — Мультона

Приведем также расчетные формулы неявных методов Адамса — Мультона k-го порядка точности при $k = 2,\ 3,\ 4$:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f_{n+1} + f_n\right),\ k = 2;$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left(5 f_{n+1} + 8 f_n - f_{n-1}\right),\ k = 3;$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right),\ k = 4.$$