

Методы решения задач о собственных значениях и векторах матриц

Постановка задачи

Пусть A – действительная числовая квадратная матрица размера $(n \times n)$. Ненулевой вектор $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ размера $(n \times 1)$, удовлетворяющий условию

$$A \cdot X = \lambda \cdot X, \quad (1)$$

называется собственным вектором матрицы A . Число λ в равенстве (1) называется собственным значением. Говорят, что собственный вектор X соответствует (принадлежит) собственному значению λ .

Равенство (1) равносильно однородной относительно X системе:

$$(A - \lambda E) \cdot X = 0 \quad (X \neq 0). \quad (2)$$

Система (2) имеет ненулевое решение для вектора X (при известном λ) при условии $|A - \lambda E| = 0$. Это равенство есть характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = P_n(\lambda) = 0, \quad (3)$$

где $P_n(\lambda)$ – характеристический многочлен n -й степени. Корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения (3) являются собственными (характеристическими) значениями матрицы A , а соответствующие каждому собственному значению λ_i , $i = 1, \dots, n$, ненулевые векторы X_i , удовлетворяющие системе

$$AX_i = \lambda_i X_i \text{ или } (A - \lambda_i E)X_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

являются собственными векторами.

Требуется найти собственные значения и собственные векторы заданной матрицы. Поставленная задача часто именуется второй задачей линейной алгебры.

Проблема собственных значений (частот) возникает при анализе поведения мостов, зданий, летательных аппаратов и других конструкций, характеризующихся малыми смещениями от положения равновесия, а также при анализе устойчивости численных схем. Характеристическое уравнение вместе с его собственными значениями и собственными векторами является основным в теории механических или электрических колебаний на макроскопическом или микроскопическом уровнях.

Различают полную и частичную проблему собственных значений, когда необходимо найти весь спектр (все собственные значения) и собственные векторы либо часть спектра, например: $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$ и $\min_i |\lambda_i(A)|$.

Величина $\rho(A)$ называется *спектральным радиусом*.

Метод итераций для нахождения собственных значений и векторов

Для решения частичной проблемы собственных значений и собственных векторов в практических расчетах часто используется метод итераций (степенной метод). На его основе можно определить приближенно собственные значения матрицы A и спектральный радиус $\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$.

Пусть матрица A имеет n линейно независимых собственных векторов $X_i, i = 1, \dots, n$, и собственные значения матрицы A таковы, что

$$\rho(A) = |\lambda_1(A)| > |\lambda_2(A)| \geq \dots \geq |\lambda_n(A)|.$$

Алгоритм метода итераций

1. Выбрать произвольное начальное (нулевое) приближение собственного вектора $X^{1(0)}$ (второй индекс в скобках здесь и ниже указывает номер приближения, а первый индекс без скобок соответствует номеру собственного значения). Положить $k = 0$.

2. Найти $X^{1(1)} = AX^{1(0)}, \lambda_1^{(1)} = \frac{x_i^{1(1)}}{x_i^{1(0)}}$, где i – любой номер $1 \leq i \leq n$, и положить $k = 1$.

3. Вычислить $X^{1(k+1)} = A \cdot X^{1(k)}$.

4. Найти $\lambda_1^{(k+1)} = \frac{x_i^{1(k+1)}}{x_i^{1(k)}}$, где $x_i^{1(k+1)}, x_i^{1(k)}$ – соответствующие координаты векторов $X^{1(k+1)}$ и $X^{1(k)}$. При этом может быть использована любая координата с номером $i, 1 \leq i \leq n$.

5. Если $\Delta = |\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| \leq \varepsilon$, процесс завершить и положить $\lambda_1 = \lambda_1^{(k+1)}$. Если $\Delta > \varepsilon$, положить $k = k + 1$ и перейти к пункту 3.

Метод вращений для нахождения собственных значений

Метод используется для решения полной проблемы собственных значений симметрической матрицы и основан на преобразовании подобия исходной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с помощью ортогональной матрицы H .

Напомним, что две матрицы A и $A^{(i)}$ называются подобными ($A \sim A^{(i)}$ или $A^{(i)} \sim A$), если $A^{(i)} = H^{-1}AH$ или $A = HA^{(i)}H^{-1}$, где H – невырожденная матрица.

В методе вращений в качестве H берется ортогональная матрица, такая, что $HH^T = H^TH = E$, т.е. $H^T = H^{-1}$. В силу свойства ортогонального преобразования евклидова норма исходной матрицы A не меняется. Для преобразованной матрицы $A^{(i)}$ сохраняется ее след и собственные значения λ_i :

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i(A) = \text{tr } A^{(i)}.$$

При реализации метода вращений преобразование подобия применяется к исходной матрице A многократно:

$$A^{(k+1)} = (H^{(k)})^{-1} \cdot A^{(k)} \cdot H^{(k)} = (H^{(k)})^T \cdot A^{(k)} \cdot H^{(k)}, k = 1, 2, 3, \dots, \quad (4)$$

Формула (4) определяет итерационный процесс, где начальное приближение $A^{(0)} = A$. На k -й итерации для некоторого выбираемого при решении задачи недиагонального элемента $a_{ij}^{(k)}, i \neq j$, определяется ортогональная матрица $H^{(k)}$, приводящая этот элемент $a_{ij}^{(k+1)}$ (а также и $a_{ji}^{(k+1)}$) к нулю. При этом на каждой итерации в качестве $a_{ij}^{(k+1)}$ выбирается

наибольший по модулю. Матрица $H^{(k)}$ называемая матрицей вращения Якоби, зависит от угла $\varphi^{(k)}$ и имеет вид

$$H^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \cos \varphi^{(k)} & 0 & \dots & 0 & -\sin \varphi^{(k)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sin \varphi^{(k)} & 0 & \dots & 0 & \cos \varphi^{(k)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

\uparrow i -й столбец \uparrow j -й столбец

$\leftarrow i$ -я строка
 $\leftarrow j$ -я строка

В данной ортогональной матрице элементы на главной диагонали единичные, кроме $h_{ii}^{(k)} = \cos \varphi^{(k)}$ и $h_{jj}^{(k)} = \cos \varphi^{(k)}$, а остальные элементы нулевые, за исключением $h_{ij}^{(k)} = -\sin \varphi^{(k)}$, $h_{ji}^{(k)} = \sin \varphi^{(k)}$ (h_{ij} – элементы матрицы H).

Угол поворота $\varphi^{(k)}$ определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\varphi^{(k)} = \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}} = \bar{P}_k, \quad \varphi^{(k)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \bar{P}_k, \quad (4)$$

где $|2\varphi^{(k)}| \leq \frac{\pi}{2}$, $i < j$ (a_{ij} выбирается в верхней треугольной наддиагональной части матрицы A).

В процессе итераций сумма квадратов всех недиагональных элементов $\sigma(A^{(k)})$ при возрастании k уменьшается, так что $\sigma(A^{(k+1)}) < \sigma(A^{(k)})$. Однако элементы $a_{ij}^{(k)}$ приведенные к нулю на k -й итерации, на последующей итерации немного возрастают. При $k \rightarrow \infty$ получается монотонно убывающая ограниченная снизу нулем последовательность $\sigma(A^{(1)}) > \sigma(A^{(2)}) > \dots > \sigma(A^{(k)}) > \dots$. Поэтому $\sigma(A^{(k)}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Это и означает сходимость метода. При этом $A^{(k)} \rightarrow \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Алгоритм метода вращений

1. Положить $k = 0$, $A^{(0)} = A$ и задать $\varepsilon > 0$.
2. Выделить в верхней треугольной наддиагональной части матрицы $A^{(k)}$ максимальный по модулю элемент $a_{ij}^{(k)}$, $i < j$.

Если $|a_{ij}^{(k)}| \leq \varepsilon$ для всех $i \neq j$, процесс завершить. Собственные значения определяются по формуле $\lambda_i(A^{(k)}) = a_{ii}^{(k)}$, $i = 1, \dots, n$.

Собственные векторы X^i находятся как i -е столбцы матрицы, получающейся в результате перемножения:

$$v_k = H^{(0)} \cdot H^{(1)} \cdot H^{(2)} \cdot \dots \cdot H^{(k-1)} = (X^1, X^2, X^3, \dots, X^n).$$

Если $|a_{ij}^{(k)}| > \varepsilon$, процесс продолжается.

3. Найти угол поворота по формуле $\varphi^{(k)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}$.

4. Составить матрицу вращения $H^{(k)}$.

5. Вычислить очередное приближение $A^{(k+1)} = (H^{(k)})^T A^{(k)} H^{(k)}$.

Положить $k = k + 1$ и перейти к пункту 2.