КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Задачей квадратичного программирования (КП) называется задача оптимизации с квадратичной целевой функцией и линейными ограничениями. Задача КП, в которой целевая функция подлежит минимизации, имеет вид

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{jk} x_j x_k \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}.$$

Допустимое множество X является выпуклым, матрица $D=[d_{jk}]$ предполагается симметричной неотрицательно определенной. При этом $f(x)$ является выпуклой на X и задача КП является частным случаем задачи выпуклого программирования.

Для решения задачи КП используются необходимые условия Куна – Таккера, которые в силу выпуклости задачи КП оказываются также достаточными для установления наличия решения.

Предварительно составляется функция Лагранжа

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x),$$

где $g_j(x)\equiv\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j-b_i$.

Условия Куна – Таккера имеют следующий вид:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j}\ge 0, \quad j=\overline{1,n}; \tag{3.1}$$

$$x_j\ge 0, \quad j=\overline{1,n}; \tag{3.2}$$

$$x_j\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j}=0, \quad j=\overline{1,n}; \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_i}\le 0, \quad i=\overline{1,m}; \tag{3.4}$$

$$\lambda_i\ge 0, \quad i=\overline{1,m}; \tag{3.5}$$

$$\lambda_i\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_i}=0, \quad i=\overline{1,m}. \tag{3.6}$$

Соотношения (3.3) и (3.6) определяют условия дополняющей нежесткости.

Непосредственное решение данной системы очень громоздко. Поэтому используется следующий прием. Неравенства (3.1) и (3.4) преобразуют в равенства, вводя соответственно две группы дополнительных переменных $v_j,\ j=\overline{1,n}$, и $w_i,\ i=\overline{1,m}$, удовлетворяющих требованиям неотрицательности. В результате от системы (3.1)–(3.6) переходят к следующей системе:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_j}-v_j=0, \quad j=\overline{1,n}; \tag{3.7}$$

$$x_j\ge 0, \quad v_j\ge 0, \quad j=\overline{1,n}; \tag{3.8}$$

$$x_j v_j=0, \quad j=\overline{1,n}; \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda_i}+w_i=0, \quad i=\overline{1,m}; \tag{3.10}$$

$$\lambda_i\ge 0, \quad w_i\ge 0, \quad i=\overline{1,m}; \tag{3.11}$$

$$\lambda_i w_i=0, \quad i=\overline{1,m}. \tag{3.12}$$

Система уравнений (3.7) и (3.10) содержит $(m+n)$ линейных уравнений с $2(m+n)$ неизвестными. Таким образом, *исходная задача эквивалентна задаче нахождения допустимого, т.е. удовлетворяющего требованиям неотрицательности* (3.8) *и* (3.11), *базисного решения системы линейных уравнений* (3.7) *и* (3.10), *удовлетворяющего также условиям дополняющей нежесткости* (3.9) *и* (3.12). Так как задача КП является выпуклой задачей оптимизации, то допустимое решение, которое удовлетворяет всем этим условиям, является оптимальным.

Для нахождения допустимого базисного решения системы линейных уравнений может быть применен метод искусственных переменных, используемый в линейном программировании (ЛП) для определения начального базиса. При этом в уравнения системы (3.7), (3.10), в которых знаки дополнительных переменных v_j или w_i совпадают со знаками свободных членов, вводятся неотрицательные искусственные переменные $z_l, l=\overline{1,l_{\max}}$, $l_{\max} \le m+n$, знаки которых не совпадают со знаками соответствующих свободных членов.

Затем решается вспомогательная задача ЛП

$$F(z)=\sum_l z_l \to \min$$

при ограничениях (3.7) – (3.12) с введенными неотрицательными искусственными переменными. Для решения этой задачи используется симплекс-метод. В процессе решения необходимо учитывать условия дополняющей нежесткости (3.9) и (3.12). Выполнение этих условий означает, что x_j и v_j, λ_i и w_i не могут быть положительными одновременно, т.е. переменную x_j нельзя сделать базисной, если v_j является базисной и принимает положительное значение, также и λ_i с w_i.

В результате решения вспомогательной задачи могут быть два случая.

1. $\min\limits_z F(z)=0$, т.е. все искусственные переменные выведены из базиса. Полученное оптимальное допустимое базисное решение вспомогательной задачи ЛП является допустимым базисным решением системы (3.7) – (3.12) и, следовательно, решением задачи КП.

2. $\min\limits_z F(z)>0$, т.е. среди базисных остались искусственные переменные. Это означает, что система (3.7) – (3.12) не имеет допустимого базисного решения и, следовательно, задача КП не имеет решения.

Итак, алгоритм решения задачи КП заключается в следующем.

1. Ограничения задачи КП преобразуются к виду

$$g_i(x) \le 0, \quad i=\overline{1,m}.$$

2. Составляется функция Лагранжа

$$L(x,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x).$$

3. Находятся частные производные $\dfrac{\partial L}{\partial x_j}, j=\overline{1,n}$; $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}$, $i=\overline{1,m}$, и составляются условия Куна – Таккера (3.1) – (3.6).

4. Посредством введения дополнительных переменных v_j, $j=\overline{1,n}$; w_i, $i=\overline{1,m}$, неравенства

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \ge 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \le 0$$

преобразуются в равенства

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}-v_j=0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}+w_i=0,$$

в результате получается система (3.7) – (3.12).

5. Вводятся искусственные переменные z_l, составляется вспомогательная задача ЛП минимизации $F(z)=\sum_l z_l$ при ограничениях (3.7) – (3.12) с введенными неотрицательными искусственными переменными.

6. Решается вспомогательная задача ЛП симплекс-методом с учетом условий дополняющей нежесткости.

Если в результате решения $\min\limits_z F(z)=0$, то оптимальное допустимое базисное решение вспомогательной задачи определяет решение x^* задачи КП.

Если $\min\limits_z F(z)>0$, то задача КП не имеет решения.

Пример. Решить следующую задачу КП:

$$f(x)=2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2-4x_1-6x_2 \to \min,$$

$$x_1 + 2x_2 \le 2,$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Решение.

Преобразуем ограничение исходной задачи к виду $g(x) \le 0$:

$$g(x) = x_1 + 2x_2 - 2 \le 0.$$

Составляем функцию Лагранжа

$$L(x,\lambda) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + \lambda(x_1 + 2x_2 - 2).$$

Находим частные производные и составляем условия Куна – Таккера:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1 + 2x_2 - 4 + \lambda \ge 0, \quad x_1 \ge 0, \quad x_1\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_1 + 4x_2 - 6 + 2\lambda \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_2\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + 2x_2 - 2 \le 0, \quad \lambda \ge 0, \quad \lambda\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

Вводим дополнительные переменные v_1, v_2 и w, обращающие неравенства в равенства, в результате получаем

$$4x_1 + 2x_2 - 4 + \lambda - v_1 = 0, \quad x_1 \ge 0, \quad v_1 \ge 0, \quad x_1v_1 = 0;$$
$$2x_1 + 4x_2 - 6 + 2\lambda - v_2 = 0, \quad x_2 \ge 0, \quad v_2 \ge 0, \quad x_2v_2 = 0;$$
$$x_1 + 2x_2 - 2 + w = 0, \quad \lambda \ge 0, \quad w \ge 0, \quad \lambda w = 0.$$

Получили систему 3-х линейных уравнений с шестью неизвестными, которые должны также удовлетворять требованиям неотрицательности и условиям дополняющей нежесткости.

Вводим в первое и второе уравнения соответственно искусственные переменные z_1 и z_2:

$$4x_1 + 2x_2 - 4 + \lambda - v_1 + z_1 = 0,$$
$$2x_1 + 4x_2 - 6 + 2\lambda - v_2 + z_2 = 0.$$

Разрешая первое уравнение относительно z_1, а второе уравнение относительно z_2, находим целевую функцию $F(z)$ вспомогательной задачи ЛП:

$$F(z) = z_1 + z_2 = (-4x_1 - 2x_2 + 4 - \lambda + v_1) +$$
$$+ (-2x_1 - 4x_2 + 6 - 2\lambda + v_2) = 10 - 6x_1 - 6x_2 - 3\lambda + v_1 + v_2.$$

Составляем вспомогательную задачу ЛП:

$$F(z) = 10 - 6x_1 - 6x_2 - 3\lambda + v_1 + v_2 \quad \to \quad \min,$$
$$4x_1 + 2x_2 + \lambda - v_1 + z_1 = 4,$$
$$2x_1 + 4x_2 + 2\lambda - v_2 + z_2 = 6,$$
$$x_1 + 2x_2 + w = 2,$$
$$x_1, x_2, \lambda, v_1, v_2, w, z_1, z_2 \ge 0.$$

Решаем задачу симплекс-методом с учетом условий дополняющей нежесткости. В качестве базисных выберем переменные z_1, z_2 и w. Таким образом, начальный базис $Б_0 = \{z_1, z_2, w\}$. В результате приходим к табл. 3.1.

Таблица 3.1

	Базис	Своб. член	↓ x_1	x_2	λ	v_1	v_2	w	z_1	z_2	
→	z_1	4	4	2	1	–1	0	0	1	0	4/4=1
	z_2	6	2	4	2	0	–1	0	0	1	6/2=3
	w	2	1	2	0	0	0	1	0	0	2/1=2
	F	10	6	6	3	–1	–1	0	0	0	

Начальное допустимое базисное решение $ДБР_0 = (z_1 = 4, z_2 = 6, w = 2)$. $ДБР_0$ не является оптимальным, поскольку в строке целевой функции есть положительные коэффициенты $F_{x_1} = 6$, $F_{x_2} = 6$, $F_\lambda = 3$.

Согласно условиям дополняющей нежесткости, в базис можно вводить x_1, так как $v_1 = 0$, либо x_2, так как $v_2 = 0$, но нельзя вводить λ, так как $w>0$. Находим $Б_1$:

$$F_{x_1}>0 \;\rightarrow\; x_1 \text{ вводим в базис,}$$

$$\min\left\{\frac{4}{4}=1,\ \frac{6}{2}=3,\ \frac{2}{1}=2\right\}=1 \;\rightarrow\; z_1 \text{ выводим из базиса.}$$

Таким образом, $Б_1=\{x_1,z_2,w\}$. В результате приходим к табл. 3.2.

Таблица 3.2

	Базис	Своб. член	x_1	↓ x_2	λ	v_1	v_2	w	z_1	z_2	
	x_1	1	1	1/2	1/4	–1/4	0	0	1/4	0	2
	z_2	4	0	3	3/2	1/2	–1	0	–1/2	1	4/3
→	w	1	0	3/2	–1/4	1/4	0	1	–1/4	0	2/3
	F	4	0	3	3/2	1/2	–1	0	–3/2	0	

Получили $ДБР_1=(x_1=1, z_2=4, w=1)$. $ДБР_1$ не является оптимальным, поскольку в строке целевой функции есть положительные коэффициенты $F_{x_2}=3$, $F_\lambda=\frac{3}{2}$ и $F_{v_1}=\frac{1}{2}$.

Согласно условиям дополняющей нежесткости, в базис можно вводить x_2, так как $v_2=0$, но нельзя вводить λ, так как $w>0$, и v_1, так как $x_1>0$. Находим $Б_2$:

$$F_{x_2}>0 \;\rightarrow\; x_2 \text{ вводим в базис,}$$

$$\min\left\{\frac{1\cdot 2}{1}=2,\ \frac{4}{3},\ \frac{1\cdot 2}{3}=\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3} \;\rightarrow\; w \text{ выводим из базиса.}$$

Таким образом, $Б_2=\{x_1,x_2,z_2\}$. В результате приходим к табл. 3.3.

Таблица 3.3

	Базис	Своб. член	x_1	x_2	↓ λ	v_1	v_2	w	z_1	z_2	
	x_1	2/3	1	0	1/3	–1/3	0	–1/3	1/3	0	2
	x_2	2/3	0	1	–1/6	1/6	0	2/3	–1/6	0	
→	z_2	2	0	0	2	0	–1	–2	0	1	1
	F	2	0	0	2	0	–1	–2	–1	0	

Получили $ДБР_2=\left(x_1=\frac{2}{3},\ x_2=\frac{2}{3},\ z_2=2\right)$. $ДБР_2$ не является оптимальным, поскольку в строке целевой функции есть положительный коэффициент $F_\lambda=2$.

Согласно условиям дополняющей нежесткости, в базис можно вводить λ, так как $w=0$. Находим $Б_3$:

$$F_\lambda>0 \;\rightarrow\; \lambda \text{ вводим в базис,}$$

$$\min\left\{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 1}=2,\ \frac{2}{2}=1\right\}=1 \;\rightarrow\; z_2 \text{ выводим из базиса.}$$

Таким образом, $Б_3=\{x_1,x_2,\lambda\}$. В результате приходим к табл. 3.4.

Таблица 3.4

Базис	Своб. член	x_1	x_2	λ	v_1	v_2	w	z_1	z_2
x_1	1/3	1	0	0	–1/3	1/6	0	1/3	–1/6
x_2	5/6	0	1	0	1/6	–1/12	1/2	–1/6	1/12

Окончание табл. 3.4

λ	1	0	0	1	0	–1/2	–1	0	1/2
F	0	0	0	0	0	0	0	–1	–1

Получили $ДБР_3 = (x_1 = 1/3,\ x_2 = 5/6,\ \lambda = 1)$. $ДБР_3$ является оптимальным решением.

Таким образом, вспомогательная задача ЛП решена.

Поскольку $\min\limits_z F(z) = 0$, то оптимальное *ДБР* вспомогательной задачи определяет решение x^* задачи КП. Поэтому полагаем

$$x^* = (x_1^* = 1/3, x_2^* = 5/6),$$

$$f^* = f(x^*) = 2 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \frac{25}{36} - 4 \cdot \frac{1}{3} - 6 \cdot \frac{5}{6} = -4\frac{1}{6}.$$

Ответ: $x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{6}\right)$, $f^* = -4\frac{1}{6}$.

Задачи

1. Решить задачу квадратичного программирования

$$f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 6x_1 - 3x_2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \le 1,$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

2. Решить задачу квадратичного программирования

$$f(x) = x_1 + 2x_2 - x_2^2 \to \max,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$