

Задание: разработать В - алгоритм минимизации функций Розенброка, Химмельблау, Растригина.

3.3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПЧЕЛИНЫМ РОЕМ

Алгоритмы пчелиной оптимизации являются одними из новейших много-агентных алгоритмов, основанных на моделировании *роевого интеллекта* (*swarm intelligence*). Первые статьи, в которых излагается алгоритм данного класса, были опубликованы в 2005 г. Основная идея алгоритмов состоит в моделировании поведения пчел при поиске нектара.

Алгоритмы пчелиной оптимизации успешно применяют при решении различных задач дискретной оптимизации – задача календарного планирования, задача коммивояжера, транспортная задача и др. Разработаны также высокоэффективные варианты алгоритма, предназначенные для решения задач непрерывной оптимизации, наиболее известными из которых являются *пчелиный алгоритм* (*Bees algorithm*) и *алгоритм колонии искусственных пчел* (*Artificial Bee Colony, ABC*).

Среди недостатков пчелиных алгоритмов упоминания заслуживает большое число свободных параметров.

В этом параграфе представлены бионические предпосылки пчелиных алгоритмов, базовый алгоритм роя пчел, алгоритм *ABC*, а также один из гибридных алгоритмов, построенный на основе алгоритма роя пчел и алгоритма оптимизации путем имитации отжига.

3.3.1. Бионические предпосылки

Радиус области распространения роя *медоносных пчел* (*honey bee swarm*) достигает 10 и более километров, что обеспечивает высокую вероятность выявления большего числа источников нектара. «Стратегию» роя можно определить следующим образом: непрерывный поиск в указанной области цветочных участков, содержащих достаточное для добычи *количество нектара* (*nectar amounts*); посещение цветочных участков, изобилующих нектаром или пыльцой, которые могут быть собраны с меньшими усилиями, большим числом пчел по сравнению с участками, содержащими меньшее количество нектара или пыльцы.

Для описания поведения пчел в природе используют такие основные понятия, как источник нектара, рабочие пчелы, пчелы-разведчики, пчелы-наблюдатели.

Источник нектара, источник пищи (*food sources*) характеризуется своей *полезностью*, которую определяют такие факторы, как удаленность от улья, концентрация нектара, удобство его добычи.

Рабочие пчелы, занятые фуражиры (*worker bees*) – пчелы, которые *связаны* с одним из источников нектара, то есть добывают на нем нектар. Занятые фуражиры владеют следующей информацией о «своем» источнике нектара: направление от улья на источник, полезность источника.

Пчелы-разведчики, незанятые фуражиры, пчелы-скауты (*scout bees, scouts*) осуществляют поиск источников нектара для их использования.

Пчелы-наблюдатели (*onlooker bees*) в данное время выполняют некоторые работы в улье.

Каждая незанятая пчела может полететь к источнику нектара, следуя за пчелой-разведчиком, которая нашла путь к такому источнику. Пчела-раз-

ведчик выполняет *вербовку* незанятых пчел с помощью *танца* (*waggle dance*) на специальной площадке улья – области танцев. *Завербованная* (*recruit*) пчела следует за соответствующей пчелой-разведчиком к области с нектаром и становится, таким образом, занятым фуражиром. Вербовку осуществляют те из пчел-разведчиков, которые нашли участки с полезностью выше некоторого определенного порога.

Занятый фуражир после добычи нектара возвращается в улей и оставляет его там. После этого данный фуражир может выполнить одно из следующих действий: оставить «свой» источник нектара и стать незанятым фуражиром; продолжить заготовку нектара из прежнего источника, не вербуя других пчел; выполнить вербовку.

Пчела выбирает одно из указанных действий по некоторому вероятностному закону.

Одновременно в пределах области танцев разные пчелы могут «рекламировать» различные источники нектара. Механизмы принятия решений, в соответствии с которыми пчела решает следовать за той или иной пчелой-вербовщиком, исследованы недостаточно хорошо. Логично предположить, что вероятность вербовки тем или иным образом определяется полезностью соответствующего источника нектара.

Таким образом, самоорганизация пчелиного роя основывается на четырех следующих основных механизмах.

- Положительная обратная связь – на основе информации, полученной от других пчел, пчела летит к одному из источников нектара.

- Отрицательная обратная связь – основываясь на информации, полученной от других пчел, данная пчела может решить, что «ее» источник нектара значительно хуже других найденных источников, и оставить этот источник.

- Случайность – вероятностный поиск пчёлами-разведчиками новых источников нектара.

- Множественность взаимодействия – информация об источнике нектара, найденном одной пчелой, передается многим другим пчелам улья.

3.3.2. Пчелиный алгоритм

Пчелиным алгоритмом называют (*B*-алгоритм) *Bees algorithm*, предложенный в работах Фама (*D. T. Pham*) с соавторами в 2005 г. Концептуально, схема *B*-алгоритма имеет следующий вид. Сначала из улья вылетает в случайном направлении некоторое число пчел-разведчиков, которые пытаются отыскать участки, где есть нектар. Через какое-то время пчелы возвращаются в улей и сообщают другим пчелам, где и сколько они нашли нектара. После этого на найденные участки отправляются рекрутированные (рабочие) пчелы, причем чем больше на данном участке предполагается найти нектара, тем больше пчел летит к этому участку. Пчелы-разведчики опять улетают искать другие участки, после чего процесс повторяется.

Положим, что речь идет о задаче максимизации фитнес-функции. Количество нектара в некоторой точке пространства поиска полагаем пропорциональным значению фитнес-функции в этой точке. Одна итерация алгоритма включает в себя следующие основные шаги.

1. В случайные точки пространства поиска отправляем пчел-разведчиков.

2. На основании значений фитнес-функции, вычисленных в указанных точках, выделяем некоторое число *элитных участков* – подобластей пространства поиска, соответствующих максимальным значениям этой функции. Аналогично определяем некоторое число *перспективных участков*, которые соответствуют значениям фитнес-функции, близким к максимальным.

3. На каждый из элитных и перспективных участков посылаем определенное число рабочих пчел. Используя соответствующие значения фитнес-функции, находим новые элитные и перспективные участки. При этом выборе учитываем результаты, полученные как пчелами-разведчиками, так и рабочими пчелами.

В качестве текущего приближения к решению задачи принимаем точку с максимальным значением фитнес-функции. Размеры элитных и перспективных участков уменьшаем с ростом числа итераций, так что на завершающих итерациях поиск ведется только в окрестностях максимумов целевой функции.

Формализуем представленную схему *B*-алгоритма. Рассмотрим задачу глобальной условной максимизации в гиперпараллелепипеде Π . Среди пчел $S = \{s_i, i \in [1:|S|]\}$ выделяем $|S^o| < |S|$ пчел-разведчиков. Положим для простоты записи, что эти пчелы являются первыми в рое S :

$$S^o = \{s_i^o, i \in [1:|S^o|]\}.$$

Остальные пчелы роя

$$S^w = \{s_i^w, i \in [1:|S^w|]\} = \{s_i, i \in [1:|S^o|+1:|S|]\}$$

являются рабочими пчелами; $|S^w| = |S| - |S^o|$. Значения фитнес-функции $\varphi(X)$, соответствующие текущему положению пчел s_i^o, s_i^w , обозначаем $\varphi(X_i^o) = \varphi_i^o$, $\varphi(X_i^w) = \varphi_i^w$.

Множество *элитных (top-rated, elite) участков* обозначаем $A^b = \{a_j^b, j \in [1:|A^b|]\}$. Аналогично, множество перспективных участков обозначаем $A^p = \{a_k^p, k \in [1:|A^p|]\}$. В оригинальной работе, в которой предложен *B*-алгоритм, совокупность элитных и перспективных участков называют *отобранными (selected)*.

Полагаем, что участки a_j^b, a_k^p представляют собой гиперпараллелепипеды в пространстве $R^{|X|}$, грани которых параллельны координатным плоскостям, центры находятся в точках X_j^b, X_k^p и длины сторон равны $2r_j^b, 2r_k^p$ соответственно (рис. 3.31). Здесь $r_l^b, r_l^p, l \in [1:|X|]$ – радиусы участков по соответствующим измерениям пространства поиска.

При формировании элитных участков может оказаться, что евклидово расстояние $\|X_{j_1}^b - X_{j_2}^b\|_E$ между некоторыми такими участками $a_{j_1}^b, a_{j_2}^b$ не превышает некоторой фиксированной свободной величины $\varepsilon_b > 0$:

$$\|X_{j_1}^b - X_{j_2}^b\|_E \leq \varepsilon_b, j_1, j_2 \in [1:|A^b|], j_1 \neq j_2.$$

В таком случае возможны два следующих варианта действия: ставим в соответствие точкам $X_{j_1}^b, X_{j_2}^b$ два различных пересекающихся участка $a_{j_1}^b, a_{j_2}^b$; ставим в соответствие этим точкам один участок a_j^b , центр которого находится в точке $X_{j_1}^b$ или точке $X_{j_2}^b$, соответствующей большему значению фитнес-функции, то есть полагаем $\varphi(X_j) = \varphi_j = \max(\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2})$.

Аналогичным образом разрешаем ситуацию, когда при формировании участков a_k^p имеет место неравенство

$$\|X_{k_1}^p - X_{k_2}^p\|_E \leq \varepsilon_p, \quad k_1, k_2 \in [1:|A^p|], \quad k_1 \neq k_2,$$

где $\varepsilon_p > 0$ – свободный параметр.

Наконец, возможна ситуация, когда малым оказывается евклидово расстояние между некоторыми точками X_j^b, X_k^p . В этом случае также могут быть использованы различные варианты действий, например, точка X_k^p может быть просто исключена из рассмотрения.

Во введенных обозначениях схема *B*-алгоритма имеет следующий вид.

1) Генерируем случайные точки $X_i, i \in [1:|S^o|]$, равномерно распределенные во множестве Π , и отправляем в эти точки $|S^o|$ пчел-разведчиков s_i^o . Вычисляем в точках X_i значения фитнес-функции $\varphi(X_i) = \varphi_i^o$, сортируем величины φ_i^o по убыванию и представляем в виде линейного списка.

2) Точки X_j , соответствующие первым $|A^b|$ элементам списка, объявляем центрами X_j^b элитных участков $a_j^b, j \in [1:|A^b|]$. Аналогично точки $X_k, k \in [1:|A^p|]$, соответствующие последующим $|A^p|$ элементам списка, объявляем центрами перспективных участков a_k^p .

3) В каждый из a_j^b элитных и a_k^p перспективных участков посылаем соответственно по n_b и n_p пчел-фуражиров $s_i^w \in S^w$, так что

$$n_b |A^b| + n_p |A^p| = |S^w|.$$

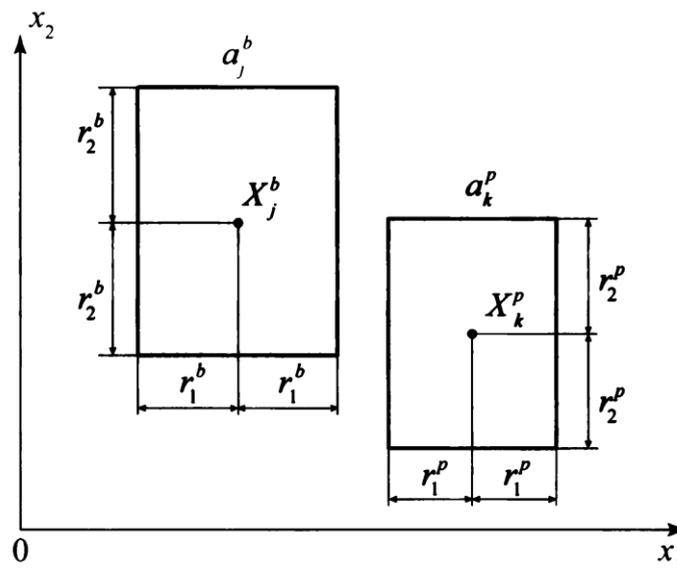


Рис. 3.31. К определению элитных и перспективных участков: $|X| = 2$

Координаты точек, в которые посылаются эти пчелы, полагаем случайными величинами, равномерно распределенными в соответствующих гиперпараллелепипедах a_j^b, a_k^p . Во всех точках, в которые посланы пчелы, вычисляем значения фитнес-функции.

4) Проверяем выполнение условия окончания итераций. Если это условие выполнено, то в качестве решения задачи принимаем точку, соответствующую максимальному достигнутому значению фитнес-функции, и завершаем вычисления. В противном случае, приспособленности всех точек, найденных пчелами-разведчиками и пчелами-фуражирами, сортируем по убыванию и представляем в виде линейного списка. Переходим к шагу 2.

По общему правилу, в качестве условия окончания итераций может быть использовано, например, достижение заданного числа итераций \hat{t} или стагнация вычислительного процесса в течение δ_i итераций.

Кроме общих для популяционных алгоритмов, свободными являются следующие основные параметры алгоритма:

$|S^o|$ – число пчел-разведчиков;

$|A^b|$ – число элитных участков;

$|A^p|$ – число перспективных участков;

n_b – число пчел, отправляемых на элитные участки;

n_p – число пчел, отправляемых на перспективные участки;

$r_i^b, r_i^p, i \in [1:|X|]$ – радиусы участков.

Увеличение всех указанных величин диверсифицирует поиск, но замедляется сходимость алгоритма.

В качестве варианта, в рассмотренной схеме B -алгоритма на участки локального поиска a_j^b, a_k^p можно посылать не фиксированные числа пчел, а их числа, пропорциональные значениям фитнес-функции в центрах этих подобластей X_j^b, X_k^p :

Еще один вариант B -алгоритма представляет *улучшенный пчелиный алгоритм (Improved Bee algorithm, IB algorithm)*. Основное отличие данного алгоритма от B -алгоритма заключается в том, что здесь на каждой итерации текущие радиусы участков r_i^b, r_i^p уменьшают по правилу

$$r_i^b = \rho r_i^b, r_i^p = \rho r_i^p, l \in [1:|X|],$$

где $\rho \in (0; 1]$ – свободный адаптивный *параметр редукции*. Величина параметра ρ увеличивается (поиск диверсифицируется), если на данной итерации улучшить решение не удалось, и уменьшается в противном случае.

Рассмотренная схема B -алгоритма учитывает то обстоятельство, что решается задача условной оптимизации только при размещении пчел-разведчиков. Если эти пчелы оказываются вблизи границы множества Π , то некоторые фрагменты соответствующих элитных либо перспективных участков могут выходить за его границы. Можно предложить несколько вариантов решения данной проблемы, из которых чаще всего используют два следующих: применение в качестве фитнес-функции аддитивной свертки целевой функции и функции штрафа; использование «невидимых стен», когда участки могут беспрепят-

ственно выходить за границы области P , но значения фитнес-функции пчел, находящихся вне этой области, игнорируются.

В терминах генетического алгоритма можно сказать, что, как и алгоритм муравьиной колонии, B -алгоритм и его модификации используют вещественное кодирование «бессмертных» особей. Механизм изменения координат пчел в процессе итераций можно интерпретировать как своеобразную мутацию их координат.

Пример 3.5. Рассмотрим задачу минимизации B -алгоритмом двумерных функций Розенброка, Химмельблау и Растригина (Приложение Б) в следующих параллелепипедах допустимых значений P соответственно:

$$\begin{aligned} P &= \{X | x_1, x_2 \in [-5, 0; 5, 0]\}, \\ P &= \{X | x_1, x_2 \in [-10, 0; 10, 0]\}, \\ P &= \{X | x_1, x_2 \in [-2, 0; 2, 0]\}. \end{aligned}$$

Полагаем, что соответствующие фитнес-функции обратны указанным функциям.

Если не оговорено противное, имеем в виду следующие значения свободных параметров алгоритма: число агентов-разведчиков $|S^o| = 16$; радиусы элитных и перспективных участков постоянны и равны $r_i^b = r_i^p = r = 0,2$; $i \in [1:|X|]$; число элитных участков $|A^b| = 2$; число перспективных участков $|A^p| = 3$; число агентов, отправляемых на каждый элитный участок, $n_b = 7$; число агентов, отправляемых на каждый перспективный участок, $n_p = 4$; максимальное число итераций $\hat{t} = 500$; условие останова – стагнация вычислительного процесса в течение $\delta_t = 20$ итераций. Таким образом, общее число рабочих пчел равно

$$|S^w| = n_b |A^b| + n_p |A^p| = 7 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 26.$$

Величины, характеризующие эффективность B -алгоритма, как и всякого стохастического алгоритма поисковой оптимизации, являются случайными. Поэтому используем мультистарт с числом стартовых точек $\hat{n} = 30$. Эффективность алгоритма оцениваем следующими величинами: среднее по числу стартов число итераций \bar{t}_{end} ; аналогичная средняя абсолютная погрешность решения $\bar{\epsilon}$; оценка вероятности локализации глобального максимума фитнес-функции $\bar{\xi}$.

Рассмотрим зависимость указанных критериев эффективности алгоритма от значений следующих свободных параметров: число пчел-разведчиков $|S^o|$ – рис. 3.32; радиусы элитных и перспективных участков r – рис. 3.33; величина δ_t , определяющая начало стагнации вычислительного процесса, – рис. 3.34.

Из рис. 3.32 становится ясно, что с увеличением числа пчел-разведчиков $|S^o|$ для одноэкстремальной функции Розенброка имеет место уменьшение среднего числа итераций \bar{t}_{end} , а для многоэкстремальных функций Химмельблау и Растригина – практическое его постоянство. Показательным является быстрое (на один-два порядка) уменьшение средней погрешности решения $\bar{\epsilon}$ для всех рассматриваемых функций с ростом величины $|S^o|$. Начиная с числа пчел-разведчиков, равного $|S^o| \approx 20$, наблюдается стабилизация величин \bar{t}_{end} , $\bar{\epsilon}$.

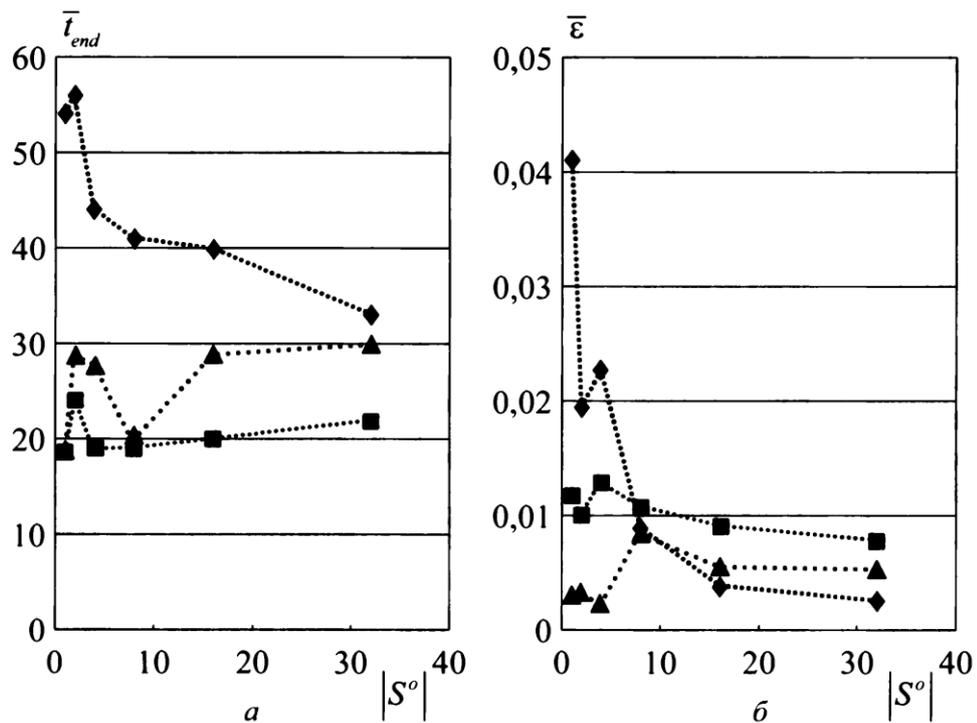


Рис. 3.32. Число итераций \bar{t}_{end} (а) и погрешность решения $\bar{\epsilon}$ (б) в функции числа пчел-разведчиков $|S^o|$: \blacklozenge – функция Розенброка; \blacktriangle – функция Химмельблау; \blacksquare – функция Растригина

Данные, приведенные на рис. 3.33 позволяют сделать следующие выводы. Для всех рассматриваемых целевых функций с ростом радиусов элитных и перспективных участков r число итераций \bar{t}_{end} уменьшается, а погрешность решения $\bar{\epsilon}$ возрастает.

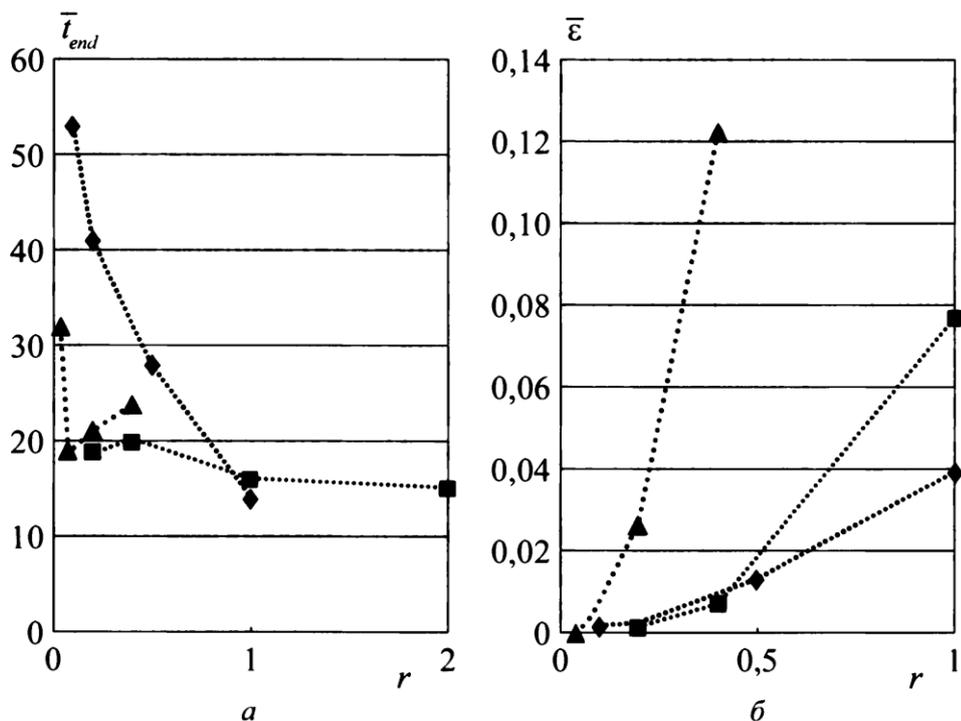


Рис. 3.33. Число итераций \bar{t}_{end} (а) и погрешность решения $\bar{\epsilon}$ (б) в функции радиусов элитных и перспективных участков r : \blacklozenge – функция Розенброка; \blacktriangle – функция Химмельблау; \blacksquare – функция Растригина

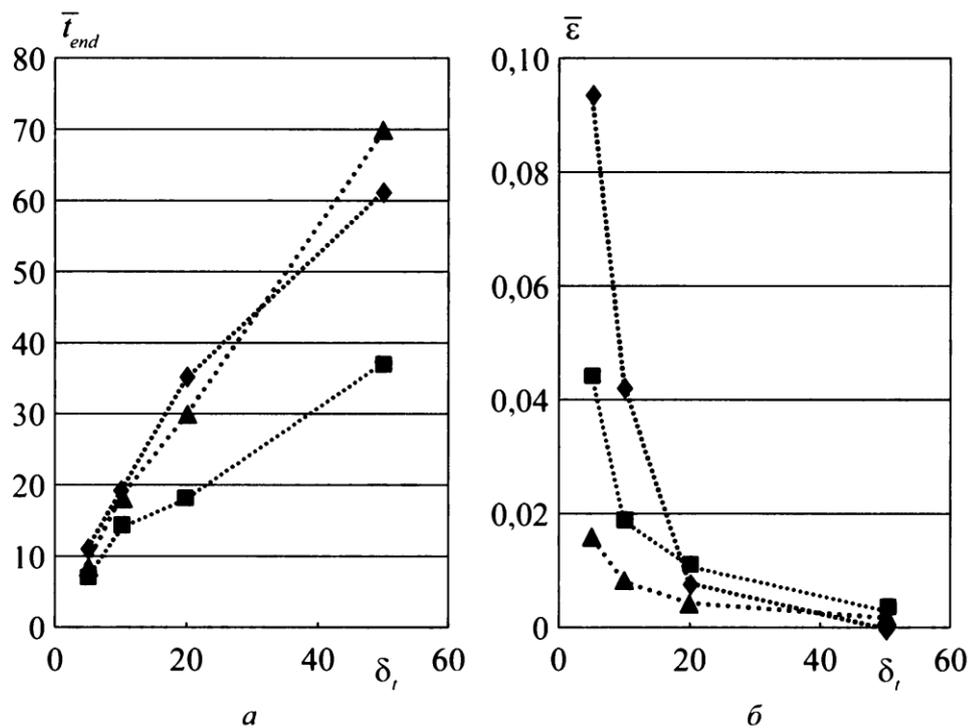


Рис. 3.34. Число итераций \bar{t}_{end} (а) и погрешность решения $\bar{\epsilon}$ (б) в функции величины δ_i : ◆ – функция Розенброка; ▲ – функция Химмельблау; ■ – функция Растригина

Скорость этих изменений пропорциональна сложности топологии целевой функции. Эффект обусловлен диверсификацией поиска с ростом величины k :

Из данных, представленных на рис. 3.34, следует, что с ростом величины δ_i число итераций \bar{t}_{end} возрастает для всех трех функций с примерно одинаковой скоростью. В то же время погрешности $\bar{\epsilon}$ быстро убывают и при $\delta_i \approx 40$ становятся практически неразличимыми.

Рассмотренный пример показывает также, что B -алгоритм обеспечивает оценку вероятности локализации глобального минимума функций Розенброка и Химмельблау, равную $\tilde{\xi} = 1,0$. Для функции Растригина, которая является многоэкстремальной и имеет сложную топологию, та же оценка зависит от значений свободных параметров алгоритма и изменяется от 0,20 до 0,97●

Тестовые функции для одноцелевой задачи глобальной оптимизации

В представленной ниже табл. Б.1 запись вида $[\alpha; \beta]^{|X|}$ означает гиперкуб допустимых значений вектора варьируемых параметров

$$P = (X \mid \alpha \leq x_i \leq \beta, i \in [1:|X|]);$$

x_i^0, f^0 – свободные параметры; $z_i = x_i - x_i^0; i \in [1:|X|]$.

Таблица Б.1

Тестовые функции для одноцелевой задачи
глобальной оптимизации

Область поиска	Функция
$[-\alpha; \alpha]^2$ $\alpha = 6$	<p>Функция Химмельблау (<i>Himmelblau</i>)</p> $f(X) = (x_1^2 + x_2 - 11)^2 + (x_1 + x_2^2 - 7)^2 \rightarrow \min$ $X^* = \{(3; 2), (-2,805118; 3,131312), (3,584428; -1,848126), (-3,779310; -3,283186)\}$ $f^* = 0$
$[-\alpha; \alpha]^{ X }$ $\alpha = 5$	<p>Функция Растригина (<i>Rastrigin</i>) – рис. Б.1</p> $f(X) = \sum_{i=1}^{ X } (z_i^2 - 10 \cos(2\pi z_i) + 10) + f^0 \rightarrow \min$ $X^* = (x_1^0; \dots; x_{ X }^0)$ $f^* = f^0 = -330$
$[-\alpha; \alpha]^{ X }$ $\alpha = 100$	<p>Функция Розенброка (<i>Rozenbrock</i>)</p> $f(X) = \sum_{i=1}^{ X -1} (100(z_i^2 - z_{i+1})^2 + (z_i - 1)^2) + f^0 \rightarrow \min$ $X^* = (x_1^0; \dots; x_{ X }^0)$ $f^* = f^0 = 390$